2025年第55回 天文・天体物理若手夏の学校

素粒子・重力・宇宙論 分科会　集録集

■ index

SK-01	大日　蒼	インフレーション期の格子シミュレーション
SK-02	川中　竣介	DESI 観測データによる α アトラクターモデルの制約
SK-03	松谷　瑞己	原始ブラックホール形成過程における非球対称性の影響
SK-04	服部　友希	確率論的ウルトラスローロールインフレーションでの曲率揺らぎの非ガウス的尾部: 原始ブラックホールとの関わり
SK-05	牧野　泰紀	素粒子標準模型を考慮した原始重力波スペクトルの理論的解析
SK-06	平山　彩美里	Dark Age の 21cm 線バイスペクトルを用いた原始非ガウス性の制限
SK-07	近藤　駿	中性水素 21cm 線を用いた標準宇宙論の検証
SK-08	佐久間　竜雅	小スケール構造に基づく原始揺らぎパワースペクトルの制限とその理論的背景
SK-09	小川　翔大	DESI による高光度赤外線銀河とクエーサーの観測に基づく原始非ガウス性の制限
SK-10	新田　悠翔	宇宙論パラメータの推定を目的としたパワースペクトル解析による統計モデルの開発
SK-11	斎藤　光	CMB lensing を用いたニュートリノ質量の制限
SK-12	松本　佳祐	実サンプルとモンテカルロシミュレーションを用いた前景銀河による Ia 型超新星赤化検出の試み
SK-13	大黒　詩織	21cm 線観測における電離層による位置変化の解析と観測への影響評価
SK-14	姫野　諒汰	機械学習を用いた再結合時の物質密度場の復元
SK-15	田中　芙由子	すばる HSC データを用いた弱重力レンズ効果による近傍銀河団の質量推定
SK-16	川村　翔吾	泡宇宙の衝突における Cosmic wakes によるマルチバース観測
SK-17	北川　陽斗	超新星ニュートリノによるマヨロンへの制限
SK-18	小林　信房	Domain-wall Quintessence
SK-19	塩松　祐華	不安定ダイナミクスで探る量子重力とエンタングルメント
SK-20	影山　郁洋	中性子星からクォーク星への衝撃波を通した相転移
SK-21	中條　初萌	高解像度の宇宙論的シミュレーションデータを用いた地球近傍における暗黒物質密度と速度分布の評価
SK-22	小林　健斗	アクシオンダークマター中のアクシオン・フォトン変換
SK-23	前岡　凜	アストロメトリによる超軽量ダークマター検出の可能性について
SK-24	中本　那央	重力波を用いたブラックホール周囲のダークマター検出
SK-25	松田　紗季	Dark photon による CMB の V モード偏光生成
SK-26	久松　姫南乃	超大質量ブラックホール連星による背景重力波の統計量
SK-27	西木　友哉	一次相転移からの重力波
SK-28	Wimmer Leonardo	Bayesian Search for Gravitational Wave Memory in Binary Black Hole Mergers
SK-29	松原　大空	電磁波と重力波における放射特性の比較解析
SK-30	菅原　玲央	パルサータイミングアレイを用いた連星ブラックホールの背景重力波研究の展望
SK-31	槇木　直人	時間変動するダークエネルギーの理論モデルについて
SK-32	山村　勇斗	コンパクト天体への重力崩壊による粒子生成
SK-33	石川　陽	IDECAMB による相互作用するダークエネルギーモデルの統一的解析
SK-34	佐藤　晴	静的球対称時空における二つのレンズ方程式間の対応 Correspondence between two gravitational lens equations in a static and spherically symmetric space-time

SK-35	細川　睦	Kerr 時空における光子の球面軌道
SP-02	西原　翼	重力レンズ効果の再現
SP-03	辻　天太	Could Gravitational Waves Unlock the Inflaton Sector?
SP-04	久賀　紳ノ介	3 次元重力崩壊型超新星モデルに基づく重力波解析
SP-05	鈴木　幹基	正規直交化した準固有振動モードを用いたブラックホールリングダウン重力波データ解析に対する準解析的なアプローチ
SP-06	千葉　航	ランダム磁場中を伝搬する重力波-電磁波系の解析について
SP-07	中西　稜	N 体シミュレーションにおける重力ポテンシャルに基づいたサブハロー同定手法の検討
SP-08	山中　大和	Possible consistent model of parity violations in the symmetric teleparallel gravity
SP-09	西村　俊太	U(1) ゲージ不変スカラー・ベクトル・テンソル理論における帯電・帯磁したブラックホール解の安定性解析
SP-10	山本　忠彦	Quasinormal Mode 観測による電荷 BH と磁荷 BH の識別は可能か?
SP-11	北川　真生	U(1) ゲージ不変 scalar-vector-tensor 理論における BH 解
SP-12	今井　健人	確率背景重力波 (SGWB) を含めた spectal siren 法による宇宙論パラメータ推定
SP-14	名倉　幸祐	DESI DR2 を用いたバリオン音響振動の観測に基づく宇宙論の制限
SP-15	池田　大樹	Axion-photon conversion in quantum field theory
SP-16	小谷　竜也	クェーサー吸収線を使用した z=0.89 における宇宙マイクロ波背景放射温度の計測
SP-18	長倉　大知	MWA 観測を用いた月反射 RFI の解析と 21cm 線観測への影響
SP-19	高木　大知	ブラックホールへの非赤道面プラズマ流と衝撃波形成
SP-22	中馬　史博	連星ブラックホールの角度分布を用いた宇宙論
SP-23	宮園　隼人	高密度核物理の解明にむけた重力波による連星中性子星パラメータ推定の精度向上
SP-24	He　Yingqiu	Cosmic Topology: Is the Universe Finite?
SP-25	林　知哉	Superspinar の境界条件問題
SP-26	冨谷　卓矢	スーパーカミオカンデにおける機械学習を用いた $p \to \bar{\nu}K^+$ 陽子崩壊事象の探索
SP-27	井上　拓人	長さの最小値を持つ (2+1) 次元レギュラーブラックホール時空と測地線の構造
SP-28	真崎　琉維	Schwarzschild 時空における測地線方程式の可積分性を保持した差分化
SP-29	井関　日奈子	強重力場下における量子波動関数の振る舞い
SP-30	竹内　智貴	アクシオン場を伝播する光の軌道方程式
SP-31	手良脇　大誠	観測領域形状の影響を受けない銀河・銀河レンズの統計量推定と銀河-物質相関の測定法
SP-32	波多野　広修	宇宙初期において空間非可換性が時空とインフラトンに及ぼす影響
SP-33	水野　湧真	ワームホールを運動する粒子と時間的閉曲線の実現可能性
SP-34	阿部　瑞樹	宇宙論における対称テンソル場
SP-35	大富　有歩子	重力波観測によるハッブル・ルメートル定数の測定誤差推定
SP-36	上永　裕大	非摂動的な手法を用いたエンタングルメント・ハーベスティングの解析
SP-37	田中　真	bootstrap と positivity bound
SP-38	田中　孝輔	宇宙ひもによる Kerr ブラックホールからのエネルギー取り出し
SP-39	福澄　諒太郎	オプトメカ系を用いた重力量子もつれの生成の検証
SP-40	阿部　麟太郎	シュワルツシルト時空における光線追跡と降着構造の観測的像の解析

——index へ戻る

SK-01

インフレーション期の格子シミュレーション

立教大学
大日　蒼

2025 年度 第 55 回 天文・天体物理若手夏の学校

インフレーション期の格子シミュレーション

大日 蒼 (立教大学大学院理学研究科)

Abstract

格子シミュレーションは非線形効果や摂動論の破綻を扱うために強力なツールで、CosmoLattice や LatticeEasy など、様々なソフトウェアが存在している。論文 [1] で紹介されている InflationEasy というソフトウェアは、インフレーション初期に着目し制作されており、初期条件や離散化効果に配慮し、非ガウス性や大振幅揺らぎも非摂動的に解析できるという特徴がある。本発表では、インフレーション中のスカラー場揺らぎとそのシミュレーションについて理解するため、InflationEasy を用いて論文 [2] で述べられている単純なモデルの結果の一部を再現し、レビューする。

1 Introduction

インフレーションは、初期宇宙における急激な膨張を説明する理論として確立されており、現在の宇宙に見られる大規模構造や宇宙背景放射の起源を理解する上で重要な役割を果たしている。特に、インフレーション中に発生するスカラー場の量子揺らぎは、後に密度ゆらぎとして成長し、銀河や銀河団の形成につながることが理論的に示されている。このスカラー場ゆらぎには非ガウス性やパワースペクトルの構造に観測的制限があり、それらに合致するようなインフレーションモデルが提案されている。しかし、それらの中には解析的にスカラー場ゆらぎを計算することが難しいモデルもあるため、格子シミュレーションを用いて線形摂動論の枠組みを超えてモデルを検証することが重要となる。

2 背景の発展

平坦な FLRW 時空上でのインフラトン場の作用は以下の通りである。

$$S = \int dt\, d^3x\, a^3(t) \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2a^2(t)}(\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right] \tag{1}$$

ここで、インフラトン場の空間的に一様で時間に依存しない背景成分と、空間にも依存する摂動成分を考える。
$(\phi(\vec{x},t) = \bar{\phi}(t) + \varphi(\vec{x},t))$
すると次のようにかける。

$$S = \int dt\, d^3x\, a^3(t) \left[\frac{1}{2}\dot{\bar{\phi}}^2 - V(\bar{\phi}) \right] \tag{2}$$

この作用を ϕ について変分を取ることで、以下の Klein-Gordon 方程式を導ける。

$$\ddot{\bar{\phi}} + 3H\dot{\bar{\phi}} = -\frac{dV(\bar{\phi})}{d\bar{\phi}} \tag{3}$$

この式はインフラトン場の発展を決める式の一つである。次に、Einstein 方程式

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{4}$$

の、G_{00} 成分から、Friedmann 方程式

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \tag{5}$$

が導かれる。式 (2) と密度がインフラトン場の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和からなることを考えることで、以下のように書き換えられる。

$$H^2 = \frac{1}{3M_{\rm PI}^2} \left(\frac{1}{2}\dot{\bar{\phi}}^2 + V(\bar{\phi}) \right) \tag{6}$$

ここで、プランク質量 $M_{Pl} = 1/\sqrt{8\pi G}$ を用いた。インフラトン場の時間発展は上の式 (3) と (6) で決定できる
次に、

3　量子ゆらぎの記述

量子ゆらぎ $\varphi(\vec{x},t)$ をフーリエ展開すると次のようにかける。

$$\varphi(\vec{x},\tau)=\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}}\left[a_{\vec{k}}\varphi(\vec{k},\tau)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}+a^{\dagger}_{\vec{k}}\varphi^{*}(\vec{k},\tau)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right] \tag{7}$$

これを用いて、式 (1) を摂動の 2 次で変分をとると、以下の Mukhanov-Sasaki 方程式を導ける。

$$\partial_\tau^2 v+\left(k^2+m_{\rm eff}^2(\tau)\right)v=0 \tag{8}$$

ただし、$v(\vec{k},\tau)=a\varphi(\vec{k},\tau)$、$k=|\vec{k}|$ である。この式の形状から、Mukhanov-Sasaki 方程式は以下の式 (9) のように時間依存する質量項 $m_{\rm eff}(\tau)$ を持つ調和振動子とみなすことができる。

$$m_{\rm eff}^2(\tau)=-\frac{H}{\dot{\bar{\phi}}}\partial_\tau^2\left(\frac{\dot{\bar{\phi}}}{H}\right) \tag{9}$$

ここで、ϕ の時間依存性が複雑になるために、インフレーション中のスカラー場ゆらぎを取り扱うには格子シミュレーションが必要となる。

4　用いたパラメータ

本発表で再現することを目指した論文 [2] のインフレーションモデルは、以下のようなポテンシャルを持つモデルである。

$$V(\phi)=\frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{10}$$

ここで、インフラトン場の質量は $M_{Pl}=1$ として $m=0.51\cdot10^{-6}$ とする。この値は COBE 観測による曲率ゆらぎのパワースペクトル $\mathcal{P}_\zeta\simeq25\cdot10^{-10}$ と大まかに合致するように設定されている。[2]
また、初期条件は $\bar{\phi}_{in}=14.5$、$\dot{\bar{\phi}}_{in}=-0.8152\cdot m$ である。この値からは、あと $N_e\simeq53$ e-folds ほどインフレーションが続く。論文 [2] および本発表で行なったシミュレーションでは、$a=10^3$、すなわち $N\simeq6.9$ e-folds まで計算した。

5　Results

以下が本発表で行なったシミュレーションの結果である。

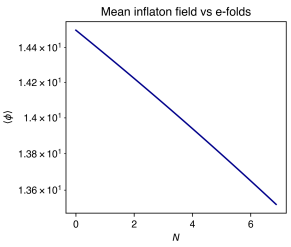


図 1: $\bar{\phi}$ の変化

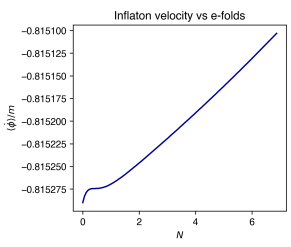


図 2: $\dot{\bar{\phi}}$ の変化

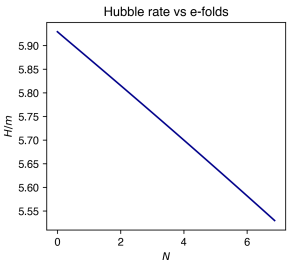


図 3: ハッブルパラメータ H/m の変化

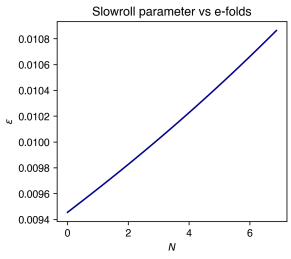


図 4: スローロールパラメータ ϵ の変化

次に、論文 [2] での結果が次の通りである。

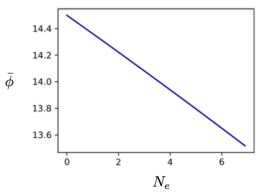


図 5: $\bar{\phi}$ の変化

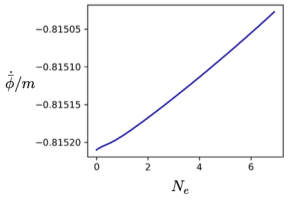


図 6: $\dot{\bar{\phi}}$ の変化

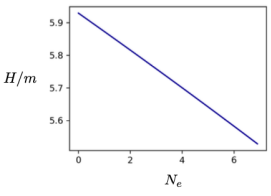


図 7: ハッブルパラメータ H/m の変化

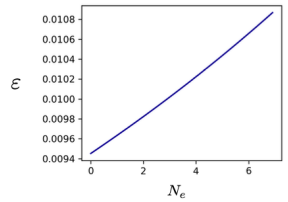


図 8: スローロールパラメータ ϵ の変化

以上から、背景場に関する格子シミュレーションは概ね再現できたと言える。しかし、$\dot{\bar{\phi}}$ に関しては初期値周辺に突起があり、論文 [2] とわずかに異なる

結果となった。また、パワースペクトルに関しては次のようになった。

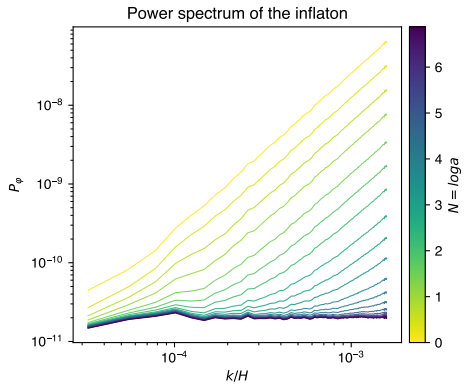


図 9: 今回のシミュレーションでのパワースペクトルの変化

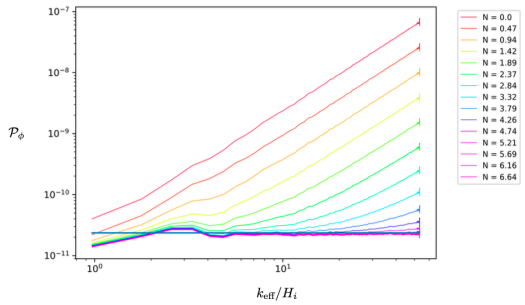


図 10: 論文 [2] でのパワースペクトルの変化

パワースペクトルに関しても、ほぼ同様の結果を出力することができた。

6 Conclusion

全体を通して、論文 [2] の結果は LatticeEasy を用いることによって概ね再現できることがわかった。ただし、$\dot{\phi}$ の初期値周辺に存在する突起に関しては数値シミュレーションの手法に差異がある可能性があるため、内部プログラムについてさらによく理解する必要がある。
格子シミュレーションの実行時間は格子数 $N^3 = 128^3$ で 13 分 50 秒であり、より格子数を増やしたり、複雑なポテンシャルを用いたりすることを考えた場合、計算リソースを増やす・長時間実行するための環境を整えるなどをする必要があることがうかがえる。

今後は、今回のように解析的にある程度計算可能なポテンシャルを持たず、格子シミュレーションの強みが生かされるようなより複雑なポテンシャルを持つインフレーションモデルについて扱い、未だスカラー場ゆらぎについて未検証であるモデルについてもシミュレーションを行えるようにスカラー場ゆらぎの理論的側面および格子シミュレーションの手法についての理解を深める方針である。

7 参考文献

[1]Angelo Caravano, 2025, arXiv:2506.11797
[2]Angelo Caravano & Eiichiro Komatsu & Kaloian D.Lozanov & Jochen Weller, 2021, arXiv:2102.06378v3

——index へ戻る

SK-02

DESI 観測データによる α アトラクターモデルの制約

京都大学
川中　竣介

DESI 観測データによる α アトラクターモデルの制約

川中 竣介 (京都大学 基礎物理学研究所)

Abstract

本発表では、G. Alestas et al. (2025) のレビューをし、DESI（Dark Energy Spectroscopic Instrument）のデータを用いた、α アトラクターモデルに対する制約について発表する。α アトラクターモデルは、α というパラメータで記述されるスカラー場理論であり、インフレーションとその後の宇宙膨張を同時に記述できるという特徴を持つ。このモデルは、ダイナミクスを持つダークエネルギーのモデルである w_0w_aCDM モデルの EoS パラメーター w_0、w_a を α で記述可能である。これに対して、ここでは DESI のバリオン音響振動（BAO）データ（A. G. Adame et al. (2025)）を利用し、その他の宇宙論的観測とも組み合わせ、修正された Boltzmann code を用いて α 等の宇宙論パラメタを求めた。その結果、観測データに整合的な α の値が制限され（$\alpha = 1.89^{+0.40}_{-0.35}$）、ΛCDM モデルに対して w_0w_aCDM モデルの優位性が確認された。さらに、初期重力波との関連についても調べ、将来的な重力波観測により、さらなる制限をかけることが期待されることを確認した。

1 Introduction

宇宙の加速膨張を説明する**ダークエネルギー（DE）**のモデルとして、Einstein 方程式の宇宙項 Λ に起因する **ΛCDM** モデルがこれまでは精度のよいものとして知られていた。しかし、高精度においてはそこからのずれが見られ始め、ダイナミクスを持つダークエネルギー等のモデルが検証され始めている。最新の観測の 1 つである **DESI(Dark Energy Spectroscopic Instrument)** によれば、$\boldsymbol{w_0w_a}$**CDM モデル**の状態方程式（EoS）パラメーターが ΛCDM モデルからずれていることが示唆されている。これを説明するモデルとして、ここでは $\boldsymbol{\alpha}$ **アトラクター**を用いる。このモデルが観測と整合的であるか、そしてその時の α アトラクターのパラメーター α がどのように制限されるかを本発表では考察する。また、初期重力波背景放射の観測によるパラメーターの制限についても考察する。

2 DESI と α アトラクター

2.1 w_0w_aCDM モデルと DESI 観測

w_0w_aCDM モデルとは、DE の状態方程式（EoS）パラメーター（$\rho = wp$ における w）が、

$$w(a) = w_0 + (1 - a)w_a \tag{1}$$

のようにスケール因子 a に依存するものである。このモデルは、**DESI(Dark Energy Spectroscopic Instrument)** により探索が進められているものである。ここで、DESI は、**バリオン音響振動（BAO）**という再結合前のバリオンと光子の流体の音波を観測し、ダークエネルギーのダイナミクスを探索している。現在の結果として、図 1 が得られているが、そこでは ΛCDM からのずれが示唆されている。

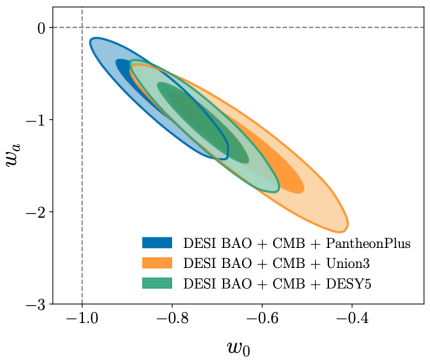


図 1: DESI による EoS パラメーターの制限（$w_0 = -1$, $w_a = 0$ で ΛCDM モデル）（A. G. Adame et al. (2025)）

2.2 α アトラクター

2.1 節で説明したダイナミクスを持つ DE を説明するものとして、以下の式で表現される α アトラクターを導入する。

$$S = \int dx^4\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}M_{\rm Pl}^2 R - \frac{1}{2}\frac{(\partial\phi)^2}{\left(1-\frac{\phi^2}{6\alpha}\right)^2} - V(\phi) + \mathcal{L}_m\right] \tag{2}$$

$$V(\phi) = M^2 e^{\gamma\left(\frac{\phi}{\sqrt{6\alpha}}-1\right)} \tag{3}$$

このスカラー場は、インフレーションを説明する**インフラトン**としてだけではなく、スカラー場の時間発展で DE のダイナミクスを記述する**クインテッセンス**としても有用である。実際、摂動論により各種宇宙論パラメーターを記述できるだけでなく、今回の w_0w_aCDM モデルにおいては、以下のように α を通じて EoS パラメーターを記述することが可能である。

$$w_0 = -1 + \frac{1}{9\alpha} \tag{4}$$

$$w_a \approx -\frac{1}{18\alpha} \tag{5}$$

ここで、スカラー場やスケール因子が従う運動方程式は、

$$H^2\left(3 - \frac{1}{2}\frac{d\varphi}{dN}\right)M_{Pl}^2 = V(\varphi) + \rho_m + \rho_r \tag{6}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dN^2} + \left(3 + \frac{1}{H}\frac{dH}{dN}\right)\frac{d\varphi}{dN} + H^{-2}\frac{dV(\varphi)}{d\varphi} = 0 \tag{7}$$

と求まる。ここで、$H = \frac{1}{a}\frac{da}{dt}$ である。本研究では、これを近似なしで扱った。

3 解析

3.1 解析方法

今回用いるデータは、Full Planck 2018 data と Pantheon+ Type Ia Spernovae data に加え、DESI DR1 BAO measurements である。これらと、運動方程式 (6)、(7) を用いて、Boltzmann code "CLASS" を修正し、MCMC(Markov chain Monte Carlo) analysis の手法を使用して解析を行なった。ここで、この手法で計算される宇宙論パラメーターは、$\{\Omega_m, \omega_b, H_0, \alpha, \mathcal{A}_s, n_s\}$ である。この計算を α アトラクターだけではなく、比較のために ΛCDM モデルについても同様に行なった。

3.2 解析結果と考察

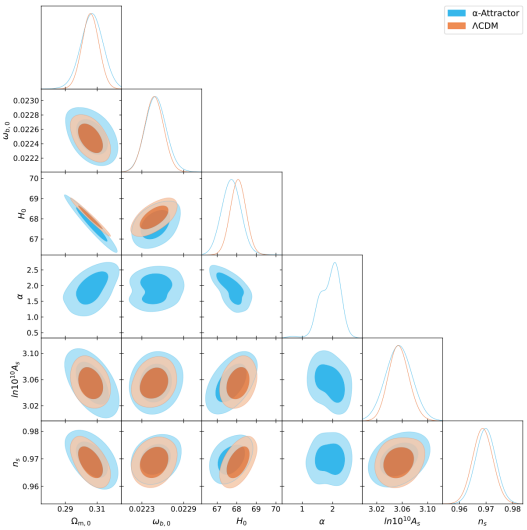


図 2: The 68.3%–95.5% confidence contours(G. Alestas et al. (2025))

表 1: Constraints at 68.3% confidence limits(G. Alestas et al. (2025))

Parameters	ΛCDM	α-attractor
Ω_m	$0.309^{+0.003}_{-0.008}$	$0.305^{+0.008}_{-0.004}$
ω_b	$0.0224^{+0.0002}_{-0.0001}$	0.0225 ± 0.0001
H_0	$67.9^{+0.6}_{-0.2}$	$67.9^{+0.4}_{-0.7}$
α	N/A	$1.89^{+0.40}_{-0.35}$
$\ln 10^{10} A_s$	$3.053^{+0.016}_{-0.017}$	$3.057^{+0.014}_{-0.019}$
n_s	$0.968^{+0.005}_{-0.003}$	$0.971^{+0.003}_{-0.004}$

計算結果を図 2 や表 1 に示す。これにより、α アトラクターによる宇宙膨張の記述が観測に整合的であることが確認され、このモデルを記述するパラメーター α が $\alpha = 1.89^{+0.40}_{-0.35}$ と制限されるということがわかった。

表 2: ベイズ推定の結果（G. Alestas et al. (2025)）

Models	$\ln B$
ΛCDM	-
α-attractor	6.36

さらに、この結果に対してベイズ推定の手法を用いた結果を図 2 に示す。ここで、B はベイズ因子で

あり、ΛCDM モデルに対しての α アトラクターによる記述の優位性を表す。つまりここからは、α アトラクターによる w_0w_aCDM モデルの記述に優位性があることが理解される。

4 将来的な初期重力波背景放射観測による展望

将来的な重力波観測により、ここで得たパラメーターに更なる制限をかけられる可能性がある。ここではそのことについて議論をする。

まず、インフレーションの再加熱時代のエネルギースケールについて述べる。再加熱時、エネルギースケールは再加熱完了の必要量より大きく、インフレーションスケールよりは小さいので、$T_{\rm reh}/{\rm GeV} = [1.0\times 10^{-3}, 4.0\times 10^{15}]$ となる。しかし、α アトラクターを仮定した時、表 1 等から計算されるエネルギースケールは $T_{\rm reh}/{\rm GeV} = [3.5\times 10^{-13}, 1.7\times 10^{9}]$ である。よって、α アトラクターの場合、エネルギースケールは、$T_{\rm reh}/{\rm GeV} = [1.0\times 10^{-3}, 1.7\times 10^{9}]$ と、上限が狭まったものが得られる。

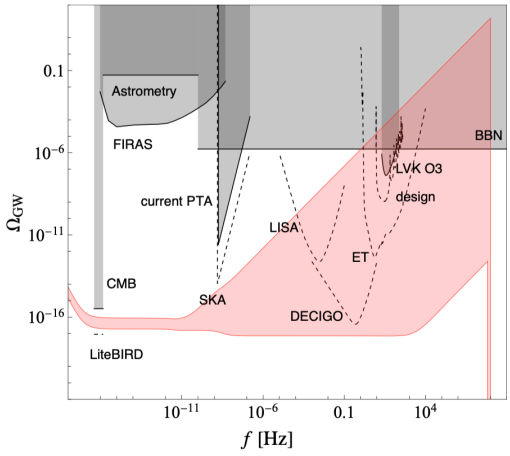


図 3: α アトラクターの場合の初期重力波背景放射（赤）と観測（現在：灰色、将来：破線部）(G. Alestas et al. (2025))

この場合、輸送関数の手法を用いて、取り得る初期重力波背景放射のパワースペクトルが計算される。これを図示すると図 3 のようになる。この図の赤色の部分を探索して、重力波が観測されなければ、パラメーターに更なる制限がかかる可能性がある。

例えば、図 3 の BBN、つまりビッグバン元素合成の部分に注目する。BBN の議論によると、$f > 2\times 10^{-11}$[Hz] の部分では、$\Omega_{\rm GW}h^2 < 1.3\times 10^{-6}$ となる。このように重力波パワースペクトルが制限されることにより、図 4 のような制限が得られる。この図によれば、宇宙論パラメーターは、中央の赤色とオレンジの重なった部分にあると期待される。

将来的には、LISA 等もこの重力波背景放射を探索可能であり、その結果次第で α アトラクターの記述可能性やパラメーターの制限を議論することが可能である。

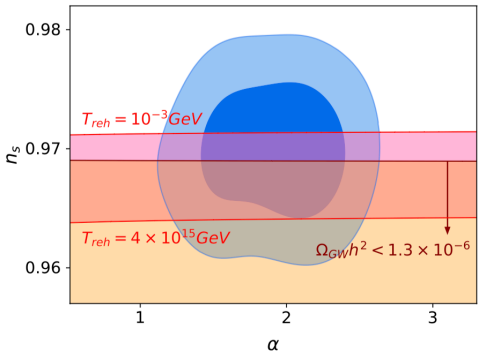


図 4: 図 3 の BBN による α-n_s への制限（赤：再加熱時のエネルギースケール、オレンジ：BBN による制限）(G. Alestas et al. (2025))

5 Conclusion

本研究では、DESI の観測データを合わせることで、α アトラクターで w_0w_a モデルを表現した時、それが観測に整合的であり、パラメーター α は $\alpha = 1.89^{+0.40}_{-0.35}$ と制限された。将来的にはこれに重力波観測の結果も合わせ、α アトラクターが現在の宇宙膨張を説明できるかや、その場合のパラメーターの取り得る値の制限についての議論が進むことが期待される。

Acknowledgement

本発表におきまして、京都大学理学研究科天体核研究室、及び京都大学基礎物理学研究所宇宙グループの先輩方から数多くのご助言をいただきまして、レビューに臨むことができました。この場を借りて厚くお礼申し上げます。

Reference

G. Alestas et al. 2025, Phys. Rev. D 111, 083506 (2025)

A. G. Adame et al. (DESI) 2025, JCAP 02, 013 (2025)

T. Zhumabek et al. 2023, JCAP 09, 013 (2023)

——index へ戻る

SK-03

原始ブラックホール形成過程における非球対称性の影響

名古屋大学
松谷　瑞己

原始ブラックホール形成過程における非球対称性の影響

松谷　瑞己 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

[1] は、3+1 次元の相対論的数値シミュレーションを実行して計算された、楕円率に依存する閾値に基づき、原始ブラックホール（PBH) の質量関数に対する非球刑効果の影響を調査する。曲率揺らぎは、単色パワースペクトルを持つガウス統計に従うと仮定し、ピーク理論を用いて最も確からしい楕円体構造を調べる。従来の研究から、非球形性はブラックホール形成を妨げうることが示唆されてきたが、この研究では、非球形効果は質量関数の分布に対してはあまり重要でないことが示された。

1 Introduction

初期宇宙の密度ゆらぎから生じる原始ブラックホール（PBH）は、ダークマター候補の一つとして注目されている。従来の PBH 生成理論では、球対称な密度ゆらぎを仮定することが多かったが、実際のゆらぎは非球対称であることが統計的に示唆されている。本発表では、[1] のレビューを行う。[1] は、3+1 分解次元の相対論的数値シミュレーションを実行して計算された、楕円率に依存する閾値に基づき、原始ブラックホール (PBH) の質量関数に対する非球形効果を調査し、非球形効果が原始ブラックホール形成に重要な影響を与えなかったことを示す。

2 Methods

ここでは、宇宙が線形の状態方程式 $P = w\rho$ を持つ完全流体で満たされていると仮定し、$w = 1/3$ と $w = 1/10$ の場合を考える。次に、波長 k_p でピークを持つ単色パワースペクトル $P_\zeta(k) = A_\zeta \delta(ln(k/k_p))$ によって特徴付けられる曲率揺らぎを考える。また、スーパーホライゾンスケールの条件を満たすために、$k_p/(aH_b) >> 1$ と初期条件を定める。[2] によれば、波長 k_p、ピークでの振幅 $\bar{\zeta}(r = 0) = \mu$、楕円率 e、そして扁長率 p によって特徴付けられる揺らぎの分布は、

$$\zeta(x, y, z; \mu) = \zeta_{sp}(r; \mu) + \frac{5\mu}{2k_p^3 r^3}(3k_p r cos(k_p r) + (r^3 k_p^3 - 3)sin(k_p r)) \times [\frac{3e}{r^2}(z^2 - y^2) + p(1 - 3(x/r)^2)]$$

で与えられる。
閾値については、球対称の場合は、定数 $\mu_{c,sp}$ と見出され、揺らぎの振幅 μ がその閾値を上回れば PBH は形成される。一方で、[3] より、非球対称の場合は振幅が振幅の閾値 $\mu_{c,sp}$ を上回ったとしても、楕円率 e が

$$e_c(\mu) = K_e(\frac{\mu}{\mu_{c,sp}} - 1)^{\gamma_e} \tag{1}$$

で与えられる閾値を超えてしまうと PBH は形成されないと分かっている。
ところで、この式より、振幅 μ の値が $\mu_{c,sp}$ に近い場合、PBH が形成されうる e のパラメータが極めて小さな領域に限定されることが示唆される。また、従来の研究から、PBH の質量関数は $M(\mu) \propto (\mu - \mu_{c,sp})^\gamma$ となることが分かっている。さらに、統計的に、完璧な球形の揺らぎは稀であり、これらの結果から、非球形効果によって小さな質量の PBH の生成が著しく阻害されるであろうという推論に至る。
そこで、振幅の閾値を楕円率 e の関数 $\mu_c(e)$ とすることで、新たに非球対称の場合の質量関数を、

$$M(\mu, e) = M_H(\mu)K(\mu - \mu_c(e))^\gamma \tag{2}$$

とする。

3 Results

先ほどの質量関数の式より、次のようなシミュレーション結果が得られた。

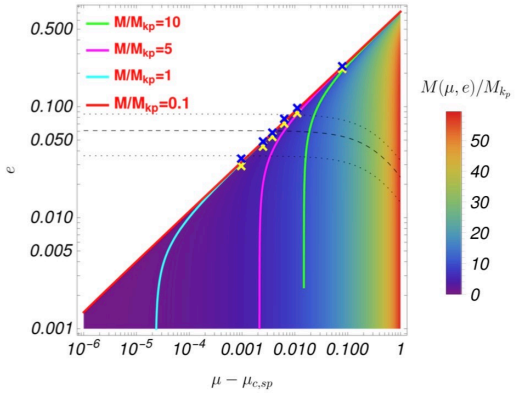


図 1: Escriva & Yoo(2024)Fig.1

これから、球対称性を失うことで、小さな PBH を形成するための新しい経路が生まれ、小さい質量の PBH の生成量はそこまで減少しないということが分かった。
また、PBH の質量関数を、質量範囲 $[M, M + dM]$ にある質量 M の PBH のエネルギー密度と、ダークマターの総エネルギー密度の比

$$f_{PBH}(M)dlnM = \frac{Mn_{PBH}(M)}{\rho_{DM}}dlnM \qquad (3)$$

として定義でき、これのシミュレーション結果は、次のようになる。この図の破線と実線を見比べること

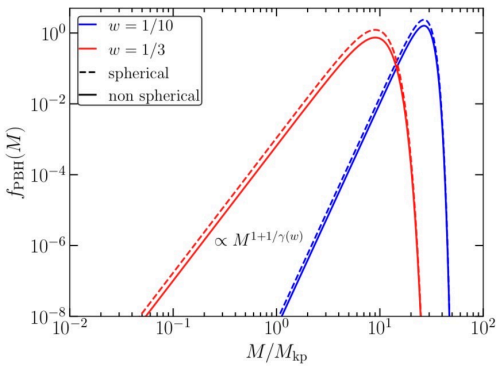


図 2: Escriva & Yoo(2024)Fig.3

で、非球形効果は大きくないと分かる。

以上より、従来の研究で適用されてきた、原始ブラックホールの球対称性の仮定は妥当なものであったと分かった。

4 Discussion

この研究では、単色パワースペクトルから導かれる特定の曲率分布を採用したため、将来的には様々な波長が混ざった幅の広いスペクトルを検証する必要がある。
また、揺らぎの統計的性質を、最も単純なガウス統計と仮定したため、非ガウス性も考慮する必要が出てくる可能性もある。

5 Conclusion

この研究は、3+1 次元の相対論的シミュレーション [3] の結果とピーク理論 [2] を用いて、単色パワースペクトルに焦点を当て、非球対称な楕円体構造が PBH の質量関数に与える影響を評価した。具体的には、楕円率に依存する質量スケーリングという仮定の下で非球形効果を組み込んだアプローチを用いて、$f_{PBH}(M)$ を得るためにピーク理論を適用した。
その結果として、$w = 1/3$ と $w = 1/10$ の両方の場合で、非球形効果が原始ブラックホール形成に大きな影響を与えなかったことが分かった。

Reference

Escriva & Yoo 2024, arXiv: 2410.03451v2

J.M.Bardeen et al.1986, The Statistics of Peaks of Gaussian Random Fields

Escriva & Yoo 2024, arXiv: 2410.03452v2

——index へ戻る

SK-04

確率論的ウルトラスローロールインフレーションでの曲率揺らぎの非ガウス的尾部:原始ブラックホールとの関わり

弘前大学
服部　友希

確率論的ウルトラスローロールインフレーションでの曲率揺らぎの非ガウス的尾部：原始ブラックホールとの関わり

服部 友希 (弘前大学大学院 理工学研究科)

Abstract

本講演では [1] のレビューを行う。近年、初期宇宙で形成されたとされる原始ブラックホール（Primordial Black Holes; PBH）がダークマター候補や重力波源として注目を集めている。PBH はインフレーション期に生成された初期揺らぎが再加熱後に重力崩壊することで形成されると考えられている。揺らぎの生成メカニズムの一つとして、スカラー場がポテンシャルの非常に平坦な部分を緩やかに転がる「ウルトラスローロール（USR）」過程を持つインフレーション模型が注目されている。USR 過程ではインフラトンの運動が一時的に減速し、スカラー揺らぎが大きく増幅されることで PBH 形成の起源となる可能性がある。[1] では、USR 過程を持つインフレーション中に生成されるスカラー揺らぎの統計的性質を調べるために、確率論的な短波長モードが背景の長波長モードに与える影響を考慮に入れる改善を施した非マルコフ的な確率形式を用いた。その上で ΔN 形式に基づいて試行ごとに曲率揺らぎ $\mathcal{R}$ を計算し、確率分布 $P(\mathcal{R})$ を非摂動的に得た。この解析から、USR 期を経て生成される曲率揺らぎには顕著な非ガウス的尾部が生じることが分かった。そして、この非ガウス的尾部の存在により、初期揺らぎからの PBH の生成量が、揺らぎのガウス性を仮定した場合の見積もりと比べて大幅に（[1] で用いられたパラメータでは 10^5 倍）増加する可能性を示した。

1 Introduction

インフレーションは宇宙初期における加速膨張を説明する枠組みとして広く知られており、宇宙マイクロ波背景放射（CMB）の観測と高い整合性を示している。一方で、インフレーションの詳細な機構については未だ確立しておらず、CMB スケールよりも小さなスケールに関しては観測による制約が乏しい。そのため、インフレーション中に小スケールで大きな曲率揺らぎが生成されていたとしても、観測と矛盾しない。そうした振幅の大きな揺らぎは、インフレーション後の輻射優勢期において重力崩壊を起こし、原始ブラックホール（PBH）を形成する可能性がある。PBH はダークマター候補の一つとしてだけでなく、インフレーションの機構を解明する手段としても注目されている。

近年、インフレーションを駆動するスカラー場であるインフラトンがポテンシャルの非常に平坦な領域や浅い極小値を通過する「ウルトラスローロール（USR）」過程を持つインフレーション模型が、PBH 形成につながる揺らぎの生成機構として注目されている。USR 過程では、インフラトンの運動が一時的に減速し、そこで大きく増幅されたスカラー揺らぎが PBH の起源となる可能性がある。

これまで、インフレーション中に生成されるスカラー揺らぎの統計的性質の研究では、確率論的な短波長モードが背景の長波長モードに与える影響は無視されることがほとんどだった。それを改善するため、[1] では、短波長モードが長波長モードに与える影響を考慮に入れる非マルコフ的な確率形式を用いている。

曲率揺らぎ $P(\mathcal{R})$ に現れる非ガウス的な尾部は PBH の生成量に大きく影響を及ぼすため、ΔN 形式に基づいて曲率揺らぎ $\mathcal{R}$ を計算し、確率分布 $P(\mathcal{R})$ の統計性を考察する。

2 Stochastic formalism

インフレーション中、サブハッブルスケール ($k \gg aH$) の量子揺らぎはスーパーハッブルスケール ($k \ll aH$) へと引き伸ばされていく。量子揺らぎの各モードはスーパーハッブルスケールに達すると古典化すると考えられるので、古典化された長波長モードを粗視化することでハッブルスケール程度の大きさのパッチの古典的な時空の進化を見積もることができるようになると思われる。インフレーション中はそのような因果的なパッチの内部のみに注目することが許されるので、長波長モードは背景時空と解釈される。一方、再加熱後に地平線が拡大してそれらのパッチがサブハッブルスケールになれば、空間の各領域の揺らぎと理解されることになる。

具体的には、インフレーション中の時空としてスカラー摂動を伴う空間的に平坦な FLRW 計量を考察し、インフラトン場 ϕ を長波長部分 $\bar{\phi}$ と短波長部分 $\delta\phi$ に分割する:

$$\phi = \bar{\phi}(t, \boldsymbol{x}) + \delta\phi(t, \boldsymbol{x})\,. \tag{1}$$

ここでそれぞれの部分は、$k_c = \sigma aH$ を粗視化スケールとして、

$$\bar{\phi} = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{k<k_c} d^3k \phi_{\boldsymbol{k}}(t) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}, \tag{2}$$

$$\delta\phi = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{k>k_c} d^3k \phi_{\boldsymbol{k}}(t) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{3}$$

である。長波長部分 $\bar{\phi}$ がハッブルスケールのパッチ内の古典的な背景時空を決定するのに対して、短波長部分 $\delta\phi$ はパッチ内で量子性を示す確率的な揺らぎである。本研究では、十分に正当化された $\sigma = 0.01$ を採用した。

インフレーションによる揺らぎの生成を確率論的に論じるモデルの思想は、インフレーション中に短波長モードが

引き伸ばされて長波長モードに編入されていく過程で確率的なノイズとして影響を及ぼすとみなすものである。具体的に、背景の長波長モードの正準運動方程式を次のように書く:

$$\bar{\phi}' = \bar{\pi} + \xi_\phi, \tag{4}$$

$$\bar{\pi}' = -(3 + H'/H)\bar{\pi} - V_{,\bar{\phi}}/H^2 + \xi_\pi, \tag{5}$$

$$2V = (6 - \bar{\pi}^2)H^2. \tag{6}$$

ここで、$'$ は e フォールド数 $N \equiv \ln(a/a_*)$ についての微分を表し（*は CMB のピボットスケール $k_* = 0.05\mathrm{Mpc}^{-1}$ がハッブルスケールを出た時点を指す)、ξ_ϕ と ξ_π がそれぞれ、各時刻に短波長モードが粗視化スケール k_c に達して長波長モードに加わる際に $\bar{\phi}$ と運動量 $\bar{\pi}$ に及ぼす確率的なノイズ（「キック」）である。いずれもガウス統計に従うとし、その強度は後述する短波長モード $\delta\phi_{\boldsymbol{k}}|_{k=k_c}$ により評価する。一方で $V(\bar{\phi})$ は決定論的なインフラトンのポテンシャルであり、本研究では図 1 のように浅い極小値を持つものを考える。ここで、$\bar{\phi}_i$ は CMB ピボットスケール、$\bar{\phi}_{PBH}$ は USR の終了地点、$\bar{\phi}_f$ はインフレーションの終了地点である。このポテンシャルは、標準模型のヒッグス粒子をインフラトンとしたモデルに量子補正を加えることで、浅い極小値を実現している。具体的には、USR 中に生成される揺らぎが $M_{PBH} = 7 \times 10^{-15} M_\odot$ の PBH を生成し、ガウス性を仮定してその生成量を見積もると、観測されているダークマター密度とおおよそ一致するように調整されている。さらに、CMB 観測 (CMB のピボットスケール k_* において、スペクトル指数 $n_s = 0.966$、テンソル対スカラー比 $r = 0.012$) に適合させるために、プラトー部分を手で調整している。

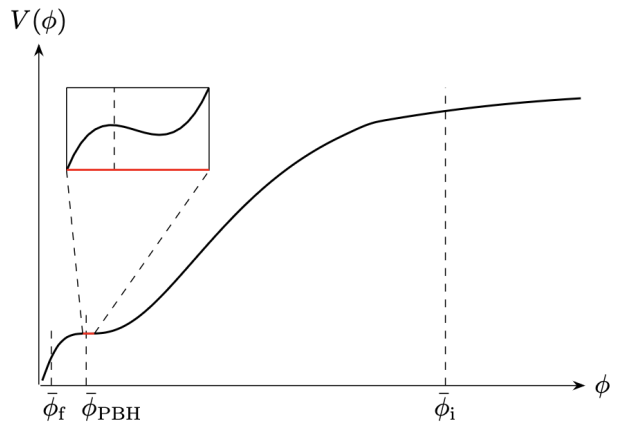


図 1: 浅い極小値をもったポテンシャル。

本研究での改善は、パッチ内の背景の時間変化が短波長モードの進化に及ぼす影響を考慮したことであり、それによって背景と短波長モードの間の非マルコフ的な相互作用を考えることになった。短波長モードの運動方程式は宇宙論的摂動論により

$$\delta\phi_{\boldsymbol{k}}'' + (3 + H'/H)\delta\phi_{\boldsymbol{k}}' + \omega_k^2 \delta\phi_{\boldsymbol{k}} = 0\,, \tag{7}$$

$$\omega_k^2 \equiv k^2/(aH)^2 + \bar{\pi}^2\,(3 + 2H'/H - H'/H^2) + 2\bar{\pi}V_{,\bar{\phi}}/H^2 + V_{,\bar{\phi}\bar{\phi}}/H^2 \tag{8}$$

と与えられる。短波長極限での初期条件は Bunch–Davies 真空で設定する。波長が粗視化スケールに達した時に背景に加わるノイズの強度は $\langle \xi_\phi(N_1)\xi_\phi(N_2)\rangle = (k^3/(2\pi^2))(1 + H'/H)|\delta\phi_{\boldsymbol{k}}|^2_{k=k_c}\delta(N_1 - N_2)$（$\xi_\pi$ もこれに類似）で与えられる。

3 Methods

USR 中に生成される $\frac{2\pi}{k_{PBH}}$ のサイズの揺らぎを持つ領域が PBH へと重力崩壊するかどうかを判定するために ΔN formalism を用いる。ΔN formalism では、その領域のインフレーション終了時の e フォールド数 N と平均値 $\bar{N}$ の差により、曲率摂動 $\mathcal{R}$ を計算することができる:

$$\mathcal{R} = N - \bar{N} \equiv \Delta N. \tag{9}$$

図 2 に示した数値計算のアルゴリズムに従って、初期スカラー場の値 $\bar{\phi}_i$ から最終的なスカラー場の値 $\bar{\phi}_f$ まで、粗視化スケール k_c の各領域 (パッチ) の進化を追う。短波長モード $\delta\phi_{\boldsymbol{k}}$ の進化は $k = \alpha aH$ のときから開始し、ここでは $\alpha = 100$ を採用する。これはホライズン半径より十分小さい時点から進化を開始するためのカットオフであり、α をさらに大きくしても結果にはほとんど影響を与えないことが確認されている。各シミュレーションは確率的に時間発展するため、$\bar{\phi}_f$ に達した際の最終的な e フォールド数 N が異なる。それを多数回繰り返して最終 e フォールド数 N の確率分布 $P(N)$ を求める。ΔN formalism により、これが曲率摂動 $\mathcal{R}$ の確率分布 $P(\mathcal{R})$ を与える。

USR 過程中に生成された波数 k_{PBH} の大振幅の揺らぎが、インフレーション終了後の輻射優勢期の間にハッブルスケールに入ってきて、その直後に重力崩壊を起こして地平線質量程度の質量 M_{PBH} を持つ PBH になるという形成シナリオを考える。PBH の形成時刻 t_{PBH} は条件 $k_{PBH} = aH|_{t=t_{PBH}}$ によって定まり、形成される PBH の質量は

$$M_{PBH} = \frac{4\pi\gamma}{3} H^{-3}\rho|_{t=t_{PBH}} \tag{10}$$

となる。ここで γ は重力崩壊過程の不定性を表すパラメータであり、0.2 を採用する。

波数 k_{PBH} の曲率摂動の確率分布 $P(\mathcal{R})$ から現在の PBH の存在量を推定することができる。本研究では、曲率摂動 $\mathcal{R}$ が閾値 $\mathcal{R}_c = 1$ を超える k_{PBH} のサイズの領域が PBH への重力崩壊を起こすとした。従って、$\mathcal{R} > \mathcal{R}_c$ となったシミュレーションの割合 $\beta \equiv \int_{\mathcal{R}_c}^{\infty} d\mathcal{R} P(\mathcal{R})$ が、形成時点で PBH のエネルギー密度が宇宙のエネルギー密度に占める割合を与える。PBH は物質として振る舞うため、PBH のエ

Algorithm 1: Evolution for each run

Set initial values for N, $\bar{\phi}$, $\bar{\pi}$. Set $k_{\rm next} = k_*$. Set current kick coefficient to zero.
while $\bar{\phi} > \bar{\phi}_{\rm f}$ **do**
  Evolve N, $\bar{\phi}$, $\bar{\pi}$.
  for *all modes k in the simulation* **do**
    if $k > \sigma aH$ **then**
      Evolve $\delta\phi_{\vec{k}}$, $\delta\phi'_{\vec{k}}$.
    else
      Evolve $\delta\phi_{\vec{k}}$, $\delta\phi'_{\vec{k}}$ to $k = \sigma aH$. Set the current kick coefficient from $\delta\phi_{\vec{k}}$, $\delta\phi'_{\vec{k}}$. Remove mode k from the simulation.
  if $k_{\rm next} \leq k_{\rm PBH}$ **then**
    if $k_{\rm next} \leq \alpha aH$ **then**
      Add mode $k = k_{\rm next}$ to the simulation. Set initial values for $\delta\phi_{\vec{k}}$, $\delta\phi'_{\vec{k}}$. Evolve $\delta\phi_{\vec{k}}$, $\delta\phi'_{\vec{k}}$ from $k = \alpha aH$. Set $k_{\rm next} = e^{1/32} k_{\rm next}$.
  else
    if $k_{\rm next} \leq \sigma aH$ **then**
      Set the current kick coefficient to zero.
  Add stochastic kick to $\bar{\phi}$, $\bar{\pi}$ using the current kick coefficient.

図 2: 数値計算のアルゴリズム。

ネルギー密度（$\propto a^{-3}$）が輻射背景（$\propto a^{-4}$）に占める割合は、形成時の値である上記の β から等密度時までスケール因子 a に比例して増大し、結果、現在の PBH の密度パラメータは次のように与えられる:

$$\Omega_{PBH} \sim 9 \times 10^7 \gamma^{\frac{1}{2}} \beta \left(\frac{M_{PBH}}{M_\odot} \right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{11}$$

$P(\mathcal{R})$ はよくガウス分布になることが仮定されている。この仮定を採用した場合、PBH の初期エネルギー密度比 β は以下のように与えられる:

$$\beta = 2 \int_{\mathcal{R}_c}^{\infty} d\mathcal{R} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\mathcal{R}}} e^{-\frac{\mathcal{R}^2}{2\sigma_{\mathcal{R}}^2}} \approx \frac{\sqrt{2}\sigma_{\mathcal{R}}}{\sqrt{\pi}\mathcal{R}_c} e^{-\frac{\mathcal{R}_c^2}{2\sigma_{\mathcal{R}}^2}}. \tag{12}$$

本研究のモデルは、このガウス近似において現在の PBH の存在量がダークマターと同程度に大きくなる（$\beta = 2.7 \times 10^{-16}, \Omega_{PBH} = 0.13$）ように微調整されている。また、USR 中に生成される強い摂動を全て捉えるため、USR の終了時にハッブル半径を出るスケールに対応する質量 ($M_{PBH} = 7 \times 10^{-15} M_\odot$) に固定して計算を行った。

4 Results

1000 億回以上のシミュレーションを行うことで e フォールド数の確率分布 $P(N)$ をプロットした (図 3)。赤い実線は今回のシミュレーションの結果であり、図 3 より、$|\Delta N| \gtrsim 0.5$ の領域で分布がガウス分布から逸脱していることが分かる。特に、PBH に崩壊する $\Delta N \geq 1$ の領域が占める割合に注目すると、PBH の初期存在量は $\beta = 3.4 \times 10^{-11}$ と求められ、現在の PBH の密度パラメータ $\Omega_{PBH} = 1.6 \times 10^4$ に対応する。これは、ガウス近似による Ω_{PBH} の見積もりと比較して約 10^5 倍大きな値となっている。

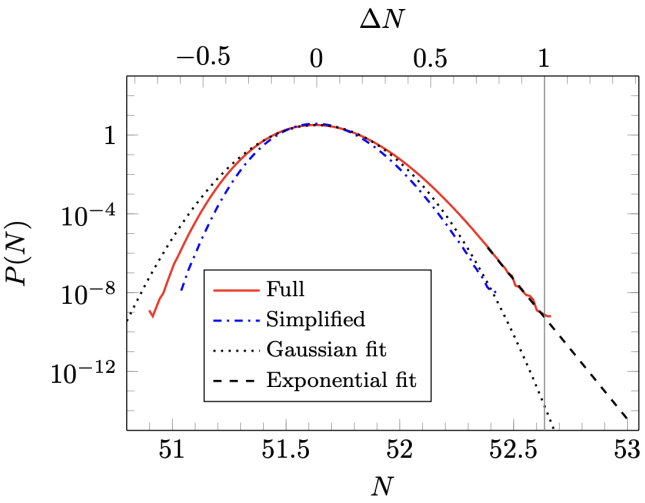


図 3: e フォールド数の確率分布。

5 Conclusion

USR 期に生成された揺らぎが現在の PBH 密度 Ω_{PBH} に与える影響を調べた [1] の論文をレビューした。ΔN 形式を適用することで、USR 期における確率的効果が e フォールド数の確率分布 $P(N)$ において指数関数的な尾部を生成することを示した。その結果、初期揺らぎからの PBH の生成量がガウス的揺らぎの場合と比べて 10^5 倍増加する可能性が示された。

Reference

[1] D.G. Figueroa, S. Raatikainen, S. Räsänen and E. Tomberg, “Non-Gaussian Tail of the Curvature Curvature Perturbation in Stochastic Ultraslow-Roll Inflation: Implications for Primordial Black Hole Production”, Phys. Rev. Lett. **127**, 101302 (2021)

——index へ戻る

SK-05

素粒子標準模型を考慮した原始重力波スペクトルの理論的解析

名古屋大学
牧野　泰紀

素粒子標準模型を考慮した原始重力波スペクトルの理論的解析

牧野 泰紀 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

原始重力波は、宇宙の誕生直後の急激な加速膨張 (インフレーション) によって引き伸ばされたテンソル型の初期ゆらぎであり、インフレーションの存在の直接的な証拠になるが、未だ観測されていない。もし観測されたならば、原始重力波のスペクトルから初期宇宙における高エネルギー現象について調べることができる。原始重力波のスペクトルは、宇宙の膨張だけが影響する場合、放射優勢期には平坦である。しかし、それ以外の要因が加わると、その形状が変わる。原始重力波のスペクトルが変化する要因は主に 3 つ挙げられる。1 つ目は、状態方程式パラメータの変化による重力波のスペクトルの変動、2 つ目は、相転移の前後で宇宙に存在する粒子の種類が異なることによる原始重力波の伝搬方程式の形の変化、3 つ目は粒子の自由運動によってアインシュタイン方程式のエネルギー運動量テンソルに非等方成分が生じることで起こるスペクトルの減衰、である。これらの要因は、初期宇宙での素粒子物理的現象によるものである。そのため標準模型から原始重力波スペクトルを詳細に予測することは、標準模型の検証と高エネルギー下での新物理の探究に役立つと考えられる。こうした背景の下、論文 [1] では、最新の標準模型の研究の結果を用いて、前述の 3 つの要因から原始重力波が受ける影響をより詳細に調べている。本発表では、論文 [1] のレビューを行う。まず、原始重力波の導入を行う。次に、原始重力波のスペクトルが伝搬の過程で受ける影響について説明する。最後に、上記の影響を受けた原始重力波のスペクトルを再現し、これを用いて将来観測可能な波数領域での素粒子標準模型から予想される現象の検証可能性について議論する。

1 導入

原始重力波のスペクトルは、何の影響も受けない場合に放射優勢期でスケール不変なスペクトルを持つ。しかし、宇宙を満たす成分の相対論的有効自由度の変化や、非等方ストレスの発生によって、スケール不変からずれることが知られている。前者の変化は主に宇宙の相転移に伴う粒子の自由度の変化によって生じ、後者は自由流粒子（たとえばニュートリノ）によって引き起こされる。

原始重力波は、他の相互作用をほとんど受けないため、これらの効果によるスペクトルの変化は、そのまま現在まで保持される。そのため、原始重力波スペクトルの詳細な予測は、初期宇宙の高エネルギー物理の検証や、将来的な原始重力波の観測にとって重要な手がかりとなる。

原始重力波のスペクトルに関する研究はこれまでも行われており、(例えば、[2] など) などがある。本稿では、論文 [1] をレビューする。この論文は、論文 [2] などの先行研究では十分に考慮されてこなかった要素を取り入れ、標準模型に基づいて原始重力波スペクトルをより詳細に予測している点で特に注目に値する。

本稿では、第 2 章において原始重力波のスペクトルに影響を与える物理的現象を概説する。第 3 章では、それらの効果を取り入れて計算されたスペクトルの具体的な結果を紹介する。第 4 章では、これらの結果を踏まえ、将来的な原始重力波観測への展望について考察する。

2 重力波方程式と影響

2.1 線形アインシュタイン方程式

曲率が 0 のロバートソン・ウォーカー計量

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j \quad |h_{ij}| \ll 1 \tag{1}$$

の下でアインシュタイン方程式を h_{ij} の一次まで波数空間に移して計算すると、

$$\ddot{h}_{\lambda,k} + 3H\dot{h}_{\lambda,k} + \frac{k^2}{a^2}h_{\lambda,k} = 16\pi G\Pi_{\lambda,k} \tag{2}$$

となる。ここで、H はハッブルパラメータであり、これを含む第二項は宇宙膨張による摩擦に対応する項

である。また、$\Pi_{\lambda,k}$ はエネルギー運動量テンソルの非等方成分を表す。これを含む右辺は重力波のソース項となっている。本稿では、原始重力波スペクトルに変化を与える項となっているこれら二項に注目する。

2.2 相転移

本章では、相転移が原始重力波スペクトルに与える影響について述べる。ここでは相転移は電弱相転移と QCD 相転移の二つを扱う。

相対論的有効自由度は、エネルギー密度 ρ、エントロピー密度 s を用いて $g_{*\rho} = 30\rho/(\pi^2 T^4)$、$g_{*s} = 45s/(2\pi^2 T^3)$ と書ける。相転移による相対論的有効自由度の変化でハッブルパラメータが増減するため、原始重力波スペクトルは変化する。即ち、以下の様な流れである。まず、相転移が起こる事で宇宙に存在する相対論的な粒子の種類が変化する。相対論的有効自由度は

$$\begin{aligned} g_{*\rho} &= \sum_{boson} g_b \left(\frac{T_b}{T}\right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{fermion} g_f \left(\frac{T_f}{T}\right)^4 \\ g_{*s} &= \sum_{boson} g_b \left(\frac{T_b}{T}\right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{fermion} g_f \left(\frac{T_f}{T}\right)^3 \end{aligned} \tag{3}$$

である。ここで、g_b、g_f は各ボソン、フェルミオンの内部自由度を、T_b、T_f は各粒子の温度を表している。また、$\sum_{boson}$、$\sum_{fermion}$ は存在する全ての粒子について足し合わせる事を示している。これら相対論的粒子種が変わる事で式 (3) の g_b、g_f も異なる値になる。一方、ハッブルパラメータはフリードマン方程式

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \tag{4}$$

から求められるが、相対論的物質のエネルギー密度 ρ は

$$\rho = g_{*\rho} g_{*s}^{-4/3} a^{-4} \tag{5}$$

である。このことから、ハッブルパラメータは有効自由度に依っている事、また式 (2) から線形アインシュタイン方程式も変わる。これによって、原始重力波のスペクトルは変形することが分かる。

次に、電弱相転移について説明する。電弱相転移は $T \sim O(100)$ GeV で起こり、電弱相互作用から電磁相互作用と弱い相互作用に分離する相転移である。この相転移で生成される W ボソン、Z ボソンがクォークとレプトンに崩壊する事で有効自由度は減少する。

QCD 相転移は、$T \sim O(0.1)$ GeV で自由に運動していたクォークがグルーオンと結合してクォーク閉じ込めが起こり、ハドロンとして存在するようになる相転移である。ハドロンとしてまとまるため相対論的でなくなり、有効自由度が減少する。

[1] では、これらの相転移を一次相転移のように滑らかに繋がっていない、として扱うのではなく、滑らかに接続した相転移として扱っている。これによって、先行研究とは異なるスペクトルが得られる。

2.3 自由流

自由流をする粒子は平均自由行程が無限である。相互作用をしている流体では互いにその作用によって異方性を打ち消し合い、等方になっているが、自由流粒子は相互作用をしていないために異方性が生じる。このためエネルギー運動量テンソルに非等方成分ができるので、式 (2) の右辺は 0 ではない値を取る。このようにして、自由流によって重力波のスペクトルは変化する。自由流粒子による表式は、ボルツマン方程式から

$$\Pi_{\lambda,k} = -4\rho_l(\tau) \int_{\tau_s}^{\tau} d\tau' \frac{j_2[k(\tau-\tau')]}{k^2(\tau-\tau')^2} \frac{\partial h_{\lambda,k}(\tau')}{\partial \tau'} \tag{6}$$

と表される。ここで、ρ_l は自由流をする粒子種のエネルギー密度を、$j_2[k(\tau-\tau')]$ は球ベッセル関数の $n=2$ を表している。また、τ は共形時間を、τ_s は粒子が脱結合したときの共形時間を表す。

自由流を起こす粒子は、先行研究 [2] ではニュートリノのみを考えていたが、論文 [1] では光子を計算している。

3 有効自由度の計算

式 (2) を数値的に解いてスペクトルを求める。このとき、有効自由度を別で計算し含める必要がある。有効自由度の計算方法は、相転移の種類と温度によって異なる。

まず、電弱相転移での計算方法を記す。電弱相転移では相転移が起こる $T \sim O(100)$ GeV の前後で計算方法が変わる。

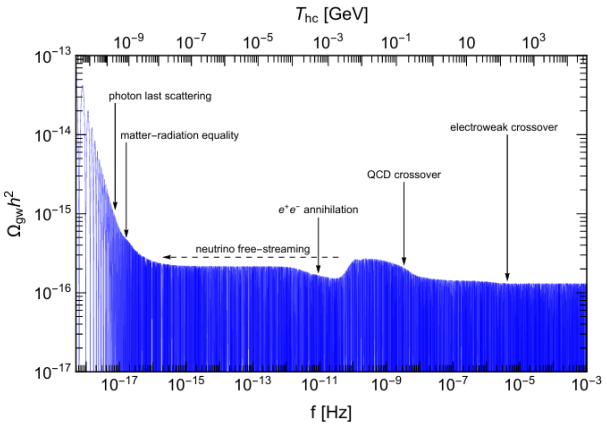


図 1: 原始重力波スペクトル (論文 [1] より引用)

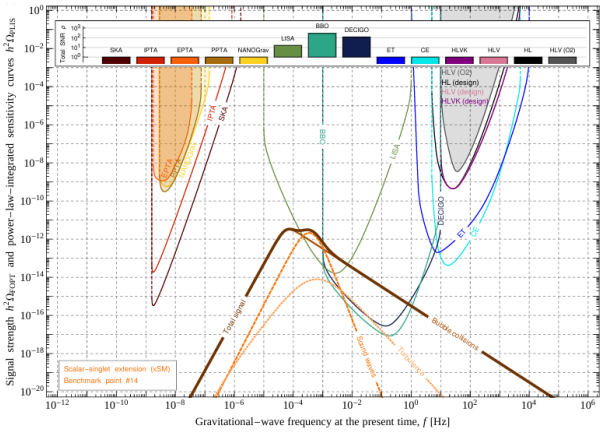


図 2: 各観測法の感度 (論文 [3] より引用)

次に QCD 相転移での計算法を記す。この相転移では $T \ll O(0.1)$ GeV、$T \sim O(0.1)$ GeV、$T \lesssim O(0.1)$ GeV で変わる。

4 結果

第 3 章で記した方法で計算をする事で、先行研究と比較して減衰した相転移前後で滑らかに接続したスペクトルが得られた。そのスペクトルを図 1 に示す。この図から、電弱相転移が起こる $f \sim 10^{-5}$ Hz と QCD 相転移が起こる $f \sim 10^{-8}$ Hz で、スペクトル強度が滑らかに増加している事が分かる。また、その後ニュートリノの自由流によるスペクトルの減衰が 10^{-16} Hz $\lesssim f \lesssim 10^{-13}$ Hz で見られる。

5 展望

図 1 から、スペクトルに特徴的な増減がある波数がいくつかあり、この波数の原始重力波を観測することで、初期宇宙と標準模型について検証可能であると分かる。現在や将来観測の感度が示された図 2 によると、Pulsar Timing Array では、10^{-9} Hz $\lesssim f \lesssim 10^{-6}$ Hz の周波数より小さい重力波は観測できず検証が現時点では不可能であることが分かる。よって、$f \sim 10^{-5}$ Hz でのスペクトルの強度は $\Omega_{gw}h^2 \sim 10^{-16}$ であるが、この周波数を観測できる LIGO は $f \sim 10^{-5}$ Hz で 10^{-6} 以上の強度を必要とするため、観測することができない。このことから、電弱相転移によるスペクトルの変化を見ることは難しい。

一方、$f \sim 10^{-8}$ Hz でのスペクトルの強度は $\Omega_{gw}h^2 \sim 10^{-16}$ であるが、このスペクトルは一番小さいスペクトル強度に対する感度を持つ Square Kilometer Array(SKA) でも観測は難しいことが分かる。また、論文 [1] で触れられている DECIGO については $\Omega_{gw}h^2 \sim 10^{-16}$ の強度に対し、観測に対して十分な感を持つことが分かる。しかし、DECIGO の観測可能な周波数帯は 2 章で扱った重力波を変化させる現象に対応する領域ではないため、その現象の検証は DECIGO での原始重力波の観測ではできない事が分かる。

Acknowledgement

この集録を作成するにあたり、名古屋大学宇宙論研究室の皆様には多くの助言や知識をいただきました。また、夏の学校の運営の皆様には発表の場を用意したいただきました。皆様に感謝申し上げます。ありがとうございました。

Reference

[1] Ken'ichi Saikawa and Satoshi Shirai. Primordial gravitational waves, precisely: The role of thermodynamics in the standard model. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, Vol. 2018, No. 05, p. 035, 2018.

[2] Yuki Watanabe and Eiichiro Komatsu. Improved calculation of the primordial gravitational wave spectrum in the standard model. *Physical Review D*, Vol. 73, No. 12, June 2006.

[3] Kai Schmitz. New sensitivity curves for gravitational-wave signals from cosmological phase transitions. *Journal of High Energy Physics*, Vol. 2021, No. 1, pp. 1–62, 2021.

[4] C.L. Carilli and S. Rawlings. Motivation, key science projects, standards and assumptions. *New Astronomy Reviews*, Vol. 48, No. 11–12, p. 979–984, December 2004.

——index へ戻る

SK-06

Dark Age の 21cm 線バイスペクトルを用いた原始非ガウス性の制限

東京大学
平山　彩美里

Dark Age の 21cm 線バイスペクトルを用いた原始非ガウス性の制限

平山 彩美里 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

密度ゆらぎの原始非ガウス性 (PNG) の観測はインフレーションモデルの制限に用いられる。過去には Planck による CMB 観測が PNG の大きさを表すパラメータ $f_{\rm NL}$ に大幅な制限をつけたものの、モデルの選別に重要となる $f_{\rm NL} \lesssim 1$ の領域には観測精度が到達していない。そこでより厳しい制限をつける手段として Dark Age における 21cm 線温度ゆらぎの高次統計量、特にバイスペクトルを用いる方法が検討されているが、ゆらぎの非線形効果で生じる二次的なバイスペクトルや様々な foreground の影響を取り除くことが課題となる。そこで Munoz et al. (2015) では Fisher 解析を用いてゆらぎの非線形効果の影響を取り除くことで、$30 \leq z \leq 100$ における 0.1MHz の波長分解能、0.1arcmin の角度分解能の 21cm 線観測により、$f_{\rm NL} \sim 0.03 - 0.04$ の観測精度を達成できることを示している。一方この論文では foreground の影響を考慮していないほか、バリオンが暗黒物質と同じくスケール不変な成長をするなどの近似を用いている。本発表では Munoz et al. (2015) をレビューしたのち、そこで残された課題に関する最近の進展について議論する。

1 Introduction

現在インフレーションには様々な理論モデルが提案されており、観測によるモデルの選別が重要な課題となっている。その一つの方法が、インフレーションが生み出す初期ゆらぎの非ガウス性 (PNG) の観測である。PNG の大きさは $f_{\rm NL}$ というパラメータで表され、最も単純な単一場スローロールモデルの場合は $f_{\rm NL} \lesssim n_s - 1$ となりゆらぎはほぼガウス分布にしたがうが、より複雑なモデルでは一般的に $f_{\rm NL} > 1$ となるため、$\sigma_{f_{\rm NL}} \lesssim 1$ の精度での観測がモデルの選別にクリティカルな役割を果たすと期待されている。

一般に非ガウス性をもつゆらぎは 0 でないバイスペクトルをもつため、これを測定することで $f_{\rm NL}$ を求める方法がよく用いられる。過去には Planck による CMB のバイスペクトル観測が $f_{\rm NL}$ に大幅な制限をつけたが、$\sigma_{f_{\rm NL}} \lesssim 1$ の精度には遠く及んでいない。そこで Dark Age における 21cm 線のバイスペクトルを用いてより厳しい制限をつける方法が検討されている。21cm 線とは中性水素原子の微細構造間遷移によって生じる光で、その強度分布は水素ガス分布を反映しており、特に Dark Age の後半においては水素ガス分布は概ね暗黒物質 (DM) 分布に一致する。よって CMB と異なり小スケールのゆらぎがシルク減衰の影響を受けない上に、複数の z における観測が可能で 3 次元の情報量が得られるため、CMB を超える精度での観測が期待されている。

一方 21cm 線のバイスペクトルは foreground やゆらぎの成長による非線形効果でも生じ、これらを取り除くことが課題となる。そこで Munoz et al. (2015) では Fisher 解析を用いたゆらぎの非線形効果の除去方法を提案し、達成されうる観測精度を計算した。ただし地球大気の電離層の影響を避けるため、月面干渉計 array での観測を想定し、観測範囲は $30 \leq z \leq 100$ とした。また foreground の影響は無視した。本稿では 2-5 章でこの論文のレビューを行ったのち、6 章で残された課題に関する最近の進展を述べる。

2 21cm 線温度ゆらぎ

2.1 輝線温度

21cm 線は CMB に対する吸収線または放出線として観測される。その輝度温度を以下に求める。

まず、21cm 線のスピン温度 T_s を以下に定義する。

$$\frac{n_1}{n_0} = 3e^{-T_*/T_s} \tag{1}$$

n_0, n_1 はそれぞれスピンが基底、励起状態にある水素原子の数密度で、T_* は二準位間のエネルギー差である。この T_s と水素ガスの optical depth τ を用いて、21cm 線の CMB に対する相対的な輝度温度の観測値は以下のように表される。

$$T_{21} = \tau \frac{T_s - T_{\rm cmb}}{1+z} \tag{2}$$

ここで T_s は水素ガスの温度 $T_{\rm gas}$ と数密度 n_H に依存し、τ は

$$\tau = \frac{3}{32\pi}\frac{T_*}{T_s}\frac{n_H(1-x_e)\lambda_{21}^3 A_{10}}{H(z)+(1+z)\partial_r v_r} \tag{3}$$

(x_e:電離率、λ_{21}:遷移波長、A_{10}:アインシュタインの A 係数) と表される。よって T_{21} は、空間的なゆらぎをもつ成分としては $T_{\rm gas}, n_H, \partial_r v_r$ に依存する。

2.2 温度ゆらぎの定式化

以上の考察から、$\delta_{T_{\rm gas}} = \delta T_{\rm gas}/\overline{T}_{\rm gas}, \delta_b = \delta n_b/\bar{n}_b$, $\delta_v = -(1+z)(\partial_r v_r)/H(z)$ と定義すると、T_{21} はゆらぎの 2 次までで以下のように表される (n_b はバリオン数密度で $n_b \approx n_H$)。

$$\begin{aligned} T_{21} =& \overline{T}_{21}(1+\delta_v+\delta_v^2) + (\mathcal{T}_b\delta_b + \mathcal{T}_T\delta_{T_{\rm gas}})(1+\delta_v) \\ &+ \mathcal{T}_{bb}\delta_b^2 + \mathcal{T}_{bT}\delta_b\delta_{T_{\rm gas}} + \mathcal{T}_{TT}\delta_{T_{\rm gas}}^2 \end{aligned} \tag{4}$$

ここで全てのゆらぎを $\delta = \delta^{(1)} + \delta^{(2)}$ のように、初期ゆらぎの 1 次と 2 次の項に分解する。Dark Age なのでより高次の項は無視できると考える。このとき、バリオンゆらぎが暗黒物質 (DM) ゆらぎと同様スケール不変に進化すると仮定すれば、$\delta_{T_{\rm gas}}$ と δ_b の間に以下の関係が成り立つことが計算により示される。

$$\delta^{(1)}_{T_{\rm gas}}(\boldsymbol{x}, z) = C_1(z)\delta_b^{(1)}(\boldsymbol{x}, z) \tag{5}$$

$$\delta^{(2)}_{T_{\rm gas}}(\boldsymbol{x}, z) = C_2(z)[\delta_b^{(1)}(\boldsymbol{x}, z)]^2 + C_2'(z)\delta_b^{(2)}(\boldsymbol{x}, z) \tag{6}$$

これらを式 (4) に代入することで以下を得る。

$$\begin{aligned} \delta T_{21} \approx& \overline{T}_{21}(\delta_v^{(1)} + \delta_v^{(2)} + [\delta_v^{(1)}]^2) \\ &+ \alpha(z)\delta_b^{(1)}(1+\delta_v^{(1)}) + \beta(z)[\delta_b^{(1)}]^2 + \gamma(z)\delta_b^{(2)} \end{aligned} \tag{7}$$

ただし α, β, γ は式 (4) の係数および C_1, C_2, C_2' を用いて表される係数である。

3 原始非ガウス性

PNG は様々な種類があるが、代表的なものは local type と呼ばれるもので、主に複数場モデルで現れる。このとき、バーディーンの重力ポテンシャル Φ の初期条件は、ガウス場 ϕ を用いて以下のように表される。

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \phi(\boldsymbol{x}) + f_{\rm NL}^{\rm local}(\phi^2(\boldsymbol{x}) - \langle\phi\rangle^2) \tag{8}$$

$f_{\rm NL}^{\rm local}$ が PNG のパラメータである。このとき

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{\Phi}(\boldsymbol{k_1})\tilde{\Phi}(\boldsymbol{k_2})\tilde{\Phi}(\boldsymbol{k_3}) \right\rangle =& (2\pi)^3\delta_D(\boldsymbol{k_1}+\boldsymbol{k_2}+\boldsymbol{k_3}) \\ &\times B_\Phi(\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}, \boldsymbol{k_3}) \end{aligned} \tag{9}$$

で定義される Φ のバイスペクトル $B_\Phi(\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}, \boldsymbol{k_3})$ は以下のように表される。

$$B_\Phi^{\rm local}(\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}, \boldsymbol{k_3}) = 2f_{\rm NL}^{\rm local}[P_\Phi(k_1)P_\Phi(k_2) + 2\ \text{perm.}] \tag{10}$$

他にも equilateral type や orthogonal type、さらにバイスペクトルが $\boldsymbol{k}_i$ 間の角度依存性を持つものなどがあり、それぞれ $f_{\rm NL}^{\rm equil}, f_{\rm NL}^{\rm ortho}, f_{\rm NL}^{(J)}$ で特徴づけられる。本論文ではこの 4 タイプを取り扱っている。

Φ と観測量である δT_{21} のバイスペクトルの関係は式 (7) から導かれる。式 (7) をフーリエ変換し、$\delta_v = (\hat{k}\cdot\hat{n})^2\delta_b$ (ただし $\hat{n}$ は視線方向の単位ベクトル) を適用したのち 1 次の項のみを取り出すと

$$\delta T_{21}^{\rm lin}(\boldsymbol{k}) = [\alpha + \overline{T}_{21}(\hat{k}\cdot\hat{n})^2]\delta_b^{(1)}(\boldsymbol{k}) \tag{11}$$

となるので、$M(k,z) \equiv \delta_b(\boldsymbol{k}, z)/\Phi(\boldsymbol{k})$ とおくと

$$\begin{aligned} B_{\delta T}^{\rm prim}(\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}, \boldsymbol{k_3}) =& \prod_{i=1}^{3}(\alpha + \overline{T}_{21}\mu_i^2)M(k_i) \\ &\times B_\Phi(k_1, k_2, k_3) \end{aligned} \tag{12}$$

となる (ただし $\mu_i = \hat{k}_i\cdot\hat{n}$)。

4 二次的な非ガウス性

4.1 非線形成長の寄与

物質密度ゆらぎ δ_m の重力非線形成長は二次的な非ガウス性 (SNG) を生成し、その形は以下のように表される (ただし $\theta \equiv -\nabla\cdot\boldsymbol{v}/H$)。

$$\left\langle \delta_m^{(1)}(\boldsymbol{k_1})\delta_m^{(1)}(\boldsymbol{k_2})\delta_m^{(2)}(\boldsymbol{k_3}) \right\rangle' = 2F(\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2})P_1P_2 \tag{13}$$

$$\left\langle \delta_m^{(1)}(\boldsymbol{k_1})\delta_m^{(1)}(\boldsymbol{k_2})\theta_m^{(2)}(\boldsymbol{k_3}) \right\rangle' = 2G(\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2})P_1P_2 \tag{14}$$

ただし $\langle\cdots\rangle'$ は 3 点相関関数を $(2\pi)^3\delta_D(\boldsymbol{k_1}+\boldsymbol{k_2}+\boldsymbol{k_3})$ で割ったもので、$P_i = P_\delta(\boldsymbol{k_i})$ は線形ゆらぎのパワースペクトルである。これらは式 (7) の $\delta_b^{(2)}$ や $\delta_v^{(2)}$ の項を通して δT_{21} の SNG を生む。実際、式 (7) のフー

リエ変換において $\delta_v = \mu^2\theta$ および $\delta_v^{(1)} = \mu^2\delta_b^{(1)}$ を適用し、さらに $\delta_b = \delta_m$ とした上で $\delta_b^{(2)}, \theta_b^{(2)}$ に依存するバイスペクトルを計算すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} B_{\delta T}^{\rm grav}(\boldsymbol{k_1},\boldsymbol{k_2},\boldsymbol{k_3}) =& 2(\alpha+\overline{T}_{21}\mu_1^2)(\alpha+\overline{T}_{21}\mu_2^2) \\ &\times[\gamma F(\boldsymbol{k_1},\boldsymbol{k_2})+\overline{T}_{21}(\mu_1+\mu_2)^2 \\ &\times G(\boldsymbol{k_1},\boldsymbol{k_2})]P_1P_2 + 2 \text{ perm.} \end{aligned} \tag{15}$$

4.2 δ_b と δT_{21} の非線形関係の寄与

δT_{21} が δ_b に非線形に依存することによっても SNG が生じ、その形は以下のようになる。

$$\left\langle \delta_b(\boldsymbol{k_1})\delta_b(\boldsymbol{k_2})[\delta_b^2](\boldsymbol{k_3})\right\rangle' = 2P_1P_2 \tag{16}$$

$$\langle \delta_b(\boldsymbol{k_1})\delta_b(\boldsymbol{k_2})[\delta_b\delta_v](\boldsymbol{k_3})\rangle' = (\mu_1^2+\mu_2^2)P_1P_2 \tag{17}$$

$$\left\langle \delta_b(\boldsymbol{k_1})\delta_b(\boldsymbol{k_2})[\delta_v^2](\boldsymbol{k_3})\right\rangle' = 2\mu_1^2\mu_2^2P_1P_2 \tag{18}$$

ただし δ_b, δ_v は全て $\delta_b^{(1)}, \delta_v^{(1)}$ を表す。これらは式 (7) の δ の 2 乗の項を通して、以下のように δT_{21} の二次的なバイスペクトルを生む。

$$\begin{aligned} B_{\delta T}^{\rm nl}(\boldsymbol{k_1},\boldsymbol{k_2},\boldsymbol{k_3}) =& (\alpha+\overline{T}_{21}\mu_1^2)(\alpha+\overline{T}_{21}\mu_2^2)\times(2\beta \\ &+\alpha(\mu_1^2+\mu_2^2)+2\overline{T}_{21}\mu_1^2\mu_2^2)P_1P_2 \\ &+ 2 \text{ perm.} \end{aligned} \tag{19}$$

5 Fisher 解析の手法と結果

5.1 Single slice の場合

5.1.1 $f_{\rm NL}$ の推定法

まずは単一の z における観測で $f_{\rm NL}$ を推定する場合を考える。観測されるバイスペクトルは原始的なものと 4 章で考慮した二次的なものの和になるとし、foreground によるバイアスは無視する。二次的なバイスペクトルは式 (15) と (19) の和として理論的に計算されるが、これらに含まれる係数 $A_i \equiv \overline{T}_{21}, \alpha, \beta, \gamma$ は微細構造間遷移の詳細な物理過程に依存するため、推定値に誤差が生じうる。この誤差を $f_i = \Delta A_i$ とおき、さらに $b^i_{l_1l_2l_3} = \partial B^{\rm sec}_{l_1l_2l_3}/\partial A_i$ とすると、観測されるバイスペクトルは以下のように表される。

$$B^{\rm obs}_{l_1l_2l_3} = B^{\rm sec,0}_{l_1l_2l_3} + f_{\rm NL}b^{\rm prim}_{l_1l_2l_3} + \sum_{i=1}^{4} f_i b^i_{l_1l_2l_3} \tag{20}$$

ここで $B^{\rm sec,0}_{l_1l_2l_3}$ は A_i の期待値で計算した二次バイスペクトルで、$f_{\rm NL}b^{\rm prim}_{l_1l_2l_3}$ は原始バイスペクトルである。以下では $f_{\rm NL}, b^{\rm prim}_{l_1l_2l_3}$ を $f_0, b^0_{l_1l_2l_3}$ とみなす。

ここで $B^{\rm obs}_{l_1l_2l_3}$ は観測から

$$B^{\rm obs}_{l_1l_2l_3} = \frac{1}{4\pi f_{\rm sky}}\delta T(l_1)\delta T(l_2)\delta T(l_3) \tag{21}$$

と計算されるものとする ($f_{\rm sky}$ は全天に対する観測領域の割合)。また以下のスカラー積 $(,)_z$ を定義する。

$$\begin{aligned} (B^i,B^j)_z \equiv& 4\pi f_{\rm sky}\iiint_{l_1\geq l_2\geq l_3}\frac{d^2l_1d^2l_2d^2l_3}{(2\pi)^4}\delta_D(l_1+l_2+l_3) \\ &\times\frac{B^i_{l_1l_2l_3}B^j_{l_1l_2l_3}}{C^{\rm tot}_{l_1}C^{\rm tot}_{l_2}C^{\rm tot}_{l_3}} \end{aligned} \tag{22}$$

ただし $C_l^{\rm tot}$ は cosmic variance や観測機器のノイズ、foreground 等による $\delta T(l)$ の合計の分散である。このスカラー積から Fisher 行列を

$$F_{ij} \equiv (b^i,b^j)_z \tag{23}$$

と定義すると、$f_{\rm NL}$ の推定値は以下のように得られる。

$$\hat{f}_{\rm NL} = \sum_{j=0}^{4}(F^{-1})_{0j}(b^j, B^{\rm obs}_{l_1l_2l_3} - B^{\rm sec,0}_{l_1l_2l_3})_z \tag{24}$$

5.1.2 誤差の評価

ある $B^{\rm obs}_{l_1l_2l_3}$ が得られたとき、$\boldsymbol{f} = (f_0,\dots f_4)$ の事後確率分布は

$$P(\boldsymbol{f}|B^{\rm obs}_{l_1l_2l_3}) \propto \exp\left[-(\boldsymbol{f}-\hat{\boldsymbol{f}})^T F(\boldsymbol{f}-\hat{\boldsymbol{f}})\right] \tag{25}$$

と書けるものとする。このとき、そのフーリエ変換

$$\Phi(\boldsymbol{k}) = \int d\boldsymbol{f}P(\boldsymbol{f}|B^{\rm obs}_{l_1l_2l_3})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{f}} \tag{26}$$

を k_0 で二階微分し $\boldsymbol{k}=0$ とおくと $\sigma^2_{f_{\rm NL}}$ が得られる。

$$\sigma^2_{f_{\rm NL}} = (F^{-1})_{00} \tag{27}$$

表 1 に $z=50$ での観測における $\sigma_{f_{\rm NL}}$ を示す。ただし観測誤差 $C_l^{\rm tot}$ は主に cosmic variance によるものとした。特に local-type では arcmin の角度分解能で $\sigma_{f_{\rm NL}} \sim 1$ に達しており、single slice の観測でもインフレーションモデルの区別が可能である。一方 $z=50$ において cosmic variance に達する観測精度と arcmin の角度分解能を達成するには相当理想的な観測条件が要求され、具体的には月の直径のオーダーに及ぶ $D = 3500$km のベースラインを持つ干渉計で 2 年間の全天観測 ($f_{\rm sky}=1$) を行う必要がある。

表 1: $z = 50$ における cosmic variance に達する精度の観測での $\sigma_{f_{\rm NL}}$ の予測値。中央列は $l_{\rm min} = 100, l_{\rm max} = 10^4$(つまり角度分解能 1arcmin) の場合、右列は $l_{\rm max} = 10^5$(0.1arcmin) の場合の値。

PNG-type	$\sigma_{f_{\rm NL}}$(arcmin)	$\sigma_{f_{\rm NL}}$(0.1arcmin)
Local	1.3	0.23
Equilateral	14	0.71
Orthogocal	11	0.71
J=1	83	5.3
J=2	4.5	0.83
J=3	40	3.1

5.2 Tomography をする場合

次に複数の z での観測を組み合わせる場合 (tomography) を考える。概ね single slice の場合と同じだが、異なるのは f_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ が z 依存性を持つことである。$A_i(z) = \bar{T}_{21}, \alpha, \beta, \gamma$ は $\log(z)$ の多項式で近似できることが計算より分かるので、$f_i(z) = \Delta A_i$ も同様であると仮定し、以下のように表すことにする。

$$f_i(z) = \sum_{j=0}^{3} f_{ij} [\log(z/50)]^j \tag{28}$$

このとき $B^{\rm obs}_{l_1 l_2 l_3}(z)$ は以下のように表される。

$$\begin{aligned} B^{\rm obs}_{l_1 l_2 l_3}(z) =& B^{\rm sec,0}_{l_1 l_2 l_3}(z) + f_{\rm NL} b^{\rm prim}_{l_1 l_2 l_3}(z) \\ &+ \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=0}^{3} f_{ij} [\log(z/50)]^j b^i_{l_1 l_2 l_3}(z) \end{aligned} \tag{29}$$

ここで各 z slice に相関はないものとし、以下のようにスカラー積 $(,)$ を定義する。

$$(b^n, b^m) \equiv \sum_z (b^n, b^m)_z \tag{30}$$

z slice の数は波長分解能 $\Delta\nu$ で観測波長帯を割ったものである。これを用いて Fisher 行列 F を式 (23) で $(,)_z \to (,)$ としたもので定義すると、$f_{\rm NL}$ の推定値は式 (24) で $(,)_z \to (,)$ としたもので求められる。また $\sigma_{f_{\rm NL}}$ は $\sqrt{(F^{-1})_{00}}$ で求められる。

表 2 に $30 < z < 100$ での観測における $\sigma_{f_{\rm NL}}$ を示す。非常に楽観的な観測条件ではあるが、$\Delta\nu$ =1 MHz では $\sigma_{f_{\rm NL}} \lesssim 1$ となるため多くのモデルの選別が可能であり、$\Delta\nu$ =0.1 MHz では単一場スローロールモデルの上限値 ($f_{\rm NL} \sim n_s - 1$) に近づいている。

表 2: $30 < z < 100$ における cosmic variance に達する精度の観測での $\sigma_{f_{\rm NL}}$ の予測値。$l_{\rm min} = 100, l_{\rm max} = 10^5$ とした。中央列、右列は $\Delta\nu = 1, 0.1$ MHz での値。

PNG-type	$\sigma_{f_{\rm NL}}$(1 MHz)	$\sigma_{f_{\rm NL}}$(0.1 MHz)
Local	0.12	0.03
Equilateral	0.39	0.04
Orthogocal	0.29	0.03
J=1	1.1	0.1
J=2	0.33	0.05
J=3	0.85	0.09

6 展望

本論文では、非線形効果の適切な除去により Dark Age での 21cm 線観測が原始非ガウス性の制限に有効な手段となりうることが示された。一方で foreground の影響は考慮されていないが、signal 抽出において深刻な問題となるため実観測では考慮する必要がある。そのためには foreground のモデリングおよび signal との縮退への対処が重要であり、近年進展が見られる (Hibbard 2025)。これらの対処法を発展させ、将来的には本論文の手法に組み込むことが期待される。

また本論文ではバリオンが DM と同様スケール不変に進化する近似のもと計算を行ったが、厳密には Dark Age にはバリオン分布が DM 分布に完全には追いついていないため (Flitter et al. 2024)、実観測ではこの近似の影響を考慮する必要がある。

Reference

Julian B. Munoz, Yacine Ali-Haimoud, & Marc Kamionkowski 2015, Phys. Rev. D 92, 083508

J. J. Hibbard 2025, University of Colorado at Boulder ProQuest Dissertations & Theses, 31935308

Jordan Flitter, Sarah Libanore, & Ely D. Kovetz 2024, arXiv:2411.00089

——index へ戻る

SK-07

中性水素21cm線を用いた標準宇宙論の検証

山口大学
近藤　駿

中性水素 21cm 線を用いた標準宇宙論の検証

近藤 駿 (山口大学大学院 創成科学研究科)
共著者　齊藤 遼 (山口大学)　山内 大介 (岡山理科大学)

Abstract

中性水素原子の超微細構造線である 21cm 線は、暗黒時代における宇宙の状態を探る貴重な観測手段の 1 つである。特に、この時代に放たれた等方的な 21cm 線の強度は、標準宇宙論に基づいて高い精度で予言できるため、標準宇宙論の検証に 21cm 線を利用することができる。さらに、近年の著しい観測技術の進歩に伴い、標準宇宙論を超える新たな物理現象の理論的探索が活発に行われている。
本稿では、暗黒時代にも存在しうると考えられている原始ブラックホール (PBH) からの Hawking 放射が、21cm 線強度に与える影響について論じた先行研究 [1] をレビューする。Hawking 放射は、宇宙に遍く分布する中性水素ガスの加熱源として作用し、たとえ PBH の存在量がごくわずかであっても、21cm 線強度を著しく変化させることが確認できる。この結果は、21cm 線を用いた検証によって、標準宇宙論は大幅な修正を迫られる可能性があることを示している。

1　導入

21cm 線とは、基底状態の中性水素原子の超微細構造に起因する、波長 21cm の電磁波である。この遷移は 1 個の原子あたり約 10^7 年という極めて長いタイムスケールを持つものの、宇宙には膨大な数の水素原子が存在するため、21cm 線は宇宙からの観測が可能である。実際、1951 年に Purcell らが初観測に成功して以来、21cm 線は宇宙の構造や進化を探るための重要な手段として広く活用されてきた。

本研究では、暗黒時代に放たれた 21cm 線を考える。暗黒時代とは、宇宙の晴れ上がりから初代星形成までの時代を指し、この時代を直接観測できる数少ない手段として 21cm 線が注目されている。特に、暗黒時代に放たれる等方的な 21cm 線強度 T_{21} に注目することで、宇宙論の標準モデルである ΛCDM モデルの検証が可能になる。宇宙論パラメータを他の観測から決定することで、ΛCDM モデルに基づく 21cm 線強度 T_{21} の赤方偏移依存性は理論的に高精度で予測できる。したがって、観測と理論予測に差異があれば、それは標準宇宙論を超える新たな物理の兆候となりうる。近年、観測技術の著しい発展により、暗黒時代の 21cm 線観測が現実のものとなりつつあり、それに伴い、予言される強度から差異を及ぼしうる物理現象が複数提案されている。

以上を踏まえ、本稿では [1] をレビューする。この論文は、標準宇宙論には含まれない物理過程として、暗黒時代に存在しうる原始ブラックホール（PBH）の Hawking 放射が T_{21} に及ぼす影響を示し、その原因について考察を行っている。加えて、PBH の Hawking 放射を考慮した場合における、標準宇宙論の検証可能性について議論する。

2　標準宇宙論における 21cm 線

標準宇宙論の枠組みにおいて、等方的な 21cm 線強度 T_{21} が理論的にどのように記述されるか説明する。

2.1　スピン温度 T_s

スピン温度とは、21cm 線の励起温度のことであり、水素原子のスピンの状態を指定するパラメータである。 宇宙にある中性水素原子ガス (HI ガス) の運動温度を T_k、背景放射である CMB の放射温度を $T_{\rm CMB}$ とすると, スピン温度 T_s は

$$T_s = \frac{T_{\rm CMB} + yT_k}{1+y} \tag{1}$$

となり、T_k と $T_{\rm CMB}$ の加重平均として表現できる。暗黒時代における両者の変遷は、赤方偏移 z を用いて、

$$T_{\rm CMB} = 2.73(1+z) \tag{2}$$

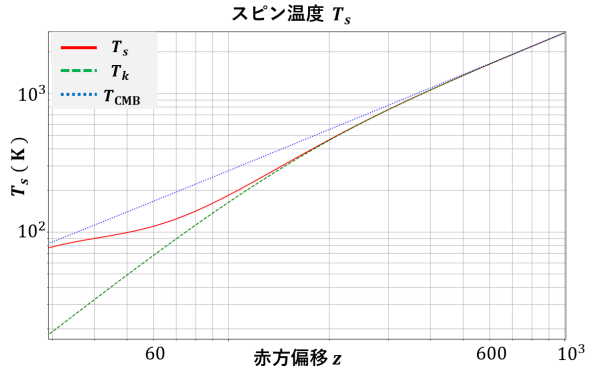


図 1: スピン温度 T_s の赤方偏移依存性
図中の赤実線、緑破線、青点線はそれぞれスピン温度 T_s、運動温度 T_k、CMB 放射温度 $T_{\rm CMB}$ を表す。

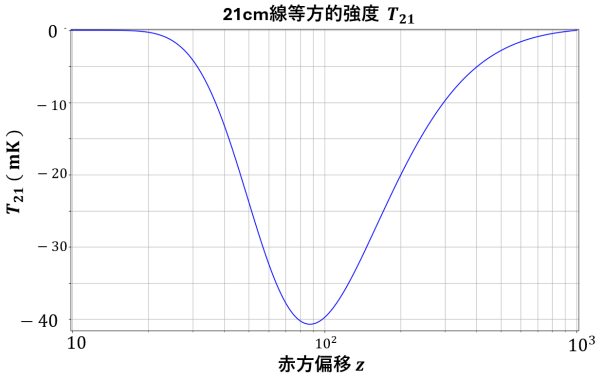


図 2: 21cm 線等方的強度 T_{21} の赤方偏移依存性

$$\frac{dT_k}{dz} = \left[\frac{1}{H(1+z)}\right] \times \left[-2HT_k + \frac{x_i}{\eta_1 t_\gamma}(T_{\rm CMB} - T_k)\right] \qquad (3)$$

から求められる。H はハッブルパラメータ、x_i はイオン化率、t_γ は散乱の時間スケールを表す。また、$\eta_1 = 1 + f_{He} + x_i$ であり、f_{He} はヘリウムフラクションである。運動温度 T_k の変遷を調べるためには、式 (3) を数値計算で解く必要がある。
なお、重みづけ係数 y は

$$y = \frac{h\nu}{k_B T_k}\frac{C_{ul}}{A_{ul}} \qquad (4)$$

であり、A_{ul} は自発放射による遷移確率、C_{ul} は衝突による遷移確率であり、ν は 21cm 線周波数を表す。

図 1 は、論文 [1] の計算を自ら再現したものであり、$T_{\rm CMB}$、T_k、T_s の変遷をそれぞれ示している。

- $600 \lesssim z \lesssim 1100$
  $z \approx 1100$ にて、陽子と電子の再結合によって中性化した宇宙は、まだ光を放つ天体が存在していない暗黒時代を迎える。当時の宇宙は非常に高温であるため、再結合に寄与せず宇宙に残された自由電子は、光子とコンプトン散乱を起こす。この影響で、HI ガスは光子と熱平衡の状態 ($T_s \approx T_k \approx T_{\rm CMB}$) を保っている。

- $60 \lesssim z \lesssim 600$
  $z \approx 600$ にて、物質と光子の相互作用が弱まり、運動温度と放射温度はそれぞれ独立に進化するようになる。相互作用が完全に切れたあとは、宇宙膨張による断熱冷却の効果で変遷を説明できる ($T_k \propto a^{-2}$ 、$T_{\rm CMB} \propto a^{-1}$)。ただし、$a$ は宇宙のスケール因子を表す。これ以降、基本的にスピン温度は運動温度と放射温度の中間的な値をとりながら連続的に変化する。ただし、この時期は衝突遷移が優勢であるため、スピン温度は運動温度に漸近している ($T_s \approx T_k$)。

- $30 \lesssim z \lesssim 60$
  この時期は、ガスの運動温度や密度が十分低下したことで、放射による遷移が優勢な時期に切り替わる。よって、かつて運動温度に漸近していたスピン温度は、ここから放射温度に漸近するようになる ($T_s \approx T_{\rm CMB}$)。

2.2 等方的な 21cm 線強度 T_{21}

21cm 線の観測量を理論的に導出するために、背景光源として CMB を仮定し、21cm 線を放射する HI ガスを媒質としたモデルを考える。放射輸送方程式を解けば、観測量である 21cm 線輝度温度 T_b は

$$T_b = \frac{T_s - T_{\rm CMB}}{1+z}\tau_\nu \qquad (5)$$

となる。ただし τ_ν は HI ガスの光学的厚みである。ここから等方的な (空間平均をした)21cm 線強度 T_{21} を求めるため、 式 (5) に対し光学的厚みの表式

$$\tau_\nu \approx \frac{3c^3 h A_{ul} x_{\rm HI} n_{\rm H}}{32\pi\nu^2 k_B T_s H}\left(1 - \frac{1+z}{H}\frac{dv_{p||}}{dx}\right) \qquad (6)$$

を代入したのち、宇宙論パラメータを用いて式を再度変形する。これにより、等方的な 21cm 線強度 T_{21}

の表式が得られる。

$$T_{21}(z) = 53 x_{\rm HI} \left(\frac{\Omega_b h^2}{0.02}\right) \left(\frac{\Omega_m h^2}{0.15}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \left(1 - \frac{T_{\rm CMB}(z)}{T_s(z)}\right) \left(\frac{1+z}{51}\right)^{\frac{1}{2}} \ {\rm mK} \tag{7}$$

となる。ただし、$x_{\rm HI}$、$n_{\rm H}$、$v_{p||}$ はそれぞれ宇宙の中性化率 (暗黒時代では $x_{\rm HI} \approx 1$)、陽子数密度、HI ガスの視線方向の特異速度である。式 (7) に表れる宇宙論パラメータは、現在宇宙のバリオン密度 Ω_b、現在宇宙の物質密度 Ω_m、無次元ハッブル定数 h だが、これらは ΛCDM モデルを仮定すれば値が自動的に決まる。そのため、式 (7) より、T_{21} は赤方偏移のみの関数だと考えてよい。

図 2 は、論文 [1] の結果を再現したものであり、標準宇宙論における T_{21} の値を示している。暗黒時代における等方的な 21cm 線強度の大きさは、最大でも約 40mK と非常に小さい。この概形は、図 1 で得られたスピン温度 T_s と放射温度 $T_{\rm CMB}$ の大小関係に注目すれば説明できる。暗黒時代では常に $T_s \leq T_{\rm CMB}$ となるため、T_{21} の値は常に負となるが、これは 21cm 線が吸収線として観測されることに対応する。加えて、式 (7) 中の因子 $\left(1 - \frac{T_{\rm CMB}(z)}{T_s(z)}\right)$ の絶対値が変化することで、T_{21} は図 2 のような下に凸な概形をもつことになる。

3 PBH と Hawking 放射

原始ブラックホール (PBH) とは、宇宙初期の密度揺らぎによって形成されたブラックホール (BH) であり、暗黒時代にも存在しうると考えられている。PBH の初期質量 $M_{\rm PBH}$ は形成時期 t に依存し、以下のように書ける。

$$M_{\rm PBH}(t) \approx \frac{c^3 t}{G} \approx 10^{15} \left(\frac{t}{10^{-23}{\rm s}}\right) \ {\rm g} \tag{8}$$

さらに、Hawking の考察によれば、量子論的に BH を扱うことにより、BH は温度 T_H の熱放射 (Hawking 放射) を行うことが理論的に示唆されている。Hawking 放射によって BH は次第にエネルギーを失い、質量は減少していく。Hawking 放射の放射温度 T_H は

$$T_H = \frac{hc^3}{8\pi G M k_B} \approx 10^{-7} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1} {\rm K} \tag{9}$$

で与えられ、BH 質量 M の減少に伴って放射温度 T_H は増加していく。そして、Hawking 放射によって BH 質量が完全に失われた終末の状態 ($M \approx 0$) を、BH の蒸発と呼ぶ。

Hawking 放射の影響を 21cm 線強度に反映させるためには、Hawking 放射による光子スペクトルを導出したのち、IGM と高エネルギー光子の相互作用をもとにエネルギー注入率 ϵ を決定する必要がある。PBH からの Hawking 放射を取り入れた場合、式 (3) は

$$\frac{dT_k}{dz} = \left[\frac{1}{H(1+z)}\right] \times \left[-2HT_k + \frac{x_i}{\eta_1 t_\gamma}(T_{\rm CMB} - T_k) + \frac{\chi_h \epsilon}{k_B}\right] \tag{10}$$

と書き直される。つまり、新たに注入されるエネルギーは、HI ガスに対する熱源として作用することになる。ただし、χ_h は熱源として作用するエネルギーの割合を表す。このとき、標準宇宙論における T_{21} からどのような差異を与えるか確認する。

なお論文 [1] では、PBH の形成質量 $M_{\rm PBH}$、密度 $\Omega_{\rm PBH}$、蒸発時期が異なる 3 つの単一質量モデル (表 1) を導入してこれを議論している。

表 1: PBH 単一質量モデル

Model	$M_{\rm PBH}$ (kg)	$\Omega_{\rm PBH}$	蒸発時期
A (緑 破点線)	10^{13}	1.3×10^{-5}	
B (青 破線)	10^{11}	8.2×10^{-12}	~ 30
C (紺 点線)	5×10^{10}	2.7×10^{-12}	~ 100

4 結果

表 1 の PBH 単一質量モデルを考慮し, 新たに 3 種の曲線を描いたのが図 3 である。なお、図中の黒実線は標準宇宙論に基づく T_{21} を表している。Hawking 放射は HI ガスの運動温度 T_k を上昇させるが、暗黒時代の大部分は衝突遷移が優勢であるため、それに伴いスピン温度 T_s も上昇する。したがって、$T_{\rm CMB}$ との差が緩和され、吸収線が弱くなる傾向にある。

注目すべき点が 2 点ある。1 点目は、モデル B・C で見られる、PBH 蒸発時期付近での急激な強度変化である。この急激な増光は、暗黒時代に存在しうる

他物理現象では見られない、Hawking 放射特有の現象である。2 点目は、表 1 に示したように、今回設定されている PBH 密度が非常に小さいことである。それにもかかわらず、PBH からの Hawking 放射は、理論的に予言される値からの差異を明確に映し出していることが確認できる。

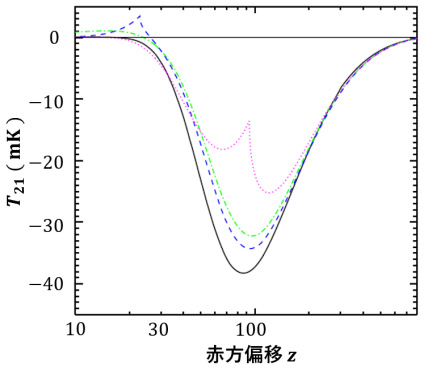


図 3: Hawking 放射を考慮した 21cm 線強度 [1]

5　まとめ

現状、PBH や Hawking 放射は直接観測例のない理論的現象だが、暗黒時代の 21cm 線観測は、標準宇宙論を超える新たな物理現象の影響を反映する可能性がある。たとえ PBH の存在量がごくわずかでも、PBH の蒸発時期に近づくにつれて理論予言からの大きな差異が現れうることが確認できた。つまり、暗黒時代の物理現象の候補のなかで、PBH からの Hawking 放射は、21cm 線強度に大幅な影響を与えうる重要な高エネルギー現象であるといえる。よって、PBH からの Hawking 放射による標準宇宙論の検証可能性は大きいと考えられる。

今後の展望として、論文 [1] の図 3 のような、PBH による Hawking 放射を取り入れた結果を再現できるようになることが挙げられる。これにより、表 1 の 3 つのモデル以外にも、様々な質量分布・密度における 21cm 線強度を考慮することが可能になる。PBH の存在に関しては、現状単一の質量だけでなく、幅を持った質量分布モデルが複数考案されている。21cm 線観測によって、PBH 質量分布に関して新たな制限が課される可能性があると考えている。

謝辞

日頃の研究活動に関して、共著者である齊藤先生、山内先生にはお忙しい中多数の助言・議論等丁寧にご指導していただき、厚く感謝申し上げます。また、本発表の講演の機会を与えてくださった夏の学校の運営の皆様に感謝申し上げます。

Reference

[1] Katherine J Mack and Daniel H Wesley. Primordial black holes in the dark ages: Observational prospects for future 21cm surveys. *arXiv preprint arXiv:0805.1531*, 2008.

——index へ戻る

SK-08

小スケール構造に基づく原始揺らぎパワースペクトルの制限とその理論的背景

京都産業大学
佐久間　竜雅

小スケール構造に基づく原始揺らぎパワースペクトルの制限とその理論的背景

佐久間 竜雅 (京都産業大学大学院 理学研究科)

Abstract

インフレーション仮説とは、宇宙が誕生直後に指数関数的な膨張を経たとする仮説であり、宇宙マイクロ波背景放射（CMB) の観測結果と整合的であることから、現在広く支持されている。この機構は、構造形成の種となる原始揺らぎを生み出し、それが後の重力不安定性によって現在の大規模構造へと成長したと考えられる。したがって、宇宙の構造を観測・解析することは、インフレーションの性質や揺らぎの統計的性質に迫るための有力な手段と考えられる。なかでも、インフレーションが予言する曲率揺らぎのパワースペクトルの形状や振幅を制限する試みが重要であり、原始ブラックホール、恒星ストリーム、CMB のスペクトル歪みといった観測対象が利用されている。CMB 観測は比較的大スケールのパワースペクトルには制限を与えられるものの、小スケールに対しては制限できない。そこで、パワースペクトルが小スケールでバンプ（局所的な増幅）を持つような仮定を置き、そのような初期条件のもとで宇宙がどのように進化するかを数値シミュレーションで求める。この結果と先述したような観測とを組み合わせることで制限を課すのが有効である。本発表では、そうしたシミュレーションと観測結果の比較を通じて、CMB では予言できないスケールにおけるパワースペクトルへの制限が可能であることを紹介するとともに、これらの手法の理論的背景と先行研究のレビューを行う。

1　イントロダクション

現代宇宙論の根幹を担うインフレーション理論は、CMB の大スケールでの一様性などと整合的で、広く支持されている仮説である。この機構は構造形成の種となる原始揺らぎを生み出すので、宇宙の大規模構造の観測、解析はインフレーションの性質や揺らぎの統計的性質に迫れる有力な手段である。なかでも、インフレーションが予言する曲率揺らぎの原始パワースペクトルの形状や振幅を制限することで、多数提案されているインフレーションモデルを絞り込めることが期待される。しかし、CMB はシルク減衰 (Silk damping) や観測装置の分解能の問題で小スケールへの制限は弱くなってしまう (図 1)。このため、原始パワースペクトルが、CMB では制限できないような小スケールで局所的に増幅されていると仮定する (例えば図 2 のような原始パワー)。この仮定の下で構造形成の進化を追い、原始ブラックホールや恒星ストリーム、CMB スペクトル歪みや矮小球状銀河などの観測との比較を行うことで、小スケール領域のパワースペクトルに制限を課すことを目的とする。この領域は非ガウス性や非線形性に敏感であり、原始非ガウス性の検証も可能にすると考えられる。以下、先述の観測対象が、原始パワースペクトルにどのような制限を与えるかについて概観する。

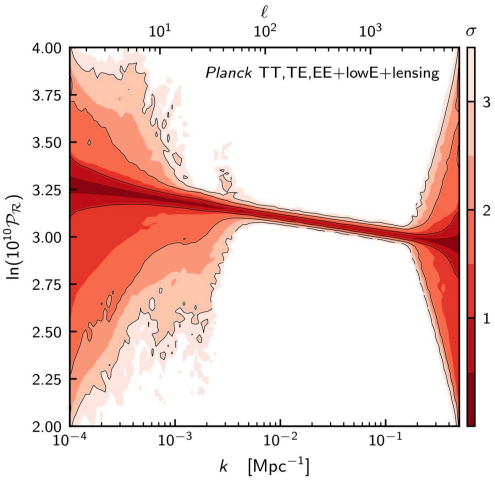


図 1: (Plank Collaboration 2020) より、CMB による原始パワースペクトルへの制限

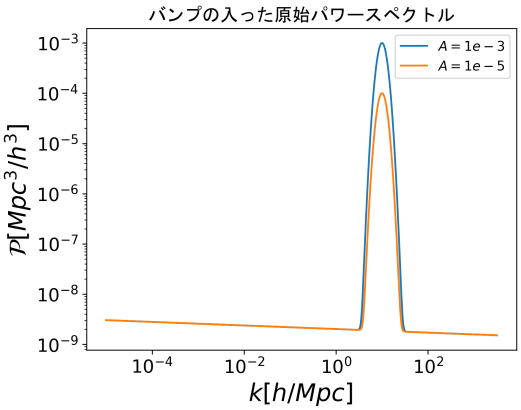


図 2: 小スケールにバンプを入れた原始パワースペクトル,A はバンプの振幅である。

2　原始ブラックホール (PBH)

原始パワーへ制限を与えられる観測対象の一つが、原始ブラックホール (以下 PBH) である。一例として、本節では PBH の質量関数が原始パワースペクトルにどのように制限を与えるかを (Byrnes et al. 2019) や (Byrnes et al.　2018) を参照しながら述べる。

宇宙の初期に大きな密度揺らぎが存在すると、その領域が重力崩壊して原始ブラックホールが形成される可能性がある。PBH は大規模構造と比べるとはるかに小さいスケールで、宇宙初期の性質によって形成率が大きく左右される可能性がある。したがって、CMB では制限を与えられないような小スケールにおける原始パワースペクトルへの制限を与えることや、原始非ガウス性のトレーサーとしての活躍が期待される観測対象である。現在行われている PBH プローブとして代表的なものは、ブラックホールの蒸発によるガンマ線放射や重力レンズ効果、または、連星合体による重力波の観測などである。これらの観測から PBH の存在量を推定しそれに合う原始パワースペクトルの振幅を検証するのが有効である。以下 PBH 質量関数を用いた原始パワーへの制限をもう少し詳しく見ていく。標準的な Press Schechter 的な議論により、PBH の質量関数は以下のように予測される。(e.g., Byrnes et al 2018)

$$f(M) = \frac{1}{\Lambda_{CDM}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2\left(M_H\right)}} \times \exp\left[-\frac{\left(\mu^{\frac{1}{\gamma}} + \delta_c\left(M_H\right)\right)^2}{2\sigma^2\left(M_H\right)} \right] \frac{M}{\gamma M_H} \mu^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\frac{M_{eq}}{M_H}} d\ln M_H \tag{1}$$

ここで、M は PBH の質量、γ はパラメータ、M_H はホライズン質量、$\mu \equiv \frac{M}{kM_H}$($k$ はパラメータ)、M_{eq} は放射と物質の密度パラメータが等しくなった時のホライズン質量である。$\sigma^2(M)$ は、質量スケール M でスムージングを行った時の密度揺らぎの分散で

$$\sigma^2\left(M\right) = \int \frac{d^3k}{\left(2\pi\right)^3} W^2\left(kR\right) P_L(k) \tag{2}$$

である。$P_L(k)$ は線形密度揺らぎのパワースペクトルである。また $W(kR)$ はウィンドウ関数で、ここではガウシアンウィンドウを仮定している。加えて原始パワースペクトルを与えることで対応する PBH の質量関数を計算することができる。逆に、PBH の質量関数を制限できれば PBH のスケールに対応した領域の原始パワースペクトルに制限を与えることができる。例えば、(Byrnes et al.　2019) では、図 3 に示されるように原始パワースペクトルへの制限が与えられた。ここでは、異なる形の原始パワースペクトルに対しても似た形の PBH 質量関数が得られていたことから、高い精度での PBH 質量関数決定が必要であることが主張されている。実際、図 3 に示されるように、他の観測手法と比べて原始パワースペクトルの振幅に対する制限が緩やかである。質量関数は PBH の存在量を直接表せる物理量である反面、それによる制限は困難を伴うことが示唆された。観測手法の進化や他側面からのアプローチに期待が寄せられるであろう。

3　恒星ストリームと矮小球状銀河

また、矮小球状銀河や恒星ストリームといった小スケールの構造を利用することも試みられてきた。これらはサブハロー数に敏感な観測対象であり、原始パワースペクトルの制限に用いられる。本節では、これらの観測対象の利用方法や、一例として (Ando et al.　2022) が行った解析結果を取り上げる。

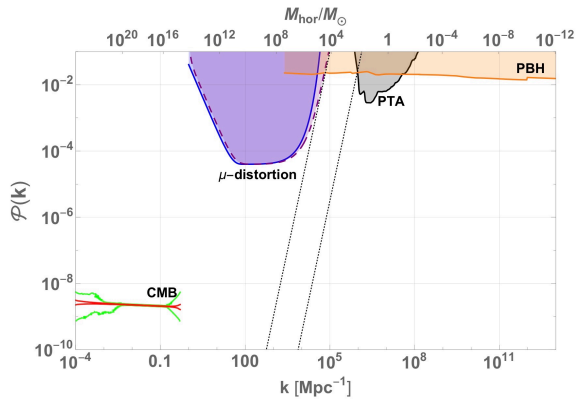


図 3: (Byrnes et al. 2019) より、PBH の質量関数によって制限された原始パワースペクトル。μ-distortion は CMB の μ 歪み (後述) によって得られた制限で、PTA はパルサータイミングアレイによって与えられた制限である。

矮小球状銀河 (dSphs) とは $10^5 \sim 10^8$ 太陽質量程度の軽い銀河である。ΛCDM モデルでは、dSphs はサブハローに対応すると考えられ、原始パワースペクトルの小スケール領域にバンプを入れてシミュレーションを行うことで dSphs 数の変化を見ることができる。観測で得た dSphs の数とシミュレーションが予言する dSphs の数、標準モデルが予言する dSphs の数を利用すると、原始パワースペクトルに制限をかけることができる。((Ando et al. 2022)、図 4) ただし、dSphs を用いる場合、dSphs が暗い天体であることによって発生する観測バイアスや、サブハローがすべて dSphs になるわけではない点に注意が必要である。

次に、恒星ストリーム (Stellar Stream) とは、恒星が細長く伸びた帯状に分布している構造で、主に銀河の重力場の中で引き伸ばされた星団や矮小銀河の名残である。サブハローなどの小スケール構造が恒星ストリーム付近を通過すると、通過したサブハローの重力により、通り道付近の恒星ストリームはサブハローに吸い寄せられ、元の恒星ストリームに穴が開く形になる。小スケールで原始パワースペクトルの振幅が大きいと、サブハローも多くなることが予想され、恒星ストリームの剥ぎ取りも活発になることが予想される。この現象を利用することでダークマターサブハローの数に制限を与えることができ、これを用いて小スケールの原始パワースペクトルを制限することができる。((Ando et al. 2022)、図 4)

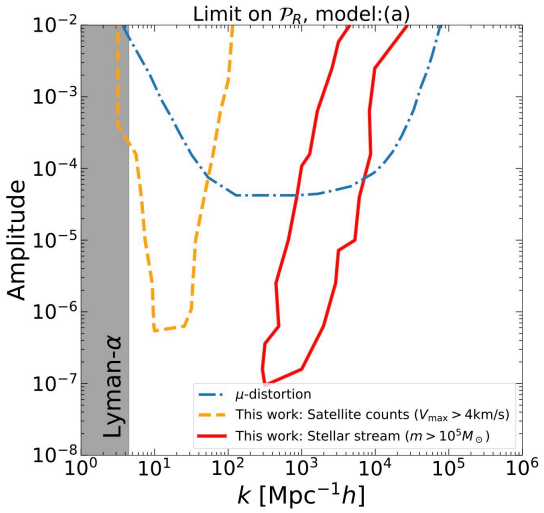


図 4: (Ando et al. 2022) による原始パワースペクトルへの制限である。準解析的モデル SASHIMI を用いて原始パワースペクトルにバンプを入れた場合と標準 CDM モデルの予言の比較が観測結果と整合的になることを要請し上記の制限を設けた。

4 CMB スペクトル歪み

CMB スペクトル歪みは、黒体輻射と非常によく一致する CMB に生じている歪みであり、主に r 型、y 型、μ 型の歪みが存在する。本節では特に、y 型の歪みについて取り上げる。この効果に関する最近の進展に関する包括的なレビューとして、(Chuluba et al. 2015) を合わせて参照されたい。例えば、仕切りで仕切られた箱の中に T_1, T_2 の温度を持つ光子がそれぞれ入っている場合を考える。各部屋の光子は温度 T_1, T_2 の黒体輻射を放つが、仕切りを外しこれらが混ざり合うとその平均温度 $\frac{T_1+T_2}{2}$ の黒体輻射に歪みが混ざったスペクトルになる。この歪みを y 型の歪み (y-distortion) という。CMB は温度揺らぎを持つため、違う温度を持つ場所同士が混ざり合うことで y 歪みが発生すると考えられる。図 4 に書かれる μ-distortion の μ 型の歪みによる原始パワーへの制限も示されている。μ 型の歪みは、高赤方偏移時代、系にエネルギーが注入された場合に注入されたエネルギーが完全に熱化する時間がなく、光子数が保存されないことによって生じる歪みを指す。

5　まとめ

ここまで見てきたように、CMB で制限できないスケールの原始パワースペクトルに対しても様々な対象を利用して原始パワースペクトルへの制限を与えることができている。一方で PBH の質量関数を用いた方法に関しては高い精度が求められるという困難があった。矮小球状銀河や恒星ストリームを用いた手法に関しては、矮小球状銀河については観測の不確実性やシミュレーション内ではサブハローのすべてを矮小球状銀河として扱えないことによる難しさがあることや、恒星ストリームについては、比較的小スケールの構造であるためシミュレーションの分解能による困難や物理モデルの難しさが挙げられる。また、そもそもサブハローをシミュレーション空間内で探す手法として不確実性の低いものが少ないという現状がある。これらの課題は残るものの、将来のより高精度な観測や、より詳細な N 体シミュレーションの進展は、小スケールでの原始パワースペクトルにさらに厳しい制限を課し、インフレーション期や暗黒物質の性質に関する深い洞察をもたらすことが期待される。

Reference

Planck Collaboration 2020 A&A 12, A10

Christian T. Byrnes, Philippa S. Cole & Subodh P. Patil, JCAP 06 (2019) 028

Christian T. Byrnes, Mark Hindmarsh, San Young, & Michael R.S. Hawkins, JCAP 08 (2018) 041

Shin'ichiro Ando, Nagisa Hiroshima, & Koji Ishiwata, PRD 11 2022

Chuluba, Jens, Hamann, Jan, & Patil, Subodh P., International Journal of Modern Physics D 08 2015 1530023

——index へ戻る

SK-09

DESI による高光度赤外線銀河とクエーサーの観測に基づく原始非ガウス性の制限

東京大学
小川　翔大

DESI による高光度赤外線銀河とクエーサーの観測に基づく原始非ガウス性の制限

小川 翔大 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

本発表では (Chaussidon et al. 2024) のレビューを行う。ΛCDM（標準的な宇宙模型）ではガウシアン揺らぎのインフレーションを考えるため、局所型原始非ガウス性（LPNG）は存在しない。そのため、LPNG が観測で見つかれば、インフレーションモデルに修正が必要となる。現在得られている最も強い LPNG の制限は Planck 衛星の観測した CMB の解析によるものである。一方で、LPNG が存在するならば、3 次元銀河クラスタリングのパワースペクトルにおいて極めて大スケールの振幅が大きくなる。CMB による制限はコスミックバリアンスによる精度の限界に近づきつつあるため、より強い制限には CMB より多くのモードを使うことのできる 3 次元銀河クラスタリングを用いる手法が有望である。

DESI は、2021 年から広い領域にわたって高光度赤外線銀河（LRG）とクエーサー（QSO）等の観測を行っている大規模分光装置である。特に、長波長スケールにおいて過去最大規模の銀河分光サーベイである eBOSS を上回る統計精度が期待できるため、LPNG の解析に適している。そこでこの研究では、DESI の最初のデータリリース（DR1）から得られた LRG（約 163 万天体）と QSO（約 119 万天体）の大規模クラスタリングデータを用いてその長波長のパワースペクトルを解析し、LPNG の制限を行った。その結果、大規模構造を用いた解析で最も良い制限を与えることができ、標準宇宙論と無矛盾な結果であった。

1 Introduction

現代の標準宇宙論の基盤であるインフレーション理論は、初期宇宙が指数関数的な膨張を経たとする仮説である。この理論は標準的なビッグバン理論における地平線問題や平坦性問題を自然に解決し、現在では Planck 衛星による CMB の精密観測を通じて高精度で支持されている (Planck collab 2020)。しかし、インフレーションを起こした場の数や種類などによって多数のモデルが乱立しているというのが現状であり、これらをふるいにかけることは重要な課題である。

インフレーションモデルの制限には原始スカラー揺らぎのパワースペクトル、原始重力波、原始非ガウス性などが用いられる。そこで本レビュー対象論文 (Chaussidon et al. 2024) では、とくに局所型原始非ガウス性（Local-type Primordial Non-Gaussianity, LPNG）に着目する。

用いるデータは分光器 DESI の 1 回目のデータリリース（DR1）から得られた高光度赤外線銀河（Luminous Red Galaxy, LRG）とクエーサー（Quasar, QSO）の分光測定結果である。DESI は一度に約 5000 個の天体を分光することができ、天球の約 3 分の 1 の領域を 5 年かけて観測する計画の途上にある。DR1 はその観測の 1 年半分のデータに対応するが、すでに観測銀河数において過去最大規模の分光データとなっている。

2 理論

2.1 局所型原始非ガウス性

局所型原始非ガウス性（LPNG）$f_{\rm NL}^{\rm loc}$ とは、宇宙初期の重力ポテンシャル Φ のガウス分布からのズレを表す指標の一つであり、次式で定義される：

$$\Phi = \Phi_g + f_{\rm NL}^{\rm loc}(\Phi_g^2 - \langle\Phi_g^2\rangle) \tag{1}$$

ここで、Φ_g はガウス分布に従う場である。(1) は非ガウス性をガウス場の 2 次で摂動的に記述したモデルであり、$f_{\rm NL}^{\rm loc}$ はその大きさを表す係数である。$f_{\rm NL}^{\rm loc} = 0$ であれば、Φ は完全なガウス分布に従う。仮に $f_{\rm NL}^{\rm loc} \sim \mathcal{O}(1)$ のような非ゼロ値が検出されれば、現在主流の単一スカラー場によるスローロールインフレーションが棄却される (Creminelli et al. 2004)。

重力ポテンシャル Φ は、光子やダークマターの密度揺らぎの初期条件を与えるため、CMB や銀河クラスタリングを用いて、その挙動を知ることができ、その結果 $f_{\rm NL}^{\rm loc}$ の推定ができる。現在得られている最も強い $f_{\rm NL}^{\rm loc}$ の制限は Planck 衛星による CMB の測定結果によるものであり

$$f_{\rm NL}^{\rm loc} = 0.9 \pm 5.1 \quad (68\%\,\text{C.L.}) \tag{2}$$

と得られている (Planck collab 2020)。これは 1σ の範囲で 0 と無矛盾であり、まだ LPNG は見つかっていない。CMB による $f_{\rm NL}^{\rm loc}$ の制限はコスミックバリアンスの限界に既に近づきつつある。これに対して、より多くのモード情報が得られる 3 次元銀河クラスタリングの解析は、PNG の探索においてますます重要になる。

2.2 スケール依存バイアス

銀河クラスタリングの解析では、銀河数密度揺らぎの相関に着目する。まず、ダークマターの密度揺らぎ δ_c のフーリエモードの 2 点相関として、ダークマターのパワースペクトルを次のように定義する：

$$\langle \delta_c(\boldsymbol{k})\delta_c(\boldsymbol{k}')\rangle = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')P_c(k) \tag{3}$$

同様に、銀河数密度揺らぎ δ_g に対しても、銀河パワースペクトル P_g が定義できる。銀河は一般にダークマターが高密度な領域に形成されると考えられるため、最も単純なモデルでは

$$\delta_g(\boldsymbol{k}) = b\delta_c(\boldsymbol{k}) \tag{4}$$

と書く。この比例定数 b は銀河バイアスと呼ばれる。$f_{\rm NL}^{\rm loc}$ が 0 でない場合には、大スケールにおいて b は定数ではなくなり、波数依存性が生じる（スケール依存バイアス）。その結果、銀河パワースペクトルは以下のようになる (Dalal et al. 2008)：

$$P_g(k,z) = \left(b_1(z) + \frac{b_\Phi(z)}{T_{\Phi\to\delta}(k,z)} f_{\rm NL}^{\rm loc}\right)^2 \times P_c(k,z) \tag{5}$$

ここで、$b_1(z)$ は線形バイアス、$T_{\Phi\to\delta}(k,z)$ は重力ポテンシャルからダークマター密度揺らぎへの遷移関数である。遷移関数の波数依存性によって、大スケールのパワースペクトルの振幅が増幅される。銀河クラスタリングの観測からパワースペクトルを測定し、この効果を調べることにより、$f_{\rm NL}^{\rm loc}$ を推定することができる。

実際の観測では、観測的効果によってパワースペクトルは歪む：

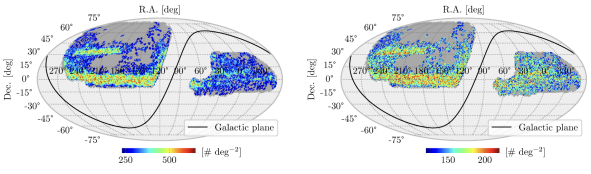
$$P(k,\mu) = \frac{\left[b_1(z_{\rm eff}) + \dfrac{b_\phi(z_{\rm eff})}{T_{\Phi\to\delta}(k,z_{\rm eff})} f_{\rm NL}^{\rm loc} + f(z_{\rm eff})\mu^2\right]^2}{\left[1+\dfrac{1}{2}(k\mu\Sigma_s)^2\right]^2} \times P_{\rm lin}(k,z_{\rm eff}) + s_{n,0} \tag{6}$$

ここで、μ は視線方向とモード $\boldsymbol{k}$ のなす角の余弦である。$f(z_{\rm eff})\mu^2$ と $1+\frac{1}{2}(k\mu\Sigma_s)^2$ はどちらも銀河の固有速度によるドップラー効果によって、動径方向距離を誤って観測する効果（Redshift Space Distortion, RSD）を表す。$f(z_{\rm eff})\mu^2$ は線形領域における固有速度によるものであり、$1+\frac{1}{2}(k\mu\Sigma_s)^2$ は非線形な固有速度による効果を近似的に表したものである。

3 データ

3.1 LRG と QSO

本研究では、DESI の DR1 に含まれる LRG と QSO を用いる。LRG は $0.4 < z < 1.1$、QSO は $0.8 < z < 3.1$ の赤方偏移範囲に分布する。使用する銀河数は LRG が 2130621 個、QSO が 1189129 個である。これは、従来最大規模であった eBOSS に比べて、LRG では約 8 倍、QSO では約 2.5 倍の観測銀河数を有する。図 1 に、LRG（左）および QSO（右）の角度方向の銀河密度分布を示す。図 1に見られるような角



(a) DESI DR1 LRG. (b) DESI DR1 QSO.

図 1: DESI DR1 の LRG（左）、QSO（右）の角度方向の密度分布。白色領域は観測未実施。

度方向の密度揺らぎは、銀河のターゲット選定が撮像サーベイの品質に依存することに起因する。これは特に大スケールにおけるパワースペクトルの測定に系統誤差を引き起こす。

3.2 パワースペクトルの測定

銀河の分布は、宇宙原理により本質的に等方であり、そのため銀河パワースペクトル $P_g(\boldsymbol{k})$ は波数の大きさ k のみに依存する。しかし実際の観測では、RSD などの観測的効果により、視線方向と垂直方向で異なる情報が得られるため、パワースペクトルは波数 $\boldsymbol{k}$ と視線方向のなす角 θ に対する依存性を持つ。そこで、このような異方性を定量化するため、$\mu = \cos\theta$ に対してルジャンドル展開する：

$$P_g(k,\mu) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(k)\mathcal{L}_l(\mu) \tag{7}$$

ここで、$\mathcal{L}_l$ は l 番目のルジャンドル多項式である。ルジャンドル多項式の直交性により

$$P_l(k) = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1} d\mu P(k,\mu)\mathcal{L}_l(\mu) \tag{8}$$

となる。本解析では monopole（$l=0$）と quadrupole（$l=2$）のみを観測銀河データから測定する。

実際の観測データから多重極子 $P_l(k)$ を測定するには、観測領域の不完全性を考慮する必要がある。そこで、本解析では、観測データとランダムカタログの両方を用いて銀河数密度を推定し、パワースペクトルを測定する山本エスティメータを用いる。このエスティメータでは、以下のように平均のパワースペクトル $\hat{P}_l(\boldsymbol{k}_\mu)$ を測定する：

$$\hat{P}_l(k_\mu) = \frac{2l+1}{AV_{k_\mu}}\int_{V_{k_\mu}} d\boldsymbol{k}\int d\boldsymbol{x}_1\int d\boldsymbol{x}_2 e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)} \mathcal{F}(\boldsymbol{x}_1)\mathcal{F}(\boldsymbol{x}_2)\mathcal{L}_l(\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}_1) - \mathcal{N}_l \tag{9}$$

ここで、$\mathcal{L}_l$ の引数を $\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}_1$ としている点が重要である。この工夫により高速フーリエ変換（FFT）を使うことが可能となり、計算時間が大幅に短縮される。

4 系統誤差の軽減手法

4.1 Weight

観測銀河データには、系統誤差の補正を目的として重み付け（weighting）が施される。これは、統計的なバイアスを低減するため、測定に対する銀河ごとの寄与を適切に調整するものである。一つの銀河に対するトータルの重みは、以下のように表される：

$$w_{\rm tot} = w_{\rm comp}\times w_{\rm sys}\times w_{\rm zfail} \tag{10}$$

$w_{\rm comp}$ は、DESI の観測においてファイバー本数の制約により観測されなかった銀河の影響を補正するための重みであり、各ファイバーのパトロールエリアにおけるターゲット総数に基づいて計算される。

$w_{\rm sys}$ は、銀河ターゲットの選定が撮像サーベイの観測条件（星密度、PSF サイズ、赤外線背景など）に依存して偏りが生じることを補正する重みである。これは 12 種類の観測変数と銀河数密度との関係に対して、線形回帰やランダムフォレストを用いて推定される。

$w_{\rm zfail}$ は、天候や観測条件により赤方偏移測定に失敗した銀河が生じることによって生まれる統計的欠損を補正する重みである。

4.2 幾何学的補正

4.2.1 Window Function

観測装置の視野制限、恒星の重なり、天の川のダスト、あるいは観測未実施の領域の存在などにより、天球の一部では銀河を観測することができない。このような観測の不完全性は、選択関数（window function）$W(\boldsymbol{x})$ を用いて表現される。

この関数を用いると、推定される銀河パワースペクトル多重極子の期待値は次式で与えられる：

$$\langle\hat{P}_l(k)\rangle = \frac{2l+1}{A}\int\frac{d\Omega_k}{4\pi}\int d\boldsymbol{s}_1\int d\boldsymbol{s}_2 e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{s}_2-\boldsymbol{s}_1)} W(\boldsymbol{s}_1)W(\boldsymbol{s}_2)\mathcal{L}_l(\hat{k}\cdot\hat{s}_1) \tag{11}$$

4.2.2 Radial Integral Constraint

パワースペクトルの推定には、実際の観測領域と同一の空間領域・赤方偏移分布 $n(z)$ を持つランダムカタログを用いる。一般に、この赤方偏移分布は「シャッフリング法（shuffling method）」により、実データの赤方偏移をランダムに付け替えることで再現される。

しかしこの方法では、実データ中の構造がランダムカタログに写り込み、動径方向の密度揺らぎモードが抑制されてしまう。これを Radial Integral Constraint (RIC) と呼ぶ。

この効果は、ウィンドウ関数に対する補正項として表現され、以下のように記述される：

$$\mathcal{W} \to \mathcal{W} - \mathcal{W}^{\mathrm{RIC}} \tag{12}$$

5 Results

DESI DR1 から得られた LRG および QSO サンプルの観測データを用いて、多重極展開したパワースペクトル（monopole および quadrupole）をもとに $(b_1, f_{\mathrm{NL}}^{\mathrm{loc}})$ のベイズ推定を行った。その結果を 図 2 に示す。

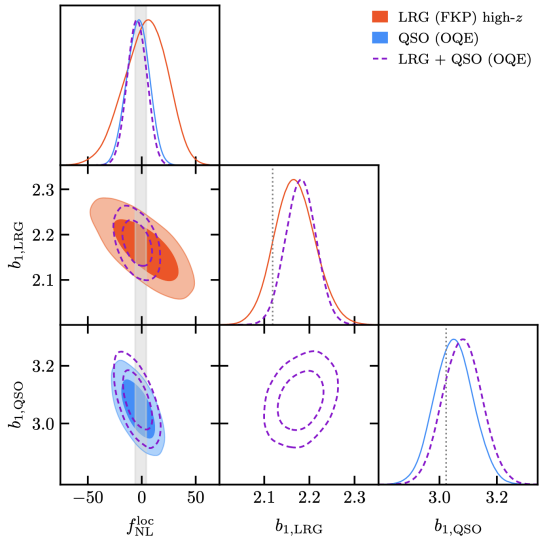


図 2: $(b_1, f_{\mathrm{NL}}^{\mathrm{loc}})$ の推定結果。グレーの帯は Planck 2018 による制限値を示す。

最終的に得られた $f_{\mathrm{NL}}^{\mathrm{loc}}$ の 68% 信頼区間は以下の通りである：

$$f_{\mathrm{NL}}^{\mathrm{loc}} = -3.6^{+9.0}_{-9.1} \quad (68\%\,\mathrm{C.L.}) \tag{13}$$

6 Conclusion

本研究では、DESI の初回データリリース（DR1）に含まれる LRG および QSO サンプルを用いて、大スケールの銀河クラスタリングの情報から局所型原始非ガウス性（$f_{\mathrm{NL}}^{\mathrm{loc}}$）の制限を行った。パワースペクトルの多重極子（$l = 0, 2$）を用いたベイズ推定により、以下の制限を得た：

$$f_{\mathrm{NL}}^{\mathrm{loc}} = -3.6^{+9.0}_{-9.1} \quad (68\%\,\mathrm{C.L.}) \tag{14}$$

この制限は、従来の eBOSS による解析結果（$-23 < f_{\mathrm{NL}}^{\mathrm{loc}} < 21$）に比べて約 2.3 倍の精度向上を達成し、Planck 2018 の CMB 解析結果（$f_{\mathrm{NL}}^{\mathrm{loc}} = -0.9 \pm 5.1$）とも矛盾しない結果となった。

本解析では、系統誤差を避けるため保守的に $k_{\mathrm{min}} = 0.006\,h\,\mathrm{Mpc}^{-1}$ のスケールから解析を行ったが、今後の DESI 完成後のフルデータセットを用い、$k_{\mathrm{min}} = 0.003\,h\,\mathrm{Mpc}^{-1}$ まで拡張できれば、$f_{\mathrm{NL}}^{\mathrm{loc}}$ の誤差を $\sigma(f_{\mathrm{NL}}^{\mathrm{loc}}) \sim 6.5$ 程度まで縮小できると期待されている。

さらに、今後のすばる望遠鏡の PFS プロジェクトや、人工衛星 SPHEREx の観測開始により、より広く・高精度な銀河分布データが得られる見込みである。これらのデータと組み合わせることで、Planck CMB の制限を上回る $f_{\mathrm{NL}}^{\mathrm{loc}}$ の精密測定が期待される。

Acknowledgement

天文・天体物理若手夏の学校を運営して下さったスタッフの方々、支援して下さった方々に心より感謝申し上げます。また天文・天体物理若手夏の学校に参加するにあたって、ご指導ご鞭撻を賜りました先生、先輩方に心より感謝申し上げます。

Reference

Chaussidon et al. "Constraining primordial non-Gaussianity with DESI 2024 LRG and QSO samples." arXiv preprint arXiv:2411.17623 (2024).

Akrami, Yashar, et al. "Planck 2018 results-IX. Constraints on primordial non-Gaussianity." Astronomy & Astrophysics 641 (2020): A9.

Creminelli, Paolo, and Matias Zaldarriaga. "A single-field consistency relation for the three-point function." Journal of Cosmology and Astroparticle Physics 2004.10 (2004): 006.

Aghanim, Nabila, et al. "Planck 2018 results-VI. Cosmological parameters." Astronomy & Astrophysics 641 (2020): A6.

N. Dalal, O. Doré, D. Huterer and A. Shirokov, Imprints of primordial non-Gaussianities on large-scale structure: Scale-dependent bias and abundance of virialized objects, Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology 77 (2008).

——index へ戻る

SK-10

宇宙論パラメータの推定を目的としたパワースペクトル解析による統計モデルの開発

京都産業大学
新田　悠翔

宇宙論パラメータの推定を目的としたパワースペクトル解析による統計モデルの開発

新田 悠翔 (京都産業大学大学院 理学研究科 物理学専攻)

Abstract

バリオン音響振動をパワースペクトルを用いて調べることで，ダークエネルギーの性質を知ることができる．また，赤方偏移空間変形効果や Alcock-Paczyński 効果を反映したパワースペクトルの多重極モーメントを調べることで，宇宙論パラメータにより良い制限ができる．
本論文では，１つの宇宙論パラメータセットに対して観測とシミュレーション結果をパワースペクトルの多重極モーメントで比較し，観測との適合度を出す手法について紹介する．特にダークエネルギーの状態方程式パラメータに制限を課すために，さまざまな宇宙論パラメータに基づくシミュレーションデータと 3D 銀河分布の観測データをそれぞれのパワースペクトルを用いて比較することで，どのようなダークエネルギーモデルがより確からしいか議論する手法の開発を行った．さらに，適合度を機械学習モデルで学習させることで，シミュレーションをしていない宇宙論パラメータに対しても結果を得ることができるシミュレーションに基づく推論の導入を目指す．

1　イントロダクション

現代宇宙論では，現在時刻に近い宇宙で，宇宙は加速膨張していることが遠方超新星の観測から示されている．宇宙の加速膨張を表現するモデルとしてダークエネルギーを組み込んだ宇宙論モデルが用いられている．近年の宇宙論研究では，現在の宇宙の膨張率を表すハッブル定数の値が一致しないという**ハッブルテンション**が議論されている．

宇宙の大規模構造の観測としては，銀河の 3D クラスタリングの測定が最も基本的な手法になっている．その中でも，Sloan Digital Sky Survey(SDSS) は完了した計画のうち最大となっている．観測データと理論モデルは統計量で比較する必要があり，その 1 つとしてゆらぎのパワースペクトルがあげられる．パワースペクトルにはバリオン音響振動に関するピークが見られる．また，赤方偏移歪みによる多重極モーメントで比較することも重要である．この比較により，宇宙論モデル内の宇宙論パラメータに制限をかけることができるが，そのためには数値シミュレーションをたくさん行う必要がある．数値シミュレーションには莫大な計算コストがかかってしまうため，機械学習を用いたエミュレータを導入することで計算コストを抑えることが実現されている．

本論文では，宇宙論パラメータの関数として観測データとの適合度を予測するシミュレーションに基づく推論を導入するために，1 つの宇宙論パラメータセットに対して観測とシミュレーション結果をパワースペクトルの多重極モーメントで比較し，観測との適合度を出す手法を確立する．

2　観測データ

本論文では観測データとして Sloan Digital Sky Survey(SDSS) を使用した [1]．SDSS 第三期の計画の一つであった Baryon Oscillation Spectroscopic Survey (BOSS) が残した銀河のデータを使用した．観測データは 4 つあり，北 (NGC) と南 (SGC) の両方について，2 つの重ならない赤方偏移ビン（「$z1$」と「$z3$」）内の異なる銀河サンプルに対する測定を意味する．これ以降「低赤方偏移」(「高赤方偏移」) と呼ぶ．「$z1$」(「$z3$」) は、それぞれ赤方偏移範囲 $0.2 < z < 0.5(0.5 < z < 0.75)$ に対応し、その有効赤方偏移は $z_{\rm eff} = 0.61, 0.38$ である．

[1] で採用された推定量は，サーベイのウィンドウ関数と畳み込まれたパワースペクトル多重極を与え，これは行列とベクトルの積で表現できる．したがって，ウィンドウ畳み込みされたパワースペクトルは

$$P^{\rm conv} = WMP^{\rm true,flat\text{-}sky} \tag{1}$$

である．$P^{\rm conv}$ は畳み込みされたパワースペクトル多重極のベクトルであり，$P^{\rm true,flat\text{-}sky} = \{P_0, P_2, P_4\}$ は真の（畳み込まれていない）パワースペクトル多重極のベクトルで、モノポール，クアドルポール，ヘキサデカポールを並べたものである．W はサーベイウィンドウ関数で 200×200 の行列になっており，パワースペクトルを畳み込みする．M は広角効果により奇数の多重極を誘導する行列で 1200×2000 となっている．

3　モックデータの解析

理論モデルとして，Dark Quest Simulation によるシミュレーション結果のモックカタログ [2] を用いた．観測データと比較するためのモックカタログの解析手順を紹介する．

3.1　赤方偏移空間歪み

観測をする際, 銀河までの距離は赤方偏移 z によって測定する．しかし, 宇宙膨張による赤方偏移と銀河の特異速度による赤方偏移を分けることはできない．それにより，実空間から歪んだように見えてしまう効果を赤方偏移歪みという．大スケールではサテライト銀河は銀河団の中心に向かって運動する．視線方向に対して銀河団の奥にある銀河は青方偏移，視線方向に対して銀河団の手前にある銀河は赤方偏移しているように見える．そのため，視線方向が特別な方向になり，非等方になる．

3.2　多重極パワースペクトル

赤方偏移空間でのパワースペクトル $P(k,\mu)$ をルジャンドル多項式 L_ℓ で多重極展開すると

$$P(k,\mu) = \sum_{\ell=0,2,4,\cdots} L_\ell(\mu) P_\ell(k) \tag{2}$$

$$P_\ell(k) = \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^{1} P(k,\mu) L_\ell(\mu) d\mu \tag{3}$$

$P_\ell(k)$ という μ 依存性がない銀河の多重極パワースペクトルが得られる．視線方向と波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ のなす角を θ とし，$\mu = \cos\theta$ とする．

3.3　宇宙論パラメータ

宇宙論パラメータセットには，flatΛCDM モデルの宇宙論パラメータと現在 $(a = 1)$ ダークエネルギーの状態方程式パラメータ w_0 とニュートリノ質量の合計のパラメータ M_ν の値が入っている．今回使用した宇宙論パラメータセットの一つはいかのようになっている．表 1 を見ると，Ω_m と w_0 が flatΛCDM

表 1: 宇宙論パラメータセット

宇宙論パラメータ	記号	値
バリオン密度	$\Omega_b h^2$	0.0224
CDM 密度	$\Omega_{cdm} h^2$	0.120
物質密度	Ω_m	0.231
原始密度ゆらぎの振幅	$\ln(10^{10} A_s)$	3.037
原始密度ゆらぎのスペクトル指数	n_s	0.967
ダークエネルギーの状態方程式パラメータ	w_0	-1.365
ニュートリノ質量	M_ν	0.06

モデルに比べて値をずらして，振っていることがわかる．Dark Quest Simulation によって設定された Ω_m と w_0 は図 1 より，縮退していることがわかる．

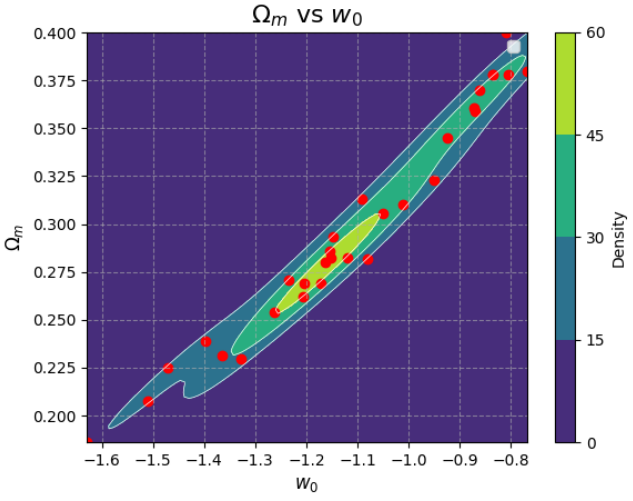


図 1: Ω_m と w_0 の縮退

3.4 Alcock-Paczyński 効果

銀河の直接の観測量は天球面上の位置 (RA, DEC) および, 赤方偏移 z である．銀河の 3 次元地図を作る際には, z を共動距離に変換する必要がある．その際，宇宙論パラメータが必要であり，宇宙論モデルを仮定する必要がある．真の宇宙論モデルは未知であるので仮定したモデルとの不一致により，距離-赤方偏移関係が本来のものとは異なり, 銀河の地図が視線方向と角度方向にそれぞれ異なる割合で歪む．解析する各々のシミュレーションで仮定されている宇宙論パラメータに応じて, シミュレーションボックスを歪めて解析することで, AP 効果を実装することが必要である [3].

$$k_{\perp}^{\rm fid} = \alpha_{\perp} k_{\perp} = \frac{D_A^{\rm target}(z)}{D_A^{\rm fid}(z)} k_{\perp}, \tag{4}$$

$$k_{\parallel}^{\rm fid} = \alpha_{\parallel} k_{\parallel} = \frac{H^{\rm fid}(z)}{H^{\rm target}(z)} k_{\parallel} \tag{5}$$

ここで, D_A は角径距離で, $H(z)$ はハッブルパラメータである．上付き添え字の fid(fiducial) は基準となる宇宙論モデル（仮定したモデル）に対するもので, target は真の宇宙論モデルに対応する．これらを用いると, パワースペクトルを書き換えることができて

$$P_{\ell}^{\rm fid} = \frac{2\ell+1}{2\alpha_{\perp}^2\alpha_{\parallel}} \int_{-1}^{1} P(k,\mu) L_{\ell}(\mu^{\rm fid}) d\mu^{\rm fid} \tag{6}$$

となる．ここで, k と μ は以下のようにあらわされる．

$$k(k^{\rm fid}, \mu^{\rm fid}) = k^{\rm fid} \frac{1}{\alpha_{\perp}} \left[1 + (\mu^{\rm fid})^2 \left(\frac{\alpha_{\perp}^2}{\alpha_{\parallel}^2} - 1 \right) \right]^{1/2}, \tag{7}$$

$$\mu(\mu^{\rm fid}) = \mu^{\rm fid} \frac{\alpha_{\perp}}{\alpha_{\parallel}} \left[1 + (\mu^{\rm fid})^2 \left(\frac{\alpha_{\perp}^2}{\alpha_{\parallel}^2} - 1 \right) \right]^{-1/2}. \tag{8}$$

4 統計モデルによる観測と理論の比較

BOSS データは銀河分布のパワースペクトルで，シミュレーションデータはハロー分布のパワースペクトルであるため，ハローに対する銀河のうえつけ方を考えなければならない．本論文では，銀河 - ハロー関係を決めるパラメータとして V_{max} を用いた．V_{max} は最大回転速度のパラメータで，ハローの質量に強く相関し，ハロー中心付近のポテンシャルの深さを反映している．V_{max} がある閾値よりも大きいハローにのみ銀河ができると考え，V_{max} を変えて観測と最も適合する値を探した．観測との適合度を評価する値として χ^2 を用いた [4].

$$\chi^2 = \sum_{\ell} \sum_{i,j} (P_{\ell}^{\rm BOSS}(k_i) - WMP_{\ell}^{\rm sim}(k_i)) \times C_{ij}^{-1} (P_{\ell}^{\rm BOSS}(k_j) - WMP_{\ell}^{\rm sim}(k_j)) \tag{9}$$

P_{BOSS} は BOSS データのパワースペクトル，P_{sim} はシミュレーションデータのパワースペクトル．C は共分散行列でサイズは 200×200. 波数 k は $\Delta k = 0.01h/\mathrm{Mpc}$ となっており, データは 3 つのモーメント $\ell = 0, 2, 4$ 合計で 120 個を比較しているため．$\chi^2 = 120$ に近いほど適合度はよいと判断される．

5 結果

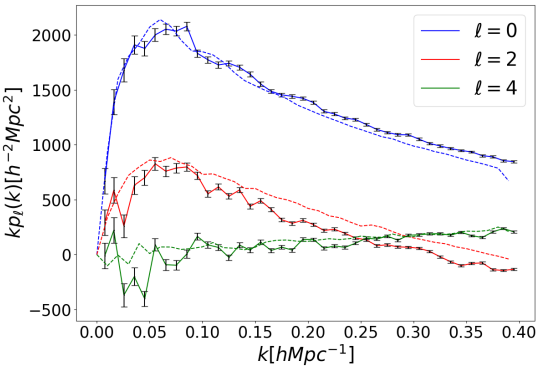


図 2: NGC の低赤方偏移の monopole，quadrupole, hexadecapole のパワースペクトルである．'-' で書かれているものはモックデータ，線で書かれているものは BOSS データである．

図 2 は NGC の z=0.61 との比較で最もエラーバーが小さいデータである．$V_{max} \geq 358$ のとき，最も当てはまりがよく $\chi^2 = 483.7$ となった．NGC の z=0.38 との比較で $V_{max} \geq 380$ のとき，最も当てはまりがよく $\chi^2 = 782.8$ となった．NGC の z=0.61 との比較で $V_{max} \geq 363$ のとき，最も当てはまりがよく $\chi^2 = 292.5$ となった．4 つのデータの中で最も χ^2 が小さいが，これはエラーバーが大きいためである．

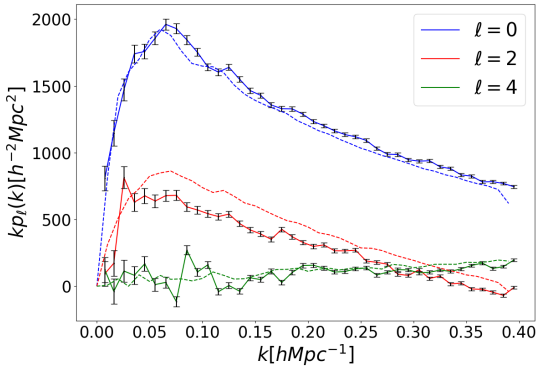


図 3: NGC の高赤方偏移の monopole，quadrupole，hexadecapole のパワースペクトルである．

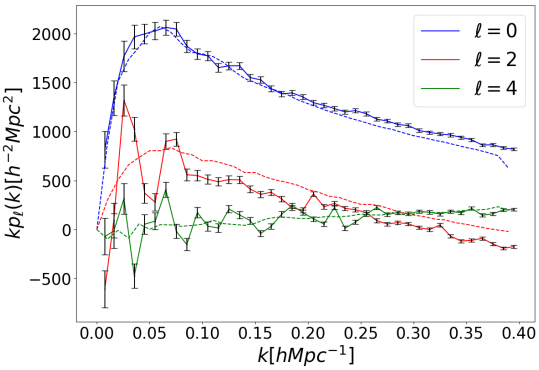


図 4: SGC の低赤方偏移の monopole，quadrupole，hexadecapole のパワースペクトルである．

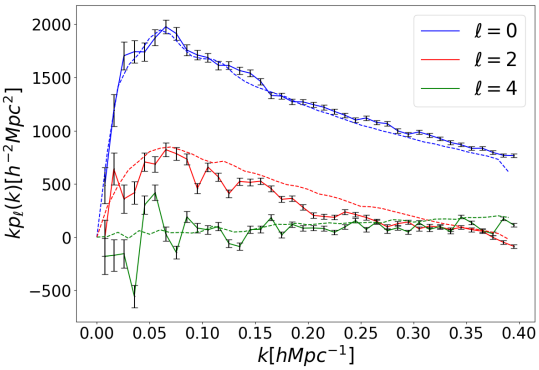


図 5: SGC の高赤方偏移の monopole，quadrupole，hexadecapole のパワースペクトルである．

NGC の z=0.38 との比較で $V_{max} \geq 371$ のとき，最も当てはまりがよく $\chi^2 = 443.7$ となった．

どのデータの結果を見ても，$\chi^2 = 120$ よりもかなり大きな値をとり，バリオン音響振動ピークで位相のずれが見られた．

6　まとめと展望

1 つの宇宙論パラメータセットに対して観測とシミュレーション結果を比較し，手法を確立した．赤方偏移歪みによるパワースペクトルの高次のモーメントで，BOSS データとシミュレーション結果に統計的に有意な差が見られた．バリオン音響振動ピークの位相がずれていたことにより本論文で用いた宇宙論パラメータは棄却できる可能性が高いと考えられる．

本論文では，銀河-ハロー関係を決めるパラメータに V_{max} のみを用いたが，V_{max} のみでは適合度があまりよくないため，パラメータを増やして検証する必要がある．具体的には質量や，ホストハロー，サブハローなどのパラメータを含めたより複雑なモデルに拡張する．また，本論文の手法をほかの宇宙論パラメータセットに対しても適用し，それぞれ観測との適合度を評価する．この適合度を活用し，機械学習を導入することで，シミュレーションに基づく推論の手法を開発する．さらに，摂動論やエミュレータの手法との比較から，シミュレーションに基づく推論の妥当性や利点・欠点について明らかにする．この手法を用いてダークエネルギーの状態方程式パラメータに対して制限を課すことを目指す．

Reference

[1] Beutler F., McDonald P., 2021, JCAP, 2021, 031.

[2] Nishimichi T., Takada M., Takahashi R., Osato K., Shirasaki M., Oogi T., Miyatake H., et al., 2019, ApJ, 884, 29.

[3] Alcock C., Paczynski B., 1979, Natur, 281, 358.

[4] Lange J. U., van den Bosch F. C., Zentner A. R., Wang K., Hearin A. P., Guo H., 2019, MNRAS, 490, 1870.

[5] Kobayashi Y., Nishimichi T., Takada M., Miyatake H., 2022, PhRvD, 105, 083517.

——index へ戻る

SK-11

CMB lensing を用いたニュートリノ質量の制限

千葉大学
斎藤　光

CMB lensing を用いたニュートリノ質量の制限

斎藤 光 (千葉大学大学院 融合理工学府先進理化学専攻物理学コース)

Abstract

宇宙背景放射 (CMB) は、初期宇宙から放射された極めて等方的なマイクロ波である。しかし、そこにはわずかな非等方性が存在し、初期宇宙を知る手掛かりとなる情報が多く含まれている。また、大規模構造から受ける弱重力レンズ効果によって歪んだ光を観測することで、中期宇宙の情報も得ることができる。本研究では、CMB の温度・偏光およびレンズポテンシャルの角度パワースペクトルを用いて、Λ CDM+質量ありニュートリノというモデルのもとで宇宙論パラメータとニュートリノ質量の制限を行った。また、角度パワースペクトルの理論予測に関しては、従来の積分計算に加えて、エミュレータによる高速予測も行い、その速度と精度を比較した。

どちらの場合も、既存の研究と整合的な結果が得られた。これにより、エミュレータを用いることで精度を保ちつつ解析時間を大幅に短縮できることが確認できた。今後はすばる望遠鏡 Hyper Suprime-Cam による重力レンズ観測データも加えることで、より高精度なニュートリノ質量の制限を目指す。

1 Introduction

ニュートリノは、他の物質とほとんど相互作用しない素粒子である。その性質から、標準模型に含まれる粒子の中では唯一、ダークマターの候補たりうる存在である。ニュートリノ振動の観測によって質量が存在することは確認されているが、その絶対質量は未だ測定されておらず、ニュートリノの 3 フレーバー間の質量 2 乗差のみが知られている。

一方、宇宙背景放射 (CMB) は初期宇宙の密度揺らぎの情報を持っており、その角度パワースペクトルはさまざまな宇宙論パラメータを制限する際に用いられている。特に、CMB に対する重力レンズ効果 (CMB lensing) は宇宙の大規模構造によって CMB が歪められる現象であり、構造がどのように成長してきたかが反映されている。ニュートリノが質量を持つと、その速度分散によって密度揺らぎがならされるため、パワースペクトルに影響が出る。

本研究では、コールドダークマター (CDM) と質量を持つニュートリノから構成される宇宙モデルを仮定し、CMB の温度、偏光、レンズポテンシャルの角度パワースペクトルを用いて、ニュートリノ質量の制限を行う。これらの統計量はニュートリノ質量に応じて変化していくため、その理論予測と観測値を比較することで制限を行うことができる。

2 Methods

2.1 観測データとフリーパラメータ

本研究では、CMB の角度パワースペクトルとして、Planck2018、ACT DR6 による C_l^{TT},C_l^{TE},C_l^{EE}、および ACT DR4、DR6 による $C_l^{\phi\phi}$ を使用した。宇宙論モデルとしては、標準的な Λ CDM モデルに加えて、ニュートリノ総質量 $m_\nu = \Sigma_i m_{\nu i}$ をフリーパラメータとした 6 変数モデルを採用した。制限対象のパラメータは、バリオン密度 $\Omega_b h^2$、CDM 密度 $\Omega_{cdm} h^2$、スカラー傾き n_s、振幅 $ln(10^{10} A_s)$、ハッブル定数 h、ニュートリノ質量 m_ν である。

2.2 CMB 角度パワースペクトルの予測とエミュレータによる高速化

CMB は極めて等方的な温度や偏光を持つが、ごくわずかに揺らぎが存在する。その揺らぎを理論的に予測できる値へ変換したものがパワースペクトル (角度パワースペクトル) である。

本研究では、(Ken Osato et al. 2016) に基づき、以下の積分を実行することで CMB レンズポテンシャルの角度パワースペクトルを計算した。

$$C_l^{\phi\phi} \approx \frac{4}{(l(l+1))^2}\frac{9H_0^4\Omega_{\rm m}^2}{4c^4} \times \int_0^{\chi_{\rm s}} d\chi \frac{1}{a^2(\chi)}\left(\frac{\chi_{\rm s}-\chi}{\chi_{\rm s}}\right)^2 P_{\rm m}(k=l/\chi,z)$$

ただし、$\chi_{\rm s}$ は、CMB 最終散乱面までの距離を表す。また、$P_{\rm m}(k=l/\chi,z)$ の計算には、CLASS (Julien Lesgourgues 2011) を用いた。

ニュートリノに質量があれば、その速度分散によって密度揺らぎがならされ、パワースペクトルは抑制される。

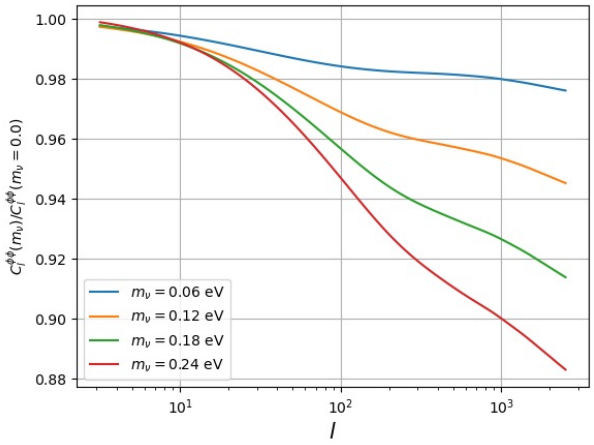


図 1: ニュートリノ質量と角度パワースペクトル

このことを用いて、ニュートリノ質量の制限を行っていく。
また、本研究では、角度パワースペクトルを計算する代替手段として、エミュレータを導入することにした。使用した Cosmo power JAX (A. Spurio Mancini et al. 2021) は、CAMB (Antony Lewis, Sarah Bridle 2002) や CLASS の線形パワースペクトル予測を学習したエミュレータであり、高精度で高速にパワースペクトルを予測できる。

2.3 マルコフ連鎖モンテカルロ (MCMC)

パラメータの制限をする際には、各パラメータがどういった確率でどんな値を取るのかという確率分布 (事後確率分布) を得ることが目標となる。そのための手法としてよく用いられるのが、マルコフ連鎖モンテカルロ (MCMC) である。ベイズの定理によれば、事後確率分布は以下のようにして求められる。

$$P(\theta|d) = \frac{P(d|\theta)P(\theta)}{P(d)}$$

θ はパラメータの組、d は観測データで、$P(\theta|d)$ が求めたい事後確率分布であり、$P(d|\theta)$ は尤度 (likelihood)、$P(\theta)$ は事前分布、$P(d)$ は周辺尤度である。このうち、事前分布は一様分布を取れば、周辺尤度はパラメータによらないため、尤度以外の部分を定数とみなすことができる。対数尤度に関しては、各パラメータがガウス分布に従うことを仮定すれば、

$$\log P(d|\theta) = -\frac{1}{2}\Delta d_i \mathrm{Cov}_{ij}^{-1}\Delta d_j + \mathrm{const}$$

とかける。ここで、$\Delta d_i = d_i(observation) - d_i(theory)$ であり、Cov は共分散行列である。パラメータの組を生成し、尤度を計算して、そのパラメータを採択するか決める。これを繰り返すことで、与えられた観測データに関して、各パラメータの事後確率分布を求めることができる。

今回の解析では、以下のように尤度を構成した。

$$logL_{pl}(\theta) = -\frac{1}{2}\sum_{ij}(\theta_i - \bar{\theta}[i])\mathrm{Cov}_{ij}^{-1}(\theta_j - \bar{\theta}[j])$$

$$logL_{len}(\theta) = -\frac{1}{2}\sum_{ij}\left(C_i^{obs} - C_i^{th}(\theta)\right)\mathrm{Cov}_{ij}^{-1} \times \left(C_j^{obs} - C_j^{th}(\theta)\right)$$

$$logL(\theta) = logL_{pl}(\theta) + logL_{len}(\theta)$$

この対数尤度を用いて、emcee(Foreman-Mackerel et al. 2013) で MCMC を実行した。

3 Results

3.1 Planck2018 + ACT DR4 lensing

解析結果を図 2 に示す
CMB lensing を加えたことで、特に m_ν の制限が強まった。９５%信頼上限で比較すると、

$m_\nu = 0.2336$ eV (Planck only)
$m_\nu = 0.2141$ eV (+lensing)

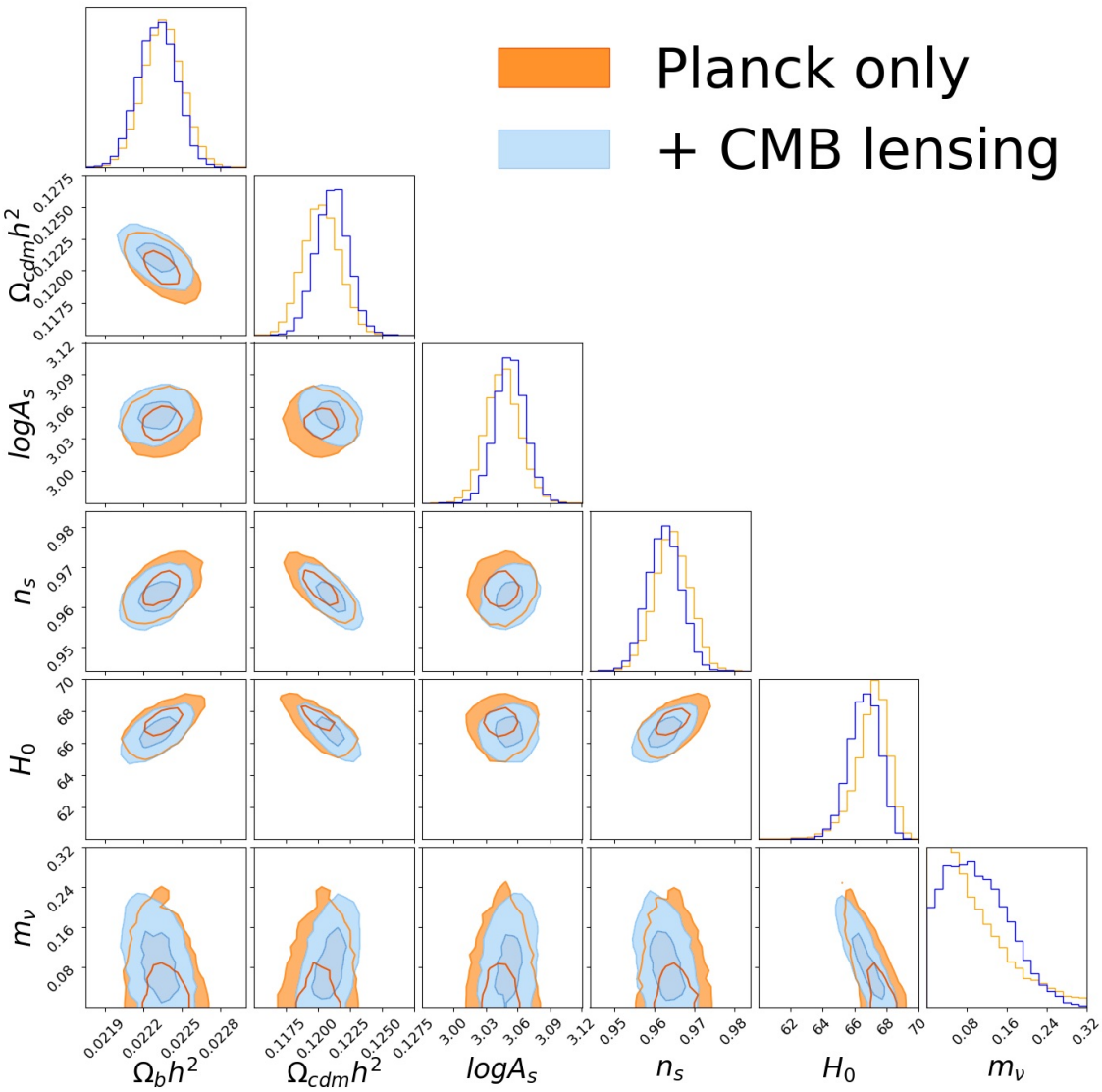


図 2: Planck 2018 と ACT DR4 lensing のデータを用いた解析結果

という結果になった。

3.2 エミュレータを用いた制限

エミュレータを用いたパラメータ制限を行い、その精度と計算時間を確認した。なお、こちらの解析では、観測データとして温度・偏光異方性データ、CMB lensing のどちらも ACT DR6 のものを使用した。1step 毎の計算時間に関して、積分計算によって行なった際には 1 分半ほどかかっていたが、エミュレータを用いることで 0.04 秒まで短縮された。これはおよそ 1700 倍の高速化に相当する。制限結果は、同様のデータセットを用いた先行研究 (ACT collaboration 2025) と良く一致しており、エミュレータを用いた場合でも高い精度を維持できていることが確認できた。

4 Conclusion

Planck および ACT による CMB 温度・偏光異方性の角度パワースペクトル (C_l^{TT},C_l^{TE},C_l^{EE}) と CMB レンズポテンシャルの角度パワースペクトル ($C_l^{\phi\phi}$) を組み合わせて尤度関数を構築し、MCMC によって宇宙論パラメータやニュートリノ質量の制限を行っ

た。$C_l^{\phi\phi}$ も加えることで、特にニュートリノ質量の制限が改善された。また、角度パワースペクトルの理論予測にエミュレータを導入することで、精度を維持しつつ、解析の大幅な高速化を実現した。今後は、ニュートリノ質量を直接入力できるエミュレータを用いた解析に移行し、さらに、すばる望遠鏡 Hyper Suprime-Cam 重力レンズ効果のデータも組み合わせることによって、より精度の高いニュートリノ質量制限の実現を目指す。

Reference

Ken Osato et al. 2016, JCAP06(2016),p.004
arXiv: 1601.07386 [astro-ph.CO].

Julien Lesgourgues 2011,
arXiv:1104.2932

A. Spurio Mancini, D. Piras, J Alsing, B. Joachimi and M. P. Hobson 2021, MNRAS 511, 1771
arXiv: 2106.03846 [astro-ph.CO].

Antony Lewis, Sarah Bridle,2002
Phys.Rev.D66:103511,2002
arXiv:astro-ph/0205436

D. F. Foreman-Mackey, D. W. Hogg, D. Lang and J. Goodman 2013, PASP 125, 306-312
arXiv: 1202.3665 [astro-ph.IM].

ACT collaboration 2025, arXiv:2503.14452v1

——index へ戻る

SK-12

実サンプルとモンテカルロシミュレーションを用いた前景銀河によるIa型超新星赤化検出の試み

早稲田大学
松本　佳祐

実サンプルとモンテカルロシミュレーションを用いた前景銀河による Ia 型超新星赤化検出の試み

松本 佳祐 (早稲田大学理工学術院 先進理工学研究科)

Abstract

近年、望遠鏡の性能向上により宇宙論パラメータが以前より正確に求められるようになり、その不定性による影響が大きな要因となりつつある。例えば、Ia 型超新星と観測者の間にあるダストによる減光・赤化は距離指数に誤差を与えるため $\Omega_{\rm M}$ などに不定性をもたらす。本研究では、特に超新星の前景にある銀河ダストによる赤化に注目し、実際の超新星サンプルを前景銀河有無で分類した際に赤化が検出されるかどうかを検証した。結果として赤化傾向は見られた (最大 2σ 程度) が、統計的に有意とは言えなかった。また、モンテカルロシミュレーションを行い結果の妥当性も検討した。

1 Introduction

Ia 型超新星は、白色矮星がチャンドラセカール質量限界を超えて熱核爆発を起こす現象であり、その最大光度時の絶対等級がほぼ一定であることから「標準光源」として宇宙論パラメーター推定に不可欠な役割を果たしてきた。しかし近年、望遠鏡性能の向上に伴い統計誤差が低減する一方、従来は大きな問題とならなかった系統誤差の影響が相対的に増大している。とくに、Ia 型超新星と観測者の間に位置する前景銀河や銀河間物質（IGM）中のダストによる減光・赤化は、Hubble ダイアグラム上の距離推定に誤差を導入し、宇宙質量密度パラメーター $\Omega_{\rm M}$ の不定性に対して第二の要因となっている（Rubin et al., 2024）。

本研究では、前景銀河の赤化に着目し、前景銀河の有無で実際のサンプルを分類した際に、赤化が検出されるのかを検証した。また、その検出が妥当かどうかをモンテカルロシミュレーションを用いて検討した。

2 Analysis Method

2.1 Data

本研究では、データとして超新星カタログ、各超新星周辺のカットアウト画像、および同領域の銀河カタログを用いた。

まず、超新星カタログとして、Pantheon+SH0ES, JLA(Joint Light-Curve Analysis), ZTF SN Ia DR2 の 3 つのカタログを使用した。図 1 上段は横軸に赤方偏移をとった時の各サンプルの SALT2 の値をプロットしたものになっている。また、下段は 3 つのカタログの赤方偏移分布のヒストグラムになっている。さらに、図 2 は天球面上にサンプルをプロットしたものになっている。

これらのサンプルにおいて、サンプルカットとして $|c| < 0.3, |x_1| < 3.0$ を適応した。なお、c は SALT2 パラメータの 1 つで、Ia 型超新星における色を表す指標である。

銀河のカットアウトには PS1(Pan-STARRS 1) のデータを使用した。なお、縦横 2 分角の大きさで取得した。また、銀河の測光赤方偏移カタログには Pan-STARRS1 STRM Photometric Redshifts Catalog を使用した。なお、各銀河の測光赤方偏移については以下の式を満たすもののみを採用した。

$$\left|\frac{\Delta z}{z+1}\right| < 0.15$$

ただし、Δz は測光赤方偏移の 1σ エラーである。

2.2 Method

次に，本研究で採用した分類手法について説明する。赤化量の推定には，SALT2 のパラメータ c を用いた。図 3 は，横軸に赤方偏移の対数をとり，サンプルを赤方偏移でビン分けした上で，各ビンごとの c の平均値と 1 σ 信頼区間を示したものである。こ

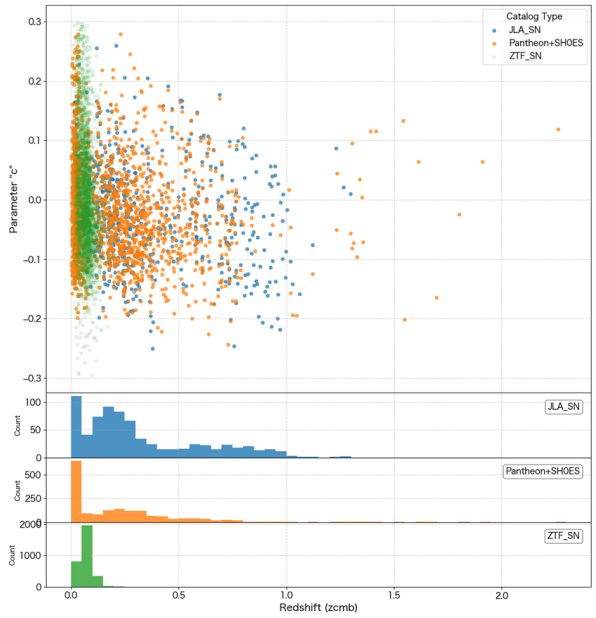


図 1: 超新星サンプルの赤方偏移と SALT2 パラメータの関係

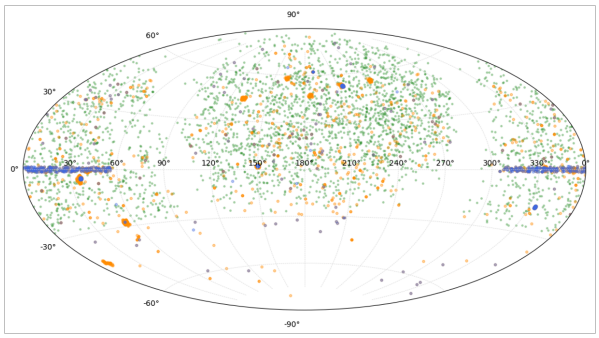


図 2: サンプルの分布

の図から，赤方偏移の増大に伴い c がわずかに低下する傾向が認められる。そこで本研究では，赤方偏移によるバイアスを低減するために，等サンプル数となるよう赤方偏移で 5 区間にビン分けし，前景銀河の有無を分類した。

次に，前景銀河の有無によるサンプル分類方法について述べる。まず，赤化を検出するため，超新星を中心とした閾値 $\mathrm{r_{th}}$ を設定した。続いて，この閾値 $\mathrm{r_{th}}$ に基づき，超新星サンプルを以下のように分類した。

- 前景銀河が 1 つ以上存在する場合を「前景銀河あり」サンプル
- 背景銀河のみ，または銀河が存在しない場合を「前景銀河なし」サンプル

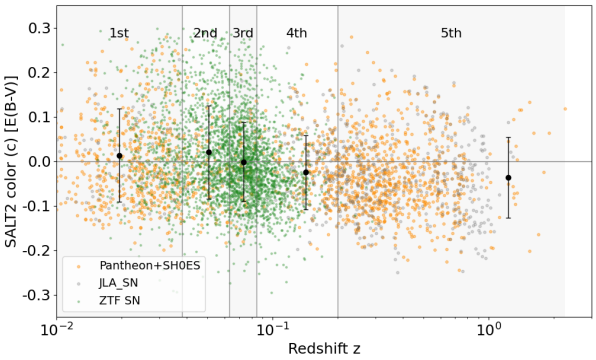


図 3: 赤方偏移と SALT2 パラメータの関係

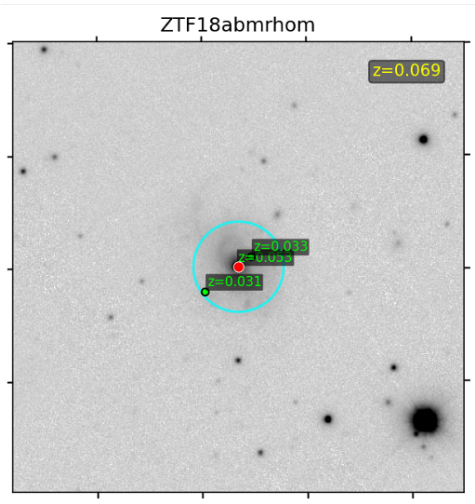


図 4: 前景銀河ありサンプルの例

- 上記いずれにも該当しない場合を「その他」

また，$\mathrm{r_{th}}$ を 3 秒角から 15 秒角まで変化させ，それぞれの閾値で赤化が検出されるかを検証した。図 4 は，$\mathrm{r_{th}} = 12$ 秒角以内に前景銀河が存在する場合の例を示しており，緑色の数字は前景銀河の測光赤方偏移，右上の黄色の数字は中心の超新星の赤方偏移を表す。

赤化量は SALT2 の c パラメータを用いて，以下のように計算した。

$$\Delta c = \bar{c}_{\mathrm{w\ FG}} - \bar{c}_{\mathrm{wo\ FG}}$$

ここで，$\bar{c}_{\mathrm{w\ FG}}$ は閾値 $\mathrm{r_{th}}$ における「前景銀河あり」サンプルの c の平均値，$\bar{c}_{\mathrm{wo\ FG}}$ は「前景銀河なし」サンプルの c の平均値を示す。

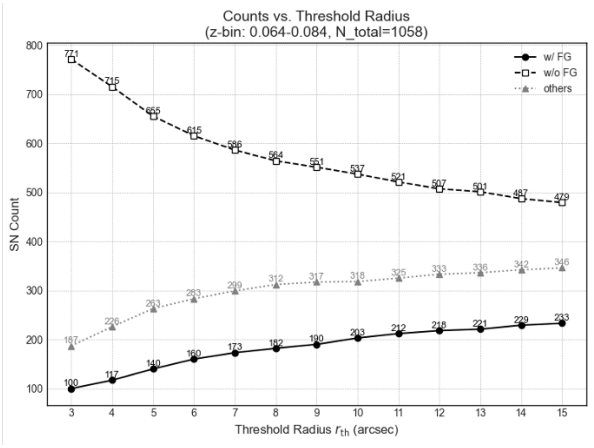


図 5: サンプル数の推移

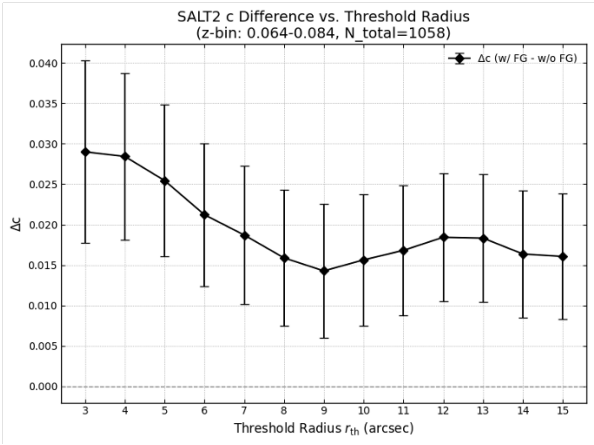


図 6: 赤化量の推移

3 Results

次に結果について述べる。スペースの都合上ここでは、図 3 の 3rd bin の結果のみを示す。結果は図 5 と図 6 のようになった。 図 5 に示すように，横軸に閾値 r_{th}，縦軸にサンプル数をとった場合，前景銀河ありサンプルは閾値の増加に伴い漸増し，一方で前景銀河なしサンプルは漸減する傾向が確認される。また，図 6 は横軸に閾値 r_{th}，縦軸に赤化量 Δc を示しており，小さい閾値ほど赤化量が大きく，いくつかの閾値では 2σ 前後の検出が得られていることがわかる。本検出の妥当性については，次節で検証する。なお，他のビンでも Δc は概ね正の値を示したものの，3rd ビンほどの有意性は認められなかった。

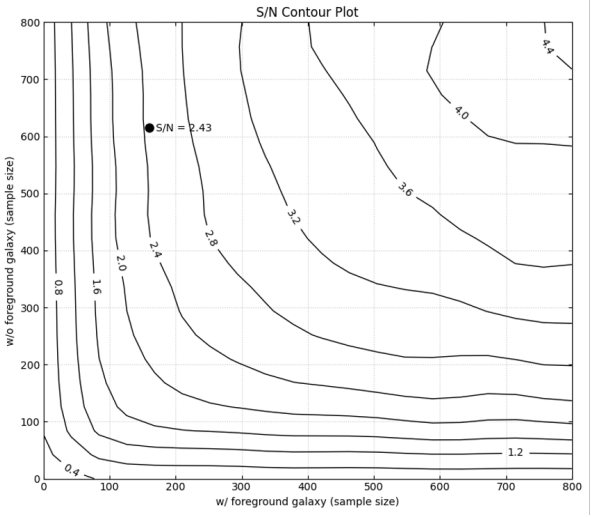


図 7: r_{th} =6 秒角の時のシミュレーション結果

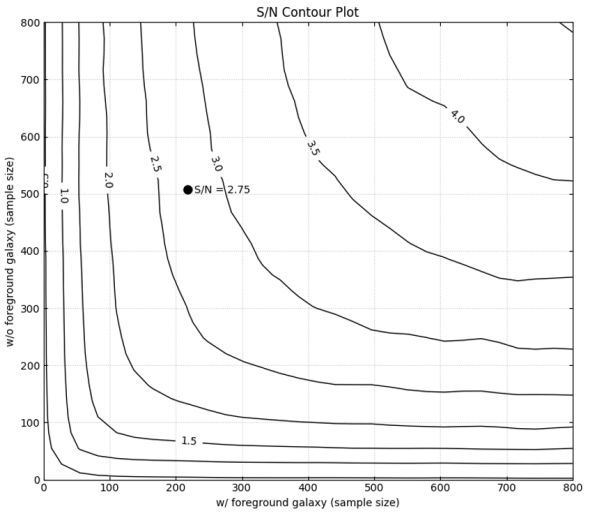


図 8: r_{th} =12 秒角の時のシミュレーション結果

4 Discussion

本研究では、得られた結果の妥当性を検証するためにモンテカルロシミュレーションを実施した。具体的には、前景銀河の有無を条件としたサンプル群を複数のサンプル数の組み合わせで生成し、各群について赤化量 Δc を算出してコンター図を作成した。続いて、実際に分類されたサンプル数を該当するコンター図上にプロットし、信号対雑音比 (S/N) を評価した。なお、本シミュレーションにおける赤化モデルとしては、Ménard et al. (2010) の赤化関数を適用した。 モンテカルロシミュレーションの結果を

図 7 および図 8 に示す。両図では、横軸に前景銀河ありサンプル数、縦軸に前景銀河なしサンプル数を配置し、等高線で信号対雑音比 (S/N) を表現している。また、プロット点はそれぞれ閾値 $\mathrm{r_{th}} = 6$ 秒角（図 7）および $\mathrm{r_{th}} = 12$ 秒角（図 8）に対応するシミュレーション結果を示す。これにより、閾値 6 秒角では $S/N \approx 2.4$、12 秒角では $S/N \approx 2.8$ が得られ、実データによる分類で得られた $S/N \approx 2$ を上回っていることが分かる。この差異は、PS1 測光赤方偏移カタログの完全性が不十分であるため、本来は前景銀河ありと分類されるべき天体が前景銀河なしサンプルに混入している可能性によると考えられる。

5 Conclusion

本研究では超新星のカタログと銀河の測光赤方偏移カタログを用いて赤化が検出されるか検証を行った。結果として 3rd bin においては $\sigma \approx 2$ 程度の赤化検出が得られた。さらに、モンテカルロシミュレーションを実施して結果の妥当性を評価したところ、PS1 測光赤方偏移カタログの完全性不足により、本来は前景銀河ありと分類されるべき天体が前景銀河なしサンプルに混入している可能性が示唆された。

Reference

Rubin et al. 2024, arXiv:2311.12098
Ménard et al. 2010, MNRAS, 405, 1025

——index へ戻る

SK-13

21cm 線観測における電離層による位置変化の解析と観測への影響評価

熊本大学
大黒　詩織

21cm 線観測における電離層による位置変化の解析と観測への影響評価

大黒 詩織 (熊本大学大学院 自然科学教育部)

Abstract

晴れ上がり以降、宇宙は暗黒時代が続くが初代天体が形成されるとそれらが発する光により宇宙が明るくなり始める。この時代のことを、「宇宙の夜明け」と呼ぶ。この時期では、形成された天体からの放射によってそれまで宇宙全体を満たしていた中性水素が電離され始める。この時代についてはまだ謎が残っており、この時期を直接的に探る手掛かりとなるのが中性水素 21cm 線の観測である。

しかしこの時期からの 21cm 線の信号は微弱であり、検出するには電波銀河や銀河系シンクロトロン放射などの前景放射の除去が必要になる。その際に問題となるものの一つに、地球の電離層がある。電離層は真空や中性な大気と屈折率が異なるため宇宙からの信号は地上での観測までに遅延が生じるが、この遅延は観測される信号の位相の誤差として現れ、天体の見かけの位置をずらす作用をもつ。この影響は低周波ほど強くなり、装置の較正や電波天体の見かけの位置にずれが生じることで前景放射の除去精度に悪影響を及ぼすと考えられる。本研究では、MWA の超低周波電波データを用いて電波源の見かけの位置変化の解析を行い、電離層による 21cm 線観測への影響を調べた。

1 Introduction

誕生して間もない宇宙は高温・高密度でプラズマ状態にあったが、その後宇宙膨張に伴って温度が低下すると自由電子が陽子に捉えられて水素原子が形成され、宇宙全体が中性化した。これにより、それまでプラズマ中での散乱によりまっすぐ進めなかった光子が直進できるようになる宇宙の晴れ上がりが起こり、これは現在宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) として観測されている。晴れ上がり以降は初代天体が形成され始めるまで暗黒時代が続き、この時期の宇宙は中性水素で満たされていた。やがて初代天体が形成されると、それらが発する光によって宇宙が明るくなる「宇宙の夜明け」を迎え、その後星や銀河から放射される紫外線や X 線によってそれまで宇宙を満たしていた中性水素が電離される宇宙再電離期を迎える。

この宇宙の夜明け期についてはまだ謎が残っており、この時期を直接的に探る有効な手段が、中性水素の 21cm 線による観測である。21cm 線とは、水素原子の超微細構造の準位間の遷移で放射される波長 21cm (周波数 1420 MHz) の電磁波のことであり、赤方偏移した 21cm 線を観測することで宇宙を断層的に観測することができる。特に超低周波 (75-100 MHz) の信号は初代星誕生時期の水素ガスからの信号に相当するため、当時の 21cm 線から得られるガスの分布や温度の情報から、初代星の誕生時期や質量などの性質を明らかにできると期待されている。現在、オーストラリアにある Murchison Widefield Array (MWA) やヨーロッパにある Low Frequency Array (LOFAR) などの低周波電波望遠鏡が、宇宙初期の中性水素ガスから放射される 21cm 線の検出を目的の 1 つとして観測を行っている。

しかし、再電離期における 21cm 線の信号が $\sim$ 10 mK と微弱であるのに対して、電波銀河や銀河系シンクロトロン放射などの前景放射は温度にして 3 〜 4 桁大きい。そのため前景放射に埋もれた 21 cm 線を同定することは非常に難しく、検出するにはこのような強力な前景放射を取り除く必要がある。その際、地球の電離層が問題になる。電離層は地上 50〜1000 km の範囲にわたって存在するプラズマであり、この内部では電子の柱密度が不均一になっていることから屈折率も不均一になり、天体の見かけの位置がランダムにずれてしまう。このような、電離層での屈折による天体の見かけ位置の変化は以下の式で表され、この影響は低周波ほど強くなる。

$$\Delta\theta = -\frac{1}{8\pi^2}\frac{e^2}{\varepsilon_0 m_e}\frac{1}{\nu^2}\nabla STEC[\mathrm{rad}] \qquad (1)$$

ここで STEC は視線方向の電子の柱密度を表す。この電離層による見かけの位置変化によって、天体の

位置を正確に特定できなければ、前景放射の除去精度が不十分となり 21 cm 線の観測に影響を及ぼす。

2 Data - Methods

本研究では、2023 年に観測された約 20 時間分の MWA の超低周波電波データを使用して解析を行った。

まず初めに、MWA で観測された約 20 時間分の visibility データについてソースリストを作成し、その中から観測された flux が上位 5000 個の天体について、Direction-Independent(DI) calibration を行った。その後、そのうちの 1000 天体に対して peeling 処理を行い、各天体が (l, m) 座標でカタログ位置からどのぐらいずれたかを表すオフセットパラメータ (α , β) を求めた。

次にそこで得られたオフセットパラメータを用いて、MWA の中心周波数である 85 MHz において、見かけの位置変化の大きさや角度について特徴が見られるか解析を行った。

3 Results and Discussion

図 1 は、各時刻における天体の位置変化の大きさの中央値の時間変動を示した図であり、各点の時間間隔は 5 分である。また、異なる日の同じ時刻の観測を重ねてプロットしている。これを見ると、それぞれ AWST で 2023 年 9 月 1 日早朝、9 月 1 日深夜、9 月 2 日深夜の観測を表す青色、赤色、緑色のグラフは概ね一致していることがわかるが、この振る舞いはモデルの不定性に起因する系統誤差の影響と考えられる。その一方で、黄色のグラフで示している 9 月 4 日 01:00〜05:00 の観測では、他の日時の観測に比べてより激しく位置が変動していることがわかる。ここで、9 月 4 日 02:18 に見られるピークをピーク 1 とする。また、緑色のグラフで示している 9 月 3 日 03:30〜04:00 過ぎにかけても小さなピークがあり、これをピーク 2 とする。

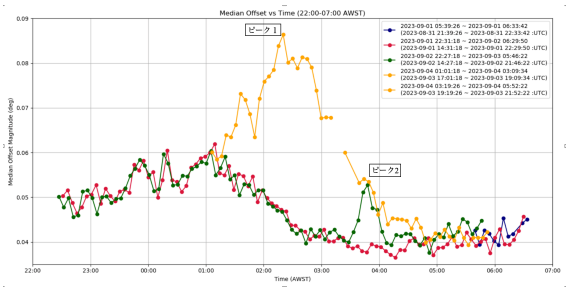


図 1: 位置変化の大きさの中央値の時間変動

図 2、3 はカタログ位置からの位置変化を示すベクトルプロットであり、図 2 は図 1 においてピーク 1 に相当する時刻 (9 月 4 日 02:18 AWST)、図 3 は、同時刻の別の日 (9 月 2 日 02:20 AWST) におけるプロットである。矢印の色の違いは位置変化の方向の違いを表している。各時刻における位置変化の中央値はそれぞれ 0.0864 [deg] と 0.0472 [deg] であり、2 つの図を比較しても図 1 で大きな変動が見られた 9 月 4 日の方が全体的に大きく位置が変動していて電離層の影響が大きくなっていることが見て取れる。

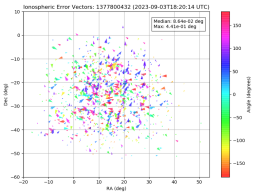


図 2: ピーク 1 の時刻における位置変化のベクトルプロット

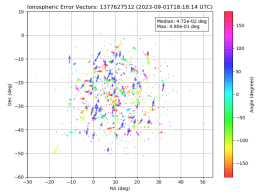


図 3: 同時刻別日 (赤色) における位置変化のベクトルプロット

次に、図 4、5 は、同時刻の位置変化の大きさ [deg] と天体数の分布を表したヒストグラム、図 6、7 は位置変化の角度 [deg] と天体数の分布を表したヒストグラムである。これらを見ると、ピーク 1 の時刻では位置変化の小さいものが比較的少なく、ヒストグラムのピークがより低く変化の大きい右側にずれていることが分かる。その一方で、変化の角度に関しては特にピークは見られず、大きな特徴は見られなかった。しかし、9 月 3 日の 4 時前に見られるピーク 2 に関しては、図 8 のような角度の偏りが見られた。

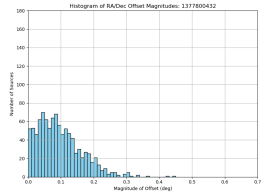


図 4: ピーク 1 の時刻における位置変化の大きさと天体数の関係を表すヒストグラム

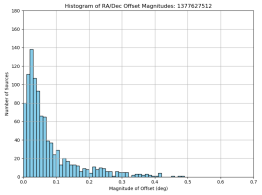


図 5: 同時刻別日 (赤色) における位置変化の大きさと天体数の関係を表すヒストグラム

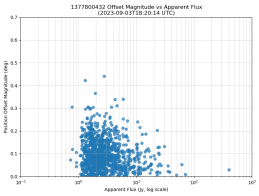


図 10: ピーク 1 の時刻における天体の flux と位置変化の大きさの関係を表す散布図

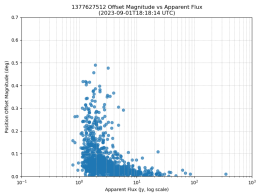


図 11: 同時刻別日 (赤色) における天体の flux と位置変化の大きさの関係を表す散布図

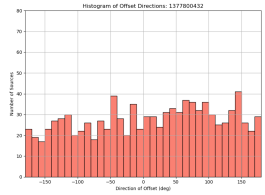


図 6: ピーク 1 の時刻における位置変化の角度と天体数の関係を表すヒストグラム

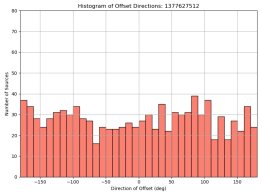


図 7: 同時刻別日 (赤色) における位置変化の角度と天体数の関係を表すヒストグラム

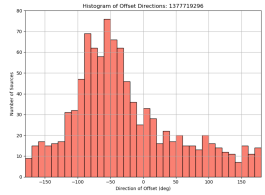


図 8: ピーク 2 の時刻における位置変化の角度と天体数の関係を表すヒストグラム

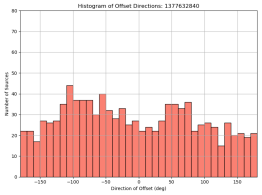


図 9: 同時刻別日 (赤色) における位置変化の角度と天体数の関係を表すヒストグラム

最後に、図 10 および図 11 は、天体の flux と位置変化の大きさの関係を示した散布図である。ほとんどの時刻では、図 11 に示されるような、暗い天体ほど位置が大きくずれやすい傾向が確認された。この原因として、天体が暗いほど熱雑音の影響を受けやすいことが考えられる。一方でピーク 1 の時刻付近に限っては、図 10 に示されるように明るい天体においても見かけの位置が変化している様子が確認された。

4 Conclusion

本研究では、電離層による天体の見かけの位置変化に特徴が見られないか MWA の観測データを用いて解析を行った。通常は、電離層の影響は暗い天体ほど受けやすく、位置変化の大きさは大体 0.04 〜 0.06 [deg] であり、変化の角度は概ねどの方向にも同じようにずれることが分かった。しかし、図 1 や図 8 で見られたように、変化の大きさが顕著になったり、ある特定の方向に天体がずれるような動きも見られた。今後の課題として、このような特徴的な電離層の動きが何によって起きているのかも調査したい。

また、Datta A. et al 2010 によると、21cm 線の信号を検出するには天体の位置を 0.1 秒角 (約 0.000028 [deg]) の精度で求める必要がある。しかし、今回得られた位置変化の大きさは 0.05 [deg] 前後とそれより 3 桁ほど大きかったことから、21cm 線を検出するには電離層による見かけの位置変化を補正する必要があると言える。

Reference

Jordan, C. H., Murray, S., Trott, C. M., et al. 2017, MNRAS, 471,3974

Datta A., Bowman J. D., Carilli C. L., 2010, ApJ, 724, 526

——index へ戻る

SK-14

機械学習を用いた再結合時の物質密度場の復元

名古屋大学
姫野　諒汰

機械学習を用いた再結合時の物質密度場の復元

姫野 諒汰 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

現在の銀河の構造は、重力などの影響によって複雑で非線形的な進化を遂げている。そのため、現在観測されている物質の分布だけでは、初期宇宙に起きた物理現象の痕跡を直接読み取ることは難しい。この課題に対処するために、現在の宇宙の物質分布から初期宇宙の状態を復元する手法が研究されている。従来は、線形摂動理論に基づき、初期宇宙に存在したバリオン音響振動の痕跡を抽出するアルゴリズムが用いられてきた。しかし、この方法では重力の非線形成長が進んだ低赤方偏移の小さなスケールでは、精度が低下することが知られている。そこで Shallue&Eisenstein（2023）は、機械学習を活用してこの問題を克服する新たなアプローチを提案した。彼らの手法は、宇宙の重力ダイナミクスを直接モデル化せず、シミュレーションの初期状態と終状態の間の関係を学習することで、初期の密度場を高精度で復元することである。結果として、復元された密度場のパワースペクトルは初期状態のものと非常によく一致し、相関関数の一致度が 95 %以上となるスケール範囲を 2 倍に拡大することができた。この成果は、現在の銀河分布から初期宇宙の情報をより正確に引き出すための強力な手法であり、今後の観測解析に広く応用される可能性がある。本公演は論文 Christopher J. Shallue, & DanielJ.Eisenstein 2022 のレビューである。

1 Introduction

この 100 年間で、私たちは観測技術を進化させることによって、少しずつ宇宙の姿を明らかにしてきた。今後も高精度な観測によって、さらなる理解が進むと期待されている。しかし、観測データは複数の物理現象が重なり合った結果であるため、それを深く活用するためには、その背景にある物理過程や観測による歪みを分離する技術が重要となる。現在の宇宙の構造形成は密度ゆらぎが重力不安定性により成長してできた。特に小スケールでは非線形効果が無視できなくなり個の非線形効果が初期密度ゆらぎの情報の取得を困難にしている。重力による非線形進化の影響を適切に補正することで、銀河形成などによって複雑化した物質分布から、初期宇宙の物理的情報をより純粋な形で抽出できるようになる。例として、バリオン音響振動によって物質の二点相関関数に現れるピークが挙げられる。ほかにも再結合期の物質分布を復元することができれば、初期宇宙の非ガウス性を検証する上でも有効であることが知られている。現在の理論では、重力による宇宙の進化を時間の順方向には高精度でモデル化することが可能であるが、逆方向に時間を進める手法は確立されていない。特に銀河のような小スケールでは、すでに平衡状態に達しており、初期状態に関する情報は失われている。

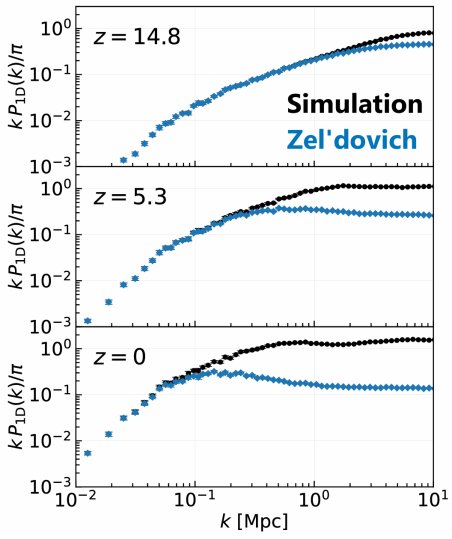


図 1: パワースペクトルの大規模シミュレーションとゼルドビッチ近似の比較 S. Colombi & A. Taruya (2017)

一方で、銀河団のような大スケールでは密度ゆらぎが小さく、線形理論の適用が可能である。そこから徐々にスケールを縮小していくと、線形摂動理論が破綻し始める。線形理論では、密度場を成長モー

ドと減衰モードの線形結合として記述するが、時間を逆行させようとすると、わずかな誤差が減衰モードを通じて増幅されてしまい、復元に失敗することになる。観測にはさらなる制約もある。銀河の位置は通常、赤方偏移空間においてプロットされているが、そこにはカイザー効果や神の指効果などが影響し、図 2 のように実空間に比べて視線方向の距離が歪んで見える。また、観測に使われる銀河は、実際の物質分布のごく一部しか反映しておらず、物質の大部分を占めるダークマターとの間にギャップが存在する。

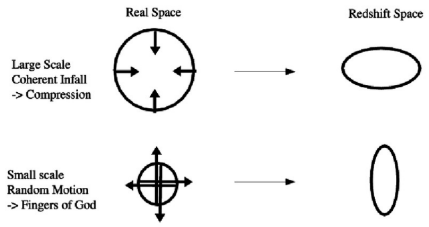


図 2: カイザー効果と Finger of God 効果

Christopher J. Shallue, & DanielJ.Eisenstein 2022 の論文では、初期宇宙の密度場を復元する新しいアプローチを提案する。まず、大スケールの復元に適したゼルドビッチ近似を適用する。ゼルドビッチ近似とは宇宙の構造を流体のようにラグランジュ的に記述する方法であり線形近似の式を非線形領域に適用する近似のことである。その後、小スケールでの復元に強みを持つ機械学習手法を組み合わせることで、高精度な密度場の復元を実現した。

2 Methods

CNN（畳み込みニューラルネットワーク）は、画像などのデータから特徴を抽出するのに優れているが、基本的には局所的な情報しか扱うことができない。なぜなら CNN は入力画像を処理する際に、畳み込み層やプーリング層といった構造を通じて特徴を抽出していくからである。畳み込み層では、「カーネル」と呼ばれる小さなフィルター（例えば 3 × 3 ピクセル程度）が画像上を滑らせながら演算を行い、局所的な特徴量を捉える。このサイズは、スマートフォンのフル HD 画面（1920 × 1080）と比較すると非常に小さく、画像全体の広域な特徴を捉えるには不十分である。重力は広いスケールで作用しているので、大スケール側の認識は CNN には不向きである。カーネルのサイズを大きくすれば広域な特徴を扱うことが可能になるが、計算コストの増大や空間解像度の低下など、多くのトレードオフが生じる。そこで本研究では、「大きなカーネル」を使用せずに広域情報を扱う工夫として、CNN を使用する前にゼルドビッチ近似を用いて大スケールの密度場を復元する手法を採用した。このように、大スケールの構造を事前に復元してから CNN に入力することで、CNN が本来得意とする小スケール領域の復元能力を最大限に引き出すことができる。この二段階の復元プロセスは図**??**に示した。まず初めに初期状態 a があり a を N 体シミュレーションを回す事によって終状態 b を得る。そこから CNN に入力する前にゼルドビッチ近似を用いて前処理 (c) を得るそして事前に大量の状態 a と状態 c を用意して学習させた CNN に状態 d を作ってもらう。以上が本研究の手法の簡単な説明である。

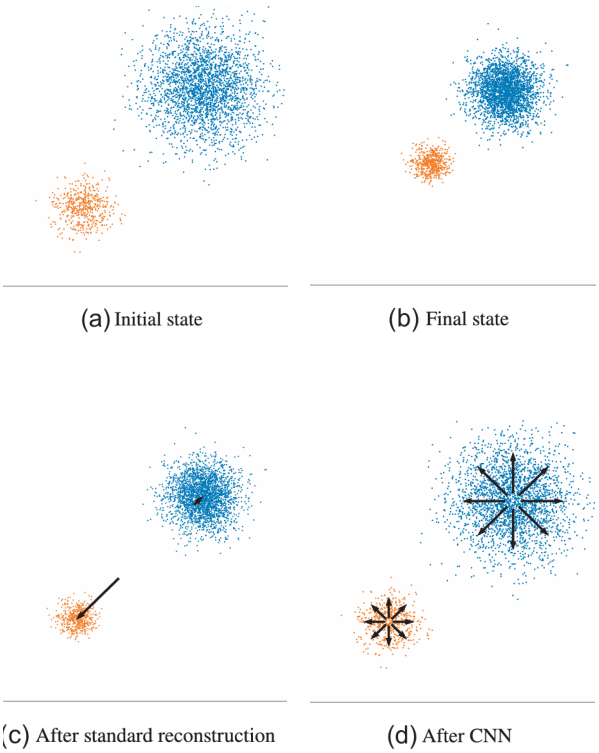


図 3: 本研究の手法 Christopher J. Shallue & DanielJ.Eisenstein (2022)

3 Results

復元がうまくいっているかどうかを定量的に評価するためにまずはパワースペクトルと呼ばれる量を定義する。

$$P(\mathbf{k}) \equiv \left\langle \left| \tilde{\delta}(k) \right|^2 \right\rangle$$

ここで $\tilde{\delta}(\mathbf{k})$ は密度ゆらぎをフーリエ変換したもので、$\langle\rangle$ はアンサンブル平均をとったものある。先ほど定義したパワースペクトルを用いて以下の量を定義する。

$$C(\mathbf{k}) \equiv \frac{\left\langle \tilde{\delta}_{\rm recon}(k) \tilde{\delta}_{\rm init}(k) \right\rangle}{\sqrt{\mathbf{P}_{\rm recon}(\mathbf{k}) \mathbf{P}_{\rm init}(\mathbf{k})}}$$

$$T(\mathbf{k}) \equiv \sqrt{\frac{\mathbf{P}_{\rm recon}(\mathbf{k})}{\mathbf{P}_{\rm init}(\mathbf{k})}}$$

本研究では 2 点相関係数 $C(\mathbf{k})$ と伝達関数 $T(\mathbf{k})$ を用いて元の密度場と復元された密度場がどれほど一致しているか評価する。

と定義されている。完全に密度場が復元できていれば (つまり $\delta_{\rm recon}(x) = \delta_{\rm init}(x)$ では)$T(\mathbf{k}) = C(\mathbf{k}) = 1$ となる。まず初めに実空間の密度を復元する。その結果を図 4 に示しておく。

図 4 の青線は、復元を全く行っていない状態を示している。緑の線は、ゼルドビッチ近似のみを用いて復元した結果であり、オレンジ色の線は CNN のみを用いた復元結果である。赤い線は、ゼルドビッチ近似と CNN の両方を組み合わせて復元した結果を表している。このグラフから読み取れる重要なポイントは主に二つある。第一に、CNN のみを用いた場合には、構造の復元が十分に行われていない点である。これは、CNN が小スケールの構造には強いが、大スケールの情報を扱う能力に欠けている。第二に、大スケールにはゼルドビッチ近似を、小スケールには CNN を適用する方法が、従来のゼルドビッチ近似のみを用いた復元手法と比較して、復元精度の高い領域（$C > 0.95$）を約 2 倍に拡大している点である。これは、提案手法がより広いスケールにわたって高精度な復元を可能にしており、有用なアプローチであることを示している。次に赤方偏移空間で密度の復元を行う。復元を行った結果を図 5 に示しておく。

まず、図 5 に示された手法の比較から明らかになるのは、我々の手法において、相関係数 $C(k)$ や伝達関数 $T(k)$ が実空間よりも早い段階で低下し始める点である。これは、赤方偏移空間における密度場の復元が、実空間と比較して困難であることを示している。この傾向は、Introduction でも述べたように、カイザー効果や神の指効果といった赤方偏移歪み（RSD）が原因である。これらの歪みは視線方向における銀河の位置情報を不正確にし、密度場の構造を引き伸ばすため、復元の精度を低下させる。それにもかかわらず、Our method(base) の結果を見ると、従来の手法と比較して復元精度が明らかに向上していることが確認できる。これは、CNN が赤方偏移歪みに対して一定の補正能力を有していることを示しており、非常に有望な成果である。さらに、もう一つ重要な発見がある。それは、Our method(base) において、非常に大きなスケールにおいても、相関係数や伝達関数がわずかに 1 からずれているという点である。これは、従来「簡単」と考えられてきた大スケールの復元でさえ、実際には難しい課題であることを示唆している。この問題に対処するため、新たに自分たちの方法の拡張を開発した。この拡張手法では、以下の二点において改良を加えた。第一に、CNN が扱う入力に対し、重力的な影響をより正確に反映するように設計を変更した。第二に、学習時に過学習やノイズの影響を抑えるため、損失関数に正則化項を追加した。これらの改良により、赤方偏移空間においてもより広いスケールで高精度な復元が可能となり、検証結果において大きな改善が見られた。

4 Discussion

以上の結果から、ゼルドビッチ近似と CNN を組み合わせて復元を行う手法が有効であることが示された。しかしながら、この手法には依然として改善の余地がある。その中でも特に重要な課題の一つが、時間の正方向のシミュレーションに N 体シミュレーションを用いている点である。

N 体シミュレーションは、ダークマターの時間発展を高精度に追跡することが可能であるが、ダークマター自体は直接観測することができない。したがって、より正確さを求めるのであれば実際に観測可能な銀河分布などの情報を用いて、初期宇宙の密度場を復元する必要も出てくるかもしれない。実際に、銀河分布から初期宇宙の密度場を復元しようとする試

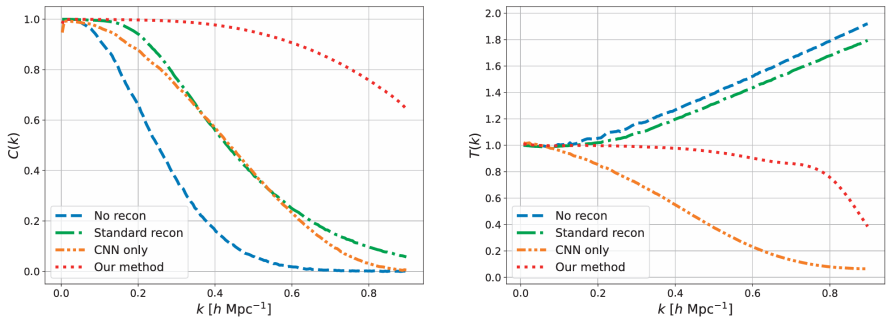


図 4: それぞれの手法による実空間の密度場の復元。横軸は波数。縦軸はそれぞれ 2 点相関係数、伝達関数を表している Christopher J. Shallue & DanielJ.Eisenstein (2022)

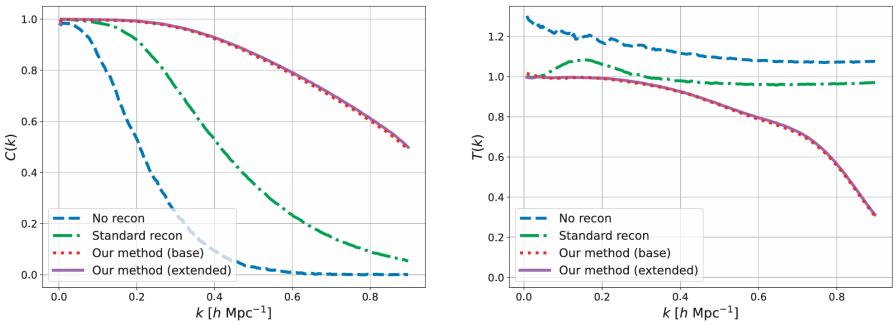


図 5: それぞれの手法における赤方偏移区間の密度場の復元 Christopher J. Shallue & DanielJ.Eisenstein (2022)

みは既に行われており、そのような研究も報告されている。Liam Parker et al. (2015)

5 Conclusion

従来から広く使われてきたゼルドビッチ近似は大スケールでの復元を得意としているが小スケールの修復を行うことができない。そこで小スケールの修復に CNN を利用したところよく従来のゼルドビッチ近似に比べて約 2 倍の領域を復元することに成功した。また、赤方偏移空間由来の銀河の固有運動が引き起こす RSD に機械学習が対応できていることが分かった。

Acknowledgement

本講演の執筆にあたって日頃から勉強や議論に参加してくださった名古屋大学宇宙論研究室やそのほかの研究室の皆様に感謝いたします。またこのような発表の機会を与えてくださった夏の学校事務局の皆様にも感謝いたします。

Reference

S. Colombi, & A. Taruya 2017, Post-collapse perturbation theory in 1D cosmology: beyond shell-crossing

Christopher J. Shallue, & DanielJ.Eisenstein 2022, Reconstructing cosmological initial conditions from late-time structure with convolutional neural networks

Liam Parker, Adrian E. Bayer, & Uros Seljak 2025, Initial Conditions from Galaxies: Machine-Learning Subgrid Correction to Standard Reconstruction

——index へ戻る

SK-15

すばる HSC データを用いた弱重力レンズ効果による近傍銀河団の質量推定

名古屋大学
田中　芙由子

すばる HSC データを用いた弱重力レンズ効果による近傍銀河団の質量推定

田中 芙由子 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙初期の密度揺らぎは、暗黒物質による重力相互作用と暗黒エネルギーによる加速膨張のせめぎ合いの中で成長し、銀河や銀河団などの天体が形成される。特に銀河団は、主に熱いガスと暗黒物質で構成される宇宙最大の自己重力系であり、その全質量は、背景銀河から来た光が手前の銀河団の重力によって曲げられる「弱重力レンズ効果」を用いて測定できる。銀河団の数密度を質量の関数として表したものを質量関数と呼び、質量関数は物質のエネルギー密度 Ω_m や物質の密度揺らぎの振幅 σ_8 などの宇宙論パラメータに感度を持つ。一般に銀河団は X 線光度や Sunyaev-Zel'dovich 信号、銀河の空間的集中度などを用いて検出される。質量関数とこれらの観測量を結びつけるためには質量-観測量関係の構築が必須である。本研究では、X 線で検出された X 線高輝度近傍銀河団に着目し、精密な質量-X 線光度関係を構築することを目指す。その第一歩としてすばる望遠鏡 Hyper Suprime-Cam（HSC）によって観測された、赤方偏移 $0.03 < z < 0.12$ における X 線輝度が高い 20 個の銀河団（0.1〜2.4 keV）に対して、弱重力レンズ効果を用いた質量推定を行った。結果、20 個の銀河団の平均質量を $M_{200m} = 3.355 \pm 0.486 \times 10^{14} M_\odot$ と推定した。

1 Introduction

数億光年スケールにおける銀河分布には、特徴的な泡状の構造が見られる。多くの銀河が密集するところでは銀河団・銀河群が形成され、これらは線状に並んだ銀河（フィラメント）で繋がっている。フィラメントは、銀河がほとんど存在しない領域 (ボイド) を取り囲むように存在しており、このような構造を**大規模構造**という [1]。

銀河・銀河団などの天体は宇宙初期の微小な密度揺らぎの重力不安定性によって成長していると考えられる。よって、宇宙の大規模構造は宇宙初期における密度揺らぎの空間分布を反映している。宇宙の密度揺らぎの成長は、宇宙のエネルギーの約 27 %を占める正体不明の物質である**ダークマター**の重力と、約 68 %を占める正体不明のエネルギーである**ダークエネルギー**が引き起こす空間の加速膨張のせめぎ合いの中で起こる。

銀河団は宇宙で最大の自己重力束縛系であり、宇宙の構造形成史に大きな感度を持つ。特に、銀河団の数密度と質量を結びつける**質量関数**は物質のエネルギー密度 $\boldsymbol{\Omega_m}$ や質量の密度揺らぎの振幅 $\boldsymbol{\sigma_8}$[i]に敏感である。より精密な質量関数を構築するためには、正確な質量がわかっている大量の銀河団サンプルが必要である。しかし、大量のサンプルに対して弱重力レンズ効果を測定するのは現実的ではない。そこで、より効率的に大量の銀河団を観測できる X 線の観測量と質量を関係づける「**質量-観測量関係**」の構築が重要視されている。その第一歩として必要なのは銀河団質量の正確な推定であり、これは以下で述べるように弱重力レンズ効果を用いることで可能となる。本研究では、実際の観測データを用いた銀河団の質量測定について報告する。

[i]半径 8 Mpc/h の領域における質量密度揺らぎの振幅

2 Weak lensing

銀河団の構成要素のうち、大部分は未知の物質であるダークマターである。そのため、既知の物質（バリオン）を用いた質量推定を行う場合は、質量を過小評価してしまう場合がある。そこで、銀河団周りのバリオンとダークマターを含む全ての物質の質量分布を推定するには、**弱重力レンズ効果**を用いる方法が有効である。

弱重力レンズ効果とは、図 1 のように背景にある銀河などの光源から出た光が、重力源となる銀河団（レンズ天体）によって歪められることで、本来の形が歪められて観測される現象である。

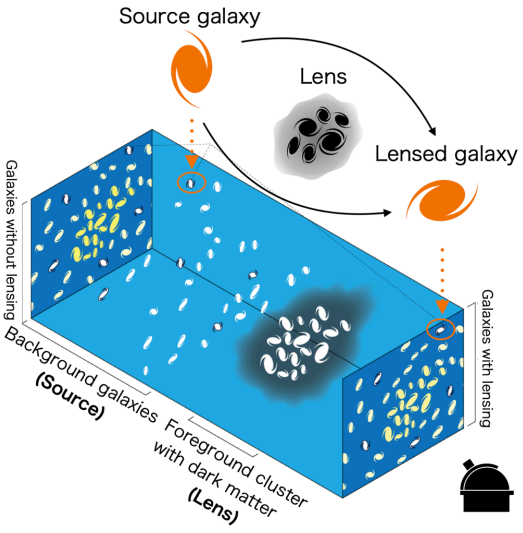


図 1: 弱い重力レンズ効果の図
[2] に掲載された Michael Sachs 氏作成の図に、英語の注釈および補足図を追加

レンズ効果を受けた背景銀河は、投影された画像データ上で、手前の銀河団を囲むように歪んで見える。この銀河団に対する接線方向の歪みを **tangential shear** という。銀河団の重力の影響が大きいほど歪みは大きくなるため、銀河団中心からの距離に対する tangential shear の大きさを測定することで、重力源となる銀河団の質量を推定することができる。

3 Theoretical model

銀河の歪みは、図 2 のような長軸 a と短軸 b の比で表される楕円率の大きさ $e = (a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)$ を用いて、y 軸方向の歪み成分 $e_1 = e\cos 2\theta$ と x 軸から 45° をなす方向の歪み成分 $e_2 = e\sin 2\theta$ で表す。すると、tangential shear は e_1、e_2、図 3 の x 軸とレンズ効果を受けた銀河のなす角 ϕ を用いて以下のように表せる。

$$\gamma_{i,+} = -e_1\cos(2\phi) - e_2\sin(2\phi) \tag{1}$$

銀河団ハローの重力は銀河団中心に近いほど大きくなり、歪みも大きくなるので、tangential shear は銀河団の質量分布を反映する。そこで本研究では、観測的によく合っていて広く普及している **NFW プロファイル** [3] を採用した。NFW プロファイルは、ダークマターハローを球状に平均化した密度分布と

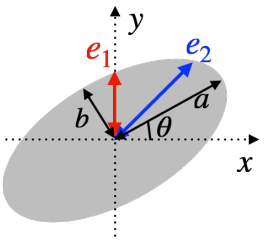


図 2: 楕円率の定義

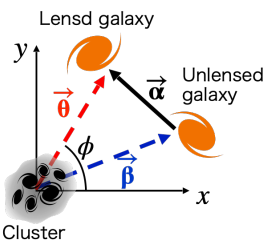


図 3: レンズ方程式

して、以下の関数形で知られている。

$$\rho_{\rm NFW}(r) = \frac{\rho_s}{\frac{r}{R_s}(1+\frac{r}{R_s})^2} \tag{2}$$

これを用いることで、銀河団質量（M_{200m}[ii]）と中心集中度（c_{200m}[iii]）を求めることができる。

ここで、(1) に NFW プロファイルを導入する方法について述べる。図 3 に示すように、背景銀河のレンズ効果を受ける前の位置を $\vec{\beta}$、レンズ効果を受けた後の位置を $\vec{\theta}$ とし、$\vec{\theta}$ と $\vec{\beta}$ の差を $\vec{\alpha}$ と定義する。すると、以下のようなレンズ方程式が得られる。

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\alpha} \tag{3}$$

(3) を用いると、e_1、e_2 は $\vec{\alpha}$ の θ 微分を用いて、以下のように表すことができる。

$$e_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\alpha_x}{\partial\theta_x} - \frac{\partial\alpha_y}{\partial\theta_y}\right) \quad e_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\alpha_x}{\partial\theta_y} + \frac{\partial\alpha_y}{\partial\theta_x}\right) \tag{4}$$

$\vec{\alpha}$ は、図 4 の半径 R の円環上に投影された表面質量密度 $(\Sigma(R))$ を用いて以下のように書き直すことができる。

$$\vec{\alpha} = \frac{M(\theta)}{\pi(D_{\rm lens}\theta)^2\Sigma_{\rm crit}}\vec{\theta} = \frac{\Sigma(\theta)}{\Sigma_{\rm crit}} \tag{5}$$

$D_{\rm lens}$ は観測者から銀河団までの角径距離である。

(4)、(5) を用いて tangential shear を書き直すと、図 4 の半径 R 内の投影された平均の表面質量密度 $(\bar{\Sigma}(< R))$ を用いて以下のようになる。

$$\gamma_+(\rho_{\rm s}, R_{\rm s}) = \frac{\Sigma({\rm R}) - \bar{\Sigma}(<{\rm R})}{\Sigma_{\rm crit}} \tag{6}$$

[ii] 物質の平均密度 $\bar{\rho}_{m,0}$ の 200 倍の密度領域までを銀河団ハローの半径 (R_{200m}) と定義した時の銀河団ハローの質量。
[iii] $c_{200m} = \frac{R_{200m}}{R_s}$ で定義される値。NFW プロファイルの傾きが切り替わる位置を特徴づけるようなパラメータ。

このようにして ρ_s と R_s で tangential shear を記述できる。したがって、観測から求めた tangential shear に NFW プロファイルを用いたモデルをプロットすることで、**質量**と**中心集中度**を推定することができる。

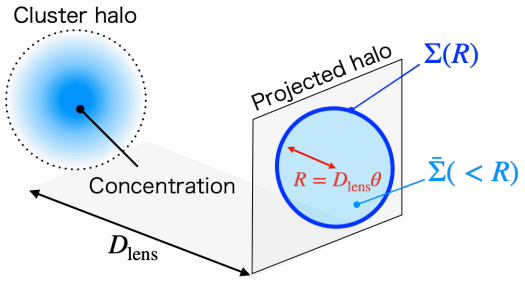


図 4: 銀河団ハローの投影された表面質量密度

4 Methods and Observations

4.1 Cluster samples

本研究では、すばる望遠鏡 Hyper Suprime-Cam（HSC）によって観測された、**近傍の X 線輝度が高い銀河団**（$0.03 < z < 0.12$、0.1〜2.4 keV）の撮像データを用いて弱重力レンズ解析を行った。このような低赤方偏移銀河団は、Dark Energy Camera（DECam）や Blanco Telescope at the Cerro Tololo Inter-American Observatory（CTIO）、Legacy Survey of Space and Time（LSST）などの、広角・広範囲における近傍銀河の観測が可能な観測機器の開発によって、**近年、弱重力レンズ効果の測定が可能になった観測対象**である [4]。現在、すばる HSC で観測された 20 個の銀河団についてデータ整約が完了しているため、これらの最新のデータを解析した。

4.2 Lensing mesurement

観測では、生データから直に背景銀河の赤方偏移や位置、e_1、e_2 などの値が得られる。図 5 の青い点は実際に観測された背景銀河の位置を表しており、中心には銀河団がある。この図の Ra 方向を x 軸、Dec 方向を y 軸にとり、e_1、e_2 の値を用いることで、(1) の tangential shear は計算できる。しかし、観測される各青点の銀河が持つ歪みには、レンズ効果による tangential shear（$\gamma_+^{\rm lensed}$）に加えて、銀河が本来持っている形の歪みに起因する tangential shear（$\gamma_+^{\rm int}$）の値が形状ノイズとして含まれている（図 5 上段）。そのため、レンズ効果のみによる tangential shear を得るには、(1) に代入する前に $\gamma_+^{\rm int}$ を除く必要がある。そこで、各銀河固有の e_1、e_2 はランダムであることを利用して、撮像画像をある区間ごとに区切り、求めた tangential shear の**アンサンブル平均**をとることで、ランダムな成分を落とす必要がある。

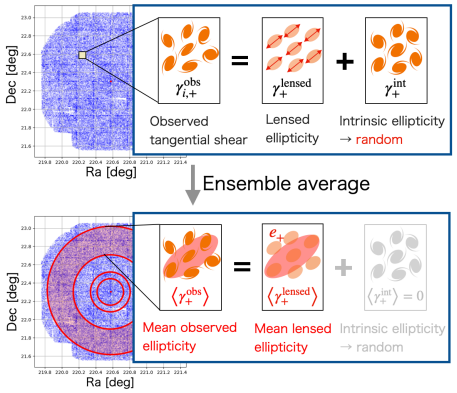


図 5: レンズ効果による歪みのみを抽出する方法

tangential shear は中心からの距離に依存して大きさが変化するので、中心から一定距離の範囲で平均をとることで、銀河団中心からの距離に対する tangential shear を求めることができる。このようにして、図 5 下段のような円環領域ごとの tangential shear を以下のように求められる[iv]。

$$\gamma_+ = \frac{\sum_i w_i \gamma_{i,+}}{2R(1+m)\sum_i w_i} \tag{7}$$

5 Results

前セクションで述べた手法で、すばる HSC で観測された 20 個の銀河団に対して tangential shear を求めた。また、20 個の銀河団を重ね合わせて背景銀河の個数を増やすことで、統計誤差が小さな **stacked tangential shear** のプロファイルを得た。図 6 の横軸は銀河団中心からの距離、縦軸は距離に対する stacked tangential shear の大きさを示している。オレンジ点は観測データから測定した (7) の tangential shear を表し、赤線は質量と中心集中度を引数に持つ

[iv] 系統誤差や統計誤差を補正するために、重みづけ（w_i）や shear responsibility（R）,multiplicative bias（m）を含めている

(6) の tangential shear のモデルを、MCMC[v]を用いて観測点にフィッティングをした結果である。

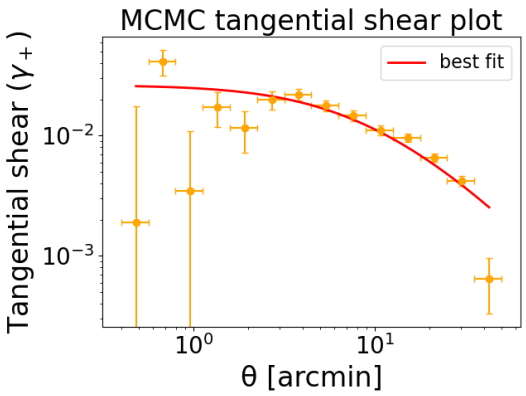


図 6: Stacked tangential shear のプロファイル

その結果、銀河団質量は $M_{200\mathrm{m}} = (3.355 \pm 0.486) \times 10^{14} \mathrm{M}_\odot$、中心集中度は $c_{200\mathrm{m}} = 4.136 \pm 0.526$ と推定された。

6 Discussion

図 6 では、銀河団中心付近で観測による tangential shear が小さくなっている傾向がある。これは、ダークマターを含む銀河団中心の位置を誤ってしまう、**ミスセンタリング**が原因であると考えられる。ミスセンタリングは、銀河団中心とダークマターハローの中心が一致していない時に起こる。そのため、今後はミスセンタリングを考慮したフィッティングを行う必要があり、すでに改善に向けて取り組んでいる。

また今後は、前にも述べたような X 線の観測量と質量を関係づける「**質量-観測量関係**」の構築に取り組む。現在までに、さまざまな質量-観測量関係が作られてきたが、不定性をなくすのは困難である。図 7 は質量-観測量関係を 1 つに決められた場合 (黒線) と不定性を持っている場合 (赤線) の Ω_m と σ_8 に対する制限の違いを示している [5]。質量-観測量関係の精度を高めることは、このように宇宙論パラメータに厳しい制限をつけることにつながる。そのため、今後は推定した銀河団質量に X 線輝度を観測量として関係づけ、**質量-X 線輝度関係**を構築することを目指す。

[v]マルコフ連鎖モンテカルロ法

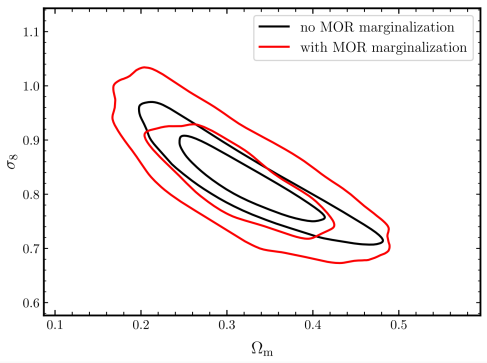


図 7: 質量-観測量関係の決定精度による宇宙論パラメータの制限の変化予測 [5]

7 Conclusion

本研究では、すばる HSC で観測された 20 個の銀河団のデータに対して弱重力レンズ解析を行い、これらの銀河団の平均質量を $M_{200\mathrm{m}} = (3.355 \pm 0.486) \times 10^{14} \mathrm{M}_\odot$ と推定した。今後は、より多くの銀河団質量を効率よく測定するために、銀河団サンプルの大量観測が可能な X 線輝度と質量を関係づける「**質量-X 線輝度関係**」の構築を目指す。

Acknowledgement

本発表にあたり、指導教員である宮武広直准教授をはじめ、名古屋大学宇宙論研究室の皆様には多くのご指導・ご鞭撻をいただきました。心より感謝申し上げます。また、このような発表の機会をくださった夏の学校事務局の皆様にも、この場を借りて御礼申し上げます。

Reference

[1] 松原隆彦, 「現代宇宙論」, 東京大学出版会, 2018

[2] Michael Sachs,"Gravitational lensing 3d", via Wikimedia Commons, `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gravitational-lensing-3d.png` Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 4.0 International (CC BY-SA 4.0)

[3] Navarro, Frenk, & White, 1996, ApJ, 462, 563

[4] Fu et al., 2024, ApJ, 974, 69

[5] Hironao Miyatake, 2025, arXiv:2505.07697v1

——index へ戻る

SK-16

泡宇宙の衝突における Cosmic wakes によるマルチバース観測

岡山理科大学
川村　翔吾

泡宇宙の衝突における Cosmic wakes によるマルチバース観測

川村 翔吾 (岡山理科大学大学院 理工学研究科)

Abstract

本発表では論文 Kleban et al. (2013) のレビューを行う。本論文では、泡宇宙間の衝突の際に発生する cosmic wakes と呼ばれる特殊な波に注目することで、モデルに依存しない方法で、マルチバースの存在可能性の検証を行うことができる。まず、cosmic wakes が宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) の温度と偏光に与える特徴的な影響について考察する。後半では、温度と偏光を用いて、現在および将来の CMB ミッションにおける Cosmic wakes の検出可能性を推定する。Planck や CMB 偏光ミッションなどによって cosmic wakes が検出されれば、我々の宇宙がマルチバースの一部であることを示すだけでなく、弦理論の証拠となるとともに宇宙の起源を明らかにしてくれると期待できる。

1 Introduction

弦理論を含む宇宙の起源に関する理論は、多くの泡宇宙を含むマルチバースの存在を予言している。また、多くのインフレーション模型において、永久インフレーションが実現し、無数の泡宇宙を生成する。

これらの泡宇宙は親となる偽真空から一次相転移を起こすことによって作られる。泡宇宙は一般的に衝突し、図 1 のように、我々の泡と他の泡の衝突によって、cosmic wakes と呼ばれる特殊な波が生成される。cosmic wakes は泡の中を伝播し、衝突の未来にある時空領域に影響を与える。今日の地球が図 1 でいう衝突点の延長線上の内側、つまり、cosmic wakes の影響を受ける領域にいると仮定すると、CMB や大規模構造 (LSS) の観測値にその効果が表れると予測される。本論文 Kleban et al. (2013) は、その cosmic wakes に注目することで、理論的に示されているマルチバースの存在可能性を観測で、間接的に検証を行うことができるという画期的な研究である。

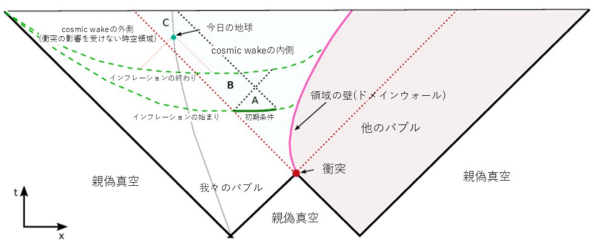


図 1: 泡宇宙の衝突時のペンローズ図

2 インフレーション後のスカラー摂動および曲率摂動

まず、スローロールインフレーション後の曲率摂動について計算を行う。この摂動はのちに Cosmic wake へと進化する。

インフレーション時空をド・ジッター空間として近似する。また、泡衝突に対して、thin-wall 近似を使用する。これは、衝突によって影響を受ける領域が明確な境界を持つとするものである。

これらより、共形ニュートンゲージでの線形摂動を考慮すると、計量は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 =&(H_I\tau)^{-2}[-(1+2\Phi)\mathrm{d}\tau^2 \\ &+(1-2\Psi)(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)] \end{aligned} \tag{1}$$

ここで、H_I はインフレーション中のハッブルパラメータ、$\tau<0$ は共形時間、空間座標は太陽系の共動位置が $\vec{x}=0$ になるよう選ばれ、Φ,Ψ はニュートンポテンシャルを表す。衝突面が平面であるという近似では、衝突によって影響をうける時空領域は、衝突がいつ起こったかに依存するある定数 x_c に対して、$x>-\tau+x_c$ を満たす。本論文では最終散乱面の可視部分と交差する因果的影響領域を持つ衝突に焦点を当てる。なぜなら、これらの衝突は検出の可能性が最も高いからである。インフレーションの終わりには、地球は $x=0$ にあり、$H_I|\tau|\ll 1$ になるので、$H_I|x_c|\ll 1$ とする。

スローロールインフレーションが起こったことを考慮すると、インフレーション前の非一様性はイン

フレーションの初期に小さくなる。その時点から標準的な線形宇宙論的摂動論を用いて、摂動を発展させることができる。スローロールパラメータの最低次数において、インフラトン場 $\phi = \phi_0 + \delta\phi$ に対するゲージ不変摂動はド・ジッター空間における以下の自由スカラーの運動方程式に従う。

$$\partial_\tau^2 \delta\phi + 2\mathcal{H}\partial_\tau \delta\phi - \nabla^2 \delta\phi + \mathcal{O}(\epsilon, \eta) = 0 \quad (2)$$

ここで、$\mathcal{H}(\tau) = -1/\tau + \mathcal{O}(\epsilon, \eta)$ は共形ハッブルパラメータであり、ϵ, η は標準的なスローロールパラメータである。$\mathcal{O}(\epsilon, \eta)$ の項は無視し、スローロール展開の 0 次で計算する。

衝突摂動はほぼ平面上で一定であるため、(2) の一般解は閉じた形で書くことができる。

$$\begin{aligned}\delta\phi(\tau, x) =& \tilde{g}(\tau + x) - \tau\tilde{g}'(\tau + x) \\ &+ \tilde{f}(\tau - x) - \tau\tilde{f}'(\tau - x) \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、$\tilde{g}$ と $\tilde{f}$ は 1 変数の任意の関数である。次に進むためには、泡衝突によって生じる初期摂動が必要である。近似的にインフレーション後の予測は次の 4 つのパラメータで特徴づけることができる。

線形摂動理論が有効であるインフレーションの始まりに近い、ある時間 $\tau_i \sim -H_I^{-1}$ における衝突光円錐の端 $x = -\tau_i + x_c$ 付近の領域を考える (図 1 では「初期条件」と表示)。摂動 $\delta\phi$ は $x > -\tau_i + x_c$ に対してのみゼロではないので、(3) から $\tilde{g}(\tau + x - x_c) = g(\tau + x - x_c)\Theta(\tau + x - x_c)$ と $\tilde{f}(\tau - x) = f(-\tau + x - x_c + 2\tau_i)\Theta(-\tau + x - x_c + 2\tau_i)$ を持たなければならない。ここで、Θ はヘヴィサイドステップ関数、f, g は 1 変数の関数である。

インフレーションの終わりでは、インフラトンの摂動は以下のように表される。

$$\begin{aligned}\delta\phi(\tau_e, x) &\approx g(x - x_c)\Theta(x - x_c) \\ &= M\sum_{n=0}^{\infty}\{\alpha_n H_I^n (x - x_c)^n\}\Theta(x - x_c) \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、(3) の $\tau_e \ll H_I^{-1}$ に比例する項を削除し、g を無次元係数 α_n と質量の次元を持つ定数 M で展開した。

モデル依存の初期条件 $\delta\phi(\tau_i, x)$ と $\dot{\delta\phi}(\tau_i, x)$ は係数 α_n を決定する。(3) から明らかなように、正則な摂動 $\delta\phi$ は $\alpha_0 = 0$ を与える。初期の時間 $\tau_i \sim H_I^{-1}$ における $\mathcal{O}(1)$ の摂動では、一般に $n > 0$ の無次元係数 $\alpha_n \lesssim 1$ を期待する。しかし、$H_I|x - x_c| \ll 1$ の領域だけを考えたいので、α_n を微調整しない限り、(4) の高次の項は無視する。したがって、インフレーションが終わる頃には、摂動は線形項だけになる。

$$\delta\phi = M\alpha_1(x - x_c)\Theta(x - x_c) \quad (5)$$

この式は 2 つのパラメータを含んでいる ($M\alpha_1$ と x_c)。x 方向が衝突の対称軸になるように座標を選んだ。つまり、衝突の中心に向かう方向をパラメータ化する 2 つの角度がある。これらの 4 つのパラメータは一般的な衝突の CMB への影響を完全に特徴づける。

(5) のインフラトン摂動 $\delta\phi$ は、共形ニュートンゲージの重力ポテンシャル摂動 Φ を決定する。アインシュタイン方程式とスカラー方程式を用いると、ポテンシャル摂動は以下のように示される。

$$\Phi = -\frac{V'}{2}g(\tau + x)\Theta(\tau + x) \approx -\frac{V'}{2}M\alpha_1 x\Theta(x) \quad (6)$$

ここで、$V' = \partial V(\phi)/\partial\phi$ である。

インフレーション後の初期条件は、スーパーホライズンスケールで保存される共動曲率摂動 ζ によって以下のように表現される。

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{2}{3}\frac{\mathcal{H}^{-1}\partial\Phi/\partial\tau + \Phi}{1 + \omega} + \Phi \\ &= \frac{-M\alpha_1 V'}{3}\left(\frac{x}{1 + \omega} + \tau + x\right)\Theta(\tau + x) \approx \lambda x\Theta(x) \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、$\omega \simeq -1$ はインフレーション中の状態方程式を設定する定数、$\lambda = -\alpha_1 MV'(2 + \omega)/(3 + 3\omega) \sim \alpha_1 MV/V'$ は後期効果の振幅を設定する定数である。最後の近似等式はインフレーション後期においても有効である。

3 結果

3.1 温度

Sachs-Wolfe 近似では、CMB 温度異方性は宇宙の晴れ上がり時の曲率摂動によって決定され、$\delta T(\theta, \phi)/T \propto \zeta(\vec{x}, \tau_{dc})$ となる。ここで、$\vec{x}^2 = D_{dc}^2$ は最終散乱面までの距離であり、角度座標は $x = D_{dc}\cos\theta$ となるように選択される。この近似の下

で、衝突摂動 (7) は非常に単純な温度摂動を与え、$\delta T/T \propto \Theta(\theta_c - \theta)(\cos\theta - \cos\theta_c)$ となる。ここで、$\theta_c = \cos^{-1} x_c/D_{dc}$ はスポットの角度半径である。

3.2 偏光

強度テンソル I_{ij} を持つ横波電磁波の偏光は、ストークスパラメータ Q と U によって、以下のように特徴づけられる。

$$Q = (I_{11} - I_{22})/4, \quad U = I_{12}/2 \tag{8}$$

ここで、衝突スポットが $\theta = 0$ を中心とするように座標を選択すると、ストークスパラメータ $U = 0$ が保証され、偏光は純粋な E モードとなる。

E モード偏光は方位対称性を満たしているので、単一の衝突による CMB 偏光を $Q = Q(\theta)$ だけでパラメータ化できる。しかし、$Q(\theta)$ は小さなスポット ($\theta_c \lesssim 12°$) と大きなスポットでは定性的に異なる。図 2、3(スポットは中心で $|\delta T/T| = 10^{-4}$ となるように正規化した) で示されるように、大きなスポットは、特徴的な 2 重ピーク構造を持っている。この構造は泡衝突の特徴であり、$\theta_c \gtrsim 12°$ のどのスポットでも現れる。

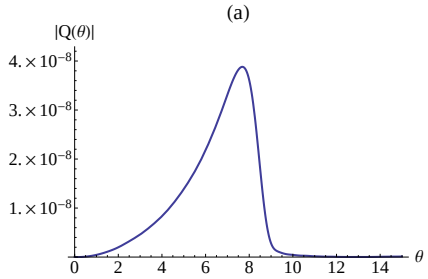


図 2: 角度半径 $\theta_c \approx 10°$ のスポットの偏光 $|Q(\theta)|$

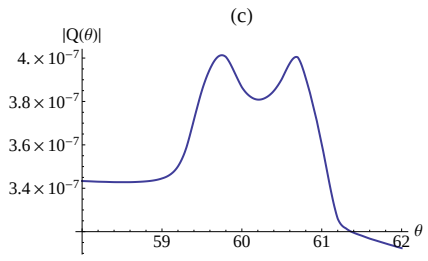


図 3: 角度半径 $\theta_c \approx 60°$ のスポットの偏光 $|Q(\theta)|$

3.2.1 2 重ピークの原因

インフレーションの終わりでは、ニュートンポテンシャルの摂動 (6) は $\Phi \sim x\Theta(x)$ となる。インフレーションの終わりから宇宙の晴れ上がりの間、宇宙摂動の発展方程式はすべて空間微分で 2 次であるため、x に線形な摂動 ($\Phi = Cx$ のような) は維持される。対照的に、$x = 0$ の"kink"は、プラズマ中を音速 $c_s \lesssim c/\sqrt{3}$ で広がり、物質と放射が等しくなるまで、$x = 0$ の音の地平線内に限定された滑らかなプロフィールに発展する。等しくなった後は、音速は実質的にゼロとなり、それ以上の広がりはなくなる。しかし、影響をうける領域のエッジでは、いつでも、摂動の 1 階微分は不連続に近い。

四重極モーメントは温度分布の 2 階微分に敏感であるため、この領域の 1 つと交差する最終散乱面の電子は、比較的多量の偏光を散乱する。晴れ上がり領域の 2 つのエッジは、音の地平線の 2 倍である $2r_{sh} \sim 306$Mpc、または $r_{sh}/D_{dc} \approx 0.0109$ だけ離れているはずである。したがって、2 つのエッジ間の角度間隔は $\theta_s \approx \cos^{-1}(x_c - r_{sh})/D_{dc} - \cos^{-1}(x_c + r_{sh})/D_{dc}$ となり、これは数値結果とよく一致する。$\theta_c \approx 90°$ の場合、この幅は $\theta_s \approx 2\theta_{sh} = 1.3°$ である。より小さなディスクの場合、θ_s はより大きくなり、$\theta_c \lesssim 12°$ では内側のピークは完全に消える。

4 Cosmic wakes の検出可能性

この章では、様々な大きさと明るさのスポットについて、現在および将来の CMB ミッションを用いて、温度、偏光シグナルの検出可能性の程度を推定する。温度シグナル、偏光シグナル、ともに円対称である。スポットの中心が極 $\theta = 0$ になるように座標を設定する。座標回転によって、スポットの中心を他の場所に設定することもできる。

検出閾値の推定値を得るために、中心部の温度スポットの振幅を 1 つのパラメータモデル (A と表記) に fit させる。そして、温度 (T) のみ、E モード偏光 (E) のみ、E モード偏光と温度マップおよび相互相関の情報を組み合わせた場合の fit を分析する。ノイズの共分散行列が対角となる l 空間での解析を行う。

各推定値に対して、WMAP-7 の concordance parameters と一致する T と E の CMB の full sky と、$l_{max} = 2000$ までの各検出器のノイズ実現値を生成

する。次に、これに衝突スポットを追加し、相対尤度関数を計算し、スポットが検出可能かどうかを決定する。ここで、あるスポットに対して、null 検出は $A = 0$(ガウス揺らぎと一致)、full 検出は $A = 1$ となるように正規化する。今回はサンプルとして、現在の衛星ミッション (Planck)、計画中の気球ミッション (SPIDER)、将来の衛星ミッション (CMBPol(EPIC-2m)) の 3 つの実験の予測感度を見た。

各実験の観測データを用いて、すべてのバンドにわたって複合解析を行う。各スポット半径 θ_c と実験について、検出 $A = 1$ がゼロから 3σ 離れるのに必要なスポット中心の最小 $|\delta T/T|$ を求める。これは温度と E モード偏光における検出可能閾値の控えめな推定値を表している。温度と偏光の結果を図 4、5 に示す。偏光については、相互相関からの情報を使用した。これにより、ガウス揺らぎからの寄与の相関部分を除去できるため、感度が向上する。

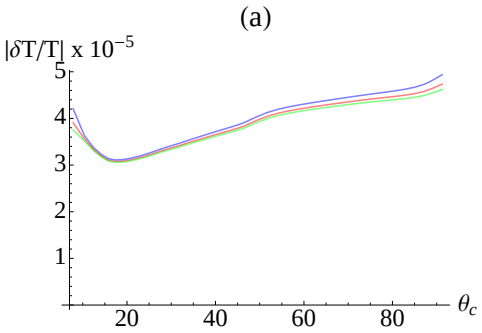


図 4: 温度の 3σ レベルの検出可能閾値 (赤線は Planck、青線は SPIDER、緑線は CMBPol)

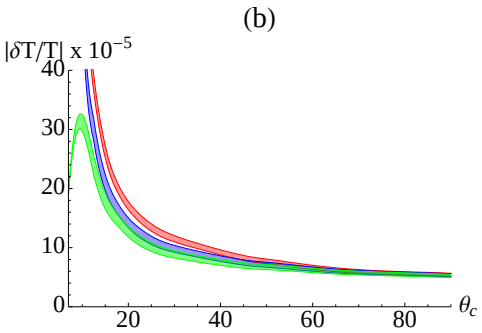


図 5: E モード偏光の 3σ レベルの検出可能閾値 (赤線は Planck、青線は SPIDER、緑線は CMBPol)、相互相関の情報を使って測定を改善しており、線の太さは感度の範囲を表す。

小さなスポット ($\theta_c \lesssim 10°$) の場合、$|\delta T/T| > 4 \times 10^{-5}$ のスポットは温度で観測できる可能性が高いが、偏光で観測するためには $\sim 2 \times 10^{-4}$ より明るくなければならない。温度マップの小さなスポットを観測する可能性はまだあるが、それを偏光シグナルと相関させることは、少なくとも 3σ レベルでは、現在あるいは近い将来の実験の能力から外れている可能性が高い。

それに対して、より大きなスポットについては、状況はかなり有望である。$\theta_c \gtrsim 25°$ では、より暗いスポットが偏光で検出可能であり、非常に大きなスポットも温度と同様に偏光でほとんど簡単に検出できる。その理由として、より大きく、暗いスポットは大きな角度範囲にわたって強い Q(または E) モードの偏光を持っている。したがって、ガウス揺らぎや検出器ノイズよりも簡単に確認できる。

5 Conclusion

泡宇宙の衝突によって生成される cosmic wakes の曲率摂動を求め、CMB に与える特徴的な温度と偏光パターンを決定した。偏光は、大きなスポットにおいて特徴的な二重ピーク構造を持っている。また、現在および将来の CMB ミッションにおける cosmic wakes の検出可能性を、温度と偏光の両方から見積もった。スポット中心の温度異常を固定したまま、スポット半径を大きくすると、偏光では検出しやすくなるが、温度では検出しにくくなる。今後、観測装置の精度向上によって、天球面の大部分の温度や偏光が観測されれば cosmic wakes が検出されるかもしれない。弦理論の証拠となるとともに我々の宇宙がマルチバースの一部であることを示す可能性を持つ cosmic wakes が発見されることを一個人として期待している。

Reference

[1] Matthew Kleban, Thomas S. Levi, and Kris Sigurdson, Phys.Rev.D 87 (2013) 4, 041301

——index へ戻る

SK-17

超新星ニュートリノによるマヨロンへの制限

東京大学
北川　陽斗

超新星ニュートリノによるマヨロンへの制限

北川 陽斗 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

本稿では [1] のレビューを行う。超新星爆発のコアという高温高密度の環境では, アクシオンやマヨロン, Z' ボソンなど, 極めて弱い相互作用を持つ粒子の生成が期待できる。特に, ニュートリノとの相互作用に注目し, マヨロンへの制限を考えた。マヨロンはレプトン数の自発的な破れに伴う擬ゴールドストンボソン粒子であり, ニュートリノのみと tree で結合する。マヨロンが崩壊して生じるニュートリノは超新星ニュートリノよりも高いエネルギーを持つことから, 近年最も近くで発生した SN1987A の観測データや, 近い将来に起こると期待される銀河系での超新星爆発を考え, マヨロンとニュートリノの結合定数を制限した。その結果, ニュートリノのエネルギー損失に基づく制限よりも強い制限を課すことができた。また, 1 keV から 100 MeV にわたる広いパラメータ領域において, CMB や BBN といった宇宙論的制限よりも強い制限を課すことができた。

1 導入

標準模型（SM）は現代の素粒子物理学において極めて成功した理論である。しかし, ダークマターの存在や宇宙のバリオン非対称性の起源といった, 未だ説明できない根本的な問題を多く抱えている。その一例が, ニュートリノの質量の起源である。SM においてニュートリノは質量を持たないとされているが, ニュートリノ振動の観測によって, わずかではあるが質量を持つことが明らかになっている。ニュートリノの小さい質量を説明する有力な理論としてシーソー機構が知られている。シーソー機構では, ニュートリノにマヨラナ質量を導入するためにレプトン数を破る必要がある。マヨラナ質量を生成する方法として, レプトン数に対応する U(1) 対称性を自発的に破る仕組みが考えられ, このときに現れるゴールドボソン粒子をマヨロンと呼ぶ。マヨロンはダークマター候補の一つとしても注目されている。マヨロンはニュートリノと弱く結合するが, このような相互作用は, 超新星爆発という極端な高温高密度の宇宙環境において顕著になり, 粒子生成やエネルギー散逸に影響を及ぼす可能性がある。本稿では [1] をレビューする。SN1987A, 及び近い将来に銀河系内で起こると期待される超新星爆発のニュートリノ観測への影響から, マヨロンの相互作用にどのような制限がつけられるか議論する。

2 超新星爆発

太陽の 8 倍より重い恒星は, 水素を燃やし尽くした後, 最終的に超新星爆発を起こす。このような重力崩壊型の超新星爆発では, 中心核が急激に崩壊し, $r_\nu \sim 20$ km, $T \sim 30$ MeV の高温高密度のコアができる。このコアは 10 秒程度持続すると考えられている。その後, 中性子星の形成に伴い衝撃波が外層を吹き飛ばし, 光学的に観測できる超新星爆発となる。高密度のコアから脱出することができるのは, 相互作用の弱いニュートリノに限られるため, この過程で生じるエネルギーの約 99%はニュートリノとして放出される。コアから出てくるニュートリノは, 高密度の物質中での散乱を経て, 最終的に $T \sim 5$ MeV, $E \sim 15$ MeV 程度になる。

超新星爆発でできるコアは極めて高温高密度の環境であり, 相互作用の弱い粒子も生成されることが期待できる。そのため, アクシオンやマヨロン, Z' ボソンなど, 標準模型に含まれない, 標準模型粒子と極めて弱い相互作用をする粒子が見つかる可能性も考えられる。特に, 本稿ではニュートリノとの相互作用に注目し, マヨロンを取り上げる。

近年最も近くで発生した超新星爆発は SN1987A である。SN1987A は, 地球から約 50 kpc にある大マゼラン雲で起こり, カミオカンデや IMB で超新星ニュートリノが観測された。このときのデータを用いて, マヨロンの相互作用を制限することができる。また, 銀河系での超新星爆発は, 大質量星の数と寿命から, 30

〜50 年に 1 回程度起きると期待されている。カミオカンデが稼働して以降銀河系内での超新星爆発は発生していないが, いつ観測されても不思議ではないといえるだろう。銀河系内 (~ 10 kpc) で超新星爆発が起き, ハイパーカミオカンデでニュートリノを観測することができれば, マヨロンの相互作用の制限がさらに進む, あるいはマヨロンの発見が期待できる。

今後の解析では, 超新星コアのモデルとして SFHo-18.8 を用いている [3]。

3 マヨロン

マヨロンとは, レプトン数の自発的な破れに伴う擬ゴールドストンボソンである。具体的にラグランジアンを書き下すと

$$\mathcal{L} = -\bar{L} y N_R H - \frac{1}{2}\bar{N_R^c}\lambda N_R \sigma + h.c. \tag{3.1}$$

である。L は左巻きレプトン, H はヒッグス場, N_R は右巻きニュートリノである。スカラー場 σ が期待値 f を持つとき, そのゴールドストンボソン成分 ϕ がマヨロンである。

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}(f + \sigma_0)e^{i\phi/f} \tag{3.2}$$

また, ヒッグス場が期待値を持つとする。

$$\langle H \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

このとき, 右巻きニュートリノの質量 M_R とニュートリノのディラック質量 m_D が与えられ,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \bar{\nu} & \bar{N_R^c} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D^T & M_R e^{i\phi/f} \end{pmatrix} + h.c. \tag{3.4}$$

$$M_R = \frac{f\lambda}{\sqrt{2}},\ m_D = \frac{yv}{\sqrt{2}} \tag{3.5}$$

と書ける。この質量項を対角化すると, シーソー機構により

$$\mathcal{L} = -m_\nu \bar{\nu}\nu + i\frac{m_\nu}{f}\bar{\nu}\nu\phi \tag{3.6}$$

$$m_\nu = m_D M_R^{-1} m_D^T \tag{3.7}$$

とニュートリノの小さい質量を説明し, 同時にマヨロンとニュートリノの結合が導かれる。

このように, レプトン数の自発的な破れは右巻きニュートリノの質量を自然に生成し, その結果シーソー機構によってニュートリノ質量が生成される。同時に, マヨロンとニュートリノは相互作用を持つことがわかる。そのため, マヨロンの有効ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\bar{\nu}_\beta\nu_\alpha\phi \tag{3.8}$$

と表される。$\alpha, \beta = e, \mu, \tau$ である。このように, マヨロンはニュートリノのみと tree で結合する。また, 本稿では仮定しないが, マヨロンはダークマター候補としても注目されている。本稿では, (3.8) の $g_{\alpha\beta}$ を超新星ニュートリノから制限する。

4 マヨロンから来るニュートリノ

マヨロンは, ニュートリノが熱平衡にある $r_\nu \sim 20$ km, $T \sim 30$ MeV のコアの中で生成される。その後, マヨロンはコアを抜け出し, ニュートリノに崩壊して地球に到達する。本章では, このシナリオに基づいてマヨロン ϕ から生じるニュートリノのスペクトルを計算する。ϕ の分布関数を f_ϕ とすると, コア内での ϕ の生成数は

$$\frac{\mathrm{d}N_\phi}{\mathrm{d}E_\phi} = \int dt \int dV \Theta(E_\phi - m_\phi - U_\phi) \times \langle e^{-\tau_{\rm abs}(r)}\rangle e^{-\Gamma_\phi r_\nu/(\gamma\beta)}\frac{E_\phi p_\phi}{2\pi^2}\frac{\partial f_\phi}{\partial t} \tag{4.1}$$

である。$E_\phi p_\phi/(2\pi^2)$ は分布関数の d^3p_ϕ を dE_ϕ に変更した際の係数である。$e^{-\Gamma_\phi r_\nu/(\gamma\beta)}$ は ϕ がコアの内部で崩壊する確率を示している。コアの内部で崩壊した ϕ は, 放出されるニュートリノが再び熱平衡に戻り, ϕ によるスペクトルとしては寄与しない。

$$\langle e^{-\tau_{\rm abs}(r)}\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} d\mu e^{-\int_0^\infty ds \tau_{\rm abs}\left(\sqrt{r^2+s^2-2rs\mu}\right)} \tag{4.2}$$

は ϕ がコア内で再び散乱, 吸収される確率を, 全角度で平均したものである。

$$U_\phi = \frac{GM_r m_\phi}{r} \tag{4.3}$$

は ϕ の重力ポテンシャルであり, G は万有引力定数, M_r は半径 r より内側の質量である。ステップ関数 Θ は, 運動エネルギーが U_ϕ 以下の粒子が重力ポテン

シャルから抜け出せないことを示している。これらをコアの体積 V とコアの存在する時間 t で積分することで, ϕ の生成量が得られる。崩壊してできたニュートリノの生成数は

$$\frac{\mathrm{d}N_\nu}{\mathrm{d}E_\nu} = \int d\cos\theta \int dE_\phi \frac{1}{\gamma(1+\beta\cos\theta)} \times \frac{\mathrm{d}N_\phi}{\mathrm{d}E_\phi} f\left(\frac{E_\nu}{\gamma(1+\beta\cos\theta)}, \cos\theta\right) \tag{4.4}$$

である。E_ν は実験室系でのニュートリノのエネルギーである。$f(E,\theta)$ は重心系での ϕ が崩壊してできるニュートリノの分布関数である。γ, β は ϕ のローレンツファクターを示しており, 重心系でのニュートリノのエネルギー ω_ν に対しローレンツ変換 $E_\nu = \omega_\nu\gamma(1+\beta\cos\theta)$ を用いている。超新星コアから抜け出したマヨロンは, ニュートリノの場合とは異なり, コアの外側では散乱しない。そのため, マヨロンが崩壊してできるニュートリノのエネルギー E は, コアの温度 $T \sim 30$ MeV より $E \sim 100$ MeV 程度である。これは, 超新星爆発そのもので生じるニュートリノよりも高いエネルギーである。カミオカンデや IMB では, $\sigma_\nu \propto E_\nu^2$ で ν_e, ν_μ を検出し, そのエネルギーを測定できるから, マヨロンの崩壊で生じるニュートリノは超新星ニュートリノと観測的に区別することができる。

5　結果と議論

10 kpc の距離の超新星爆発を観測した場合, 期待されるニュートリノスペクトルを示す (図 1, 図 2, 図 3)。$m_\phi = 1$ MeV とする。また, $g_{ee}, g_{e\mu}, g_{\mu\mu}$ のいずれか 1 つのみが 0 でないとし, $g = 10^{-9}$ であるとする。超新星爆発のニュートリノのエネルギーは 15 MeV 程度, マヨロンの崩壊によるニュートリノのエネルギーは 100 MeV 程度になっている。この結果は, 以前の章での推定と整合している。SN1987A のスペクトルは図 4のようになっており, 100 MeV 程度の高エネルギーのニュートリノは観測されなかった [2]。この結果から, マヨロンの相互作用を制限することができる。また, 将来の銀河系内の超新星爆発でも高エネルギーのニュートリノが発見されなかったと仮定すると, SN1987A よりも強い制限が可能である (図 5)。これは, 超新星爆発の距離と, 検出器の大きさの違いによるものである。CMB による制限は, 宇宙初期のマヨロンとニュートリノの相互作用に由来する。宇宙初期にマヨロンとニュートリノが相互作用していると, ニュートリノの平均自由行程が減少

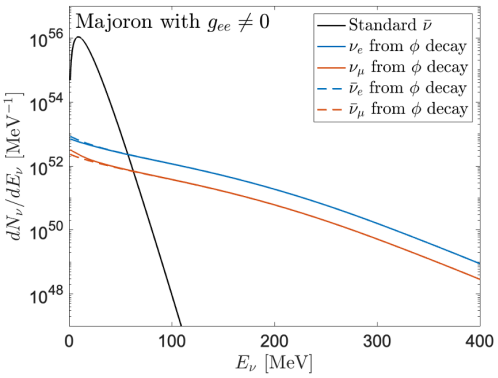


図 1: $m_\phi = 1$ MeV, $g_{ee} = 10^{-9}$ のときのニュートリノスペクトル。黒線が超新星ニュートリノ, 色線がマヨロンの崩壊で発生するニュートリノである。

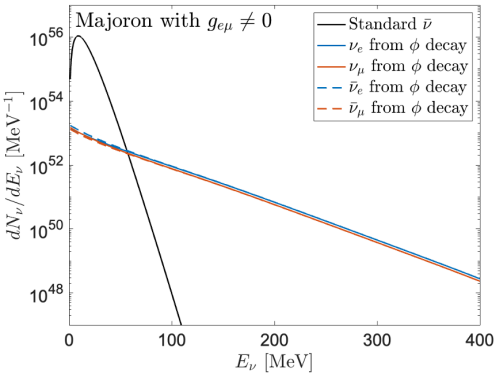


図 2: $m_\phi, g_{e\mu} = 10^{-9}$ のとき。

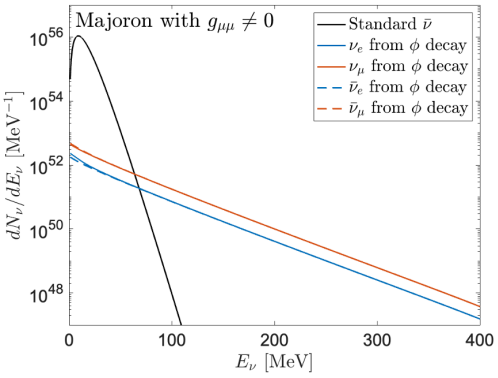


図 3: $m_\phi, g_{\mu\mu} = 10^{-9}$ のとき。

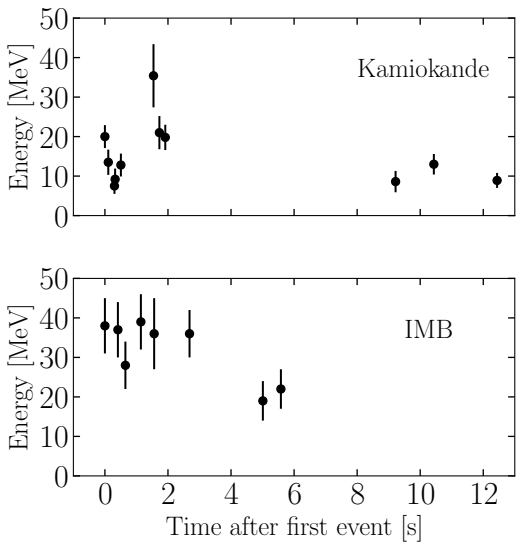


図 4: SN1987A から観測されたニュートリノ [2]。カミオカンデでは 11 個, IMB では 8 個観測された。マヨロンが崩壊したと思われるニュートリノは見当たらない。

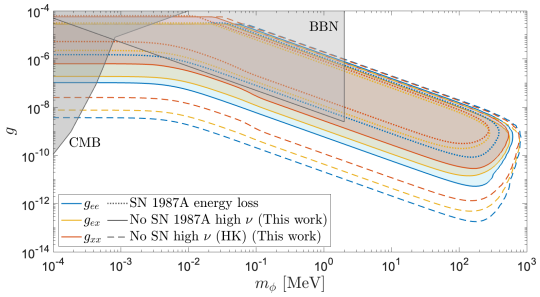


図 5: マヨロンのパラメータの制限。色付きの実線が SN1987A の高エネルギーニュートリノ, 破線が将来の銀河系で起こる超新星爆発の観測からの制限である。点線はエネルギー損失からの制限。灰色で CMB, BBN からの制限も示してある。

する。その結果, CMB の温度異方性が大きくなる。そのため, Plank の観測データと比較することにより相互作用を制限できる。また, BBN からもマヨロンの相互作用を制限できる。マヨロンが崩壊してできるニュートリノは, プラズマの温度を上昇させたり, $p \to n$ の反応を早めたりするため, D や ^{4}He などの存在量に影響を与える。エネルギー損失による制限とは, マヨロンの持ち出すエネルギーの制限から求めたパラメータ領域である。超新星ニュートリノの量への影響から, マヨロンの持ち出すエネルギーは制限される。なお, 図では g が大きい領域も許されているが, これは, 相互作用が比較的大きい場合, マヨロンはニュートリノと同様にコアを抜け出した後冷却され, 高エネルギーのニュートリノをもたらさないからである。また, $m_\phi = 10^{-2}$ MeV 付近で折れ曲がっているのは, コア内の化学ポテンシャルの寄与である。

6 結論

本稿では, 超新星コアという高温高密度の環境において SM にない新粒子が合成されるというシナリオを考えた。特に, ニュートリノとの相互作用に着目し, 新粒子としてレプトン数の破れに伴う擬ゴールドストンボソン粒子であるマヨロンを考えた。超新星爆発そのものにより生じるニュートリノよりも, マヨロンの崩壊により生じるニュートリノのエネルギーの方が大きいことから, マヨロンに由来するニュートリノを区別することができる。このシナリオに基づき, 近年最も近くで発生した SN1987A のカミオカンデや IMB による観測や, 近い将来銀河系で発生すると期待できる超新星爆発による制限を考えた。その結果, エネルギー損失による制限よりも強い制限が与えられることがわかった。また, 1 keV から 100 MeV にわたる広いパラメータ領域において, CMB や BBN といった宇宙論的制限を上回ることがわかった。

謝辞

本講演にあたり, 貴重な助言をいただいた, 濱口幸一准教授, 特別研究員の秋田謙介さんに感謝いたします。

Reference

[1] K.Akita, S.H.Im, M.Masud and S.Yun, *Limits on heavy neutral leptons, Z′ bosons and majorons from high-energy supernova neutrinos*, JHEP 07 (2024) 057 [arxiv:2312.13627].

[2] D.F.G.Fiorillo, G.G.Raffelt and E.Vitagliano, *Strong Supernova 1987A Constraints on Bosons Decaying to Neutrinos*, Phys. Rev. Lett. 131 (2023) 021001 [arxiv:2209.11773].

[3] Max Planck Institute for Astrophysics, *Garching core-collapse supernova research archive*, https://wwwmpa.mpa-garching.mpg.de/ccsnarchive/.

——index へ戻る

SK-18

Domain-wall Quintessence

名古屋大学
小林　信房

Domain-wall Quintessence

小林 信房 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙の加速膨張を駆動するダークエネルギーの起源を解明することは, 現代宇宙論における中心的課題の一つであり, 近年その探求が精力的に進められている. その候補の一つとして, スカラー場を用いたモデルであるクインテッセンスモデルが注目を集めている. 加えて, 宇宙論的スケールにおける非等方性の可能性を示唆する観測的証拠も蓄積されつつある. こうした背景のもと, クインテッセンスと大規模な非等方性の両方を統一的に説明する理論的枠組みが必要である. 本研究では, ハッブルスケールの厚さを持つ平坦なドメインウォール (DW) が生み出すポテンシャルを用いて, 現在観測されている宇宙の加速膨張を説明する新たな理論モデルを構築した. このモデルにおいて,DW 近傍の空間が近似的に一様非等方な構造を持つことが解析的に導かれ, この構造により宇宙の大域的な非等方性が誘起される. 構築した背景時空におけるヌル測地線に沿って光の挙動を解析し, そこから導出される Ia 型超新星 (SN Ia) の距離指標を観測データと比較することで, 我々の宇宙における DW の空間的位置についての制限を得た. その結果, 我々がハッブルスケールの DW の近傍に位置している可能性が示唆され, そのような空間的関係のもとでは, 局所的な加速膨張が自然に導かれることが確認された.

1 Introduction

現在の宇宙論の標準モデルである ΛCDM モデルは, 宇宙は大局的なスケールにおいて一様かつ等方であるという宇宙原理に基づいて構築されている. このモデルでは, 宇宙のエネルギー密度のおよそ 70% を占めるダークエネルギーが宇宙の加速膨張を引き起こすとされているが, その本質は未だ明らかになっていない.

ダークエネルギーの候補のひとつに, スカラー場を用いたクインテッセンス・モデルがある. このモデルでは, ダークエネルギーは力学的に真空エネルギーを生成する新たな場（クインテッセンス）によって説明される. また, 近年の高精度な宇宙観測によって, 宇宙の非等方性を示唆する結果も得られつつある [1]. 例えば, 先行研究 [2] では SN Ia の観測に基づき, 宇宙の膨張に非等方性が存在する可能性が報告されている.

このような大局的非等方性を説明する枠組みの一つとして, ハッブルスケールの位相欠陥を導入するアプローチがある [3]. 宇宙の膨張とともに温度が低下すると, 場の自発的対称性の破れが生じ, これは真空の相転移として理解される. 対称性が宇宙の異なる領域で独立に破れると, それぞれで異なる真空状態が形成されるが, これらの異なる真空は連続的に宇宙全体を埋め尽くすことができず, 空間の一部に位相欠陥ができる. 位相欠陥の性質はその次元に依存し, どのような場のモデルを考えるかによって形成される欠陥の種類が異なる. たとえば, $\mathbb{Z}_2$ 対称性を持つスカラー場を考え, その対称性が破れるとドメインウォール (DW) と呼ばれる二次元的な構造が生じる. この構造は, 異なる真空領域を隔て, 膨大なエネルギーを持つ. このような構造がハッブルスケールで形成されると, 宇宙の大部分においてスカラー場がポテンシャルの高い領域に留まり, それによって現在の宇宙の加速膨張が生じているとするモデルが考えられる.

本稿では, こうしたアイデアに基づき以下の構成で議論を進める. 第 2 章ではハッブルスケールの DW が持つ物理的性質を考察し, 第 3 章では SN Ia の観測結果と比較し, 我々の宇宙における DW の空間的位置に対する制限を与える.

2 Physical properties of the hubble scale DW

以下のような作用を考える.

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{m_p^2}{16\pi}\mathcal{R} - \frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi^a)^2 - V(\Phi) + \mathcal{L}_m\right] \tag{1}$$

ここで, 第 1 項は Einstein-Hilbert 作用で重力との相互作用を考慮している. 第 2,3 項が DW のラグランジアン密度で, 第 4 項は物質場のラグランジアン密度である. さらに, ポテンシャルは $V(\Phi) = \frac{1}{4}\lambda(\Phi^2 - \eta^2)^2$ というワインボトル型のポテンシャルを仮定する. ただし,η は真空期待値,λ は結合定数である. さらに, デカルト座標系において x 軸方向を DW に垂直な方向とし, ハッブルスケールの平坦な DW の場は時間 t と座標 x のみに依存すると仮定する.

$$\Phi^a = \Phi(x,t) \tag{2}$$

このとき,DW 周りの計量は x 軸方向と, それ以外の y, z 軸方向とを区別するために 2 種類のスケールファクター $A(x,t), B(x,t)$ を用いて以下のようにする.

$$ds^2 = -dt^2 + A^2(x,t)dx^2 + B^2(x,t)(dy^2 + dz^2) \tag{3}$$

さらに, 我々は現在の宇宙を考えているので, エネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ は DW に由来するダークエネルギーと物質が支配的だとして, この 2 つの寄与のみを考慮して以下のように書く.

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(\mathrm{Dom})} + T_{\mu\nu}^{(\mathrm{mat})}$$

さて, 物質の存在を考慮し,(3) の計量のもと (2) の仮定で (1) の作用を考えると運動方程式が求まる. 運動方程式の一つを代表的に記述しておく.

$$\begin{aligned} -G_0^0 &= K_2^2(2K - 3K_2^2) - \frac{2B''}{A^2B} - \frac{B'^2}{A^2B^2} + \frac{2A'B'}{A^3B} \\ &= \frac{8\pi}{m_p^2}\left[\frac{\dot{\Phi}^2}{2} + \frac{\Phi'^2}{2A^2} + \frac{\lambda}{4}(\Phi^2 - \eta^2)^2 + \frac{\rho^{(\mathrm{mat})}}{1 - v^2}\right] \end{aligned} \tag{4}$$

ここで, プライム ($'$) は位置 x での偏微分を, ドット ($\dot{}$) は時刻 t での偏微分を表している. さらに,

$$K_1^1 \equiv -\frac{\dot{A}}{A} \quad , \quad K_2^2 = K_3^3 \equiv -\frac{\dot{B}}{B} \quad , \quad K \equiv K_i^i$$

と定義する. (4) にスローロール近似を課すと, 以下の条件を満たすとき宇宙論的なタイムスケールで Φ は静的となり, 十分な時間の加速膨張が可能となる. ただし,t_p は現在時刻である.

$$\left|\frac{\lambda\eta^2}{K\sqrt{K_2^2(2K - 3K_2^2)}}\right|_{t=t_p} \ll 1 \tag{5}$$

運動方程式系を数値的に解くために, 以下のような無次元化した変数を用いる.

$$\bar{x} \equiv \sqrt{\lambda}\eta\, x \quad , \quad \bar{t} \equiv \sqrt{\lambda}\eta\, t \qquad \bar{\Phi} \equiv \frac{\Phi}{\eta}$$

さらに初期条件は, 一様等方な物質分布をしている物質優勢期に相転移が起き, それによって DW が形成されたとする. ここで, 場の初期条件は静的な DW 解である

$$\Phi(t_0, x) = \eta \tanh\frac{\lambda^{1/2}\eta\, x}{\sqrt{2}}$$

とする。ただし, t_0 は物質優勢な初期時刻である.

数値計算の結果, およそ $\eta = 0.25\ m_p$ の時に条件 (5) の左辺がおよそ 1 となることがわかった. すなわち, 加速膨張を実現するためには $\eta > 0.25\ m_p$ である必要がある.

図 1 は,$\eta = 1.0\ m_p$ と $\eta = 0.1\ m_p$ それぞれの場合について, 場のプロファイルを初期時刻 t_0 から現在時刻 t_p まで描いたグラフである. $\eta = 0.1\ m_p$ の場合は (5) のスローロール条件を満たさないので宇宙論的タイムスケールよりも短い時間で場は真空になる. 一方で,$\eta = 1.0\ m_p$ の場合には条件を満たすので場の値はあまり変化していないことがわかる. 時間経過に注目すると, 時間が経つにつれて場の値は真空に近づいていくことがわかる. さらに, 中央面は時間経過と共に収縮していくことがわかる.

図 2 では $\eta = 1.0\ m_p$ の場合のスケールファクター $A(x,t)$, $B(x,t)$ のプロファイルの時間発展を描いている. これを見ると, 中央面では $A(x,t)$ と $B(x,t)$ の値が異なっており, 遠方では A と B の値が一致していることがわかる. これは DW の中央面近傍での非等方性と, 十分遠方での等方性から説明できる. さらに, スケールファクターの時間変化に注目すると, 中央面近傍の方が遠方よりも大きいことがわかる. このことから,DW 近傍の方が遠方よりも空間の膨張速度が速いと言える.

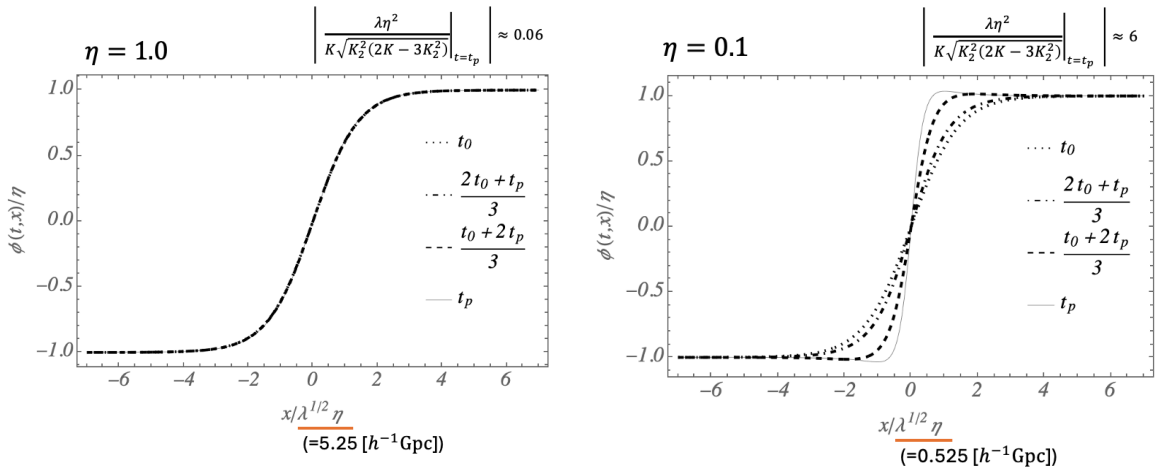


図 1: $\eta = 1.0\ m_p$ の場合 (左パネル) と $\eta = 0.1\ m_p$ の場合 (右パネル) の場のプロファイルの時間変化. 線の種類はそれぞれ,t_0 (点線),$(2t_0 + t_p)/3$ (1 点破線),$(t_0 + 2t_p)/3$ (破線),t_p (実線) と時間に対応して変えてある. 横軸は, 無次元化した共動座標 $\bar{x}$ を用いている. 次元を戻すにはオレンジ線の下の数字をかける.

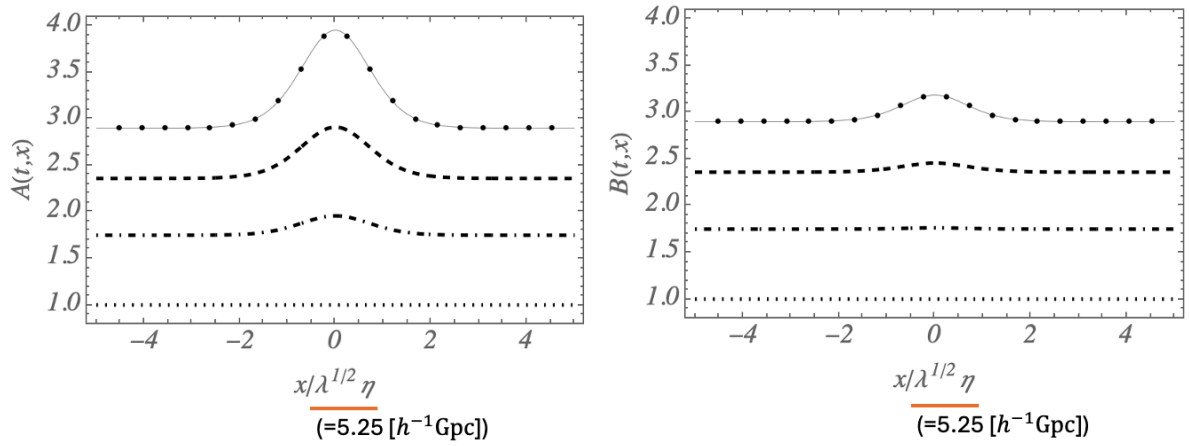


図 2: $\eta = 1.0\ m_p$ の場合のスケールファクター A(左パネル) と B(右パネル) のプロファイルの時間変化. 線の種類はそれぞれ,t_0 (点線),$(2t_0 + t_p)/3$ (1 点破線),$(t_0 + 2t_p)/3$ (破線),t_p (実線と黒丸). 横軸は, 無次元化した共動座標 $\bar{x}$ を用いている. 次元を戻すにはオレンジ線の下の数字をかける.

3 Constraints on the location of DW using SN Ia observations

SN Ia から出た光の進路は観測者に届くまでの間に DW の影響によって曲がる. この光の進路を調べるためには測地線方程式を解けば良い. ここで, DW と観測者の距離を x_{obs},x 軸と観測者に届く光の測地線の接ベクトルのなす角度を ξ と定義する. また, DW 宇宙での光度距離は,

$$d_L^4(\mathbf{d}) = (1+z_r)^8 \frac{B^2(x(\mathbf{d}),t(\mathbf{d}))\, y^2(\mathbf{d})}{\sin^2\xi} \times \left[A^2(x(\mathbf{d}),t(\mathbf{d})) \left(\frac{\partial x(\mathbf{d})}{\partial \xi}\right)^2 + B^2(x(\mathbf{d}),t(\mathbf{d})) \left(\frac{\partial y(\mathbf{d})}{\partial \xi}\right)^2 \right]$$

という式から求まる. ここで $\mathbf{d} \equiv \eta, z_r, \xi, x_{obs}$ である. また, 距離指標は光度距離を用いて以下のように

求めることができる.

$$\mu(\mathbf{d}) = 5\log_{10}\left(\frac{d_L(\mathbf{d})}{1\ \mathrm{Gpc}}\right) + 40 \tag{6}$$

理論から求まる距離指標と観測からわかる SN Ia の距離指標のデータを比較するするために,SN Ia や DW 中心 ((式 3) の座標系での原点) の赤道座標と角度 ξ との関係を導出する必要がある. ここで,SN Ia の赤道座標を (α, δ),DW 中心を (α_c, δ_c) とすると

$$\begin{aligned}&\cos\xi\\ &= -\sin(90^\circ-\delta_c)\sin(90^\circ-\delta)\cos(\alpha+(360^\circ-\alpha_c))\\ &\quad -\cos(90^\circ-\delta_c)\cos(90^\circ-\delta)\end{aligned}$$

と求まる. この関係から距離指標は, $\mu(\eta, z_r, \alpha, \delta, \alpha_c, \delta_c, x_{obs})$ と求まる.

Pantheon+[4] と SH0ES[5] の観測からわかった SN Ia($z < 0.6$) の距離指標を用いて,$(\eta, \alpha_c, \delta_c, x_{obs})$ という 4 つのパラメータに MCMC を用いたパラメータ推定を行った (図 3). ここで, 理論に $\mu(\alpha_c, \delta_c) \approx \mu(\alpha_c + 180°, -\delta_c)$ という対称性があることから, 天球座標の最尤値は反対の極 (図 3 の括弧書きの値) も取り得る.

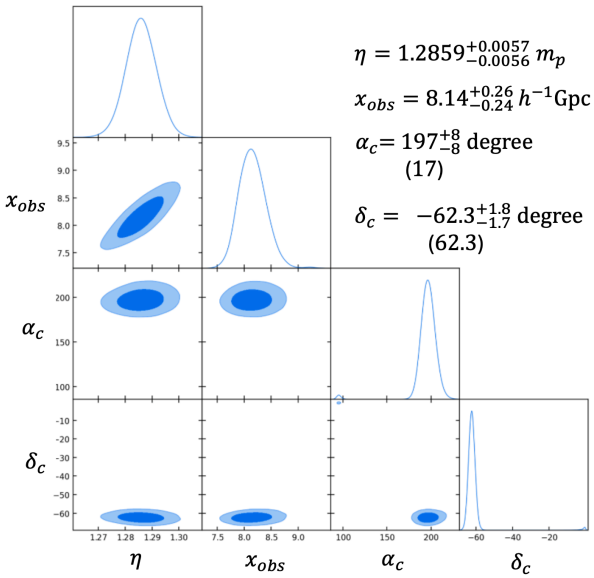


図 3: パラメータ空間での 68%,95%のコーナープロット

この推定された方向は先行研究 [1][2] で示されている非等方性の方向と近い方向を示している.

4 Conclusion

本研究では, ハッブルスケールの平坦な DW の存在を仮定することで非等方な加速膨張が記述できることを示し, その空間の中を進む光の測地線を求めた. さらに,DW の空間的位置を推定し, その結果が先行研究 [1][2] の非等方の方向と近い方を示していることがわかった. これは、観測される宇宙の異方性と、DW の存在とが関連している可能性を示唆している.

今後は、ほかの観測データを用いた際のパラメータの変化を調べたいと考えている.

Acknowledgement

お忙しい中、研究をご指導くださった立教大学の多田祐一郎助教ならびに名古屋大学の寺田隆広特任助教に深く感謝申し上げます。また、本研究の発端となる貴重なご指摘をしてくださった東北大学の高橋さんにも心より感謝いたします。さらに、本発表についてゼミにて議論・助言をいただいた名古屋大学宇宙論研究室のスタッフおよび先輩方、ならびに研究発表の場を設けてくださった夏の学校のスタッフの皆様に、重ねて御礼申し上げます。

Reference

[1] Roya Mohayaee, Mohamed Rameez, and Subir Sarkar. Do supernovae indicate an accelerating universe? *Eur. Phys. J. ST*, 230(9):2067–2076, 2021. doi: 10.1140/epjs/s11734-021-00199-6.

[2] Chethan Krishnan, Roya Mohayaee, Eoin Ó. Colgáin, M. M. Sheikh-Jabbari, and L. Yin. Hints of FLRW breakdown from supernovae. *Phys. Rev. D*, 105(6):063514, 2022. doi: 10.1103/PhysRevD.105.063514.

[3] Juan C. Bueno Sanchez and Leandros Perivolaropoulos. Topological Quintessence. *Phys. Rev. D*, 84:123516, 2011. doi: 10.1103/PhysRevD.84.123516.

[4] Dillon Brout et al. The Pantheon+ Analysis: Cosmological Constraints. *Astrophys. J.*, 938(2):110, 2022. doi: 10.3847/1538-4357/ac8e04.

[5] Adam G. Riess et al. A Comprehensive Measurement of the Local Value of the Hubble Constant with 1 km s^{-1} Mpc^{-1} Uncertainty from the Hubble Space Telescope and the SH0ES Team. *Astrophys. J. Lett.*, 934(1):L7, 2022. doi: 10.3847/2041-8213/ac5c5b.

——index へ戻る

SK-19

不安定ダイナミクスで探る量子重力とエンタングルメント

お茶の水女子大学
塩松　祐華

不安定ダイナミクスで探る量子重力とエンタングルメント

塩松 祐華 (お茶の水女子大学大学院 人間文化創成科学研究科)
共著者 藤田智弘 (お茶大), 郭優佳 (神戸大), 松村央 (九州大)

Abstract

本研究では、２体振動子系の微弱な重力相互作用によって生成される重力誘起エンタングルメントを、パラメトリック不安定性を利用して増幅する手法を提案する。このアプローチにより、従来の実験提案と比べて、検出可能なエンタングルメントの閾値に到達するまでの時間を劇的に短縮できる可能性を示す。

1 Introduction

重力の量子的性質は、物理学における未解明の問いの１つである。ひも理論や初期宇宙論の理論モデルは、重力を他の３つの基本相互作用と同様に量子化できるという仮定に基づいて構築されている。しかし、この仮定はこれまで直接的に検証されたことがない。したがって、重力の量子的挙動を実験的に探ることは、物理学において極めて重要な意味を持つ。

この問題に対し、S. Bose らが提案した BMV 実験提案 (Bose et al. 2017; Marletto and Vedral 2017) は、重力が量子的なふるまいをしているかどうかを実験的に検証する方法として注目されている。この実験提案では、重力を介して空間的に離れた二つの量子系のあいだにエンタングルメント（量子的な“もつれ”）が生成されるかどうかを調べる。

エンタングルメントとは、２つの量子系が切り離せない状態にあることで、一方の状態を測定するともう一方にも即座に影響が現れるような量子的な相関のことである。このような状態は、合成系の状態を部分系の状態の単純な組み合わせ（直積）では表せない。古典的な力でエンタングルメントをつくることはできないので、もし重力相互作用だけでエンタングルメントが生成されれば、それは重力が量子的性質を持つことを示唆する有力な証拠になる。

しかしながら、BMV 実験提案ではエンタングルメントが検出可能なレベルまで生成されるのに要する時間が長いため、その間に**デコヒーレンス**（量子系が環境と相互作用することで量子的性質が失われ、古典的な振る舞いに変わってしまう現象）が進行し、検出可能性が大きく損なわれるという課題がある。

本研究では、パラメトリック不安定性を利用してこの課題を克服する新たなアプローチを検討する。

2 Methods

本研究ではまず、パラメトリック不安定性を持つことで知られるマシュー方程式に従って運動する２つの振動子が、重力相互作用によって結合された系を考える。この系の量子力学的記述は、次のハミルトニアンによって与えられる：

$$H(\tau) = \sum_{i=1}^{2} \left[\frac{\hat{p}_i^2}{2} + \frac{1}{2}\left(a - 2q\cos 2\tau\right)\hat{x}_i^2 \right] + g\,\hat{x}_1\hat{x}_2.$$

ここで、$\hat{x}_i$、$\hat{p}_i$ はそれぞれの振動子の無次元化された位置および運動量演算子、$\tau = \omega t$ は無次元時間である。また、a および q はパラメータ、g は重力相互作用の強度を表す。

このハミルトニアンにハイゼンベルク方程式

$$\dot{\hat{O}} = \frac{i}{\hbar}[H, \hat{O}]$$

を適用することで、運動方程式が得られる：

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\hat{x}_1}{d\tau^2} + \left(a - 2q\cos 2\tau\right)\hat{x}_1 + g\,\hat{x}_2 = 0, \\ \dfrac{d^2\hat{x}_2}{d\tau^2} + \left(a - 2q\cos 2\tau\right)\hat{x}_2 + g\,\hat{x}_1 = 0. \end{cases}$$

この運動方程式を解析的に解くことで、量子状態の共分散行列を導出した。さらに、この共分散行列からエンタングルメントの強さを表す量であるログネガティビティ E_N を計算し、パラメータ a、q をさまざまに変化させて数値計算を行った。

3 Results

まず、不安定性の構造を確認するため、図 1 に安定領域と不安定領域の分布を示す。図は、重力結合 $g = 0.1$ のもとで、パラメータ空間 (a, q) 上において、運動方程式が不安定となる領域を可視化したものである。赤線および青線で描かれた等高線が存在する部分が不安定領域に対応しており、時間とともに振動子の振幅が指数関数的に増大する。

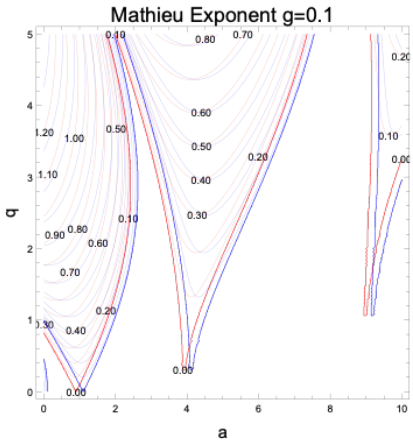


図 1: $g = 0.1$ での不安定領域と安定領域の分布

同じ $g = 0.1$ のもとで、時間 $\tau = \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$ におけるログネガティビティ $E_{\mathcal{N}}$ の分布を数値計算した結果を図 2 に示す。図からは、時間の経過に伴い、特に不安定領域においてログネガティビティが顕著に増加することが確認された。

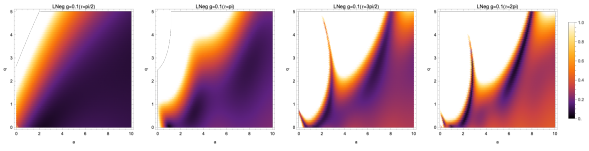


図 2: ログネガティビティ $E_{\mathcal{N}}$ の時間発展 $(g = 0.1)$

次に、$\omega = 1$ k Hz の系での現実的な重力結合の強さ $g = 10^{-12}$ を仮定した場合の、ログネガティビティ $E_{\mathcal{N}}$ の時間発展を図 3 に示す。ここでは、 不安定性の異なる 3 つのパラメータにおける成長の違いを比較した。グラフの色は以下のパラメータに対応している：

- 青：強い不安定性（$a = 4.8,\ q = 2.4$）
- オレンジ：弱い不安定性（$a = 4.8,\ q = 1.8$）
- 緑：安定領域（$a = 4.8,\ q = 0.1$）

ログネガティビティ $E_{\mathcal{N}}$ が 0.01 程度に達すればエンタングルメントの検出が可能であることが知られており、強い不安定性をもつ青のパラメータでは、$\tau \approx 45$（すなわち物理時間で約 0.045 秒）あたりで、 ログネガティビティ $E_{\mathcal{N}}$ が検出可能な値に達することがわかる。これは、系の不安定性がエンタングルメント生成を大きく促進することを示唆している。

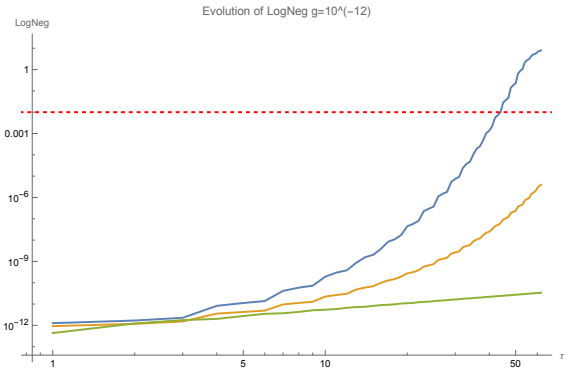


図 3: 現実的な重力結合の値 $g = 10^{-12}$ のもとでのログネガティビティ $E_{\mathcal{N}}$ 時間発展。青（$a = 4.8,\ q = 2.4$）、オレンジ（$a = 4.8,\ q = 1.8$）、緑（$a = 4.8,\ q = 0.1$）の各パラメータに対応。

4 Discussion

波動関数の広がりに伴って重力ポテンシャルの位相に違いが生じ、その結果、2 つの部分系の量子状態に差が現れ、エンタングルメントの生成につながると考えられる。本研究で用いたマシュー振動子はパラメトリック不安定性を持ち、不安定領域では波動関数の広がりが指数関数的に加速される。このとき、位相の違いも短時間で大きくなり、結果としてエンタングルメントの成長が著しく促進されると予想される。

実際に、ログネガティビティ $E_{\mathcal{N}}$ の数値計算結果は、波動関数の広がりに対応する Floquet 指数の虚部 μ_i によって以下のように近似できることが確認された：

$$E_{\mathcal{N}} \approx \frac{g}{2\mu_i} e^{2\mu_i \tau}.$$

この近似は、不安定領域でのエンタングルメントの急激な増大が、その不安定性の強さと密接に関係していることを定量的に裏付けている。図 4 に、上記の近似式と数値結果の比較を示す。

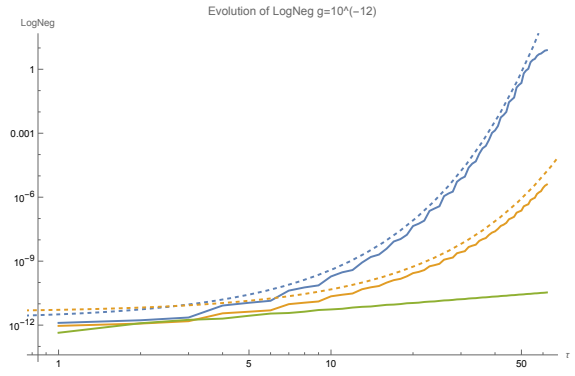


図 4: $g = 10^{-12}$ のときのログネガティビティ $E_{\mathcal{N}}$ の数値結果（実線）と近似式（波線）の比較。緑は安定領域に対応しており、Floquet 指数の虚部が 0 のため近似式は非適用。

今後の課題としては、ホワイトノイズや散逸といった環境要因を取り入れ、デコヒーレンスの影響を含めたより現実的なシナリオにおいて、本手法が依然として有効かどうかを検証する必要がある。また、他のエンタングルメント検出提案と比較することで、本手法の特長や制約を明確にし、実験的検証に適したモデルの洗練を図りたい。

5 Conclusion

本研究では、パラメトリック不安定性を利用し、重力によるエンタングルメント生成を加速する新たな手法を提案した。量子的連結マシュー振動子モデルを用いた解析と数値計算を行った結果、波動関数の広がりに応じて重力ポテンシャルに生じる位相の違いが、エンタングルメント生成に寄与する結果が得られた。特に不安定領域ではこの効果が指数的に強まり、短時間で測定可能な量子相関が得られる可能性を確認した。今後は、環境要因の影響を考慮したモデル化と他提案との比較を通じて、より実現可能な実験モデルの構築を目指す。

Reference

Bose S *et al.* (2017), *Phys. Rev. Lett.* **119**, 240401.

Marletto C and Vedral V (2017), *Phys. Rev. Lett.* **119**, 240402.

——index へ戻る

SK-20

中性子星からクォーク星への衝撃波を通した相転移

早稲田大学
影山　郁洋

中性子星からクォーク星への衝撃波を通した相転移

影山　郁洋 (早稲田大学大学院 先進理工学研究科)

Abstract

パルサーは回転数が減少すると遠心力が弱まることで内部の物質が圧縮される．圧縮がハドロン物質 (HM) と 2-flavor クォーク物質 (2QM) の自由エネルギーが等しくなるまで行われるとハドロン物質はより密度の高い 2-flavor クォーク物質へと相転移し，外側の物質が落ち込むことで衝撃波が発生することが考えられる．Shock-induced conversion はこのような衝撃波により中性子星を構成するハドロン物質がクォーク物質 (QM) へと変化する相転移である．このシナリオではハドロン物質が衝撃波により圧縮されて密度が上昇し，クォークがハドロン内に束縛されなくなり，物質は一時的に 2QM となる．その後，クォーク間での弱い相互作用によってストレンジクォークが発生し，より安定な 3-flavor クォーク物質 (3QM) へと変化する．このシナリオでは上記のようなクォーク物質が発生するまでの流れを，衝撃波で物質が圧縮・加熱されて燃焼する相転移として扱う．本研究では 3QM の発生メカニズムとして Shock-induced conversion を取り上げ，原始中性子星内の 3 点 (中心付近，中央，外側) でどのように物質の相転移が起こるのかを調べ，比較した．シミュレーションにより，レプトンの割合が一定の場合，完全な 3QM で構成されているクォーク星は中心から外側へ向かうにつれてストレンジクォークの割合が減少すると考えられる．また，中性子星内部に HM と 3QM が共存している場合は中心から外側へ向かうにつれて 3QM の割合が減少すると考えられる．

1 Introduction

パルサーは磁気双極子放射などの原因で次第に回転数が減少してい [1]。その際，動径方向への遠心力は回転数の減少に伴って小さくなるので，パルサー内部の物質はより圧縮されることになる。また，パルサーへの物質降着でも内部の物質は圧縮される。この圧縮が後述するハドロン物質と 2-flavor クォーク物質の自由エネルギーが等しくなるまで行われると、パルサー中心部付近で衝撃波が発生することが考えられる [7]。

この衝撃波によりパルサー内部の物質は圧縮されて密度は増加し，ハドロン内のクォークは単独で存在するようになると考えられる。このとき，アップクォークとダウンクォークが物質の構成要素となるので 2-flavor クォーク物質（2QM）と呼ぶ。更に，2-flavor クォーク物質は弱い相互作用により，自由エネルギーがより低い 3-flavor クォーク物質 (3QM) へと変化する [7]。

中性子星の内核を構成する高密度核物質の正体は今でも詳しくは分かっていないが，可能性の一つとしてクォーク物質であると考えられている [1][2]。この場合の中性子星はクォーク星と呼ばれている。実際に観測された中性子星のうち, クォーク星であると考えられている天体としては HESS J1731-347 が挙げられる。HESS J1731-347 は同等の年代の中性子星と比べて表面温度が高く, 質量は超新星爆発で生じうる中性子星の最小質量を下回ることが知られている [4][8]。この特性から, HESS J1731-347 はストレンジクォークを含むクォーク星であるとされている。

クォーク物質が発生する過程は複数考えられるが，本研究で考えるのは shock induced conversion scenario[7] である。shock induced conversion scenario とは上記で述べたような衝撃波により核内部の物質の密度が増加し, クォーク物質が発生するというシナリオである。ただし，本研究では原子がハドロンを有している物質であるハドロン物質（HM）はエネルギー的に 2QM より安定で，3QM より不安定であると仮定する。

2 Methods

2.1 Deconfinement

原子核は核子 (陽子と中性子) で構成されており，さらに核子はアップクォークとダウンクォークで構成されている (例えば陽子はアップクォーク 2 つとダウン

クォーク 1 つで構成されている)。通常，クォークは核力により核子内に束縛されている状態にある (confinement)。しかし, 中性子星の内核のような高密度環境下では, 密度が原子核数密度 ($\approx 0.17fm^{-3}$) の 2 倍程度に達すると物質はクォークが単独で存在する状態に遷移すると考えられている [5](deconfinement)。

アップクォークとダウンクォークが単独で存在している物質の状態を 2-flavor クォーク物質 (2QM) と言う。クォーク間には式 (3.1.1), (3.1.2) に示す弱い相互作用反応が生じる。

$$d \leftrightarrow u + e^- + \bar{\nu_e} \tag{1}$$

$$s \leftrightarrow u + e^- + \bar{\nu_e} \tag{2}$$

式 (2) によりストレンジクォークが発生し，物質はアップ，ダウン，ストレンジクォークの 3 種類で構成されることになる。このときの物質の状態を 3 flavor quark matter(3QM) 或いは strange quark matter(SQM) と言う。通常，ストレンジクォークはアップ，ダウンクォークと比べて質量が大きいので不安定であり，生成されても速やかに崩壊してしまう。しかし，Bodmer, Witten によると大量のクォークが凝縮した状態ではアップ，ダウン，ストレンジクォークがそれぞれ同じ割合で存在している状態が最も安定であると考えられている。これを strange matter hypothesis という [3]。この仮定の下では，3QM は強い相互作用の下で真に安定して存在できる物質の状態であるとされている。

2.2 Shock-induced conversion scenario

図 1 は圧力により単位バリオンあたりの Gibbs の自由エネルギーがどのように変化するかを表した概略図である。(A) の場合では strange matter hypothesis が成り立つ場合, (B) は成り立たない場合の図である。

(A) では物質はハドロン物質の状態であるが, 衝撃波が通過することで密度の増加に伴い, 圧力が増加する。圧力が P_2 に達すると deconfinement が起こり, 物質は 2QM へと変化する。2QM に変化した物質は弱い相互作用により 3QM へと変化することになる。一方, (B) では衝撃波による圧力が P_2 まで増加することで物質が最終的に 3QM の状態になることは (A) と同じである。しかし, $P < P_3$ ではハドロン物質が最も安定な状態であるため, QM は発生しないことになる。Shock-induced conversion は圧力が $P = P_2$ に達した場合に起こるので, 本研究では (A) と (B) の区別をしない。

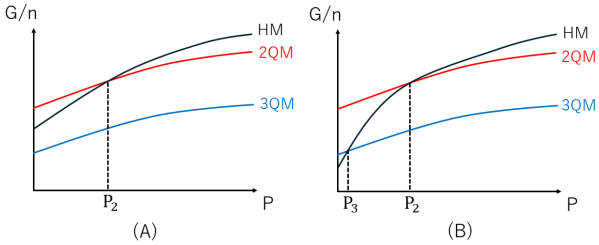


図 1: 圧力と単位バリオンあたりの Gibbs の自由エネルギーの関係

2.3 Equation of state

HM の状態方程式は Shen の EOS[6] を用いる。Shen の EOS は相対論的平均場の理論に基づいており, 核子同士の相互作用はメソンの交換により記述される。QM の状態方程式は MIT bag model を用いる [7]。MIT bag model とはクォーク物質の状態方程式を記述するために用いられる，ハドロンの特性を表したモデルである。MIT bag model ではクォークの閉じ込めと漸近的自由性が考慮されている。

3 Results

本研究では物質の密度増加により発生する衝撃波によりハドロン物質が圧縮されてクォーク物質が誕生する際の数値計算を行う。数値計算に使用する計算コードは古澤峻氏が”A Hydrodynamical Study on the Conversion of Hadronic Matter to Quark Matter: I. Shock-Induced Conversion”[7] で用いたものである。初期密度を変えて数値計算を行うことにより，中心からの距離が変化するとどのように物質の相転移が起こるのかを調べた。

数値計算を行うにあたって bag constant B と strong coupling constant α を定める必要があるが, これらの値は $B^{1/4}$ と α の制約条件を表した図 2 を参考にした。図 2 の黒い実線と破線はそれぞれ単位バリオンあたりのハドロン物質のエネルギーと 2 flavor

クォーク物質のエネルギー, 3 flavor クォーク物質のエネルギーが等しくなる線であり, 黒い実線の左側はハドロン物質のエネルギーがより大きくなるので禁止領域となる。また, 黒い破線の右側は strange matter hypothesis が成り立たない領域となる。緑の実線と青の実線はそれぞれ原始中性子星, 中性子星の場合に deconfinement が起こる際の粒子数密度 n_c が原子核の数密度 n_0 に等しい状態を表しており, それらの右側は $n_c > n_0$ が成り立つ領域である。また, 赤い実線はクォーク星の最大質量 M_{max} が $2.0M_\odot$ となる線を表しており, 下側が $M_{max} > 2.0M_\odot$ となる領域である。

本研究では $B^{1/4}$ と α の組として $(B^{1/4},\alpha)$=(140MeV, 0.40), (125MeV, 0.90) を選び, それぞれについてどのように HM から 3QM への相転移が起こるのかを調べた。初期条件は原始中性子星を想定し, 初期温度 $T_0 = 10$MeV, レプトンの割合 $Y_{lep} = 0.30$, 初期密度 $\rho_0 = 3.0 \times 10^{14} g/cm^3$, 初期 Mach 数 3.0 である。粘性係数 ν は初期の音速を c_{si}, β 平衡の時間スケールを τ としたとき $\nu = \rho_i c_{si}^2 \tau$ となるように定めている。また, $(B^{1/4},\alpha)$=(140MeV, 0.40) の場合は初期密度のみを $1.1 \times 10^{14} g/cm^3$, $2.0 \times 10^{14} g/cm^3$ に変えた場合を含む, 計 3 通りで計算を行った。$(B^{1/4},\alpha)$=(125MeV, 0.90) の場合は初期密度のみを $3.6 \times 10^{14} g/cm^3$, $4.2 \times 10^{14} g/cm^3$ に変えた場合を含む, 計 3 通りで計算を行った。

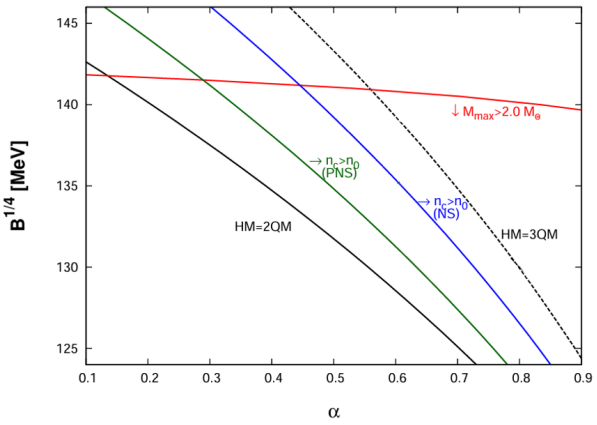


図 2: B と α の制約条件

まずは $(B^{1/4},\alpha)$=(140MeV, 0.40) の場合の結果を示す。図 3 は $B^{1/4}$=140MeV, α=0.40, $T_0 = 10$MeV, $\rho_0 = 3.0 \times 10^{14} g/cm^3$, 初期 Mach 数 M_i =3.0, $Y_{lep} = 0.30$, における計算結果である。左図は衝撃波通過前後のハドロン, レプトン, クォークの割合の変化, 右図は圧力, 温度, 粒子数密度の変化を表している。横軸はある時刻での位置座標であり, 陰影部は deconfinement が起こっている領域を表す。

図 4 は上記の初期条件で初期密度を $\rho_0 = 1.1 \times 10^{14} g/cm^3$ とした場合における計算結果である。図の見方は図 3 と同様である。

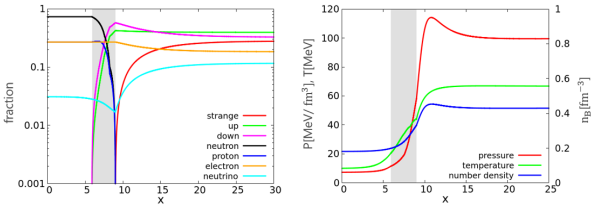


図 3: $B^{1/4}$=140MeV, α=0.40, $\rho_0 = 3.0 \times 10^{14} g/cm^3$

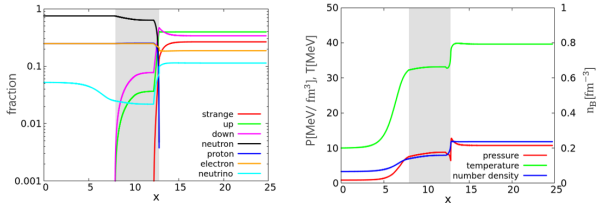


図 4: $B^{1/4}$=140MeV, α=0.40, $\rho_0 = 1.1 \times 10^{14} g/cm^3$

次に, $(B^{1/4},\alpha)$=(125MeV, 0.90) の場合の結果を示す。図 5 は $B^{1/4}$=125MeV, α=0.90, $T_0 = 10$MeV, $\rho_0 = 4.2 \times 10^{14} g/cm^3$, 初期 Mach 数 M_i =3.0, $Y_{lep} = 0.30$, における計算結果である。左図は衝撃波通過前後のハドロン, レプトン, クォークの割合の変化, 右図は圧力, 温度, 粒子数密度の変化を表している。横軸はある時刻での位置座標であり, 陰影部は deconfinement が起こっている領域を表す。

図 6 は上記の初期条件で初期密度をそれぞれ $\rho_0 = 3.0 \times 10^{14} g/cm^3$ とした場合における計算結果である。図の見方は図 5 と同様である。

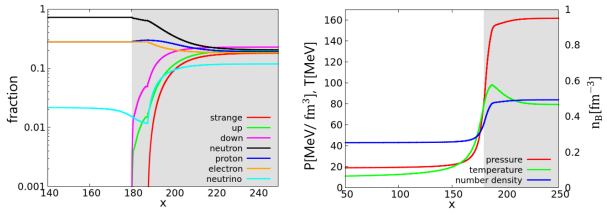


図 5: $B^{1/4}$=125MeV, α=0.90, $\rho_0 = 4.2 \times 10^{14} g/cm^3$

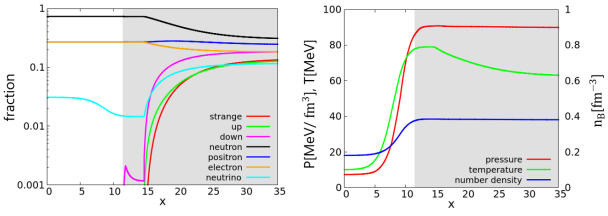


図 6: $B^{1/4}$=125MeV, α=0.90, $\rho_0 = 3.0 \times 10^{14} g/cm^3$

4 Discussion

図 2 によると $B^{1/4}$=140MeV, α=0.40 の場合は strange matter hypothesis が成り立っており，$n_c > n_0$ となる。数値計算を行ったいずれの場合も終状態が完全な 3QM になったが，この結果は物質は 3QM の状態が最もエネルギー的に安定に存在できるという strange matter hypothesis と整合している。また，$\rho_0 = 1.1 \times 10^{14} g/cm^3$ の場合は deconfinement が終了する前にストレンジクォークが発生した。図 3，図 4 から，$B^{1/4}$=140MeV, α=0.40 の場合は中性子星の中心からの距離が増加すると圧力，温度，粒子数密度の増加の割合が減少することから，衝撃波が弱くなっていることが分かる。中心からの距離が増加すると衝撃波が弱くなるために，deconfinement 領域でのアップクォーク，ダウンクォークの割合の増加率が減少するのだと考えられる。

図 2 によると $B^{1/4}$=125MeV, α=0.90 の場合は strange matter hypothesis が成り立っていない。数値計算を行った結果，終状態はハドロン物質と 3QM が共存することが分かったが，終状態が完全な 3QM ではないことは strange matter hypothesis が成り立っていないことと整合的である。図 5, 図 6 から，$B^{1/4}$=125MeV, α=0.90 の場合にも上記と同様の理由から中性子星の中心からの距離が増加すると衝撃波が弱くなっていることが分かる。この場合も中性子星の中心に近づくほど deconfinement が急激に起こると言えるだろう。

5 Conclusion

本研究では原始中性子星内部で密度が増加することにより発生する衝撃波で物質の相転移が生じる，shock induced conversion scenario のシミュレーションを行った。クォーク物質の状態方程式である MIT bag model で定義される bag constant B と，strong coupling constant α を設定し，初期密度を変えて数値計算を行った。$B^{1/4}$=140MeV, α=0.40 の場合は中性子星の中心からの距離が増加するほど deconfinement が起こりにくくなるが，最終的に 3QM に相転移した。$B^{1/4}$=125MeV, α=0.90 の場合も同様だが，最終的にハドロン物質と 3QM が共存する結果となった。

Reference

[1] 高原文郎, 「宇宙物理学」, 2022, 朝倉書店.

[2] 中村隆司, 「不安定核の物理」, 2016, 共立出版.

[3] E. Witten, "Cosmic separation of phases", 1984.

[4] F. Clemente, A. Drago, and G. Pagliara, "Is the compact object associated with HESS J1731-347 a strange quark star?", 2022.

[5] F. Weber, "Quark matter in neutron stars", 1999.

[6] H. Shen, H. Toki, K. Oyamatsu, and K. Sumiyoshi, "Relativistic Equation of State of Nuclear Matter for Supernova and Neutron Star", 1998.

[7] S. Furusawa, T. Sanada, and S. Yamada, "A Hydrodynamical Study on the Conversion of Hadronic Matter to Quark Matter: I. Shock-Induced Conversion", 2015.

[8] V. Sagun, E. Giangrandi, T, Dietrich, O. Ivanytskyi, R. Negreiros, and C. Providencia, "What is the nature of the HESS J1731-347 compact object?", 2023

——index へ戻る

SK-21

高解像度の宇宙論的シミュレーションデータを用いた地球近傍における暗黒物質密度と速度分布の評価

岡山理科大学
中條　初萌

高解像度の宇宙論的シミュレーションデータを用いた 地球近傍における暗黒物質密度と速度分布の評価

中條 初萌 (岡山理科大学大学院 理工学研究科)

Abstract

暗黒物質は、宇宙に存在する未知の物質である。暗黒物質の性質を調べる上で、私たちの身の周りの暗黒物質の存在量を知ることは重要である。しかし、暗黒物質は光らないため、直接観測することができない。そこで、IllustrisTNG シミュレーションの公開データを用いて、地球近傍の暗黒物質密度と速度分布を評価した。講演では、シミュレーションで得られた銀河から太陽系近傍と類似した環境を抽出するための条件と、実際に得られた暗黒物質密度等について報告する。

1 Introduction

暗黒物質とは、直接観測することはできないものの、重力を及ぼす未知の物質である。暗黒物質の存在を支持する証拠としては、銀河の回転曲線、弾丸銀河団の衝突、重力レンズ効果、さらには宇宙背景放射の観測などが挙げられる。現在、暗黒物質は宇宙の全エネルギー密度のうち、約 27% を占めていると考えられている。

地球近傍に存在する暗黒物質について明らかにすることは、暗黒物質の性質を調べる上で重要である。また、暗黒物質の直接検出実験の結果を正しく評価するためも、地球近傍暗黒物質のの密度は重要である。

地球近傍の暗黒物質密度の推定方法は、観測とシミュレーションの 2 つである。観測による推定は、銀河面に垂直な方向の恒星の運動や銀河の回転曲線の解析などに基づいて行われている。Gaia 衛星の観測データから推定された地球近傍の暗黒物質密度 (de Salas & Widmark 2021) を図 1 に示す。銀河面に垂直な方向の星の運動を利用した推定（茶色の三角印）から $0.4 - 0.6\,\mathrm{GeV/cm^3}$、銀河の回転曲線を用いた推定（藍色の四角）から $0.3 - 0.5\,\mathrm{GeV/cm^3}$ と、暗黒物質密度値が得られている。これらの結果から、観測からの地球近傍の暗黒物質密度はおよそ $0.3 - 0.6\,\mathrm{GeV/cm^3}$ 程度である。

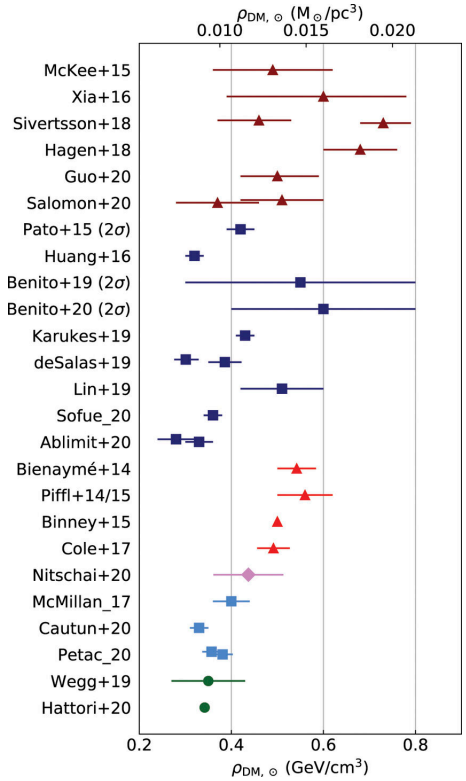


図 1：Gaia 衛星での観測から推定した地球近傍の暗黒物質密度 (de Salas & Widmark 2021)

一方、宇宙論的シミュレーションを用いて、地球近傍の暗黒物質密度を評価する試みもある。Via Lactea II シミュレーション (Zemp et al. 2009) と MaGICC シミュレーション (Kelso et al. 2016) を用いて評価した、地球近傍の暗黒物質密度を表 1 に示す。

表 1：シミュレーションから評価された
地球近傍の暗黒物質密度の例
(Zemp et al. 2009)（Kelso et al. 2016)

シミュレーション名	暗黒物質密度値 (GeV/cm^3)
Via Lactea II シミュレーション	0.401
MaGICC シミュレーション	0.346 0.493

これらのシミュレーションから評価された地球近傍の暗黒物質密度は、いずれも観測により示唆される $0.3 - 0.6\ GeV/cm^3$ と矛盾しない。本研究では、より新しく高解像度な宇宙論的シミュレーションを用いて、地球近傍における暗黒物質密度を改めて評価する。

2　IllustrisTNG シミュレーション

IllustrisTNG シミュレーションは、大規模な宇宙論的流体力学シミュレーションであり、そのデータは一般に公開されている (Nelson et al. 2019)。IllustrisTNG シミュレーションによって得られた、銀河内に分布する暗黒物質の 3 次元分布を図 2 に示す。IllustrisTNG シミュレーションのデータには、暗黒物質やガス、バリオン、銀河などに関するデータが含まれている。

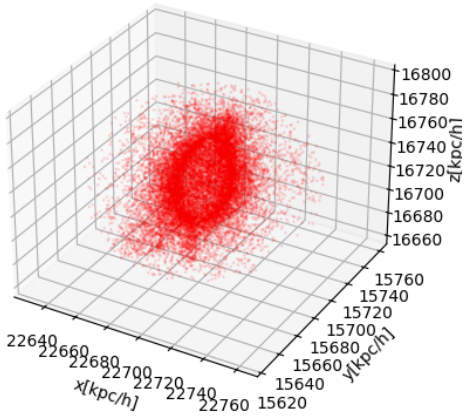


図 2：シミュレーションされた
銀河内に分布する暗黒物質

IllustrisTNG シミュレーションに用意されている、シミュレーションスケールの異なる複数のシミュレーション（TNG50、TNG100、TNG300）を図 3 に示す (Nelson et al. 2019)。その中でも、IllustrisTNG50 は、銀河の数が多く、局所的な解像度が高いシミュレーションである。本研究では、IllustrisTNG50 の公開データを用いる。

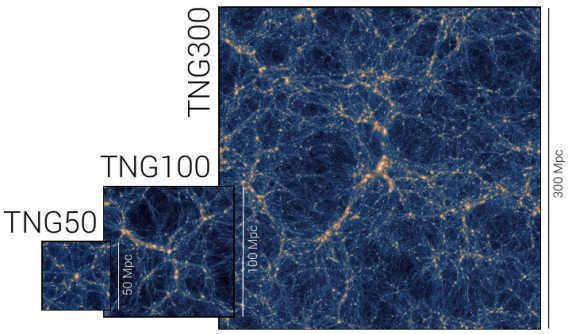


図 3：シミュレーションごとのスケールの違い
(Nelson et al. 2019)

3　地球近傍の暗黒物質密度の評価

銀河系の構造と太陽系の位置を図 4 に示す。地球近傍の暗黒物質密度を評価するためには、銀河系に類似した銀河と、その中での太陽系に類似した環境をそれぞれ抽出する必要がある。

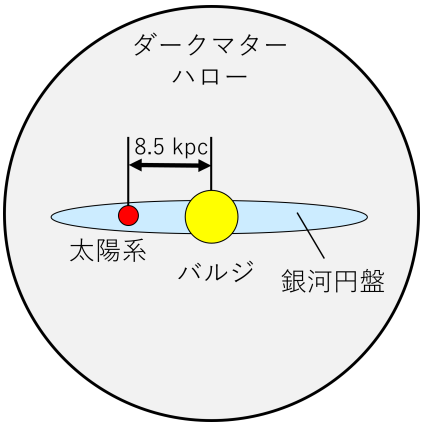


図 4：銀河系の模式図

(1) **銀河系に類似した銀河の抽出**：銀河系の質量は $1.15 \times 10^{12}\ M_\odot$（$M_\odot$ は太陽質量）であり (Aragon-Calvo et al. 2023)、バルジと銀河全体の質量比 B/T が 0.150 である (Licquia & Newman 2015)。銀河系に類似した銀河として、質量が 0.83 −

2.0×10^{12} $M_\odot$ と B/T の値が 0.131 − 0.178 である銀河を抽出した。

(2) **太陽系に類似した環境の抽出**：太陽系は、銀河系中心から約 8.5 kpc 離れた銀河円盤上に位置している。そこで、(1) で抽出した銀河を用いて、銀河中心から 7 − 9 kpc の銀河円盤上に存在する暗黒物質を抽出した。

(1) で抽出した銀河内の暗黒物質の 3 次元分布を図 5、銀河中心から 7 − 9 kpc の銀河円盤上に存在する暗黒物質の 3 次元分布を図 6 に示す。

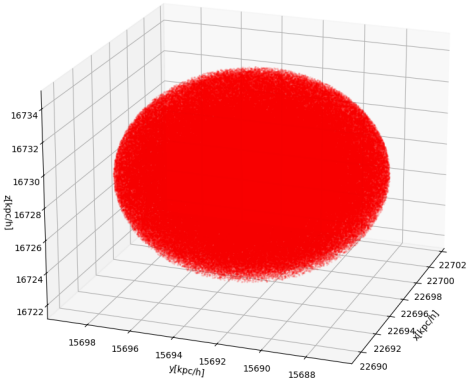


図 5 : (1) で抽出した銀河内の
暗黒物質の 3 次元分布

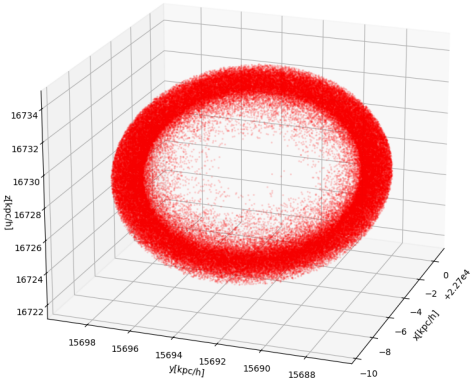


図 6 : (1)、(2) で抽出した環境での
暗黒物質の 3 次元分布

これらの図から、(2) の抽出条件によってバルジやダークマターハローにある暗黒物質を除いた、地球近傍の環境の暗黒物質を抽出できたことが確認できる。

(1)、(2) で抽出した銀河の数と暗黒物質群の数、抽出した銀河ごとの平均暗黒物質密度の平均値を表 2 に示す。ここで、暗黒物質群とは、重力相互作用によって集まった暗黒物質粒子のかたまりのことであり、シミュレーションデータ内では、暗黒物質は点粒子ではなく、暗黒物質群として入っている。この結果から、地球近傍の暗黒物質密度の値は、観測から示唆される値に大きく矛盾しないことが考えられる。

表 2 : (1)、(2) の抽出条件から得られた結果

銀河の数	13 個
暗黒物質群の数	134449 個
銀河ごとの 平均暗黒物質密度の平均値	0.501 ± 0.119 GeV/cm^3

4 Conclusion

IllustrisTNG50 の公開データから、銀河系に類似した銀河と太陽系に類似した環境の抽出を行い、地球近傍の暗黒物質密度について評価した。地球近傍の暗黒物質密度の値は、0.501 ± 0.119 GeV/cm^3 であり、観測から示唆される値 ($0.3-0.6$ GeV/cm^3) に大きく矛盾しない。

Reference

P. F. de Salas, & A. Widmark, 2021, Rept. Prog. Phys., 84, 104901

M. Zemp, J. Diemand, M. Kuhlen, P. Madau, & B. Moore, 2009, MNRAS, 394, 641

C. Kelso, C. Savage, M. Valluri, K. Freese, G. S. Stinson, & J. Bailin, 2016, JCAP, 08, 071

D. Nelson, et al., 2019, Comput. Astrophys. Cosmol., 6, 1

M. A. Aragon-Calvo, J. Silk, & M. Neyrinck, 2023, MNRAS Lett., 520, L28

T. C. Licquia, & J. A. Newman, 2015, ApJ, 806, 96

——index へ戻る

SK-22

アクシオンダークマター中のアクシオン・フォトン変換

神戸大学
小林　健斗

アクシオンダークマター中のアクシオン・フォトン変換

小林 健斗 (神戸大学大学院 理学研究科)

Abstract

強い CP 問題の自然な解決策の一つとして、アクシオンの導入がある。これは、CP 対称性を破る QCD ラグランジアン中のパラメータ（θ 項）を力学的な変数として拡張することで、このパラメータが自発的にゼロへと安定化するようにするものである。この力学変数がアクシオンであり、その特性から冷たいダークマターの有力な候補としても注目を集めている。またアクシオンは、強磁場中でフォトンと相互に変換する（アクシオン–フォトン変換）ことが知られており、この効果を利用した多くの実験が現在精力的に行われている。しかし、宇宙には既にアクシオンによるダークマターが存在しており、我々の周囲もその影響下にあると考えられる。このような背景アクシオン場はコヒーレントに時間振動しており、これが光の偏光状態に影響を及ぼす可能性がある。本研究では、この背景アクシオンによる偏光変化が、既存のアクシオン探索実験（ALPS II）において観測に及ぼす影響を評価し、その可観測性を理論的に検討する。

1 導入

アクシオンは，もともと量子色力学（QCD）における強い CP 問題の解決策として導入された粒子であり [1]，このような粒子は特に QCD アクシオンと呼ばれる．さらに，超弦理論などの標準模型を超えた理論からもアクシオンに似た粒子が示唆され，アクシオンライク粒子 (Axion-Like Particle,ALP) と呼ばれる．本研究では QCD アクシオンと ALP を区別せず，総称して「アクシオン」と呼ぶ．アクシオンは，質量が極めて小さく（$m_a \lesssim 1$ eV，m_a はアクシオン質量），他の粒子との相互作用も弱い．また初期宇宙において非熱的に生成されることから．冷たいダークマターの有力な候補の一つでもある．アクシオンは，背景磁場中でフォトンとの間でプリマコフ効果によって変換が起こる．この逆変換も起こる．すなわち背景磁場中でフォトンがアクシオンへと変換される．この効果を利用したアクシオン探索手法の一つに Light Shining through a Wall（LSW）実験がある．LSW 実験では，背景磁場中でレーザー光からアクシオンを生成し（Production cavity，PC），光を遮断する壁を通過させたのち，再び磁場中でアクシオンを光子に変換（Regenerated cavity，RC）して検出を試みる．本研究では，このような LSW 実験（ALPS II）において，背景アクシオンダークマターの存在がフォトンの偏光に与える影響を評価する．

2 アクシオン・フォトン変換

2.1 アクシオン電磁気学

アクシオンと電磁場の相互作用を記述するために以下のラグランジアンを考える：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu a \partial^\mu a + m_a^2 a^2\right) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{a\gamma\gamma}aF_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \tag{1}$$

ここで，a はアクシオン場，$g_{a\gamma\gamma}$ は結合定数，$F_{\mu\nu}$ は電磁場テンソルで，$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ であり，A_μ はゲージ場である．また，$\tilde{F}_{\mu\nu}$ は電磁場テンソルの双対テンソルで，$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}F^{\rho\lambda}$ で定義される．ただし，$\varepsilon_{0123} = +1$ とする．作用 (1) において，最後の項がアクシオンとフォトンの相互作用項である．この作用に対して変分原理を適用することで，以下の運動方程式が得られる：

$$\begin{cases} (\partial_\mu\partial^\mu - m_a^2)a = \dfrac{1}{4}g_{a\gamma\gamma}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \\ \partial_\mu\partial^\mu\phi = -g_{a\gamma\gamma}\vec{B}\cdot\nabla a \\ \partial_\mu\partial^\mu\vec{A} = g_{a\gamma\gamma}[(\partial_t a)\vec{B} + (\nabla a)\times\vec{E}] \end{cases} \tag{2}$$

ただし，ここでローレンツゲージ条件

$$\nabla\cdot\vec{A} + \partial_t\phi = \partial_\mu A^\mu = 0 \tag{3}$$

を用いた．式 (2) がアクシオン電磁気学における基礎方程式となり，アクシオンとフォトンの相互作用を考えるときの出発点となる．

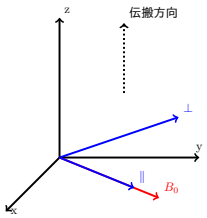


図 1: 基底の取り方

2.2 背景磁場中のアクシオン･フォトン変換

静的かつ一様な背景磁場のみが存在する状況を考える：

$$\begin{cases} a(z,t) = & \delta a(z,t) \\ \vec{B}(z,t) = \vec{B}_0\ (\text{const.}) + & \delta\vec{B}(z,t) \\ \vec{E}(z,t) = & \delta\vec{E}(z,t) \end{cases} \tag{4}$$

ここで，アクシオン場および電場は摂動項のみからなり，磁場には定常背景項 $\vec{B}_0$ が存在するものとする．

基底は図 1 のように定める．すなわち，光の伝搬方向を $\vec{e}_z = (0,0,1)$ とし，背景磁場の xy 平面への射影に沿って，平行成分を $\vec{e}_\parallel = (1,0,0)$，垂直成分を $\vec{e}_\perp = (0,1,0)$ ととる．このとき，背景磁場は

$$\vec{B}_0 = (B_0, 0, 0) \tag{5}$$

と表される．

この構成のもと，作用の変分から得られるアクシオンとフォトンの運動方程式を摂動の一次まで展開し，さらに放射ゲージ

$$\delta\phi = 0, \quad \nabla\cdot\delta\vec{A} = 0 \tag{6}$$

を課すと，以下の運動方程式系が導かれる：

$$\begin{cases} \left(\Box - m_a^2\right)\delta a = -g_{a\gamma\gamma}B_0\left(\partial_t\delta A_\parallel\right) \\ \Box\,\delta A_\parallel = g_{a\gamma\gamma}B_0\left(\partial_t\delta a\right) \\ \Box\,\delta A_\perp = 0 \end{cases} \tag{7}$$

ここで $\Box = \partial_t^2 - \partial_z^2$ はダランベール演算子である．

式 (7) において，δa と $\delta A_\parallel$ の右辺に互いが現れていることから，アクシオンとフォトンの間に結合があることがわかる．これが，**アクシオン・フォトン変換**のメカニズムである．

2.3 背景アクシオンダークマター中のアクシオン・フォトン変換

次に，背景に時間に依存するアクシオンを含めて考える．すなわち，

$$\begin{cases} a(z,t) = a_0(t) & +\delta a(z,t) \\ \vec{B}(z,t) = \vec{B}_0\ (\text{const.}) & +\delta\vec{B}(z,t) \\ \vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 & +\delta\vec{E}(z,t) \end{cases}$$

として考える．ただし，基底の取り方や背景磁場については前節と同じようにとる．これから，まず背景に対して，

$$\begin{cases} \partial_t^2 a_0(t) + m_a^2 a_0(t) = -g_{a\gamma\gamma}B_0E_{0\parallel}(t) \\ \partial_t E_{0\parallel}(t) = g_{a\gamma\gamma}B_0\left(\partial_t a_0(t)\right) \end{cases} \tag{8}$$

が得られる．ここでも放射ゲージを課した．式 (8) から，

$$\begin{cases} a_0(\tau) = \dfrac{\sqrt{2\rho}}{m_a\Omega_\beta}\cos\left(\Omega_\beta\tau\right) \\ E_{0\parallel} = \dfrac{\beta\sqrt{2\rho}}{\Omega_\beta}\cos\left(\Omega_\beta\tau\right) \end{cases} \tag{9}$$

となる．ここで以下の量を定義した：

$$\beta \equiv \frac{g_{a\gamma\gamma}B_0}{m_a}, \quad \Omega_\beta \equiv \sqrt{1+\beta^2} \tag{10}$$

摂動の一次に対する方程式は，

$$\begin{cases} \left(\Box - m_a^2\right)\delta a(z,t) = g_{a\gamma\gamma}\left[\delta E_\parallel(z,t)\,B_0 - E_{0\parallel}(t)\dfrac{\partial\,\delta A_\perp(z,t)}{\partial z}\right] \\ \Box\,\delta A_\parallel(z,t) = g_{a\gamma\gamma}\left[\left(\partial_t\delta a(z,t)\right)B_0 - \left(\partial_t a_0(t)\right)\dfrac{\partial\,\delta A_\perp(z,t)}{\partial z}\right] \\ \Box\,\delta A_\perp(z,t) = g_{a\gamma\gamma}\left[\left(\partial_t a_0(t)\right)\dfrac{\partial\,\delta A_\parallel(z,t)}{\partial z} - \dfrac{\partial\,\delta a(z,t)}{\partial z}E_{0\parallel}(t)\right] \end{cases} \tag{11}$$

これから，背景アクシオンにより，フォトンの磁場に対する垂直な成分との変換も行われる．この方程式は，空間並進に対しては不変なので，空間成分に対してフーリエ変換し，背景の方程式を代入するこ

とによって，

$$\begin{cases} \delta\ddot{a}(k,\tau) + \left(1+\kappa^2\right)\delta a(k,\tau) \\ \quad = \beta\,\delta\dot{A}_{\parallel}(k,\tau) + i\,\dfrac{\beta\epsilon}{\Omega_\beta}\cos\left(\Omega_\beta\tau\right)\delta A_{\perp}(k,\tau) \\ \delta\ddot{A}_{\parallel}(k,\tau) + \kappa^2\,\delta A_{\parallel}(k,\tau) \\ \quad = -\beta\,\delta\dot{a}(k,\tau) - i\,\epsilon\sin\left(\Omega_\beta\tau\right)\delta A_{\perp}(k,\tau) \\ \delta\ddot{A}_{\perp}(k,\tau) + \kappa^2\,\delta A_{\perp}(k,\tau) \\ \quad = i\,\epsilon\sin\left(\Omega_\beta\tau\right)\delta A_{\parallel}(k,\tau) - \dfrac{\beta\epsilon}{\Omega_\beta}\cos\left(\Omega_\beta\tau\right)\delta a(k,\tau) \end{cases} \tag{12}$$

と書ける．ここで，β と，Ω_β は前節で定義した量で，新たに

$$\kappa \equiv \frac{k}{m_a}, \quad \epsilon \equiv \frac{g_{a\gamma\gamma}\sqrt{2\rho}k}{m_a^2} = \frac{g_{a\gamma\gamma}\sqrt{2\rho}}{m_a}\kappa \tag{13}$$

を定義した．式 (12) が本研究で用いる方程式である．

3　結果

式 (12) に基づき，LSW 型の実験である ALPS II の典型的なパラメータを用いて `mathematica` を用いて計算した．使用したパラメータは以下である：

- レーザー波長：$\lambda = 1064$ nm
- 背景磁場：$B_0 = 10$ T
- 結合定数（ALPS II の目標感度）：$g_{a\gamma\gamma} = 2 \times 10^{-11}$ GeV^{-1}
- ダークマター密度：$\rho = 0.3$ GeV/cm^3

ALPS II において，レーザーがキャビティ内を通る距離は．

$$L_{\text{eff}} = L \times \beta_{\text{PC}} \tag{14}$$

である．ここで，L はキャビティの長さで $\sim 10^2$ m，β_{PC} はビルドアップファクターと呼ばれる量 $\sim 10^3$ で，ナイーブには光の反射回数に対応する．アクシオン質量を $m_a = 10^{-11}$ とした場合の数値計算の結果を図 2 に記す．図 2 より、背景アクシオンダークマターは ALPS II 実験において光の偏光状態にわずかな影響を与えることがわかるが、信号強度は非常に小さく、現状の感度では観測は困難である。次に，光がキャビティ内を通過する時間を延ばした場合を

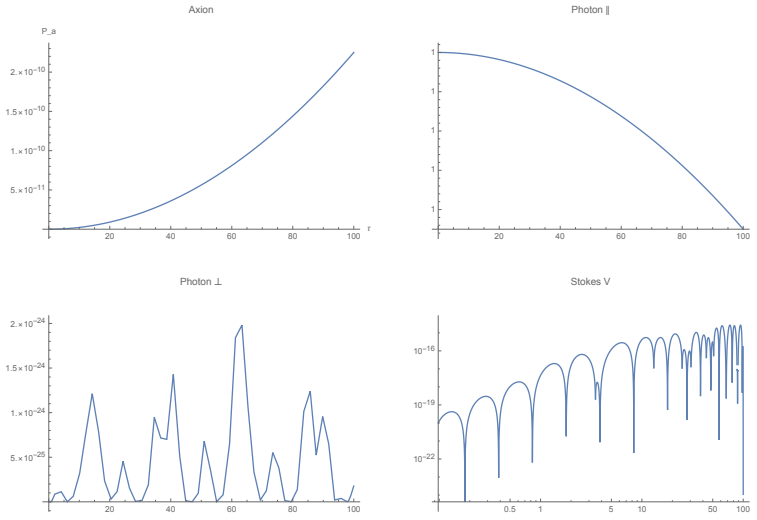


図 2: アクシオン質量 $m_a = 10^{-11}$ とした場合の数値計算結果．左上：アクシオンの確率であり，右上：フォトンの背景磁場に対する平行成分の確率，左下：フォトンの背景磁場に対する垂直成分の確率である．また右下：ストークスパラメータ V の絶対値を光の強度 I で割った量である．

考慮し，$t = 10^{16.2}$ eV に対応する時間での結果を，を図 3 に示す．図 3 から，通過時間を十分に延ばすことができれば、偏光状態の変化（特にストークスパラメータ V）が増幅され、観測可能な範囲に達する可能性があることが示唆される。

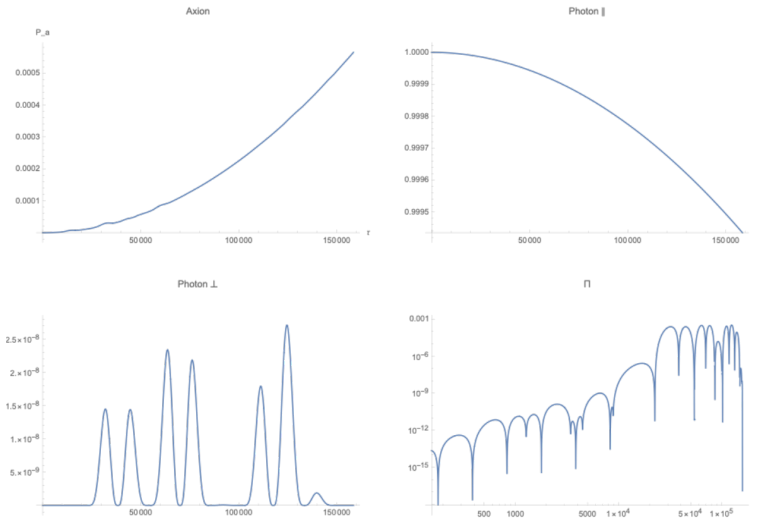


図 3: 光が通過する時間を延ばした図．図の構成はさきと同じである．

4　まとめと展望

4.1　まとめ

本研究では、背景アクシオンダークマターが光の偏光状態に与える影響について理論的に解析し、その効果を ALPS II 実験の典型的なパラメータ下で数値的に評価した。その結果、現在の ALPS II のパラメータでは偏光変化の観測は困難であるが、光の通過時間を延長することで、観測可能な効果が現れる可能性が示唆された。

4.2　展望

今後は、基礎方程式に対する摂動的もしくは数値的手法を用いて、アクシオン質量や結合定数、光波長に対する依存性（特に ε 依存性）の解析を行う。また、ALPS II 以外のアクシオン探索手法（ヘリオスコープ、ハロースコープ、光共振器実験等）に対しても、背景アクシオン場がどのような影響を及ぼし得るかを検討し、偏光変化によるアクシオン間接検出の可能性を広く探る。

謝辞

このような，研究発表の場と機会を設けていただいた夏の学校の関係者の皆様，そしてご支援していただいたすべての関係者の皆様について感謝を申し上げます．また，本研究を行うにあたり，早田次郎教授には多大なご指導をいただきました．

Reference

R. D. Peccei & Helen R. Quinn 1977, Phys. Rev. Lett, 38:1440-1443

Georg Raffelt & Leo Stodolsky 1998, Phys. Rev. D 37, 1237

Emi Masaki, Arata Aoki & Jiro Soda 2017, arXiv:1702.08843

Emi Masaki, Arata Aoki & Jiro Soda 2019, arXiv:1909.11470

M. Dias et al. 2021, arXiv:2009.14294

——index へ戻る

SK-23

アストロメトリによる超軽量ダークマター検出の可能性について

岡山理科大学
前岡　凜

アストロメトリによる超軽量ダークマター検出の可能性について

前岡 凜 (岡山理科大学大学院 理工学研究科)

Abstract

スカラー場としてモデル化された超軽量ダークマターは、非常に小さな質量をもつ場として宇宙全体に広がり、波動的なふるまいを示すと考えられている。その時間的なゆらぎが時空の構造に小さな変化をもたらす可能性があり、これにより遠方の天体の見かけの位置がわずかに周期的に揺れるという予測が得られる。本発表では文献 (Dror & Verner 2025) をレビューする。文献 (Dror & Verner 2025) では、測地線偏差方程式を用いてその効果を理論的に導出し、どの程度の精度であればアストロメトリ（天体の位置観測）によって検出できるかを見積もっている。本研究は、これまでとは異なる手法によるダークマターの間接的検出可能性を示しており、新たな観測的アプローチとして注目されている。本発表では、超軽量ダークマターによる時空の摂動が天体の見かけの位置に与える影響について、数式の導出過程を追いながら、なぜこのような揺れが起こるのか、そして重力波による天体位置の変化とどう違うのかについても整理し、今後の観測における展望も含めてレビューする。

1 Introduction

ダークマターの本質は、宇宙に大量に存在すると考えられている、光などの電磁波では観測できない未知の物質のことである。中でも、質量 $m \ll \mathrm{eV}$ のコヒーレントなスカラー場として記述される超軽量ダークマター（ULDM）は、その波動的な振る舞いが天文スケールで現れることから注目を集めている。従来、ダークマターの存在を推測する試みはすべて、目に見える領域との重力相互作用だけに頼ってきた。しかし、ダークマターが重力相互作用しない場合でも、たとえばパルサータイミングアレイのような、ダークマターのコヒーレント振動 (周期的な振動) によって生じる時空のゆらぎを観測することでダークマターを直接検出することが可能であると最近証明された。本発表は、文献 (Dror & Verner 2025) で提案された、ULDM による天体位置の周期的な変動を検出する、アストロメトリ法として知られている手法をレビューする。特に THEIA ミッションは、Gaia の後継として、1μas レベルの角度精度で最大 10^8 天体の長期観測を目指す設計がなされている。THEIA によって、ULDM による時空摂動が検出可能である可能性が議論されている。

2 Methods

本発表では、ULDM が背景時空に与える摂動が、遠方天体の見かけの位置 (アストロメトリ) に与える影響を評価する。ULDM は主に周波数 Ω で振動し、ゆっくりと変化する位相を持つスカラー場 $a(t,\mathbf{x})$ により記述され、その時間発展は以下のようにモデル化できる：

$$a(t,\mathbf{x}) = a_0(\mathbf{x})\cos(\Omega t + \alpha(t,\mathbf{x})). \tag{1}$$

ここで、ULDM はコールドダークマターとして運動エネルギーが静止質量に比べて小さい（$v \sim 10^{-3} \ll 1$）と仮定する。このような状況では、粒子は十分に非相対論的と見なせるため、周波数は

$$\Omega \approx m + \mathbf{k}^2/(2m), \quad k = mv \ll m. \tag{2}$$

さらに、以下の条件が成り立つと仮定する：

$$k \gg \nabla a_0/a_0, \quad \Omega \gg \partial_t \alpha. \tag{3}$$

これは、ULDM の場の振幅 $a_0(\mathbf{x})$ および位相 $\alpha(t,\mathbf{x})$ が空間・時間的に緩やかに変化することを意味し、場が変動する平面波としてふるまうことを表す。

摂動のない平坦な時空におけるスカラー場のエネルギー運動量テンソルは次式で与えられる:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu a \partial_\nu a - g_{\mu\nu}(\frac{1}{2} g^{\rho\sigma}\partial_\rho a \partial_\sigma a + V(a)). \tag{4}$$

アインシュタイン方程式 $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$ により、ニュートンゲージで記述される線要素は次式となる：

$$ds^2 = -(1+2\psi)dt^2 + (1-2\phi)\delta_{ij}dx^i dx^j \quad (5)$$

$T_{\mu\nu}$ に 2 倍周波数 2Ω の成分が含まれるため、重力ポテンシャルも

$$\psi(t,\mathbf{x}) = \psi_0(\mathbf{x}) + \psi_c(\mathbf{x})\cos(2(\Omega t + \alpha(t,\mathbf{x}))) \quad (6)$$

$$\phi(t,\mathbf{x}) = \phi_0(\mathbf{x}) + \phi_c(\mathbf{x})\cos(2(\Omega t + \alpha(t,\mathbf{x}))) \quad (7)$$

のように時間変動する。この摂動が、光子の測地線を曲げることで、観測される天体の見かけの方向 $\hat{\mathbf{n}}$ に変化をもたらす。また、スカラー場のみを考えているため、$\psi = -\phi$ が成り立つ。

本研究では、観測者と天体の位置を固定し、背景時空に対する小さな摂動として扱う。ここでは、これらの摂動を 1 次の範囲で考慮し、計量摂動がない場合、$-\hat{\mathbf{n}}$ 方向に進む周波数 ω_0 の光源から放たれる光は、次のような位置と運動量ベクトルを持つ:

$$x^\mu(\lambda) = (\omega_0\lambda + t_o, -\omega_0\lambda\hat{\mathbf{n}}) \quad (8)$$

$$p^\mu(\lambda) = \omega_0(1, -\hat{\mathbf{n}}) \quad (9)$$

ここで、λ はアフィンパラメータである。$\lambda_s \equiv -|\mathbf{x}_s|/\omega_0$ の値が光子の放出に対応し、光子が到着する時は 0 である。t_o は光子が観測された時間を表す。観測時の観測者の 4 元速度を $u_o^\mu = (1, \mathbf{v}_o)$ とし、光源は静止しているとする。位置ベクトルは観測者が $x_o^\mu(t) = (t, \mathbf{0})$、光源が $(t, \mathbf{x}_s)$ である。今回の目的は、微小な速度の極限における角度のズレを解くことであるため、$\mathcal{O}(v_o)$ の項だけを残す。

摂動の計算の準備として、計量摂動がない場合の観測者の座標系 $(e^\mu_{\hat{0}}, e^\mu_{\hat{1}}, e^\mu_{\hat{2}}, e^\mu_{\hat{3}})$ を導入する。ここで、$e^\mu_{\hat{0}}$ を観測者の 4 元速度と等しいと設定し、基底が直交 $(\eta_{\mu\nu}e^\mu_{\hat{\alpha}}e^\mu_{\hat{\beta}} = \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}})$ であることは、$e^i_{\hat{j}} = \delta^i_{\hat{j}}$ と $e^0_{\hat{a}} = v_{\hat{a}}$ を意味する。ここで、$\eta \equiv \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ である。ここでは以降、ハット付きの添字は観測者の基準系、ハットなしの添字は座標の基準系を表す。

観測者の基準系における光源の見かけの 4 元運動量は、$p_{\hat{\alpha}} = \eta_{\mu\nu}p^\mu e^\nu_{\hat{\alpha}}$ で与えられ、これにより観測された光子の周波数と 3 次元運動量は次式で与えられる:

$$p_{\hat{0}} = -\omega_0(1 + \hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{v}_o), \quad p_{\hat{a}} = -\omega_0(\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{v}_o)_{\hat{\alpha}} \quad (10)$$

1 次摂動では、3 つのゲージ依存性があり、それぞれ

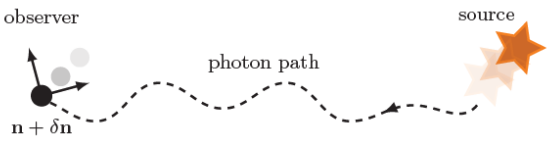


図 1: 光の経路

- 光子の世界線と運動量の摂動 $(\delta x^\mu(\lambda)), \delta p^\mu(\lambda))$
- 光源と観測者の世界線の摂動 $(\delta x_s(\lambda), \delta x_o(\lambda))$
- 観測者の局所慣性系における基準系の変形 $(\delta e^\mu_{\hat{\alpha}}(\lambda))$

である。摂動がある場合の光子の軌道を図 1 に示す。

光源の偏光を求めるために、観測者の基準系における運動量ベクトル

$$p_{\hat{\alpha}} + \delta p_{\hat{\alpha}} = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(0))(p^\mu + \delta p^\mu(0))(e^\nu_{\hat{\alpha}} + \delta e^\nu_{\hat{\alpha}}) \quad (11)$$

を計算する。ここで、光源の見かけの方向 $\hat{n}_{\hat{i}} + \delta\hat{n}_{\hat{i}} = (p_{\hat{i}} + \delta p_{\hat{i}}(0))/(p_{\hat{0}} + \delta p_{\hat{0}})$ はゲージに依存しない。その計算をするためには、$\delta p^\mu(0)$ と $\delta e^\mu_{\hat{\alpha}}$ の式が必要である。

まず、測地線方程式

$$\frac{d\delta p^\mu}{d\lambda} = -\Gamma^\mu_{\nu\rho}(\lambda)p^\nu p^\rho \quad (12)$$

を用いて、光子の 4 元運動量に対する一次補正を計算する。ここでは、クリストッフェル記号は 0 次の光子の軌道に沿って評価されるものとする。それらの解は、

$$\delta p^0(\lambda) = \delta p^0(\lambda_s) + 2\omega_0[\phi(\lambda) - \phi(\lambda_s)] \quad (13)$$

$$\delta\mathbf{p}(\lambda) = \delta\mathbf{p}(\lambda_s) + 2\omega_0[\phi(\lambda) - \phi(\lambda_s)]\hat{\mathbf{n}} \quad (14)$$

となる。

光子の運動量の摂動 $\delta p^\mu(\lambda_s)$ を一意に決定するためには、以下の 4 つの境界条件を課す必要がある：

a 摂動を含む光子の経路が null 測地線となる条件から、$\delta p^0(\lambda_s)$ と空間成分の内積に関係式が得られる

b 光子の放射時における周波数が ω_0 に一致すること

$$\delta p^0(\lambda_s) = \omega_0\left[\phi(\lambda_s) + \hat{\mathbf{n}}\cdot\delta\mathbf{u}_s(\lambda_s)\right] \quad (15)$$

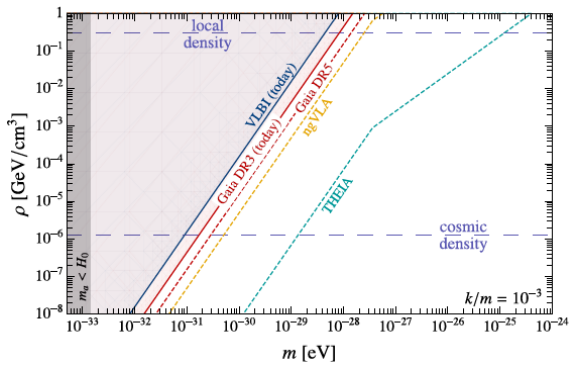


図 2: 超軽量ダークマターに対するアストロメトリ観測の感度予測

c 摂動を受けた光子の軌道が観測者の位置に到達すること

d 摂動を受けた光子が、天体の位置から放射されていること

これらの 4 つの条件を用いることで、δp^0 の成分と、$\delta\mathbf{p}$ の平行・垂直成分をすべて決定できる。観測者および天体の運動は、ULDM ポテンシャル $\phi(t,\mathbf{x})$ の摂動を受けることで変化する。ULDM ポテンシャルの勾配によって加速度が生じ、それを時間微分することで速度のずれ $\delta\mathbf{u}$ が、さらに積分することで位置のずれ $\delta\mathbf{x}$ が得られる。ここで、天体の速度のずれ $\delta\mathbf{u}$ は、ULDM ポテンシャル ϕ によって次のように与えられる：

$$\delta\mathbf{u}_o(\lambda) = \omega_0 \int_{\lambda_{\rm ref}}^{\lambda} [2\mathbf{v}_o\dot{\phi}(t(\lambda'),\mathbf{0}) + \nabla\phi(t(\lambda'),\mathbf{0})]d\lambda' \tag{16}$$

$$\delta\mathbf{u}_s(\lambda) = \omega_0 \int_{\lambda_{\rm ref}}^{\lambda} \nabla\phi(t(\lambda'),\mathrm{x}_s)d\lambda' \tag{17}$$

積分の下限は、非物理的な参照点 $\lambda_{\rm ref}$ で取られている。この速度のずれをさらにアフィンパラメータで積分すれば、観測者および天体の位置のずれが得られる：

$$\delta\mathrm{x}_o = \omega_0 \int_{\lambda_{\rm ref}}^{\lambda} d\lambda'\delta\mathrm{u}_o(\lambda'), \quad \delta\mathrm{x}_s = \omega_0 \int_{\lambda_{\rm ref}}^{\lambda} d\lambda'\delta\mathbf{u}_s(\lambda') \tag{18}$$

これを用いて、(d) の条件より光子の空間運動量の垂直成分は以下のように求まる：

$$\hat{n}\times\delta\mathbf{p}(\lambda_s) = \frac{1}{\lambda_s}\hat{\mathbf{n}}\times[\delta\mathbf{x}_s - \delta\mathbf{x}_o] \tag{19}$$

これらを総合すると、$\lambda = \lambda_s$ における運動量の摂動は以下の形で与えられる：

$$\delta\mathbf{p}(\lambda_s) = -\omega_0\hat{\mathbf{n}}[\phi(\lambda_s) + \hat{\mathbf{n}}\cdot\delta\mathbf{u}_s(\lambda_s)] - \frac{1}{\lambda_s}\hat{\mathbf{n}}\times[\hat{\mathbf{n}}\times[\delta\mathbf{x}_s(\lambda_s) - \delta\mathbf{x}_o(0)]] \tag{20}$$

次に、$\delta e^\mu_{\hat{0}} = \delta u^\mu_o$ を固定して、観測者の基準系の空間基底ベクトルの摂動を、クリストッフェル記号を用いて計算する。観測者の局所慣性系における正規直交基底は、グローバルな座標系上で平行移動されることによって定義されるため、テトラッドの摂動 $\delta e^\mu_{\hat{\alpha}}$ は以下の並進方程式から決定される：

$$\frac{1}{\omega_0}\frac{d\delta e^\nu_{\hat{a}}}{d\lambda} = -[\Gamma^\nu_{0\alpha}e^\alpha_{\hat{a}} + v^j_o\Gamma^\nu_{j\rho}e^\rho_{\hat{a}}] \tag{21}$$

ここで、クリストッフェル記号は観測者の世界線に沿って評価される。方程式を解くと、空間方向の基底ベクトルの摂動は次のような結果が得られる:

$$\delta e^i_{\hat{a}} = \phi(t,\mathbf{0})\delta^i_{\hat{a}} \tag{22}$$

また、時間方向の基底ベクトルの摂動 $\delta e^0_{\hat{\alpha}}$ は ULDM ポテンシャルの時間・空間微分の積分として与えられ、

$$\delta e^0_{\hat{a}} = \omega_0\int_{\lambda_{\rm ref}}^{\lambda} 2v_{o,\hat{a}}\dot{\phi}(t'(\lambda),\mathbf{0}) + \partial_{\hat{a}}\phi(t'(\lambda),\mathbf{0})d\lambda' \tag{23}$$

を得ることができる。ただし、時間に依存せず、観測不可能な積分定数を除いた。

これらをもとに、光子の運動量摂動 $\delta p^\mu(0)$ と観測者の局所慣性系における基底の摂動 $\delta e^\mu_{\hat{\alpha}}$ を組み合わせることで、観測される方向 $\hat{\mathbf{n}}$ の変化（特に天球面上での $\hat{\theta}$ 方向成分）は以下のように与えられる：

$$\delta\hat{\mathbf{n}}\cdot\theta = \frac{1}{D}\left[\delta e^0_{\hat{a}} - \hat{n}^j\delta e^j_{\hat{0}}v_{o,\hat{a}} - \delta e^0_{\hat{0}}v_{o,\hat{a}} - \frac{\delta p^j(0)\delta^j_{\hat{a}}}{\omega_0}\right]\hat{\theta}^{\hat{a}} \tag{24}$$

ここで、$D \equiv 1 + \hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{v}_o$ である。この摂動角 $\delta\hat{\mathbf{n}}$ の $\hat{\theta}$ 成分は、観測者の速度 $\mathbf{v}_o$ と ULDM 摂動の振幅 ϕ_c に依存する。

3 Results

上記の一般式 (24) をもとに、ULDM による摂動ポテンシャル ϕ を代入すると、天体の見かけの位置

に現れる角変位の振幅を導出できる:

$$\Delta(\delta\hat{\mathbf{n}})\cdot\hat{\theta} = (1-\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{v}_o)\frac{k\phi_c}{m}\cos(2(\Omega t+\alpha)) \quad (25)$$

式 (25) から、摂動が観測方向に与える効果は、定常項と時間振動成分に分離できる。ULDM によるアストロメトリ偏差は時間変動する角度変化として観測される。これには主に 2 つの特徴的な成分がある。

・定常ドリフト（secular drift）成分：

$$k\,\phi_c \sim 0.3\,\mu\text{as/year} \left(\frac{10^{-29}\,\text{eV}}{m}\right)\left(\frac{k/m}{10^{-3}}\right)\left(\frac{\rho}{0.3\,\text{GeV/cm}^3}\right) \quad (26)$$

・年周変調（annual modulation）成分：

$$\frac{v_o\,k}{m}\,\phi_c \sim 0.1\,\mu\text{as} \left(\frac{10^{-28}\,\text{eV}}{m}\right)^2\left(\frac{k/m}{10^{-3}}\right)\left(\frac{\rho}{0.3\,\text{GeV/cm}^3}\right) \quad (27)$$

ここで、$v_o \sim 10^{-4}$ は地球の公転速度、ρ は ULDM のエネルギー密度、$k/m \sim v$ は ULDM の波数と質量の比である。

これらの結果から、ULDM 質量 m が小さいほど角変位の振幅が増大することがわかる。特に式 (27) の年周変調成分は $1/m^2$ にスケーリングするため、より低質量の ULDM に対して強い感度を持つ。

4 Discussion

図 2 では、超軽量ダークマターに対するアストロメトリ観測の感度予測を示している。青実線は既存の VLBI データ、赤実線は Gaia DR3 の再解析による感度、赤破線は Gaia DR5 の将来的な性能、黄破線は次世代 VLBI 計画（ngVLA）、そして青緑色の破線が THEIA による感度予測を表す。特に THEIA は、$\sim 1\,\mu$as の測定精度と多数の天体を対象に長期間の観測が可能であることから、ULDM 質量 $m \sim 10^{-33}$ eV の領域まで感度が届く可能性があることが分かる。

5 Conclusion

本稿では、超軽量ダークマター (ULDM) が時空に及ぼす摂動によって、天体の見かけの位置に微小な角変位が生じることを、摂動測地線方程式の枠組みに基づいて導出した。

特に、観測者の局所慣性系における正規直交基底および光子の運動量の摂動を一次近似で評価することで、観測方向における変位の一般表式を得た。この表式に ULDM モデルを代入することで、角度変化が時間的に周期構造を持つこと、またその振幅が ULDM の質量 m に対して $1/m^2$ スケーリングで増大することが示された。

この結果は、特に $m \lesssim 10^{-29}$ eV の ULDM に対して、マイクロ秒角精度のアストロメトリ観測が有力な探索手段となることを示唆している。既存の干渉計やパルサータイミングでは難しい質量領域への感度が期待される点で、アストロメトリ法は補完的かつ独自の立場を持つ。

今後は、さらに $m \ll H_0$ まで拡張することで、quintessence のような他のスカラー場宇宙モデルに対しても、ULDM を含む広い理論空間に対する感度評価が進むことが期待される。

Reference

J. A. Dror and S. Verner, Phys.Rev.Lett. 134 (2025) 11, 111003

——index へ戻る

SK-24

重力波を用いたブラックホール周囲のダークマター検出

京都大学
中本　那央

重力波を用いたブラックホール周囲のダークマター検出

中本 那央 (京都大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙の物質全体の 8 割以上を占めるダークマターは、銀河の形成や大規模構造の進化に不可欠な役割を果たしているが、その正体や分布の詳細は依然として明らかになっていない。そこで近年では、重力波観測によってダークマターの性質を間接的に探るアプローチが注目されている。銀河中心のブラックホール (BH) 周囲にはダークマターが集中しており、ダークマタースパイクと呼ばれる急峻な密度分布を形成する。この構造が BH の周囲を公転する恒星質量天体の軌道進化に影響を与える可能性が理論的に指摘されてきた [Kavanagh (2020)]。本発表では、中心 BH が $10^3 \sim 10^5 M_\odot$ で恒星質量天体が $\sim M_\odot$ である中質量比連星系においてダークマター分布の時間発展を導入する形式 [2] をレビューする。この方法により、従来の研究では無視されてきた伴星軌道とダークマタースパイクの共進化を追うことが可能になる。その結果、ダークマターとの相互作用によって生じる重力波位相の変化をより正確に評価することができた。これは従来の推定値よりは小さいが、次世代宇宙重力波望遠鏡 LISA の観測精度によって検出できる可能性があることが分かった。これらの結果は、ダークマターの構造や性質を重力波から制限する新たな可能性を示唆している。

1 Introduction

この論文では、ブラックホール (BH) の周囲に形成される可能性のあるダークマター (DM) の高密度領域が、中間質量比連星 (IMRI) 系の時間発展と、そこから放射される重力波 (GW) にどのような影響を与えるかを評価する。先行研究では静的な DM 分布を仮定していたが、本研究では、その仮定がエネルギー保存則を破る非物理的な状況を生む可能性があることを指摘する。この問題に対処するため、連星との重力相互作用によって DM 分布が自己無撞着に進化する様子を追跡する新しいフレームワークを導入した。その結果、DM 分布による重力波の位相のずれ (dephasing) は、これまで考えられていた値よりも小さいものの、宇宙重力波望遠鏡 LISA によって検出可能である可能性が示された。このような連星からの重力波は、DM の粒子としての性質を解明する強力な手がかりとなる。

2 静的 DM 分布のエネルギー収支

この章では、DM の急峻な高密度領域である DM スパイクに囲まれた質量 m_1 の中間質量ブラックホール（IMBH）とその周りを公転する質量 m_2 のコンパクト天体からなる IMRI 系のエネルギー収支を検証する。DM スパイクは銀河中心 BH の断熱的成長によってハローの中心密度が増加することで形成されることが知られており、その密度分布は次のようにべき則で与えられる：

$$\rho_{\rm DM}(r) = \begin{cases} \rho_{\rm sp}\left(\frac{r_{\rm sp}}{r}\right)^{\gamma_{\rm sp}} & r_{\rm in} \le r \le r_{\rm sp}, \\ 0 & r < r_{\rm in}. \end{cases} \tag{1}$$

ここで r は IMBH の中心からの距離であり、$r_{\rm in} = 4Gm_1/c^2$ と求められる。また、$r_{\rm sp}$ は $m_1, \rho_{\rm sp}, \gamma_{\rm sp}$ から決められるパラメータであり、$r > r_{\rm sp}$ の距離にある DM スパイクは扱わない。

我々は系の発展を Newton 重力を用いてモデル化し、散逸効果として重力波放射と力学的摩擦を含める。

我々が考えている系は小質量比 ($q = m_2/m_1 \ll 1$) によって特徴づけられるので、系の重心は IMBH と一致すると仮定する。さらに、円軌道を仮定し DM 分布によるケプラー速度への補正は無視する。この近似において軌道エネルギーは、

$$E_{\rm orb} = -\frac{Gm_1m_2}{2r_2}, \tag{2}$$

となる。ただし、r_2 は IMBH からコンパクト天体までの動径距離である。コンパクト天体は DM 粒子と重力相互作用するので、力学的摩擦を通してエネルギーを失う。加えて、重力波を放射することでもエネルギーを失う。これらの過程によってエネルギーが

散逸される時間スケールは軌道周期よりも長い。そのため、散逸を断熱過程として記述でき、コンパクト天体は準円軌道を描くと考えることができる。このとき、エネルギー収支の式は、

$$\frac{\mathrm{d}E_{\rm orb}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}E_{\rm GW}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}E_{\rm DF}}{\mathrm{d}t}, \tag{3}$$

と書ける。重力波放射によるエネルギー損失は四重極公式で与えられ、

$$\frac{\mathrm{d}E_{\rm GW}}{\mathrm{d}t} = \frac{32G^4M(m_1m_2)^2}{5(cr_2)^2}, \tag{4}$$

となる。また、力学的摩擦は Chandrasekhar によって

$$\frac{\mathrm{d}E_{\rm DF}}{\mathrm{d}t} = 4\pi(Gm_2)^2\rho_{\rm DM}(r_2)\xi(v)v^{-1}\log\Lambda. \tag{5}$$

と与えられる。ここで、$\xi(v)$ は軌道速度よりも遅く動いている DM 粒子の割合を表す。また、$\log\Lambda$ はクーロン対数と呼ばれ、通常

$$\Lambda = \sqrt{\frac{b_{\rm max}^2 + b_{90}^2}{b_{\rm min}^2 + b_{90}^2}}, \tag{6}$$

と定義される。$b_{\rm min}$ と $b_{\rm max}$ は、現象に寄与する二体散乱が有効であると考えられる最小および最大の衝突パラメータである。また、b_{90} は DM 粒子が 90° 散乱される衝突パラメータである。

式 (3) からコンパクト天体の軌道パラメータ $\dot{r}_2$ の時間進化の式を求めることができ、

$$\dot{r}_2 = -\frac{64G^3Mm_1m_2}{5c^5(r_2)^3} - \frac{8\pi G^{1/2}m_2\rho_{\rm sp}\xi\log\Lambda r_{\rm sp}^{\gamma_{\rm sp}}}{\sqrt{M}m_1r_2^{\gamma_{\rm sp}-5/2}}, \tag{7}$$

となる。

コンパクト天体が円軌道を描きながら公転する際、軌道エネルギーの変化は、

$$\Delta E_{\rm orb} = \Delta E_{\rm DF} + \Delta E_{\rm GW}, \tag{8}$$

のように書ける。DM 分布への重力波放射の効果は無視できるが、力学的摩擦によって散逸したエネルギーは直接 DM 分布中の粒子のエネルギーを増加させる。DM スパイクは距離 $r_{\rm sp}$ までの領域で有限の重力ポテンシャルエネルギー $\Delta U_{\rm DM}(r_{\rm sp})$ を持つため、力学的摩擦によって散逸されたエネルギー $\Delta E_{\rm DF}$ が $\Delta U_{\rm DM}(r_{\rm sp})$ と同程度でないことを確かめることは重要である。そこで、二つの比 $\Delta E_{\rm DF}/\Delta U_{\rm DM}(r_{\rm sp})$ を考える。これが目安として 1 以上だと十分なエネルギーが力学的摩擦によって散逸され、DM 分布を著しく変えることを意味する。

DM 分布は規格化定数 $\rho_{\rm sp} = 226M_\odot/{\rm pc}^3$ とべき指数 $\gamma_{\rm sp} = 7/3$ で特徴づけられる。図 1 において、$\Delta E_{\rm DF}(r_2)$ はコンパクト天体の初期軌道パラメータ r_2 から最内安定円軌道半径 $r_{\rm ISCO}$ までの間に力学的摩擦によって散逸されたエネルギーとし、$\Delta U_{\rm DM}(r_{\rm sp})$ との比をプロットしている。これを見ると、$q = 10^{-4}$ 以上の連星系において大部分が $\Delta E_{\rm DF}/\Delta U_{\rm DM}(r_{\rm sp}) \geq 1$ となっていることがわかる。これは、コンパクト天体のインスパイラル中に DM 分布が静的であるという先行研究の仮定がエネルギー保存の観点から成り立たず、DM による位相のずれの効果を過大評価している可能性を示唆している。したがって、DM 分布へのエネルギー注入とそれによる分布の発展を考慮する必要がある。

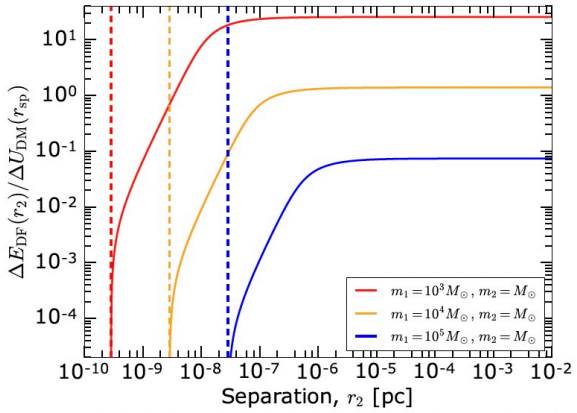


図 1: 力学的摩擦によって散逸されたエネルギーと DM スパイクの束縛エネルギーの比と軌道パラメータ

3 N 体シミュレーション

IMRI 系における力学的摩擦の妥当性を検証するため、N 体シミュレーションを実行した。シミュレーションの主な目的は、力学的摩擦の大きさを決定する重要なパラメータであるクーロン対数 $\log\Lambda$ の適切な値を較正することである。GADGET-2 コードを用いた N 体シミュレーションの結果、力学的摩擦の大きさは、クーロン対数を $\Lambda = \sqrt{m_1/m_2}$ と設定した場合の Chandrasekhar の公式とよく一致することが示された。この結果は、力学的摩擦がコンパク

ト天体近傍の DM 密度に依存して作用するというモデルの妥当性を裏付けており、DM 分布へのフィードバックを考慮した半解析的なモデルの基礎となる。

4　ハローフィードバック

ここでは、インスパイラルするコンパクト天体からのエネルギー注入によって DM スパイクの分布がどのように変化するかを記述するための新しい半解析的な手法を導入する。このアプローチでは、DM スパイクの状態を位相空間分布関数 $f = m_{\rm DM}\,\mathrm{d}N\,/\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\mathrm{d}^3\boldsymbol{v}$ を用いて記述する。ここで $N(\varepsilon)$ はエネルギー ε を持つ単位エネルギーあたりの粒子数である。DM 分布が球対称で等方的であれば、$f = f(\varepsilon)$ は単位質量あたりの相対エネルギーのみに依存する：

$$\varepsilon(r, v) = \Psi(r) - \frac{1}{2}v^2. \tag{9}$$

我々が考えている領域では IMBH からの重力が十分大きいので、DM ハローからの重力ポテンシャルを無視し、$\Psi(r) = Gm_1/r$ と書ける。

べき分布を持つスパイクの初期平衡分布関数は、

$$f_i(\varepsilon) = \frac{\gamma_{\rm sp}(\gamma_{\rm sp}-1)}{(2\pi)^{3/2}}\rho_{\rm sp}\left(\frac{r_{\rm sp}}{Gm_1}\right)^{\gamma_{\rm sp}} \times \frac{\Gamma(\gamma_{\rm sp}-1)}{\Gamma(\gamma_{\rm sp}-\frac{1}{2})}\varepsilon^{\gamma_{\rm sp}-3/2}, \tag{10}$$

と与えられる。分布関数 f が与えられたとき、密度は f の速度に関する積分で復元される。したがって、分布関数 f の進化を調べることができれば、連星とともに DM ハローを自己無撞着に進化させることができ、力学的摩擦を計算するのに必要な密度分布を再構成することができる。

系の進化が軌道周波数よりも十分遅いと仮定すると、$T_{\rm orb} = 2\pi\sqrt{(r_2)^3/(GM)}$ として $\Delta f \approx T_{\rm orb}\partial f/\partial t$ と書ける。エネルギー ε を持つ粒子がコンパクト天体に散乱され、エネルギー $\Delta\varepsilon$ を得る確率を $P_\varepsilon(\Delta\varepsilon)$ とすると、これを用いて分布関数の時間発展方程式である、

$$T_{\rm orb}\frac{\partial f(\varepsilon,t)}{\partial t} = -p_\varepsilon f(\varepsilon,t) + \int\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-\Delta\varepsilon}\right)^{5/2} f(\varepsilon-\Delta\varepsilon,t)P_{\varepsilon-\Delta\varepsilon}(\Delta\varepsilon)\mathrm{d}\Delta\varepsilon. \tag{11}$$

を得る。ここで、$p_\varepsilon = \int P_\varepsilon(\Delta\varepsilon)\,\mathrm{d}\Delta\varepsilon$ である。$P_\varepsilon(\Delta\varepsilon)$ はコンパクト天体と DM 粒子の二体散乱を考えることで評価することができる。この方程式を用いることで、連星の軌道進化と DM の密度プロファイルの変化を自己無撞着に計算することが可能になる。

5　ハローフィードバックを伴う連星の進化

前章で開発したハローフィードバックの手法を取り入れ、連星の軌道と DM 分布の動的な共進化を同時に解くことを考える。我々が解くべき発展方程式は、連立微分方程式となり、形式的に次のような形になる：

$$\frac{\mathrm{d}r_2\,(t)}{\mathrm{d}t} = F_1\left[r_2, \left[\int \mathrm{d}^3v f(\varepsilon,t;r_2)\right]_{r=r_2}\right], \tag{12}$$

$$\frac{\partial f(\varepsilon,t;r_2)}{\partial t} = F_2\left[f(\varepsilon,t;r_2), \left[\int \mathrm{d}\Delta\varepsilon\, f(\varepsilon-\Delta\varepsilon,t;r_2)\right]\right]. \tag{13}$$

この連立方程式を数値的に解いて DM 分布の進化を求めたのが図 2 である。この結果から、コンパクト天体の運動によって DM 粒子がエネルギーを獲得し、外側の軌道へ移動することがわかった。

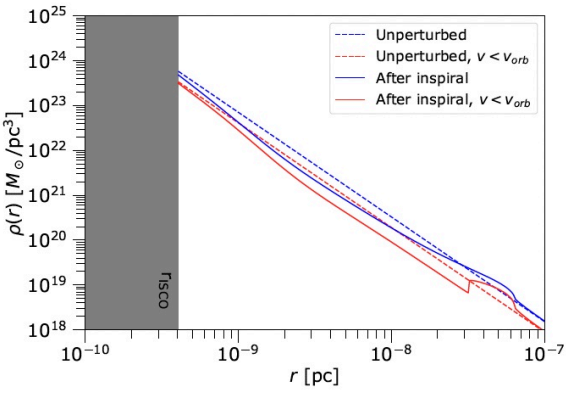


図 2: 動的な DM 分布の発展 ($m_2 = 1.4\times10^3 M_\odot, q = 10^{-3}$ の系のとき)

次に、位相のずれを評価するために、真空中のインスパイラルと DM スパイクがある場合の重力波サイクル数 $N_{\rm cycles}$ の違いを、動的分布と静的分布の両

方について調べた。重力波周波数を二つの周波数の間で積分することで重力波サイクル数

$$N_{\rm cycles}(t_f, t_i) = \int_{t_i}^{t_f} f_{\rm GW}(t)\,{\rm d}t\,, \tag{14}$$

を定義する。これを用いて、DM があるときとないときの重力波サイクル数の差を

$$\Delta N_{\rm cycles} = N^{\rm vac}_{\rm cycles}(f_{{\rm GW},f}, f_{{\rm GW},i}) \tag{15}$$

$$- N^{\rm DM}_{\rm cycles}(f_{{\rm GW},f}, f_{{\rm GW},i}), \tag{16}$$

と定義する。この結果を表したのが表 3 である。

図 3: サイクル数の変化 $\Delta N_{\rm cycles}$

	$q = 10^{-3}$	$q = 10^{-4}$	$q = 10^{-5}$
静的	2.1×10^{5}	1.2×10^{4}	6.0×10^{2}
動的	3.1×10^{3}	5.8×10^{3}	5.9×10^{2}

DM 分布へのフィードバックを考慮すると、コンパクト天体の軌道周辺の DM が剥ぎ取られ、力学的摩擦の効果が弱まる。その結果、DM によって生じる重力波の位相のずれ（$\Delta N_{\rm cycles}$）は、DM 分布が静的であると仮定した場合に比べて小さくなることが明らかになった。例えば、質量比 $q = 10^{-3}$ の系では、静的な場合に比べて位相のずれの効果が約 100 分の 1 にまで減少する。一方で、より質量の大きい IMBH$q = 10^{-4}$ の系では、DM スパイクがより強く束縛されているためフィードバックの影響が比較的小さく、LISA で検出可能なレベルの位相のずれが依然として期待される。

6 Discussion

この章では、本研究で用いた計算の前提条件や限界について議論し、将来的な改善の方向性を示す。

・ハローの緩和: DM 粒子間の散乱によるハローの回復プロセスは、インスパイラルの時間スケールに比べて非常に遅く、無視できると結論付けられる。

・球対称性の仮定: 連星は角運動量も DM ハローに注入しますが、その効果はエネルギー注入に比べて小さく、本研究の球対称の仮定は、位相のずれを保守的に見積もる結果につながる。

・相対論的効果: 計算は Newton 重力の範囲で行われたが、力学的摩擦は負のポスト・ニュートン (PN) オーダーの効果として現れるため、標準的な PN 効果と区別可能であり、主要な結論は変わらない。ただし、高精度な波形モデルの構築には相対論的補正が必要である。

・検出の可能性: LISA による実際の検出可能性を評価するには、IMRI の発生頻度や DM スパイクの存在確率、様々な軌道パラメータなどを考慮した、より包括的な研究が必要である。

7 Conclusion

本研究では、IMBH の周りの DM 過密領域がコンパクト天体のインスパイラルに与える影響を評価した。先行研究で用いられていた静的な DM 分布の仮定は、力学的摩擦によるエネルギー散逸を DM の束縛エネルギーと比較した結果、物理的に成り立たない場合が多く、位相のずれの効果を過大評価していたことを示した。この問題を解決するため、コンパクト天体から DM 分布へのエネルギーフィードバックを自己無撞着に考慮する新しい処方を導入した。この動的なモデルを適用すると、DM による位相のずれは従来の見積もりよりも大幅に小さくなる。しかし、位相のずれは依然として LISA によって検出できることが期待できる。これらの結果は、DM の性質を探る上で重力波観測が重要な役割を果たす可能性を強く示唆している。

Acknowledgement

本レビューを作成するにあたり、京都大学理学研究科天体核研究室の先輩方から多大なご助力をいただきました。この場を借りてお礼申し上げます。ありがとうございました。

Reference

B. J. Kavanagh et al., 2020, Phys. Rev. D 102, 083006

——index へ戻る

SK-25

Dark photon による CMB の V モード偏光生成

お茶の水女子大学
松田　紗季

Dark photon による CMB の V モード偏光生成

松田 紗季 (お茶の水女子大学大学院 人間文化創成科学研究科)
藤田 智弘 (お茶の水女子大学), 小幡 一平 (KEK), 平松 尚志 (日本大学)

Abstract

ビッグバンの残光である宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) の観測は、初期宇宙の理解を大幅に進展させてきた。今後も Simons Observatory や LiteBIRD 衛星などの次世代観測が計画されており、CMB の偏光観測がさらに進むと期待されている。近年の CMB 観測では、宇宙複屈折の発見に代表されるように、宇宙がパリティ対称性を破る兆候が報告されており、理論・観測の両面から注目を集めている。本研究では、CMB 偏光における円偏光成分である「V モード」に着目する。従来の CMB 観測では 4 つのストークスパラメータのうち、温度である T モードおよび直線偏光である E モード、B モードはすでに観測されているが、V モードは未だ観測されていない。標準宇宙論では V モードの値はゼロとされているが、これは V モードを通じて標準宇宙論を超える物理が発見できる可能性もあると言える。具体的には、dark photon のモデルを用いた V モード偏光生成のメカニズムを構築し、精密宇宙論に基づいて、将来の V モード観測と直接比較が可能な異方性スペクトラムを計算する。

1 Introduction

従来の観測により、CMB の温度や偏光に非等方性が発見されてきた。これらの解析により、非常に高い精度での宇宙論モデルの検証が可能となっており、今後も CMB の偏光観測が進むことが期待されている。近年の CMB 観測では宇宙複屈折の発見があり、宇宙がパリティ対称性を破っている兆候が報告された。パリティ対称性とは鏡像反転の下での対称性であり、電磁気学や一般相対性理論では成り立っている。一方で、DNA の右巻き螺旋構造や素粒子標準模型における弱い相互作用に代表されるように、様々なスケールでパリティ対称性が破れていることが知られている。したがって、宇宙という大きいスケールにおいてもパリティ対称性が破れている可能性を否定できない。以上を踏まえ、本研究では CMB のパリティ対称性の破れである「V モード偏光」に着目する。

光の偏光はストークスパラメータと呼ばれる 4 つの成分 I, Q, U, V で完全に記述することができる。水平・垂直方向の基底ベクトルを $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}$ とすると、各ストークスパラメータは以下で記述される。

$$I = |\boldsymbol{e_1} \cdot \boldsymbol{E}|^2 + |\boldsymbol{e_2} \cdot \boldsymbol{E}|^2 \tag{1}$$

$$Q = |\boldsymbol{e_1} \cdot \boldsymbol{E}|^2 - |\boldsymbol{e_2} \cdot \boldsymbol{E}|^2 \tag{2}$$

$$U = 2\,\mathrm{Re}[(\boldsymbol{e_1} \cdot \boldsymbol{E})^*(\boldsymbol{e_2} \cdot \boldsymbol{E})] \tag{3}$$

$$V = 2\,\mathrm{Im}[(\boldsymbol{e_1} \cdot \boldsymbol{E})^*(\boldsymbol{e_2} \cdot \boldsymbol{E})] \tag{4}$$

I は光の全強度、Q は水平・垂直方向の直線偏光成分の強度差、U は ±45° 方向の直線偏光成分の強度差、V は左円偏光・右円偏光の強度差を表している。V について、円偏光基底ベクトル $\boldsymbol{e_L}, \boldsymbol{e_R}$ を用いると、

$$V = |\boldsymbol{e_L} \cdot \boldsymbol{E}|^2 - |\boldsymbol{e_R} \cdot \boldsymbol{E}|^2 \tag{5}$$

と表すことができる。これより、V モードは左円偏光・右円偏光の強度差を示していることが明らかである。

CMB の観測においては、シュテファン・ボルツマンの法則 $I \propto T_{CMB}^4$ を用いて I の代わりに温度 T を用いる。また、宇宙論では Q および U の線型結合として定義される E および B を用いるため、CMB の観測量としては T, E, B, V が用いられる。

CMB 観測の現状としては温度ゆらぎである T モードと直線偏光である E モード、B モードは既に観測されている。一方、円偏光である V モードは未だ観測されていない。V モードゆらぎのパワースペクトルである C_l^{VV} の将来観測感度は図 1 に示す通りである。JAXA が将来打ち上げ予定である LiteBIRD 衛

星では、従来の観測から得られた上限値に比べ、観測感度が 100 倍以上向上することが期待されている。

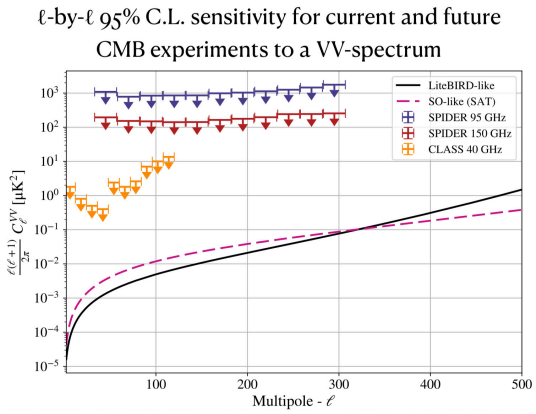


図 1: V モードゆらぎ C_l^{VV} の将来観測感度

一方で、標準宇宙論では V モードの値はほぼゼロ (Stephon Alexander et al. 2020) とされており、V モードはあまり注目されていない。これは、V モードが発見された場合、標準宇宙論では説明できないということを意味する。このことから、V モードを通じて標準宇宙論を超える物理を発見できる可能性があると言える。

2 The Model

本研究では、V モード偏光の生成において dark photon を用いる。Dark photon は photon 以外の標準模型の粒子とは相互作用しない粒子であり、本研究では質量を持つものを考える。また、dark photon は初期状態においては存在せず、photon-dark photon 変換によって生成されるとする。具体的には、左巻きの photon は左巻きの dark photon へ、右巻きの photon は右巻きの dark photon へと変換される。

Dark photon を用いた V モード偏光の生成メカニズムとしては、photon-dark photon 変換において、左巻き photon から左巻き dark photon に変換される確率と、右巻き photon から右巻き dark photon に変換される確率が異なる場合を考える。この非対称性により、変換後に残る左巻き photon と右巻き photon の数に差が生じるため、V モード偏光が生成される。

このようなメカニズムを実現するモデルとして、photon と kinetic mixing する dark photon のモデルを考える。ラグランジアンは以下の通りである。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}X_{\mu\nu}X^{\mu\nu} + \frac{\epsilon}{2}F_{\mu\nu}X^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_{\gamma'}^2 X_\mu X^\mu + j_{em}^\mu A_\mu + \frac{\tilde{\epsilon}(t)}{4}F_{\mu\nu}\tilde{X}^{\mu\nu} \quad (6)$$

A_μ は通常の photon 場、$F_{\mu\nu}$ は photon 場の強度テンソル、X_μ は dark photon 場、$X_{\mu\nu}$ は dark photon の場の強度テンソル、$m_{\gamma'}$ は dark photon の質量、j_{em}^μ は電磁カレント、ϵ と $\tilde{\epsilon}(t)$ は photon と dark photon の kinetic mixing パラメータである。また、$\tilde{X}^{\mu\nu}$ の定義は、$\tilde{X}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}X_{\rho\sigma}$ である。(6) 式の最後の項が V モード生成のために追加したパリティ対称性を破る項である。

よって、運動方程式は、左巻き・右巻きでそれぞれ

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - k^2 - m_\gamma^2 & -m_{\gamma'}^2\epsilon - k\dot{\tilde{\epsilon}} \\ -m_{\gamma'}^2\epsilon - k\dot{\tilde{\epsilon}} & \omega^2 - k^2 - m_{\gamma'}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A}_L^a \\ \mathcal{X}_L^s \end{pmatrix} = 0 \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - k^2 - m_\gamma^2 & -m_{\gamma'}^2\epsilon + k\dot{\tilde{\epsilon}} \\ -m_{\gamma'}^2\epsilon + k\dot{\tilde{\epsilon}} & \omega^2 - k^2 - m_{\gamma'}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A}_R^a \\ \mathcal{X}_R^s \end{pmatrix} = 0 \quad (8)$$

となる。m_γ は photon の有効質量を表している。ただし、以下の基底変換を行った。

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{L/R}^a \\ \mathcal{X}_{L/R}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{L/R} \\ \mathcal{X}_{L/R} \end{pmatrix} \quad (9)$$

これより、左巻きの photon-dark photon の変換確率は

$$P_L = \frac{\pi m_{\gamma'}^2 r}{\omega}\left(\epsilon + \frac{\omega\dot{\tilde{\epsilon}}}{2m_{\gamma'}^2}\right)^2 \quad (10)$$

同様に、右巻きの photon-dark photon の変換確率は

$$P_R = \frac{\pi m_{\gamma'}^2 r}{\omega}\left(\epsilon - \frac{\omega\dot{\tilde{\epsilon}}}{2m_{\gamma'}^2}\right)^2 \quad (11)$$

となり、P_L と P_R では符号が異なっているため、左巻き photon と右巻き photon で変換確率に差が出ていることが確認できる。

ここで、r は

$$r \equiv \left|\frac{d\ln m_\gamma^2(t)}{dt}\right|_{t=t_{res}}^{-1} \quad (12)$$

であり、共鳴時 t_{res} における値である。図 2 は赤方偏移に応じた photon の有効質量の変化を表しており、photon の有効質量が dark photon の質量と一致する際に共鳴が生じる。このとき、photon-dark photon

変換が最も効率よく起こる。また、共鳴による寄与が大きく、それ以外からの寄与は無視できることから、共鳴時における値である r が変換確率に影響を与える。

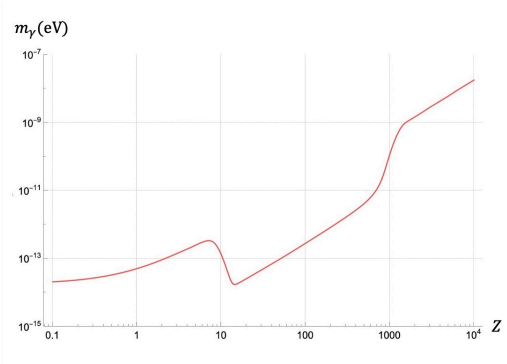


図 2: 赤方偏移に応じた photon の有効質量

本研究では dark photon の質量が $m_{\gamma'} = 10^{-13}eV$ の場合を考える。この場合、図 2 より共鳴は 3 回起こり、それらの寄与を全て足したものが r となる。

3 Results

本研究では、V モードのモノポール成分にあたる全天円偏光度を定義し、その最大値を求めることを目的とする。

COBE 衛星によって観測された CMB スペクトルは黒体放射スペクトルであるので、その強度は

$$B^0_\omega = \frac{\omega^3}{2\pi^2}\exp\left[\left(\frac{\omega}{T}\right) - 1\right]^{-1} \tag{13}$$

である。

本 dark photon モデルにおける CMB のスペクトル強度は、左巻き photon、右巻き photon それぞれに対して、変換確率 P_L, P_R を用いて

$$B^L_\omega = B^0_\omega(1 - P_L) \tag{14}$$
$$B^R_\omega = B^0_\omega(1 - P_R) \tag{15}$$

と表すことができる。

ここで、全天円偏光度 $\bar{V}$ を

$$\bar{V} \equiv \frac{B^L_\omega - B^R_\omega}{B^L_\omega + B^R_\omega} \simeq -\frac{1}{2}(P_L - P_R) \tag{16}$$

と定義する。Dark photon モデルによって生成可能な全天円偏光度 $\bar{V}$ の最大値を検討する。$\bar{V}$ の中のモデルパラメータを変化させることによって、$\bar{V}$ を任意に大きくできるわけではない。(16) 式より、photon-dark photon 変換が起こるほど V モードは生成するが、(14), (15) 式の合計が変換後のスペクトルとなるため、V モードを生成するほど CMB のスペクトルも変化してしまう。したがって、本研究では、COBE 衛星によって観測されたスペクトルを変化させない範囲における、生成可能な V モードの最大値を評価する。Photon-dark photon 変換後のスペクトルの、観測された CMB スペクトルからのズレは

$$\Delta B_\omega = B^L_\omega + B^R_\omega - 2B^0_\omega \tag{17}$$

となる。

(14), (15) 式より、dark photon に変換した photon の割合は

$$\frac{\Delta B_\omega}{B^0_\omega} = -(P_L + P_R) \tag{18}$$

と表せる。

ここで、$P_R = 0$ となる ω を

$$\omega_* \equiv 2m^2_{\gamma'}\frac{\epsilon}{\tilde{\epsilon}} \tag{19}$$

と定義する。このとき、P_L, P_R は ω_* を用いて

$$P_L = \frac{\pi m^2_{\gamma'} r\epsilon^2}{\omega}\left(1 + \frac{\omega}{\omega_*}\right)^2 \tag{20}$$
$$P_R = \frac{\pi m^2_{\gamma'} r\epsilon^2}{\omega}\left(1 - \frac{\omega}{\omega_*}\right)^2 \tag{21}$$

と書き直せるので、ω_* を用いて全天円偏光度を表すと、(16) 式より

$$\bar{V} \simeq -\frac{1}{2}(P_L - P_R) = -\frac{2\pi m^2_{\gamma'} r\epsilon^2}{\omega_*} \tag{22}$$

また、同様に ω_* を用いて dark photon に変換した photon の割合を表すと、(18) 式より

$$\frac{\Delta B_\omega}{B^0_\omega} = -(P_L + P_R) \tag{23}$$
$$= -\frac{2\pi m^2_{\gamma'} r\epsilon^2}{\omega_*}\left(\frac{\omega_*}{\omega} + \frac{\omega}{\omega_*}\right) \tag{24}$$
$$= \bar{V}\left(\frac{\omega_*}{\omega} + \frac{\omega}{\omega_*}\right) \tag{25}$$

となり、$\bar{V}$ を用いて dark photon に変換した photon の割合を表すことができる。この割合が観測された CMB スペクトルの誤差範囲内に収まっていれば観測

と矛盾しない。よって、COBE 衛星の観測による制限において、最も強い制限を与える周波数から

$$\left|\frac{\Delta B_\omega}{B_\omega^0}\right| = \left|\bar{V}\right| \left(\frac{\omega_*}{1.2T_0} + \frac{1.2T_0}{\omega_*}\right) \lesssim 1.3\times10^{-4} \quad (26)$$

となる。ここで、相加相乗平均の関係を用いると

$$2\left|\bar{V}\right| \leq \left|\bar{V}\right| \left(\frac{\omega_*}{1.2T_0} + \frac{1.2T_0}{\omega_*}\right) \lesssim 1.3\times10^{-4} \quad (27)$$

が成り立つ。これより、

$$\left|\bar{V}\right| \lesssim 6.5\times10^{-5} \quad (28)$$

となり、モデルパラメータが含まれているにも関わらず $\bar{V}$ を求めることができるのである。等号成立は $\omega_* = 1.2\,T_0$ のときであり、このとき $\epsilon = 4.8\times10^{-8}$, $\dot{\tilde{\epsilon}} = 3.5\times10^{-30}eV$ である。

以上より、dark photon のモデルによって生成可能な全天円偏光度 $\left|\bar{V}\right|$ の最大値は 6.5×10^{-5} であると求めることができた。しかし、一般にモノポール成分の観測は極めて難しく、全天円偏光度 $\bar{V}$ のような観測結果は存在しないとのことである。そのため、現状では、得られた理論的な計算結果と実際の観測結果を直接比較することは不可能である。

4 Conclusion and Future work

CMB の V モード偏光は未だ観測されていないものの、将来観測感度が上がることが期待されている。よって、標準宇宙論ではほぼゼロとされる V モードだが、宇宙のスケールにおいてもパリティ対称性が破れている可能性を検討し、具体的な V モード偏光を生成するモデルとして、photon と dark photon の結合 $(F_{\mu\nu}X^{\mu\nu}, F_{\mu\nu}\tilde{X}^{\mu\nu})$ を考えた。COBE 衛星の CMB 観測による制限から、本 dark photon モデルによって生成可能な全天円偏光度 $\left|\bar{V}\right|$ の最大値は 6.5×10^{-5} と求められた。しかし、全天円偏光度の観測結果は存在せず、得られた結果と実際の観測結果との比較は不可能であった。

このため、今後の展望としては、将来の V モード観測と直接比較が可能である、V モードゆらぎの角度パワースペクトル C_l^{VV} の本モデルの場合における理論予測を行う。具体的には、dark photon のモデルにおける衝突項を導出し、ボルツマン方程式を数値的に解いた結果に基づいて図 1 に理論予測を示すことを目的とする。

Acknowledgement

本研究に際して、CMB 観測の現状や今後の見通しに関して貴重なご助言をくださった茅根裕司氏に深く感謝申し上げます。

Reference

Stephon Alexander, Evan McDonough, Anthony Pullen, & Bradley Shapiro 2020, arXiv:1911.01418v2

Alessandro Mirizzi, Javier Redondo, & Günter Sigl 2009, arXiv:0901.0014v2

Nirmalya Brahma, Asher Berlin, & Katelin Schutz 2023, arXiv:2308.08586v1

Kerstin E. Kunze, & Miguel Á. Vázquez-Mozo 2015, arXiv:1507.02614v1

——index へ戻る

SK-26

超大質量ブラックホール連星による背景重力波の統計量

千葉大学
久松　姫南乃

超大質量ブラックホール連星による背景重力波の統計量

久松 姫南乃 (千葉大学大学院 融合理工学府 先進理化学専攻 物理学コース)

Abstract

パルサータイミングアレイ (PTA) で観測される背景重力波の主波源は超大質量ブラックホール連星 (SMBHBs) の軌道運動と考えられている。従来、モンテカルロシミュレーション (MCS) で重力波スペクトルの高次統計量が研究されてきたが、観測と MCS との比較によって SMBH の質量等の情報を得る方法は不明確であった。本研究では、高次統計量を解析的に導出し、SMBH 連星の質量や赤方偏移といった物理量の重み付け平均で表現する手法を提案した。さらに分散以降の高次統計量の発散を避けるため、赤方偏移の積分下限を観測器の個別波源検出感度を踏まえて設定する方法を導入した。これにより、観測された高次統計量から超大質量ブラックホール連星合体の情報を抽出できる可能性を示した。

1 Introduction

近年、重力波観測が進んでいる。パルサータイミングアレイ (PTA) はナノヘルツ帯 (10^{-9}Hz) の重力波観測システムで、重力波源を個々に分解できない背景重力波の検出を目指して世界中で複数のグループが観測している。中でも NANOGrav は背景重力波の存在を示唆する観測結果を示しており、他のグループも同様の報告をしている。背景重力波の波源は $[10^6, 10^{11}]M_\odot$ 程度の質量を持つ超大質量ブラックホールの連星 (SMBHBs) と考えられている。背景重力波の観測から SMBH 連星の質量や赤方偏移といった物理的な情報を得ることは大きな目的であり、BH の質量と銀河内恒星の速度分散の相関関係を用いるなど様々な手法で理論モデルを構築し、観測と比較する研究は行われてきたが、最も楽観的な結果を用いた理論値よりも観測値の重力波振幅の方が二倍程度大きいという矛盾がある。(Sato-Polito et al. 2024) この結果はいまだに観測されていない高質量の BH 連星が近傍に存在していることを示唆しているが疑問は残る。

背景重力波の高次統計量については今までも議論されてきた。(Lamb & Taylor 2024) 本研究では、背景重力波のエネルギー密度スペクトルの高次統計量を議論することで、観測と比較したときに SMBH 連星の質量や赤方偏移分布を制限をすることを目的とする。今回はその前段階である、背景重力波のエネルギー密度スペクトルの高次統計量を解析的に導出し、モンテカルロシミュレーション (MCS) から求めた高次統計量の結果を再現できることを示した。このとき、分散以降の高次統計量でモンテカルロと解析値が発散することを避けるために、地球近傍の重力波は背景重力波ではなく、個別に分解できると考え、PTA の個別重力波源の検出感度から赤方偏移の下限値を設定した。また、統計量を重み付けの平均で表現することで高次統計量への各物理量の寄与を定性的に表現する手法を提案した。

2 Methods

2.1 解析的表式の導出

まず、背景重力波のエネルギー密度スペクトルは以下の式で定義されている。

$$\Omega_{\rm GW}(f) \equiv \frac{1}{\rho_{\rm c}} \frac{{\rm d}\rho_{\rm GW}}{{\rm dln}f} \tag{1}$$

ここでエネルギー密度スペクトルは理論的に

$$\frac{{\rm d}\rho_{\rm GW}}{{\rm dln}f} = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d^2n}{dzd\log\mathcal{M}} \times \frac{1}{1+z} \frac{{\rm d}E_{\rm GW}}{{\rm d}\ln f_{\rm r}}\bigg|_{f_{\rm r}=f(1+z)} dzd\log\mathcal{M} \tag{2}$$

とかける。このとき、n は BH 連星の合体イベントの共動体積 $V_{\rm c}$ あたりの数密度である。

PTA は観測するのが個別の合体イベントではなく、無数の連星が長時間にわたって放出し続ける重力波が重なり合った信号であるため、合体率を観測する瞬間に特定の振動数で重力波を放射している連星の数に変換する必要がある。宇宙が定常状態であるという仮定を用いて以下の変換式を導入する。

$$\frac{d^2n}{dz\,d\mathcal{M}}\left(\frac{\mathrm{d}t_\mathrm{r}}{\mathrm{d}\ln f_\mathrm{r}}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t_\mathrm{r}}\frac{\mathrm{d}V_\mathrm{c}}{\mathrm{d}z}\right)=\frac{d^3N}{dz\,d\mathcal{M}\,d\ln f_\mathrm{r}} \tag{3}$$

このとき、$d^3N/dzd\mathcal{M}d\ln f_\mathrm{r}$ は $[\mathcal{M},\,\mathcal{M}+d\mathcal{M}]$ と $[z,\,z+dz]$ に存在する、$d\ln f_\mathrm{r}$ ごとの連星の数を表す。t_r は重力波源の静止系での時間を表す。
この変換式を用いてエネルギー密度スペクトルの解析的表式はこのように書き直すことができる。

$$\Omega_\mathrm{GW}(f)=Af^2\int\frac{d^3N}{dzd\log\mathcal{M}d\ln f_\mathrm{r}}\times h^2(z,\mathcal{M},f)dzd\log\mathcal{M} \tag{4}$$

このとき、h は重力波振幅であり、以下のように書ける。

$$h^2(z,\mathcal{M},f)=\frac{32\pi^{\frac{4}{3}}}{5c^8}\frac{(1+z)^{\frac{10}{3}}}{d_L^2(z)}(G\mathcal{M})^{\frac{10}{3}}f^{\frac{4}{3}} \tag{5}$$

ここから高次統計量を導出する。中心振動数 $\ln f$ 周りの振動数の幅 $\Delta\ln f$ のビンに入るエネルギーを考える。

$$\Omega_\mathrm{GW}(f)\Delta\ln f\approx Af^2\sum_i(d^3N/d\theta_i\,d\ln f)\;h^2(z,\mathcal{M},f)\;\Delta\theta_i\Delta\ln f \tag{6}$$

このとき $\theta_i=\log\mathcal{M}_i,z_i$ である。
ここで、$d^2N/(d\theta d\ln f)\Delta\theta_i\Delta\ln f$ が $\Delta\theta_i,\Delta\ln f$ の中に存在する連星の数を表すので、この期待値は

$$\langle d^3N/d\theta_i\,d\ln f\rangle=\int_{\Delta\ln f}\int_{\Delta\theta_i}\frac{d^2N}{d\theta d\ln f}d\theta d\ln f \tag{7}$$

で与えられる。現実の宇宙では連星は連続的ではなく離散的に存在するため、$d^2N/(d\theta d\ln f)\Delta\theta_i\Delta\ln f$ は期待値 $\langle d^2N/(d\theta d\ln f)\Delta\theta_i\Delta\ln f\rangle$ のポアソン分布に従う確率変数とみなせる。よって、重力波のエネルギー密度の期待値は $\Delta\theta_i$ の無限小極限をとると

$$\begin{aligned}&\mathrm{MEAN}[\Omega_\mathrm{GW}(f)\Delta\ln f]=\langle\Omega_\mathrm{GW}(f)\Delta\ln f\rangle\\&\approx Af^2\sum_i\langle(d^3N/d\theta_i\,d\ln f)\;\Delta\theta_i\Delta\ln f\rangle h^2(z,\mathcal{M},f)\\&\to Af^2\Delta\ln f\int\frac{d^3N}{dzd\log\mathcal{M}d\ln f}\times h^2(z,\mathcal{M},f)dzd\log\mathcal{M}\end{aligned} \tag{8}$$

と書くことができる。分散も同様にして定義通りに表すと、

$$\begin{aligned}&\mathrm{Var}[\Omega_\mathrm{GW}(f)\Delta\ln f]\\&=\langle(\Omega_\mathrm{GW}(f)\Delta\ln f)^2\rangle-\langle\Omega_\mathrm{GW}(f)\Delta\ln f\rangle^2\\&=A^2f^4\Delta\ln f\int\langle N(z,\mathcal{M},f)\rangle\times h^4(z,\mathcal{M},f)dzd\log\mathcal{M}\end{aligned} \tag{9}$$

と書ける。歪度、尖度も同様にして、定義通りに導出した。次に Schechter 関数を基にした SMBH 連星の単位赤方偏移、チャープ質量あたりの合体数密度のモデルを導入する。(Lamb & Taylor 2024)

$$\begin{aligned}\frac{d^2n}{dzd\log\mathcal{M}}&=\dot{n}_0\left[\left(\frac{\mathcal{M}}{10^7M_\odot}\right)^{-\alpha}e^{-\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}_*}}\right]\times\left[(1+z)^\beta\,e^{-\frac{z}{z_0}}\right]\frac{dt_\mathrm{r}}{dz}\\&\equiv\dot{n}_0f(\log\mathcal{M})g(z)\end{aligned} \tag{10}$$

このとき、$\dot{n}_0[\mathrm{Mpc}^{-3}\mathrm{Gyr}^{-1}]$ は典型的な合体率を表す。表 1 よりモデル 1 は多数の低質量の連星が広い赤

表 1: モデルパラメータ (Lamb & Taylor 2024)

	$\dot{n}_0$	α	$\mathcal{M}_*[M_\odot]$	β	z_0
Model1	2.0×10^{-2}	1	3.2×10^7	3	3
Model2	1.5×10^{-3}	0	1.8×10^8	2	1.8
Model3	2.0×10^{-6}	-1	10^9	1	0.5

方偏移の範囲にわたって分布しているモデルであり、モデル 3 は高質量の連星が近傍に少数存在するというモデルである。モデル番号が大きくなるにつれて質量はより少数で重くなり、分布はより近傍に集中する。このとき、どのモデルでも平均 $\mathrm{MEAN}[\Omega_\mathrm{GW}(f)]$ の値が同じになるように $\dot{n}_0$ を決定した。今回はモデル 1 を用いて本節で導出した高次統計量を求め、MCS の結果と一致することを確認する。

2.2 各物理量の依存性の分解

高次統計量の結果を各物理量ごとに定量的に理解するために、赤方偏移と質量で分解する。まず、平均について定式化するときに、以下のように定義する。

$$n\equiv\int_z\int_{\log_{10}\mathcal{M}}\dot{n}_0f(\log\mathcal{M})g(z)dzd\log\mathcal{M} \tag{11}$$

$$\langle \mathcal{M}^{5/3} \rangle \equiv \frac{\int \mathcal{M}^{5/3} f(\log \mathcal{M}) d\log \mathcal{M}}{\int f(\log \mathcal{M}) d\log \mathcal{M}} \tag{12}$$

$$\langle (1+z)^{-1/3} \rangle \equiv \frac{\int (1+z)^{-1/3} g(z) dz}{\int g(z) dz} \tag{13}$$

これを用いて平均を表すと、

$$\begin{aligned} &\mathrm{MEAN}[\Omega_{\rm GW}(f)] \\ &= A f^{\frac{2}{3}} \int \dot{n}_0 f(\log \mathcal{M}) g(z) \mathcal{M}^{\frac{5}{3}} (1+z)^{-\frac{1}{3}} d\log \mathcal{M} dz \\ &= A\ f^{\frac{2}{3}}\, n \langle \mathcal{M}^{\frac{5}{3}} \rangle \langle (1+z)^{-\frac{1}{3}} \rangle \end{aligned} \tag{14}$$

と書ける。同様にして分散においても、

$$\langle \mathcal{M}^{5} \rangle \equiv \frac{\int \mathcal{M}^{5} f(\log \mathcal{M}) d\log \mathcal{M}}{\int f(\log \mathcal{M}) d\log \mathcal{M}} \tag{15}$$

$$\langle (1+z)^{3} / d_{\rm L}^2(z) \rangle \equiv \frac{\int (1+z)^{3} / d_{\rm L}^2(z) g(z) dz}{\int g(z) dz} \tag{16}$$

と定義することにより、

$$\mathrm{Var}[\Omega_{\rm GW}(f)] = B \frac{f^4}{\Delta \ln f} n \langle \mathcal{M}^{5} \rangle \langle (1+z)^{3} / d_{\rm L}^2(z) \rangle \tag{17}$$

と書くことができる。

2.3 下限の導入

式 (17) から、赤方偏移に関する積分の下限を 0 にすると、分散は光度距離の -2 乗 $(1/d_{\rm L}^2(z) \sim 1/z^2)$ が原因で発散してしまうことがわかる。これは歪度、尖度においても同様である。MCS においては、分散以降の高次統計量が一見すると導出されていたが、実際は発散する量であるため、有限の値が出ているのは理論と矛盾しており、実際に z の分割を細かくするほど値が大きくなることを確認した。そのため、適当な赤方偏移の積分範囲の下限を設定した上で、統計量が MCS の結果を再現できるか確認する必要がある。そこで、近傍からの重力波は背景重力波ではなく個別に分解できるとして PTA の個別重力波源の検出感度の上限を積分範囲の下限とした。今回は、図 1 より個別検出感度の上限を光度距離 $d_{\rm L}(z) = 30$Mpc とした。$z \ll 1$ であるので、$cz = H_0 d_{\rm L}(z)$ として、赤方偏移の積分範囲の下限を $z = 0.007$ に決定した。

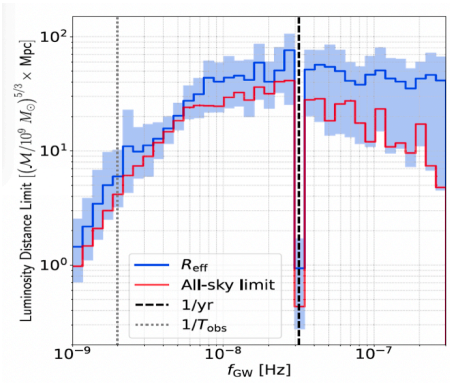


図 1: 振動数に対して PTA が個別重力波源を検出可能な光度距離。(Agazie et al. 2023) 赤線は全天の重力波振幅上限から式 (5) を用いて計算された光度距離の下限、青線は PTA の方向感度依存性を考慮した値を示している。どちらも $f \sim 10^{-8}$Hz 以降、値が 30Mpc からあまり変化がないことから連星の質量が同じであれば振動数によらず 30Mpc まで観測可能であると解釈することができる。

3 Results/Discussion

3.1 解析値とモンテカルロの再現の確認

積分の下限に値を入れたことにより、解析的に求めた高次統計量と MCS の結果が発散せずに、解析的表式の値が MCS の結果を再現していることを確認する。図 2 を見ると、平均、分散どちらにおいても、Realization を増やすと、どの赤方偏移 z のビンも一定の値に概ね収束している。z のビンを増やすほど、解析値に漸近していく様子も見て取れる。図 3 より平均、分散、歪度に関しては MCS の結果を 1% 未満の精度で再現できていることを確認した。尖度に関しては 4% ほどずれている。尖度に関しては 10^7 回では収束していないことが原因だと考えられる。

3.2 各統計量への物理量の寄与

表 1 の三つのモデルでの各高次統計量における質量や赤方偏移の寄与を確認する。式 (14)、(17) の全合体数密度 n と質量、赤方偏移の結果を表 2 に示した。エネルギー密度スペクトルの平均値 $\mathrm{MEAN}[\Omega_{\rm GW}(f)]$ において、合体数密度とチャープ質量 $\mathcal{M}$ はモデルごとに桁で変化しており、寄与が大きいことがわかる。赤方偏移 z に関してはモデル 1 と 3 を比較しても赤

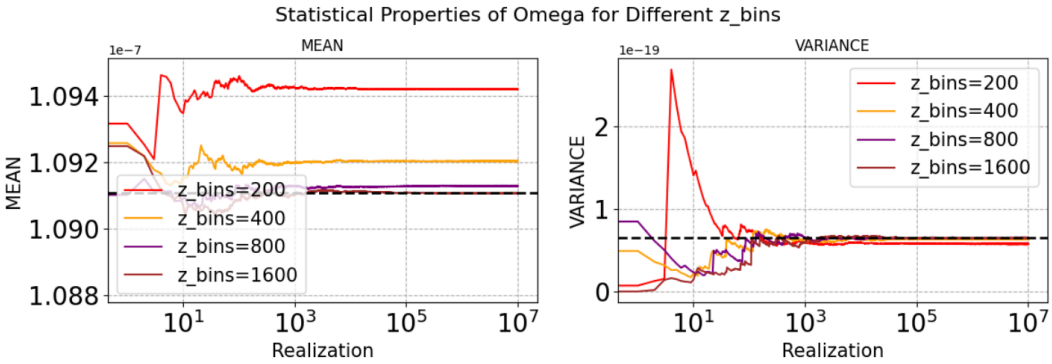


図 2: モンテカルロシミュレーションによる背景重力波エネルギー密度スペクトル $\Omega_{\rm GW}(f)$ の高次統計量の収束の様子。縦軸は左が平均で右が分散、横軸が Realization$[0, 10^7]$ である。赤方偏移について発散していないかの確認であるため、質量 $\mathcal{M}$ のビン数は 5 に設定した。赤方偏移ビン数は 200,400,800,1600 の場合をプロットした。点線は解析値を示している。z ビンを増やすほど解析値に漸近する様子がわかる。

表 2: 全合体数 n、エネルギー密度スペクトルの平均、分散の質量、赤方偏移に関する重み付け平均の値

	$n[\mathrm{Mpc}^{-3}]$	$\langle\mathcal{M}^{5/3}\rangle^{3/5}[M_\odot]$	$\langle(1+z)^{-1/3}\rangle$	$\langle\mathcal{M}^{5}\rangle^{1/5}[M_\odot]$	$\langle(1+z)^3/d_{\rm L}^2(z)\rangle[\mathrm{Mpc}^{-2}]$
Model1	7.04	4.9×10^6	0.70	2.3×10^7	1.4×10^{-6}
Model2	7.4×10^{-2}	6.8×10^7	0.79	2.5×10^8	4.7×10^{-6}
Model3	4.8×10^{-4}	1.3×10^9	0.91	2.6×10^9	1.9×10^{-5}

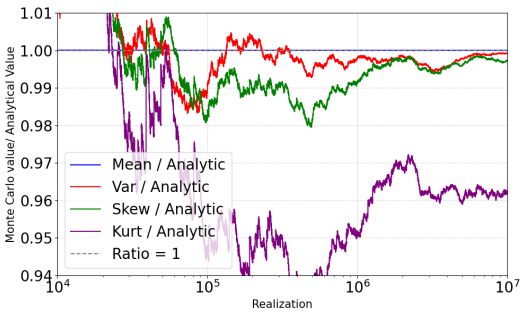


図 3: 縦軸が (解析値)/(MCS の値) で横軸が Realization。青色が平均、赤色が分散、緑色が歪度、紫色が尖度を表している。

方偏移の二倍程度しか違いがない。以上より、平均においては連星の合体数密度と質量の寄与が大きく、赤方偏移はあまり効かないということがわかった。

分散 $\mathrm{Var}[\Omega_{\rm GW}(f)]$ においても、質量の部分はモデルによって二桁値が変わっている。赤方偏移に関して平均は変化がなかったのに対し、分散はモデルで十倍ほど変わっている。ただ、分散以降は重み付け平均の式に $1/d_{\rm L}^2(z)$ があることから、平均と同じ手法で定式化したものから物理的な考察することが適切かは自明ではないので今後の課題である。

4 Conclusion

本研究により、赤方偏移の下限を設定することで分散以降の発散を解決し、先行研究の MCS を解析的に再現できることを確認した。解析的表式は質量や赤方偏移といった物理量の寄与を定量的に理解することができる。今後の課題は、

・分散以降の適切な定式化方法を考案する

・観測から高次統計量の情報を得る方法を考案する

ということである。観測からこの宇宙の各高次統計量の値を推定することにより、SMBH 連星の質量と赤方偏移の分布に制限を与えたい。

Reference

Lamb,G., & Taylor,R. 2024, *Astrophys. J. Lett.* **971** L10

Sato-Polito, G., & Kamionkowski, M. 2023, *Phys. Rev, D* **109**, 123544

Sato-Polito, G.,Zaldarriaga, M., & Quataert, E. 2024, *PhRvD*, **100**, 063020

Agazie, G. et al., 2023, *Astrophys. J. Lett.* **951** L8

——index へ戻る

SK-27

一次相転移からの重力波

総合研究大学院大学
西木　友哉

一次相転移からの重力波

西木 友哉 (総合研究大学院大学 素粒子原子核コース)

Abstract

重力波は初期宇宙を探るための強力な信号である．時空のゆがみである重力波は電波望遠鏡とは異なる情報を提供する．宇宙開闢から 38 万年は光子が直進できず，これ以前の宇宙を電波望遠鏡で直接観測することはできない．これに対し，宇宙誕生直後に生成された重力波を検出することができれば，この時代の宇宙の状態を直接観測することができる．

宇宙論的な確率的重力波背景 (Stochastic gravitational wave backgrounds, SGWBs) は，宇宙の歴史でかなりの重力波を放出したイベント (first-order phase transition など) から発生する．初期宇宙の phase transition やインフレーション，Cosmic strings などの過程の痕跡としての SGWBs を探ることで，標準模型を超える物理の手がかりを得ることができると考えられている．

1 Introduction

重力波は初期宇宙を探る上で重要になる．電磁波は宇宙の再結合まで，ニュートリノはニュートリノの脱結合までの宇宙の情報を提供するが，これ以前の宇宙を直接観測することはできない．重力は相互作用が非常に弱いため，宇宙開闢間もなく生成された重力波は，その時代の痕跡を残し現在まで伝播する．重力波の観測は高エネルギーの物理学の探究において非常に重要になる．

宇宙の断熱膨張に伴う温度の低下により，宇宙はいくつかの相転移を経験したと考えられている．特に，一次相転移 (First Order Phase Transitiolns, FOPTs) は重力波の生成源になる可能性がある．素粒子標準模型における相転移として，電弱相転移や QCD 相転移があるが，これらはどちらもクロスオーバー相転移となっており，観測可能な量の重力波の生成は行われない．しかし，標準模型からの拡張を考えれば一次相転移も起こり得る．逆に，一次相転移からの重力波を観測することができれば，標準模型を超えた物理に対する糸口を見つけることができる．一次相転移からの重力波の検出は LISA(Laser Interferometer Space Antenna) などの次世代の重力波検出機で期待されている．

一次相転移では相転移を駆動するポテンシャルに障壁が現れ，空間を満たす偽の真空の中に対称性を破る真の真空の bubble が生成される．球対称に膨張するバブルは重力波源にはなり得ないが，bubble が衝突し，宇宙が対称性の破れた相へと転換するに伴い，重力波の生成が起こる．bubble の衝突は bubble wall とそれを取り囲む流体の速度配置の球対称性を破り，重力波を引き起こす異方性ストレスを生み出す．

2 First Order Phase Transition

相転移はポテンシャルが温度によって変化し，異なる真空期待値を持つことで起こる．一次相転移を起こすポテンシャルの温度変化は図 1 のようになっている．ある臨界温度 T_c 以上では真空期待値 $\phi = 0$ を持つが，温度が T_c より低くなるとポテンシャルの最小値が $\phi \neq 0$ となる．このようなポテンシャルでは

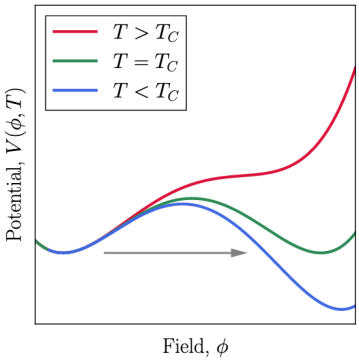


図 1: 一次相転移を起こすポテンシャルの温度変化

偽の真空と真の真空の間に障壁が現れる．場が真の真空に到達するには，この障壁をトンネル効果か熱

揺らぎによって超えなければならない．これは空間を満たす偽の真空の中に，真の真空の bubble が形成されることに相当する．真の真空の bubble が偽の真空のなかに核生成され，bubble が膨張・衝突し，やがて完全に真の真空へと転移する (図 2)．

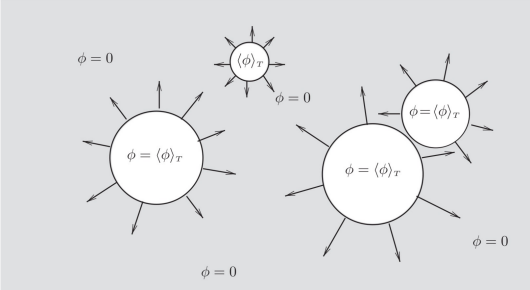


図 2: bubble の核生成

初期宇宙で起こった相転移の性質は，高エネルギーで宇宙を記述する理論モデルに依存する．標準模型を超得る物理で一次相転移が起こった場合，そこから生成される重力波を観測することで理論に関する情報を得ることができる．すなわち，一次相転移からの重力波は高エネルギーの物理を探索するプローブとなる．

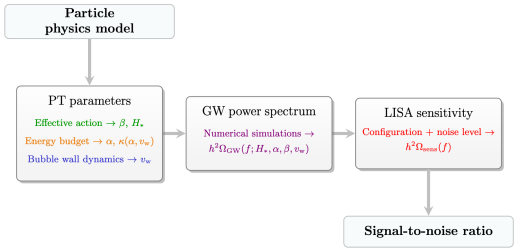


図 3: 重力波スペクトルを得る流れ

一次相転移からの重力波スペクトルを得るまでの流れは図 3 のようになっている．まず，与えられた素粒子物理モデルの場とラグランジアンを指定する．これから，有限温度での相構造を解析することができる．そのモデルが一次相転移を認める場合，有限温度の有効作用を用いて相転移が起こった時点でのハッブルパラメータ H_*（または同等な温度 T_*），相転移の継続時間 β^{-1} を決定することができる．これらと転移の強度 α，bubble の壁の速度 v_w が重力波スペクトルに関連してくる量となる．

3 Relavant parameters entering GW signals

重力波のスペクトルに現れる FOPTs のパラメータは，転移温度 T_*，核生成率の増加率 β，転移の強度 α，壁の速度 v_w がある．

転移温度 T_* は，重力波が生成される時刻 t_*，すなわち bubble の衝突が起こる PT の終わりにおける熱浴の温度で決定される．

核生成率の増加率 β は bubble の核生成率 $\Gamma(t)$ を用いておよそ

$$\beta \sim \left.\frac{\dot{\Gamma}}{\Gamma}\right|_{t_*} \tag{1}$$

と書かれる．β^{-1} はまた，相転移の継続時間と考えられる．これらは有限温度の場の理論を用いて計算される．

転移の強度 α は，転移時点での放射のエネルギー密度 $\rho^*_{\rm rad}$ と，転移で放出される真空のエネルギーとの比で与えられる．

$$\alpha = \frac{\rho_{\rm vac}}{\rho^*_{\rm rad}} \tag{2}$$

壁の速度 v_w は bubble を膨張させる駆動力と膨張を妨げる摩擦との兼ね合いで決定される．

4 GW from FOPTs

重力波は FLRW 計量中の空間テンソル摂動として

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j \tag{3}$$

のように表される．このとき，アインシュタイン方程式から

$$\ddot{h}_{ij} + 3H\dot{h}_{ij} - \frac{1}{a^2}\nabla^2 h_{ij} = 16G\Pi_{ij} \tag{4}$$

となる．$H = \dot{a}/a$ はハッブルパラメータ，Π は異方性ストレスである．相転移の継続時間 β^{-1} が 1 ハッブル時間 H_*^{-1} より小さいとすると，およそ $\beta^2 h \sim \beta\dot{h} \sim 16\Pi G$ であり，また，重力波のエネルギー密度は $\rho^*_{\rm gw} \sim \dot{h}^2/(32\pi G) \sim 8\pi G\Pi^2/\beta^2$ である．これと重力波生成時点の宇宙のそうエネルギー密度 $\rho_{\rm tot} = 3H_*^2/(8\pi G)$ との比は

$$\frac{\rho^*_{\rm gw}}{\rho^*_{\rm tot}} \sim \left(\frac{H_*}{\beta}\right)^2 \left(\frac{\Pi}{\rho^*_{\rm tot}}\right)^2 \tag{5}$$

となる．これより，今日の重力波振幅に換算すると

$$h^2\Omega_{\rm gw} \sim 1.6\times10^{-5}\left(\frac{100}{g_*(T_*)}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{H_*}{\beta}\right)^2\left(\frac{\kappa\alpha}{1+\alpha}\right)^2 \tag{6}$$

となる．ここで $\kappa\sim\Pi/\rho_{\rm vac}$ とした．重力波の生成は bubble の衝突に関連しているため，重力波の特性周波数は典型的な時間スケールまたは長さスケールに対応する．この場合，転移の継続時間または bubble のサイズで $k_*/a_*\sim 2\pi\beta, 2\pi/R_*\simeq 2\pi\beta/v_w$ となる．

重力波生成には次の 3 つの段階があると考えられている．

1. bubble の衝突: bubble が衝突し合体する過程で重力波が発生する．この寄与は bubble がハッブル長ほど大きくならない限り支配的でない．

2. sound wave: bubble の壁によって加速されたプラズマの運動エネルギーが音波として伝播する．これらが重なり合い，重力波を発生する．

3. turbulence: 流体の非線形性が重要になる．bubble の衝突がプラズマに乱流を起こし重力波を発生させる．

一般的には，転移が非常に強い場合や bubble がハッブル長ほど大きくない限り，sound wave からの寄与が支配的になると考えられている．

5 Spectrum of GW

一次相転移からの重力波のスペクトルの概形は図 4 のようになっている ((C.Caprini et al 2016), $T_*=100$GeV, $\alpha=1$, $v_w=1$, $\alpha_\infty=0.3$, $\beta/H_*=100$) 黒線は重力波スペクトルへの全ての寄与，青線は bubbl の衝突，緑線は sond wave の寄与，赤線は turbulance の寄与をそれぞれ表している．

スペクトルは低周波数領域 (super Hubble, $k<a_*H_*$) で $\Omega_{\rm gw}\propto f^3$ のように振る舞う．これは causality によるものである．一般に放射優勢期に活発な重力波スペクトルは

$$\Omega_{\rm gw}\propto k^3\int_{\eta_{\rm in}}^{\eta_{\rm fin}}d\eta a^3(\eta)\int_{\zeta_{\rm in}}^{\zeta_{\rm fin}}d\zeta a^3(\zeta) \times\cos(k(\eta-\zeta))\Pi(k,\eta,\zeta) \tag{7}$$

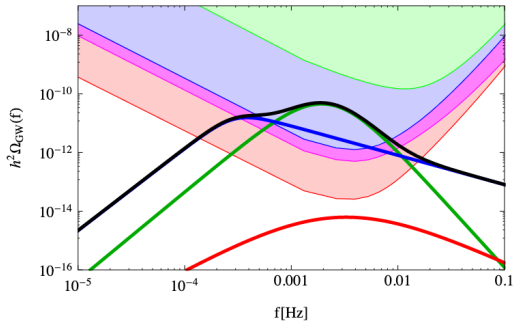


図 4: 一次相転移からの重力波スペクトル (C.Caprini et al 2016)

とかける．相転移は因果的な領域で起こるため，因果的でない super Hubble な領域では Π は相関がなく，波数 k_* までは一定である．したがって，$k<a_*H_*$ において $\Omega_{\rm gw}$ は $k^3(f^3)$ と成長する．

ハッブル以下のスケールから特性波数まで ($H_*<k<k_*$) では，異方性ストレス Π の時間依存性が k^3 の依存性を修正する場合がある．

$k>k_*$ での減衰は重力波を発生させるプロセスに依存し，一般的な考察はできない．

6 bulk flow model

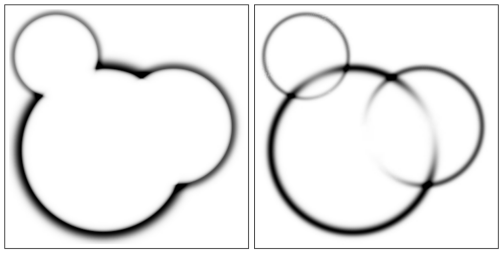


図 5: envelope と bulk flow

重力波のシミュレーションには envelope 近似 (図 5 左) が用いられてきた．envelope 近似は，図 5 に示すように，エネルギー運動量テンソルが他の bubble の内側に含まれる壁の部分で消滅し，真の真空を囲む包絡線のみが残るというものである．

envelope 近似を緩和したモデルとして，bulk flow モデル (図 5 右) がある．これは bubble の壁に蓄積されたエネルギーが衝突後すぐに消滅するのではなく，時間と共に減衰するというものである．envelope 近

似と bulk flow モデルでのスペクトルは図 6，図 7 のようになる (T.Konstandin 2018)．ピークより低周波の領域では envelope 近似で $\sim k^3$ でスケールするが，bulk flow では $\sim k$ とスケールする．bulk flow モデルではソースが残る影響でスペクトルの増強が起こる．

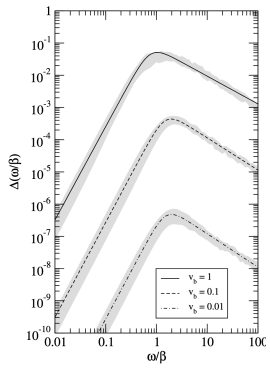


図 6: envelope

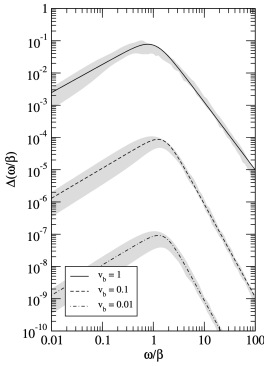


図 7: bulk flow

7 Conclusion

一次相転移からの重力波のスペクトルは，相転移を特徴づけるパラメータに依存する．さらに相転移の性質は高エネルギー領域での理論モデルに依存する．したがって一次相転移からの重力波は，標準模型を超える物理学の探索に非常に重要であり，現在の加速器では到達困難なエネルギースケールの情報を保持するプローブである．LISA をはじめとする次世代の重力波望遠鏡はこれまで観測できなかった領域の信号の検出を可能にする．これにより，宇宙初期の相転移の性質を明らかにし，標準模型の限界やその先の理論的枠組みに対する理解を得られることが期待される．

Acknowledgement

天文・天体物理若手夏の学校を運営して下さったスタッフの方々、支援して下さった方々に心より感謝申し上げます。また，KEK 理論センターの大学院生および教員の皆様にこの場を借りて謝辞を述べさせていただきます．

Reference

Chiara Caprini and Daniel G Figueroa, 2018, Class. Quantum Grav. 35 163001

Peter Athron et al., 2024, Progress in Particle and Nuclear Physics, 135, 104094.

Chiara Caprini et al., 2020, JCAP03(2020)024

Chiara Caprini et al., 2016 JCAP04(2016)001

T.Konstandin, 2018, JCAP03(2018)047

——index へ戻る

SK-28

Bayesian Search for Gravitational Wave Memory in Binary Black Hole Mergers

東京大学
Wimmer　Leonardo

Bayesian Search for Gravitational Wave Memory in Binary Black Hole Mergers

Leonardo Wimmer (The University of Tokyo)

Abstract

Gravitational-wave nonlinear memory is a nonlinear effect predicted by general relativity, characterized by a slowly growing, non-oscillatory component of the gravitational-wave amplitude that persists after the wave has passed. This effect arises from gravitational waves sourced by other gravitational waves. Although nonlinear memory is generated by 2.5 post-Newtonian (PN) order multipole interactions, it contributes to the waveform at the same leading (0PN, quadrupole) order as the dominant oscillatory signal. We perform parameter estimation using the IMRPhenomD waveform model for aligned-spin binary black holes. The resulting posterior samples are then reweighted using NRHybSur3dq8, a surrogate model that includes higher-order modes, as well as NRHybSur3dq8 with memory effects added via the GWMemory package. By calculating the Bayes factor between the purely oscillatory case and the case including nonlinear memory, we compare the memory and no-memory hypotheses across all binary black hole mergers from GWTC-1. No evidence for or against nonlinear memory was found.

1 Introduction

In the linearized theory, gravitational waves (GWs) are solutions to the Einstein Field Equations (EFE)

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{1}$$

in the weak-field limit, where the metric is expressed as $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, with $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, and

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h. \tag{2}$$

In this regime, GWs correspond to the transverse-traceless components of the metric perturbation $h_{\mu\nu}$, which travel at the speed of light in vacuum (Maggiore 2008).

From the first detection of GWs on September 14, 2015, until March 19, 2025, 290 GW events have been detected by the LIGO–Virgo–KAGRA (LVK) network (LIGO Laboratory 2025).

2 Model selection with GW data

Most gravitational wave events detected by the LVK network are binary black hole (BBH) mergers. Theoretically, a BBH merger is described by exactly 15 parameters

$$\theta \equiv \{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{15}\}, \tag{3}$$

of which 7 are intrinsic parameters that characterize the source (masses and spins), and 8 are extrinsic parameters that describe its orientation and location relative to the detector.

Bayes' theorem is given by

$$p(\theta|d) = \frac{\mathcal{L}(d|\theta)\,\pi(\theta)}{\mathcal{Z}}, \tag{4}$$

where $p(\theta|d)$ is referred to as the posterior, $\mathcal{L}(d|\theta)$ as the likelihood, $\pi(\theta)$ as the prior and $\mathcal{Z}$ as the evidence. Intuitively, $p(\theta|d)\,d\theta$ represents the probability that the true value of the parameter θ is between $(\theta, \theta + d\theta)$. Note that the posterior is normalized

$$\int d\theta\, p(\theta|d) = 1. \tag{5}$$

The prior represents our belief about θ before we carry any measurements, the likelihood is chosen by us based on a noise model, and the evidence is a normalization factor

$$\mathcal{Z} \equiv \int d\theta\, \mathcal{L}(d|\theta)\,\pi(\theta). \tag{6}$$

Bayes' theorem is used to determine the 15 parameters of a BBH merger given the strain data $d(t)$, as explained below (Thrane & Talbot 2019).

We assume that the data can be separated into noise $n(t)$ and a GW signal $h(t)$

$$d(t) = h(t) + n(t). \tag{7}$$

If we further assume that the noise is Gaussian, then the likelihood function is given by

$$\ln \mathcal{L}(\mathrm{d}) = (d|h) - \frac{1}{2}(h|h), \tag{8}$$

where

$$(x|y) \equiv 4\,\mathrm{Re}\int_0^\infty \frac{\tilde{x}(f)\tilde{y}^*(f)}{S_n(f)}\,\mathrm{d}f. \tag{9}$$

Here, $S_n(f)$ is the power spectral density (PSD) of the detector noise, which describes how much noise is present at each frequency (Jaranowski & Królak 2023).

Assuming a theoretical waveform model $h(t)$ and using equations (7) and (8), both the likelihood and the prior are specified. The posterior distribution and the Bayesian evidence can then be computed using numerical inference techniques such as nested sampling (Skilling 2004). From the posterior, we can estimate the values of all 15 BBH parameters. From the evidence, we can perform model selection (Thrane & Talbot 2019).

Model selection answers the question: which model (each with its own parameters, waveform, likelihood function and prior) is statistically preferred by the data and by how much? For example, we can compare a model where the data is purely noise to one where the data is noise with a GW signal, or compare models with a and without precession.

To compare two models we calculate the Bayes factor

$$\mathrm{BF}^1_2 \equiv \frac{\mathcal{Z}_1}{\mathcal{Z}_2}. \tag{10}$$

The threshold $|\ln \mathrm{BF}^1_2| > 8$ is often used to say that there is strong evidence in favor of model 1. If $|\ln \mathrm{BF}^1_2| < 8$, then neither models are favored (Thrane & Talbot 2019).

3 What is GW memory?

Gravitational-wave memory refers to the permanent displacement of an ideal gravitational-wave detector, defined as one that is sensitive only to gravitational forces, after the GW has passed. After the passage of a GW without memory, the detector returns to its initial state of internal displacement (its state long before the passage of the wave). After the passage of a GW with memory, the initial and final displacement states differ (Favata 2010).

There are two types of GW memory: linear and nonlinear. The linear memory has been known since the 1970s (Zel'dovich & Polnarev 1974; Braginsky & Grishchuk 1985; Braginsky & Thorne 1987) and arises from gravitational sources that produce a net change in the time derivatives of one or more of their source-multipole moments (e.g., mass quadrupole, mass octupole, current quadrupole, etc.). The nonlinear memory was discovered independently by Payne (1983), Blanchet & Damour (1990), and Christodoulou (1991). The nonlinear memory arises from a change in the radiative-multipole moments that is sourced by the energy flux of the radiated gravitational waves (Favata 2009). Although nonlinear memory is generated by 2.5 post-Newtonian (PN) order multipole interactions, it contributes to the waveform at the same leading (0PN, quadrupole) order as the dominant oscillatory signal (Favata 2009).

4 Nonlinear memory

The following calculation illustrates the nature of the nonlinear memory effect (Favata 2010). We start with the EFE

$$R^{\mu\nu}[g_{\alpha\beta}] - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R[g_{\alpha\beta}] = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}. \tag{11}$$

If we define

$$\bar{h}^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\nu} - \sqrt{-g}\,g^{\mu\nu} \tag{12}$$

and assume the harmonic gauge

$$\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0, \tag{13}$$

then we obtain the relaxed EFE

$$\begin{aligned}\Box\bar{h}^{\mu\nu} = &-\frac{16\pi G}{c^4}(-g)\,(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}_{\mathrm{LL}}) \\ &- (\partial_\beta \bar{h}^{\mu\alpha})(\partial_\alpha \bar{h}^{\nu\beta}) + \bar{h}^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\bar{h}^{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{14}$$

Here, $t^{\mu\nu}_{\mathrm{LL}}$ is the Landau–Lifshitz pseudotensor and is given by (Thorne 1980)

$$\begin{aligned}\frac{16\pi G}{c^4}(-g)t^{\mu\nu}_{\mathrm{LL}} \equiv \Big\{ &g_{\lambda\alpha}g^{\beta\rho}(\partial_\beta\bar{h}^{\mu\lambda})(\partial_\rho\bar{h}^{\nu\alpha}) \\ &+ \frac{1}{2}g_{\lambda\alpha}g^{\mu\nu}(\partial_\rho\bar{h}^{\lambda\beta})(\partial_\beta\bar{h}^{\rho\alpha}) \\ &- 2g_{\alpha\beta}g^{\lambda(\mu}(\partial_\rho\bar{h}^{\nu)\beta})(\partial_\lambda\bar{h}^{\rho\alpha}) \\ &+ \frac{1}{8}\left(2g^{\mu\lambda}g^{\nu\alpha} - g^{\mu\nu}g^{\lambda\alpha}\right) \\ &\times (2g_{\beta\rho}g_{\sigma\tau} - g_{\rho\sigma}g_{\beta\tau}) \\ &\times (\partial_\lambda\bar{h}^{\beta\tau})(\partial_\alpha\bar{h}^{\rho\sigma})\Big\}.\end{aligned} \tag{15}$$

Far from the source where gravity is weak we can assume $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ with $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. In this

limit, by also assuming the plane-wave approximation, the last term of $t^{\mu\nu}_{\rm LL}$ turns out to be exactly the GW energy tensor (Maggiore 2008)

$$T^{\rm GW}_{ij} = \frac{c^4}{32\pi G}\langle \partial_i h^{\rm TT}_{ab} \partial_j h^{\rm TT}_{ab} \rangle. \tag{16}$$

The plane-wave approximation also gives

$$T^{\rm GW}_{ij} = T^{\rm GW}_{00} n_i n_j. \tag{17}$$

In this case the relaxed EFE becomes

$$\Box \bar{h}_{ij} = \cdots - \frac{16\pi G}{c^4} T^{\rm GW}_{00} n_i n_j. \tag{18}$$

If we define $T^{\rm GW}_{00}$ as

$$T^{\rm GW}_{00} = \frac{1}{cR^2}\frac{dE^{\rm GW}}{dtd\Omega} \tag{19}$$

and solve for $\bar{h}_{ij}$ in the TT gauge by using, then we obtain that the contribution to the GW field from the term in evidence on the RHS of equation (18) is

$$\delta h^{\rm TT}_{ij} = \frac{4}{R}\int_{-\infty}^{T_R} {\rm d}t' \left[\int \frac{{\rm d}E^{\rm GW}}{{\rm d}t'{\rm d}\Omega'} \frac{n'_i n'_j}{(1-\mathbf{n}'\cdot\mathbf{N})}\, {\rm d}\Omega' \right]^{\rm TT}, \tag{20}$$

where $T_R = T - R/c$ is the retarded time and $\mathbf{N}$ is the unit vector from the source to the observer (Wiseman & Will 1991).

In the equation above, the left-hand side represents a contribution to the GW field at large distances from the source, whereas the right-hand side corresponds to the total energy carried away by GWs up to the retarded time T_R. This structure suggests that some GWs are sourced by previously emitted GWs. Furthermore, the term "memory" arises from the time integral extending up to T_R, which depends on the entire past history of the source.

5 Bayesian search for memory

The methodology and results presented in this section are entirely based on the work of Hübner et al. (2020). The goal is to compare two models for all BBH merger events in GWTC-1. The first assumes that the data includes nonlinear memory, while the second assumes that it does not.

To perform this comparison, it is essential to use a waveform model that includes higher-order modes. When only the dominant $(l, m) = (2, \pm 2)$ modes are used, a degeneracy arises in the phase and polarization angle, since these modes remain invariant under a sign flip of the memory. This degeneracy causes incoherent stacking of the memory signal across events. Including higher-order modes breaks this degeneracy, enabling coherent stacking and thereby enhancing the detectability of the memory effect.

To incorporate higher-order modes, we use the likelihood reweighting technique developed by Payne et al. (2019). This approach begins with a computationally cheap waveform that includes only the dominant modes, which is used to perform the initial Bayesian parameter estimation. The resulting posterior samples are then reweighted using a waveform that includes higher-order modes—the model for which we wish to compute the Bayesian evidence.

Specifically, we use IMRPhenomD, a waveform model for aligned-spin BBH systems that includes only dominant modes, as the initial model (Khan et al. 2016). NRHybSur3dq8, a surrogate waveform that incorporates modes (l, m) up to $(5, 5)$, serves as the target (Varma et al. 2019). This procedure reduces the stochastic sampling error in $\ln {\rm BF}_{\rm mem}$ by a factor of $\mathcal{O}(10^2)$ compared to using IMRPhenomD alone, while being significantly more efficient than performing parameter estimation directly with NRHybSur3dq8 (Hübner et al. 2020).

For our data analysis, we first perform nested sampling using the IMRPhenomD waveform, with likelihood $\mathcal{L}_0(d|\theta)$, to obtain n posterior samples θ_k and the evidence $\mathcal{Z}_0$. The samples are then reweighted using NRHybSur3dq8, whose likelihood is $\mathcal{L}_{\rm hom}(d|\theta)$. The Bayes factor for higher-order modes is then computed as

$${\rm BF}_{\rm hom} \equiv \frac{\mathcal{Z}_{\rm hom}}{\mathcal{Z}_0} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathcal{L}_{\rm hom}(d|\theta_k)}{\mathcal{L}_0(d|\theta_k)}. \tag{21}$$

We similarly reweight the posterior using NRHybSur3dq8 with memory added via the GWMemory package (Talbot et al. 2018), with likelihood $\mathcal{L}_{\rm hom+mem}(d|\theta)$, and compute

$${\rm BF}_{\rm hom+mem} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathcal{L}_{\rm hom+mem}(d|\theta_k)}{\mathcal{L}_0(d|\theta_k)}. \tag{22}$$

The memory Bayes factor is then defined as

$${\rm BF}_{\rm mem} \equiv \frac{{\rm BF}_{\rm hom+mem}}{{\rm BF}_{\rm hom}}, \tag{23}$$

and the total memory Bayes factor accumulated over a series of N gravitational-wave observations is

$${\rm BF}^{\rm tot}_{\rm mem} = \prod_{i=1}^{N} {\rm BF}^{i}_{\rm mem}. \tag{24}$$

The computed values of the Bayes factor for each event are shown in the Figure 1. The total logarithmic Bayes factor accumulated over all events in GWTC-1 is $\ln \mathrm{BF}^{\mathrm{tot}}_{\mathrm{mem}} = 3 \times 10^{-3}$, indicating no significant support for or against the presence of nonlinear memory.

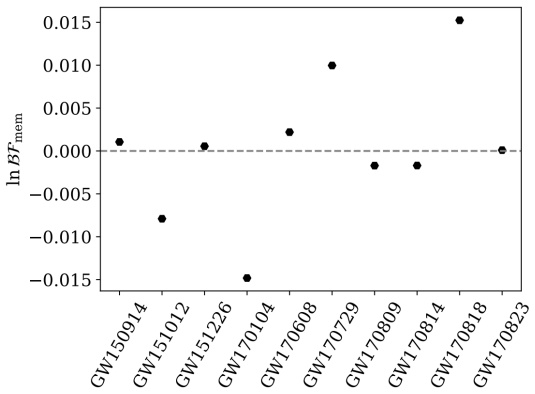


Figure 1: Memory Bayes factor for all BBH mergers in GWTC-1 (Hübner et al. (2020)).

6 Conclusion

In the previous section, we outlined how to compute the memory Bayes factor for a BBH event using Bayesian inference techniques, specifically nested sampling and likelihood reweighting. Applying this methodology, Hübner et al. (2020) analyzed the 10 BBH mergers in GWTC-1 and obtained a total memory Bayes factor of $\ln \mathrm{BF}^{\mathrm{tot}}_{\mathrm{mem}} = 3 \times 10^{-3}$, indicating no significant support for or against the presence of nonlinear memory.

This result is consistent with expectations from population studies, which suggest that at least 2000 events are required to reach a decisive threshold of $|\ln \mathrm{BF}^{\mathrm{tot}}_{\mathrm{mem}}| > 8$ (Hübner et al. 2020).

Reference

Blanchet L, & Damour T 1990, Luc Blanchet, Thèse d'Habilitation (Université Pierre et Marie Curie, Paris), pp. 195–227

Blanchet L, & Damour T 1992, Phys. Rev. D 46, 4304

Braginsky V B, & Grishchuk L P 1985, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 89, 744 [Sov. Phys. JETP 62, 427]

Braginsky V B, & Thorne K S 1987, Nature (London) 327, 123

Christodoulou D 1991, Phys. Rev. Lett. 67, 1486

Favata M 2009, Astrophys. J. Lett. 696, L159, arXiv:0902.3660

Favata M 2010, Class. Quantum Grav. 27, 084036, arXiv:1003.3486

Hübner M, Talbot C, Lasky P D, & Thrane E 2020, Phys. Rev. D 101, 023011, arXiv:1911.12496

Jaranowski P, & Królak A 2023, arXiv:0711.1115v2 [gr-qc]

Khan S, Husa S, Hannam M, Ohme F, Pürrer M, Forteza X J, & Bohé A 2016, Phys. Rev. D 93, 044007

Burtnyk K., LIGO Laboratory, with contributions from the LVK Communications Team (2025), *LIGO Caltech News Release*, March 20, 2025. https://www.ligo.caltech.edu/news/ligo20250320

Maggiore M 2008, *Gravitational Waves Vol. 1*, Oxford University Press

Payne P N 1983, Phys. Rev. D 28, 1894

Payne E, Talbot C, Thrane E, et al. 2019, Phys. Rev. D 100, 123017, arXiv:1905.05477

Skilling J 2004, in American Institute of Physics Conference Series, Vol. 735, ed. R. Fischer, R. Preuss, & U. V. Toussaint, pp. 395–405

Talbot C, Thrane E, Lasky P D, & Lin H 2018, arXiv:1807.00990

Thorne K S 1980, Rev. Mod. Phys. 52, 299–339, doi:10.1103/RevModPhys.52.299

Thorne K S 1992, Phys. Rev. D 45, 520–524, doi:10.1103/PhysRevD.45.520

Thrane E, & Talbot C 2019, Publ. Astron. Soc. Aust. 36, e010, arXiv:1809.02293

Varma V, Field S E, Scheel M A, Blackman J, Kidder L E, & Pfeiffer H P 2019, Phys. Rev. D 99, 064045

Wiseman A G, & Will C M 1991, Phys. Rev. D 44, R2945(R), doi:10.1103/PhysRevD.44.R2945

Zel'dovich Y B, & Polnarev A G 1974, Astron. Zh. 51, 30 [Sov. Astron. 18, 17]

——index へ戻る

SK-29

電磁波と重力波における放射特性の比較解析

大阪公立大学
松原　大空

電磁波と重力波における放射特性の比較解析

松原 大空 (大阪公立大学大学院 物理学研究科)

Abstract

加速度運動する荷電粒子は電磁波を放射することが知られているが、複数の粒子系や対称的な構成を考慮すると、その放射特性は大きく変化する。本発表では、まず 1 つの荷電粒子が円運動する場合に電磁波が放射されることを確認し、次に、対称的に配置した 2 粒子系と 3 粒子系に拡張する。そこで、Lienard-Wiechert ポテンシャルを用いて電磁場を導出し、Poynting ベクトルの時間平均より、2 粒子系からは電磁波パートのみを考慮すると、電磁波が放射されないことを理論的に導出する。ここでは近似的に回転速度が光速に比べて非常に遅く、観測点が無限遠方にあるという条件を考える。さらに、電磁波と重力波の類似性に着目し、重力波放射に関する同様の解析を試みる。具体的には、2 個、3 個、4 個の等質量粒子が等間隔に配置され、円軌道で回転するモデルを考え、重力波放射の有無を解析し、電磁放射との比較を行う。最後に [1] に書いていた放射の特性を評価する。

1 Introduction

加速度運動する荷電粒子は、古典電磁気学において電磁波を放射することが知られている。その典型例として、円運動する単一の荷電粒子は、周期的な加速度運動によって周囲に電磁波を放射する。このような放射現象を記述するためには、時空的に遅延した電磁場を正確に取り扱う必要があり、そのための理論的枠組みとして、Lienard-Wiechert ポテンシャル

$$\phi(\boldsymbol{x},t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}(t_0')|-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{r}}(t_0')\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}(t_0'))} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t_0')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}(t_0')|-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{r}}(t_0')\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}(t_0'))} \tag{2}$$

が用いられる。[2] このポテンシャルは、運動する点電荷が生成する電場・磁場を、粒子の運動情報（位置・速度・加速度）とともに正確に記述するものであり、特に放射場の解析において不可欠である。

本研究では、まず 1 個の荷電粒子が円軌道上を運動する際に Lienard-Wiechert ポテンシャルを用いて放射場を導出し、その性質を定量的に評価する。次に、対称的に配置された 2 個および 3 個の荷電粒子系に拡張し、各粒子が円運動する際に系全体として電磁波が放射されるかどうかを解析する。特に、各粒子の放射場が空間的・時間的に干渉し合うことにより、phase cancellation effect が生じる場合があることに注目する。

さらに、電磁波放射の構造と一般相対論における重力波放射の構造が数学的に類似している点に着目し、重力波放射についても同様の粒子系モデルを用いて比較解析を行う。本研究は、対称性が放射現象に及ぼす影響を、電磁波・重力波の両面から明らかにすることを目的とする。

2 Poyntingベクトル

電磁場が持つエネルギーの流れを定量的に記述するためには、Poynting ベクトルを用いる。電場と磁場の外積によって定義される Poynting ベクトルは、単位面積あたり、単位時間に伝達されるエネルギー量、すなわちエネルギー束密度を表す。

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} \tag{3}$$

ここで μ_0 は真空の透磁率である。Poynting ベクトルの向きは、電磁エネルギーが空間を伝播する方向を示し、その大きさがエネルギーの流れの強さに対応する。

実際の電磁波では電場・磁場は時間的に振動するため、観測される Poynting ベクトルも時間とともに変動する。特に電磁波の遠方場においては、以下の式がよく用いられる。

$$\langle\boldsymbol{S}\rangle=\frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{Re}\left[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}^*\right] \tag{4}$$

ここで $\langle \boldsymbol{S} \rangle$ は時間平均 Poynting ベクトルである。

複数の荷電粒子から構成される系においては、それぞれの粒子から放射される電磁場が互いに干渉する。特に、空間的に対称に配置された粒子系では、Poynting ベクトルの時間平均が空間的にキャンセルされる場合があり、結果として系全体として放射が観測されないという現象が生じる。このような効果は、双極子放射や四重極放射のキャンセル条件と密接に関係しており、系の対称性が放射特性を大きく左右することを示している。

3 線形化されたアインシュタイン方程式

時空の計量テンソル $g_{\mu\nu}$ をミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ に対する摂動として次のように展開する。[2]

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon\, h_{\mu\nu}, \quad |\epsilon\, h_{\mu\nu}| \ll 1 \tag{5}$$

ここで $\epsilon\, h_{\mu\nu}$ は小さな摂動項であり、1 次の項までを保持してアインシュタイン方程式を展開する。計量の逆数も同様に展開される。

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \epsilon\, h^{\mu\nu} \tag{6}$$

ただし上付き・下付きの添字の上げ下げにはミンコフスキー計量を用いる。リッチテンソル $R_{\mu\nu}$ の 1 次の摂動成分を計算すると、次のような形に帰着する。

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial^\lambda \partial_\mu h_{\nu\lambda} + \partial^\lambda \partial_\nu h_{\mu\lambda} - \Box h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h\right) \tag{7}$$

ここで、$h = h^\lambda{}_\lambda$ はトレース、$\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ はダランベール演算子である。さらに、摂動テンソルをゲージ変換してローレンツゲージ

$$\partial^\nu \psi_{\mu\nu} = 0 \qquad \psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h \tag{8}$$

この条件の下では、アインシュタイン方程式は次のように単純化される。

$$\Box \psi_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T\mu\nu \tag{9}$$

重力波放射の特性についてはこの式から出発する。

4 TT ゲージ

線形化されたアインシュタイン方程式において、重力波は摂動計量 $\psi_{\mu\nu}$ の波動として記述される。しかしながら、摂動計量には座標変換（ゲージ変換）の自由度が残されているため、物理的な自由度を抽出するためには適切なゲージ条件を課す必要がある。トランスバース・トレースレス（Transverse-Traceless, TT）ゲージは、重力波の本質的な偏光自由度を最も簡潔に記述できるゲージとして広く用いられている。

ローレンツゲージ条件（$\partial^\nu \psi_{\mu\nu} = 0$）を課した後、さらに次の 2 つの条件を加えることで TT ゲージが定まる。

1. トランスバース条件（横波）：

$$\partial^i \psi^{TT}_{ij} = 0 \tag{10}$$

これは重力波が伝播方向に対して直交する成分のみを持つことを意味する。

2. トレースレス条件：

$$\psi^{TT} = \delta^{ij}\psi^{TT}_{ij} = 0 \tag{11}$$

これは摂動計量のトレース（縮約成分）がゼロであることを表す。

5 重力波の放射特性

線形化されたアインシュタイン方程式 (9) に戻って重力波の放射特性を考える。この式を遅延グリーン関数を使って積分すると

$$\psi^{\mu\nu}(t, \boldsymbol{r}) = 4G \int \frac{T^{\mu\nu}(t - |\boldsymbol{r} - \bar{\boldsymbol{r}}|, \bar{\boldsymbol{r}})}{|\boldsymbol{r} - \bar{\boldsymbol{r}}|}\, d^3\bar{\boldsymbol{r}} \tag{12}$$

となる。ここで、$c = 1$ としている。

次に積分を計算して、放射の特性を評価する。ここで、エネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}(t - |\boldsymbol{r} - \bar{\boldsymbol{r}}|)$ は以下のようになる。

$$T^{00}_{(1)}(\bar{\boldsymbol{r}}, t) \approx m\gamma\, \delta(\bar{x} - x_1(t))\, \delta(\bar{y} - y_1(t))\, \delta(\bar{z}) \tag{13}$$

$$T^{0i}_{(1)}(\bar{\boldsymbol{r}}, t) \approx m\gamma\, \beta^i\, \delta(\bar{x} - x_1(t))\, \delta(\bar{y} - y_1(t))\, \delta(\bar{z}) \tag{14}$$

$$T^{ij}_{(1)}(\bar{\boldsymbol{r}}, t) \approx m\gamma\, \beta^i \beta^j\, \delta(\bar{x} - x_1(t))\, \delta(\bar{y} - y_1(t))\, \delta(\bar{z}) \tag{15}$$

ここで下つき (1) は粒子 1 つ目を意味している。また、β^i は $c = 1$ の時の速度であり、$i, j = 1, 2, 3$ であ

る。

この $T^{\mu\nu}(t-|\boldsymbol{r}-\bar{\boldsymbol{r}}|)$ を粒子２個、３個、４個ある場合で考えて、(12) に代入し、x 軸上で観測した場合と z 軸上で観測した場合の重力波の放射を考える。

２粒子系であり、粒子を対称的に配置し、z 軸上で観測した場合

$$\psi^{\mu\nu}_{(z)}(t,\boldsymbol{r}) = \frac{4Gm\omega^2R^2}{z}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&-A&-B&0\\0&-B&A&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \quad (16)$$

となり、TT ゲージ条件を満たす。

次に、同じ条件で x 軸上で観測した場合 TT ゲージ条件を満たさない。よって、これを TT ゲージ条件を満たすようにゲージ変換を行う。ゲージ変換を行った結果

$$\psi^{(\mathrm{TT})}_{\mu\nu}(t,\boldsymbol{r}) = \frac{4Gm\omega^2R^2}{x}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&\frac{1}{2}A&0\\0&0&0&-\frac{1}{2}A\end{pmatrix} \quad (17)$$

となる。ここで、

$$A = \cos\left(2\omega(t-z)\right)$$

$$B = \sin\left(2\omega(t-z)\right)$$

である。

よって、２粒子系で z 軸上で観測した場合は電磁波の時と同様に円偏光しているようになり、x 軸上で観測した場合は、直線偏光しているようになる。同様の計算を３個、４個粒子が存在する系 (同質量、等間隔に配置) で行うと、３つ以上では重力波の放射が確認されなくなる。

6 Conclusion

本研究では、電磁波および重力波の放射特性に対する粒子系の対称性の影響について考えた。電磁波の場合、2 個以上の等間隔に配置された荷電粒子が円運動する系では、観測者が十分遠方かつ回転速度が光速に比べて十分遅い場合、結果として電磁波の放射が消失することを確認した。これは、主たる放射成分である双極子放射が対称性によって打ち消されるためである。

一方、重力波の放射は、3 個以上の粒子が等間隔に円運動する場合に、同様の放射キャンセル効果が現れる。特に重力波放射においては、粒子の個数 N を増加させると、各粒子の位相が等間隔にずれるために全体の四重極モードが干渉し合い、放射が急激に減衰する。これは文献 [1] でも指摘されている通り、いわゆる phase cancellation effect として知られる現象である。

これらの結果は、放射現象において対称性が本質的な役割を果たすこと、また多体系における波の干渉が放射の有無や強度に大きく影響することを明確に示している。

Reference

[1] T. Nakamura, K. Oohara, Phys. Lett. 98A (1983), 403

[2] 砂川重信,『理論電磁気学 (第４版)』(1982), 紀伊国屋書店

[3] 佐々木節,『一般相対論 (初版)』(1996), 産業図書株式会社

——index へ戻る

SK-30

パルサータイミングアレイを用いた連星ブラックホールの背景重力波研究の展望

京都大学
菅原　玲央

パルサータイミングアレイを用いた 連星ブラックホールの背景重力波研究の展望

菅原 玲央 (京都大学大学院 理学研究科)

Abstract

本講演では Ellis, J., Fairbairn, M., Hütsi, G., et al. 2023 をレビューする．銀河の中心には 10^6–$10^{10} M_\odot$ の超巨大ブラックホールが存在し，銀河合体の際にこれらの超大質量ブラックホールも合体すると考えられている．合体の際に放出される重力波は背景重力波として観測が期待されてきた．近年，NANOGrav がパルサータイミングアレイ (Pulsar Timing Array; PTA) という手法により，連星超大質量ブラックホールのインスパイラル由来の背景重力波の証拠が得られたと報告した．NANOGrav によって検出が報告された背景重力波は連星超大質量ブラックホール起源と考えられているが，どのような質量，質量比，赤方偏移の源が寄与しているかはわかっていなかった．本研究では，宇宙論を用いて超大質量ブラックホールの数の分布と合体率を計算し，各合体によって放出される重力波の振幅を計算することで，背景重力波のエネルギースペクトルを計算した．また，超大質量ブラックホールの合体率を宇宙論的手法のみで決定するには不確定性が伴うが，PTA で測定したスペクトルの振幅を用いると，合体効率として $p_{BH} \approx 0.17$ が得られ，この仮定の下で連星は赤方偏移 $z \approx 1$ 程度であることがわかった．さらに，$10^3 - 10^6 M_\odot$ の中間質量ブラックホールでも $p_{BH} \approx 0.17$ が成り立つと仮定すると，LISA などの将来の重力波検出器でより軽い連星 BH の背景重力波が観測可能であることがわかった．LISA などにより IMBH とそれらの合体を観測できれば，SMBH の形成史や成長過程のメカニズムを解明する手掛かりを得られると期待される．

1 Introduction

LIGO や Virgo の観測によって，$\mathcal{O}(10-100) M_\odot$ のブラックホールの合体によって生じる $\mathcal{O}(100)$Hz の周波数領域の重力波が検出された．しかし，LIGO や Virgo が検出できる $\mathcal{O}(10-100) M_\odot$ の連星ブラックホールよりも大きな中間質量ブラックホールや超大質量ブラックホールの連星の観測はまだ発展途上にある．さらに，ブラックホールの形成過程については質量帯によらずよくわかっていない．中間質量ブラックホールおよびそれらの合体の観測は，超大質量ブラックホールが形成されるために必要な未知のメカニズムへの手がかりとなるであろう．

本講演では，拡張 Press-Schechter 理論を用いてブラックホール合体率を求め，さらにそれを用いて重力波のエネルギースペクトルを求める．また，連星ブラックホールの分布をモンテカルロ法を用いて導出する．

2 重力波観測

図 1 は，LIGO，Virgo，LISA，IPTA の感度とソースの寄与を表している．この図から，質量が大きい

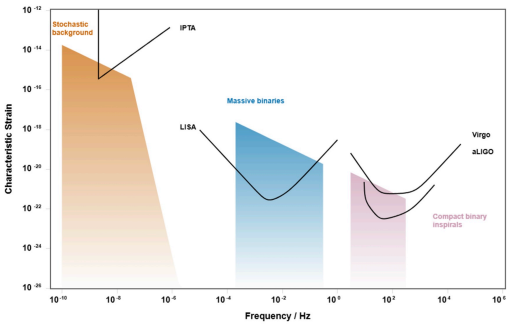


図 1：重力波検出器の感度
(Gravitational Wave Sensitivity Plotter)

連星ほど周波数は小さいことがわかる．特に，超大質量ブラックホールの連星は，LISA の感度よりも小さい nHz 帯の周波数の重力波を出している．もし超大質量ブラックホールが近傍銀河内にあれば，単独

の連星超大質量ブラックホールからの重力波が可能になるが，遠方に存在する場合は，個々の振幅が小さいため，単独の連星超大質量ブラックホールからの重力波を検出することは難しい．しかし，連星が多数存在するなら，それらからの重力波は位相や振幅がランダムな背景重力波として観測をすることができる．

3　パルサータイミングアレイ

背景重力波は，銀河内のパルサーのパルス到着時刻が重力波によってズレることを利用して，間接的に検出することができる．この方法は，パルサータイミングアレイと呼ばれる．

パルサータイミングアレイでは，数十個のミリ秒パルサーを数十年観測する．多数のパルサーを観測することで，それぞれのパルサーの組の相関が得られ，この相関は Hellings-Downs 曲線 (図 2) に従うと理論的に予想されていた．また，数十年観測することから，例えば 30 年観測するとして，1/30 年 ∼ 1nHz がパルサータイミングアレイの感度領域であることがわかる．

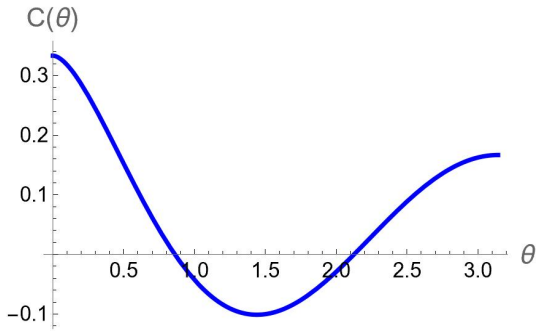


図 2 Hellings-Downs 曲線

パルサータイミングアレイの観測対象のうち有望なのは，背景重力波である．

2023 年に NANOGrav や他のパルサータイミングアレイが，Hellings-Downs 曲線及び nHz 帯における共通スペクトルの証拠を得たと発表した．これらは背景重力波の証拠となる．

4　エネルギー密度スペクトル

ここでは，背景重力波のエネルギースペクトルを求めたい．後に示すが，エネルギースペクトルの表式には重力波の振幅が現れるので，エネルギースペクトルを求めることは，振幅を求めることと等価である．

この振幅を求めるためには，ブラックホールの合体率と，ここの連星の振幅を求める必要がある．

さらに，ブラックホールの合体を求めるためには，ハローの合体が必要である．このハロー合体率は宇宙論を用いて求めることができる．

ブラックホール合体率を求めるために，拡張 Press-Schechter 理論 (Press,Schechter 1974) を用いる．これによると，ハローの質量関数は，

$$\frac{dn(M,t)}{d\log M} = \frac{\rho_0}{M}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{d\log\sigma}{d\log M}\frac{\delta_c(z)}{\sigma(M)}\exp\left(-\frac{\delta_c(z)^2}{2\sigma(M)^2}\right)$$

である．ここで，M はハローの質量，ρ_0 は現在の背景物質密度，$\sigma(z)^2$ は質量ゆらぎの分散，$\delta_c(z)$ は重力崩壊に必要な臨界過密度である．$\delta_c(z) \approx 1.686/D(z)$ で与えられ，$D(z)$ は線形成長因子である (Dodelson2003)．$\sigma^2(M)$ は Planck 2018 の宇宙論パラメータに基づくダークマターパワースペクトルと (Eisenstein,Hu 1998) の遷移関数を用いて計算される．

拡張 Press-Schechter 理論からは，ある質量 M_1 のハローが，質量 M_2 の別のハローと合体し，$M_f = M_1 + M_2$ のハローになる確率も得られる (Lacey1993)：

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dtdM_2} &= \frac{1}{M_f}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left|\frac{\dot{\delta}_c}{\delta_c}\right|\left|\frac{d\ln\sigma}{d\ln M_f}\right| \\ &\quad\times\left[1-\frac{\sigma^2(M_f)}{\sigma^2(M_1)}\right]^{-3/2}\frac{\delta_c}{\sigma(M_f)} \\ &\quad\times\exp\left[-\frac{\delta_c^2}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2(M_f)}-\frac{1}{\sigma^2(M_1)}\right)\right]\end{aligned}$$

これにより数密度込みのハロー合体率は次のように与えられる：

$$\frac{dR_h}{dM_1dM_2} = \frac{dn(M_1,t)}{dM_1}\frac{dp(M_1,M_2,t)}{dtdM_2}$$

次に，中心ブラックホールの合体率を求める．実際はもっと複雑であるが，ここでは近似的にブラックホール合体率を，

$$\frac{dR_{\rm BH}}{dm_1dm_2} \approx p_{\rm BH}\frac{dM_1}{dm_1}\frac{dM_2}{dm_2}\frac{dR_h}{dM_1dM_2}$$

と表す．ここで，$p_{\rm BH}$ はブラックホール合体効率である．ハロー質量とブラックホール質量の間の関係としては，(Wyithe,Loeb 2003) に基づく次の赤方偏移依存スケーリングを採用する：

$$\frac{M}{10^{12}M_\odot} = 10.5\left[\frac{\Omega_M(0)\Delta_c(z)}{\Omega_M(z)18\pi^2}\right]^{-1/2} \times(1+z)^{-3/2}\left(\frac{m_{\rm BH}}{10^8 M_\odot}\right)^{3/5}$$

ここで，$\Omega_M(z)$ は物質の密度パラメータ，$\Delta_c(z) = 18\pi^2 + 82[\Omega_M(z)-1] - 39[\Omega_M(z)-1]^2$ は，ビリアル化時の臨界過密度である．

この $p_{\rm BH}$ の規格化には，IPTA による観測（Antoniadis et al. 2022）を用い，さらに一定であると仮定する．つまり，ブラックホールの質量に依らず合体効率は同じであるとする．

連星超大質量ブラックホールからの平均的なエネルギー密度スペクトルは，次のように書ける (Phinney 2001):

$$\Omega_{\rm GW}(f) \equiv \frac{1}{\rho_c}\frac{d\rho_{\rm GW}}{d\log f} = \int d\lambda \frac{2\pi}{5}\frac{f^3|\tilde{h}(f)|^2}{\rho_c}$$

ここで，$|\tilde{h}(f)|$ は重力波の optimal amplitude，ρ_c は臨界密度，積分測度は，

$$d\lambda = dm_1 dm_2 \frac{dz}{1+z}\frac{dV_c}{dz}\frac{dR_{\rm BH}}{dm_1 dm_2}$$

である．V_c は共動体積である．optimal amplitude は inspiral-merger-ringdown 段階に分けることができ，次のように与えられる (Ajith et al. 2008):

$$\left|\tilde{h}(f)\right| = \sqrt{\frac{5}{24}}\frac{\mathcal{M}_z^{5/6}}{\pi^{2/3}D_L}\times\begin{cases} f^{-7/6} \\ f_{\rm merg}^{-1/2} f^{-2/3} \\ f_{\rm merg}^{-1/2} f_{\rm ring}^{-2/3}\dfrac{\sigma^2}{4(f-f_{\rm ring})^2+\sigma^2}\end{cases}$$

上から順に，inspiral-merger-ringdown を表している．ここで，$\mathcal{M}_z$ は赤方偏移に依存するするチャープ質量，D_L は連星までの光度距離である．また，パラメータ $f_{\rm merg}$，$f_{\rm ring}$，σ は Ajith et al. 2008 にフィッティングされた値が記載されている．

5 ソースの分布

赤方偏移 z にある連星ブラックホールが，ある周波数帯で重力波を放射している数は，その連星がその周波数帯に滞在する時間から見積もることができる（Sesana et al. 2008）．その式は以下のように与えられる：

$$\frac{dN}{d\mathcal{M}_z d\eta dz d\ln f} = \frac{d\lambda}{d\mathcal{M}_z d\eta dz}\left|\frac{d\tau}{d\ln f}\right|$$

ここで，N は連星の数，$\eta = m_1 m_2/(m_1+m_2)$ は対称質量比である．τ は合体時間で，円軌道と重力波放出による軌道崩壊を仮定すると（Peters 1964），$(1+z)f$ の重力波を放射する連星の合体時間は次式で与えられる：

$$\tau(f) = \frac{5}{256\pi^{8/3}}\mathcal{M}_z^{-5/3} f^{-8/3}$$

PTA 帯域での連星超大質量ブラックホール分布をモンテカルロ法で研究するため，確率密度関数から周波数ごとに連星を生成し，周波数範囲をビン (f_j, f_{j+1}) に分割し，それぞれに $N(f_j)$ 個の連星を配置する．

各ビンにおける連星数 $N(f_j)$ は期待値 $\bar{N}(f_j) = \int_{f_j}^{f_{j+1}} dN$ のポアソン分布からサンプルされ，各バイナリのパラメータは以下の分布に従ってランダムに生成される：

$$p(\mathcal{M}_z, \eta, z, f) \propto \frac{dN}{d\mathcal{M}_z d\eta dz d\ln f}$$

この式を用いて連星のパラメータ分布を得られる．

6 結果

図 3 は，エネルギー密度スペクトルを示す．

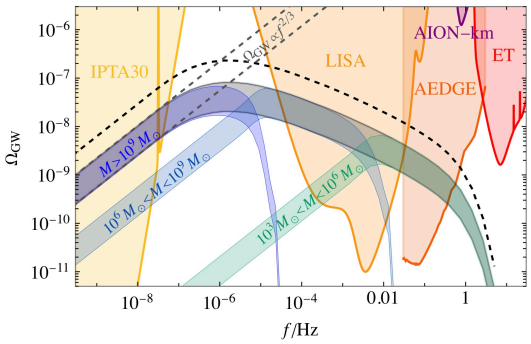


図 3 エネルギー密度スペクトル

点線は，$p_{\rm BH} = 1$ としたときのものである．濃い青，薄い青，緑の帯は，IPTA の観測結果と整合するよ

うに $p_{\rm BH} \approx 0.17$ として求めたものである．それぞれ，$10^9 M_\odot$ 以上，$10^6 \sim 10^9 M_\odot$，$10^3 \sim 10^6 M_\odot$ のブラックホールのエネルギー密度スペクトルを表している．

図 3 から，NANOGrav および他の PTA が発見した nHz 帯の共通スペクトルは，$10^9 M_\odot$ より大きい連星ブラックホールによって生成された可能性が高いことがわかる．さらに，ここではブラックホール合体効率 $p_{\rm BH}$ を一定，つまりすべての質量で合体効率が同じであると仮定したが，この仮定のもとでは，LISA では $10^3 \sim 10^6 M_\odot$ のブラックホールの合体からの信号が得られることがわかる．よって，逆に LISA で観測することで合体効率を一定とする仮定が正しいかどうかを検証することができる．

図 4 は，連星の分布を示す．

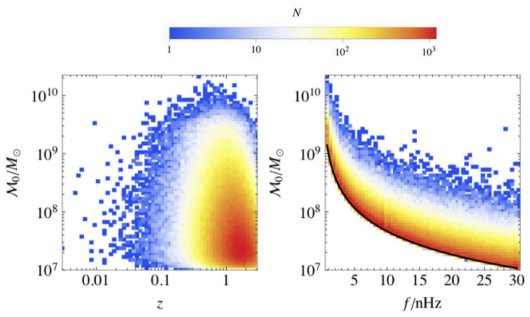


図 4 連星ブラックホールの分布

左の図は，質量-赤方偏移関係を，右の図は質量-周波数関係を表している．

図 4 の左の図から，連星の質量は $10^{10} M_\odot$ よりも小さく，赤方偏移は 1 程度であることがわかる．

図 4 の右の図から，周波数が下がると，連星の質量は増加することがわかる．

7 Conclusion

拡張 Press-Schechter 理論を用いて重力波のエネルギースペクトルを求めた．その際に，合体効率を求める必要があるが，IPTA の観測結果を用いると $p_{\rm BH} \approx 0.17$ であることがわかった．この結果は，将来 LISA で観測を行うことで正確性を検証できると期待される．

また，連星は質量が $10^{10} M_\odot$ よりも小さく，赤方偏移は 1 程度であること，および周波数が下がると，連星の質量は増加することがわかった．

8 Acknowledgement

本発表にあたり，ご助言と温かいご指導を賜りました京都大学天体核研究室の先輩方に心より感謝申し上げます．また，発表を聞いてくださった皆様に感謝申し上げます．

9 Reference

1. Ellis, J., Fairbairn, M., Hütsi, G., et al. 2023, A&A, 676, A38
2. Press, W. H., & Schechter, P. 1974, ApJ, 187, 425
3. Dodelson, S. 2003, Modern Cosmology (Amsterdam: Academic Press)
4. Eisenstein, D. J., & Hu, W. 1998, ApJ, 496, 605
5. Lacey, C. G., & Cole, S. 1993, MNRAS, 262, 627
6. Antoniadis, J., Arzoumanian, Z., Babak, S., et al. 2022, MNRAS, 510, 4873
7. Phinney, E. S. 2001, ArXiv e-prints [arXiv:astro-ph/0108028]
8. Ajith, P., Babak, S., Chen, Y., et al. 2008, Phys. Rev. D, 77, 104017
9. Sesana, A., Vecchio, A., & Colacino, C. N. 2008, MNRAS, 390, 192
10. Peters, P. C. 1964, Phys. Rev., 136, B1224

——index へ戻る

SK-31

時間変動するダークエネルギーの理論モデルについて

総合研究大学院大学
槇木　直人

時間変動するダークエネルギーの理論モデルについて

槇木 直人 (総合研究大学院大学 天文科学コース)

Abstract

宇宙の加速膨張を説明するにはダークエネルギーと呼ばれる未知のエネルギー成分が必要である。DESI（Dark Energy Spectroscopic Instrument）によるバリオン音響振動の観測の最新の結果 DESI Collaboration (2025) によれば、ダークエネルギーの状態方程式 $p = w\rho$ における w の値が標準的な ΛCDM モデルの値 ($w = -1$) よりも大きいことと、w の値が時間変化している兆候が 2σ 以上で報告された。このような w の値の時間変化を説明できるモデルとしてクインテッセンスとよばれるスカラー場のモデルがある。本発表では DESI の最新の結果 [DESI Collaboration (2025)] と指数関数型のポテンシャルをもつクインテッセンスについてレビューを行う。

1 Introduction

DESI(DR2) の BAO 観測と CMB、超新星のデータ DESY5 を用いた解析によれば、図 1 のように w の値が宇宙項の場合 ($w = -1$) からずれている兆候が見られている。

図 1 におけるフィッテイングには Chevallier-Polarski-Linder(CPL) パラメータ化

$$w(a) = w_0 + w_a(1 - a)$$

が用いられている。ここで w_0 と w_a は定数である。このパラメータ化は物理的なモデルに基づいたものではなく、現象論的なものである。またこのパラメータ化では $w < -1$ の領域 (ファントム領域) を通過してしまう。$w < -1$ となるダークエネルギーはファントムエネルギーと呼ばれ、運動項が負のスカラー場によって実現されるが、エネルギーに下限がなく、このようなスカラー場を作ることは理論的に難しい。そのため現象論的な CPL パラメータ化によるフィッティングではなく、物理的な理論モデルに基づいたフィッテイングを行うことが必要である。本稿では超弦理論において普遍的に現れる $V = V_0 e^{-\lambda\phi/M_{\rm pl}}$ という形のポテンシャルをもつスカラー場について解析的な分析と DESI(DR1) のデータとのフィッティングを行った Bhattacharya et al. (2024) をレビューする。

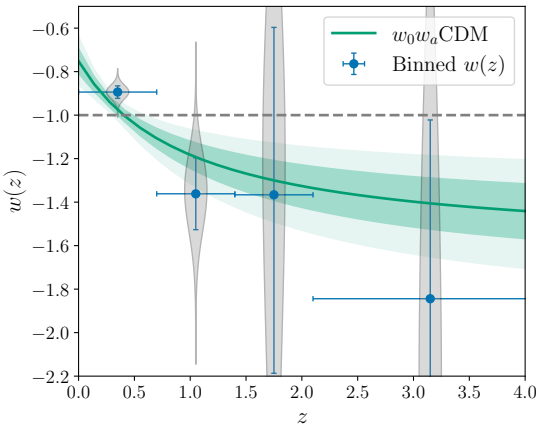


図 1: CPL パラメータ化によるフィッティング (濃い緑、薄い緑がそれぞれ 68%,98% 信頼区間) と DESI(DR2) の BAO 観測と CMB、超新星のデータ DESY5 を用いて決められた w の値 (青い点)。縦のバーが 1σ のエラーバー、横のバーがビンの大きさを表す。[DESI Collaboration (2025)]

2 Model and Methods

2.1 Theoretical model

スカラー場、非相対論的物質、輻射で構成される曲率をもった宇宙のフリードマン方程式は

$$1 - \Omega_k = \frac{1}{3M_{\rm pl}^2 H^2}(\rho_\phi + \rho_m + \rho_r)$$

で与えられる。ここで、ρ_m は非相対論的物質のエネルギー密度、ρ_r は輻射のエネルギー密度、$M_{\rm pl} \equiv$

$1/\sqrt{8\pi G}$ は換算プランク質量、ρ_ϕ はスカラー場のエネルギー密度

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)$$

である。また、

$$\Omega_k = -\frac{k}{a^2H^2}$$

である。ここで、

$$\bar{H} = H\sqrt{1-\Omega_k}$$

を定義し、無次元変数

$$\bar{x} \equiv \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{6}M_{\rm pl}\bar{H}}, \quad \bar{y} \equiv \frac{\sqrt{V}}{\sqrt{3}M_{\rm pl}\bar{H}}, \quad \bar{u} \equiv \frac{\sqrt{\rho}_r}{\sqrt{3}M_{\rm pl}\bar{H}},$$
$$\bar{z} \equiv \frac{H}{\bar{H}}, \quad \lambda = -M_{\rm pl}\frac{V_{,\phi}}{V}$$

を導入する。さらに $\bar{N}$ を

$$d\bar{N} \equiv \bar{H}dt$$

で定義し、$\bar{N}$ に関する微分をプライム $'$ で表すと、$\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{z}, \lambda$ が満たす微分方程式は

$$\boxed{\begin{aligned}
\bar{x}' &= \frac{1}{2}\bar{x}\bar{z}(-3+\bar{u}^2+3\bar{x}^2-3\bar{y}^2) + \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda\bar{y}^2 \\
\bar{y}' &= \frac{1}{2}\bar{y}\bar{z}(3+\bar{u}^2+3\bar{x}^2-3\bar{y}^2) - \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda\bar{x}\bar{y} \\
\bar{u}' &= \frac{1}{2}\bar{u}\bar{z}(-1+\bar{u}^2+3\bar{x}^2-3\bar{y}^2) \\
\bar{z}' &= \frac{1}{2}(\bar{z}^2-1)(1+\bar{u}^2+3\bar{x}^2-3\bar{y}^2) \\
\lambda' &= -\sqrt{6}M_{\rm pl}^2\bar{x}\left(\frac{V_{,\phi\phi}}{V} - \frac{V_{,\phi}^2}{V^2}\right)
\end{aligned}}$$

となる。ここで、λ が一定のとき、λ の定義からポテンシャルは次のような形になる。

$$V = V_0 e^{-\lambda\phi/M_{\rm pl}}$$

このとき、上の微分方程式は閉じている。次に $\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{z}$ が一定となる方程式の固定点を探し、各固定点の安定性を調べる。

表 1(最後のページ) の $\overline{Q}^{\pm}_{kin}$,$\overline{Q}_\phi$,$\overline{Q}_m$,$\overline{Q}_r$ はそれぞれスカラー場の運動エネルギー、スカラー場、物質、輻射が宇宙のエネルギー密度を支配している状態である。次に $\overline{Q}_{m\phi}$ はスカラー場と物質の密度パラメータが一定の比を保ちつつ時間発展する固定点であり、$\overline{Q}_{r\phi}$、$\overline{Q}_{k\phi}$ も同様である。$\lambda < \sqrt{2}$ のとき、$\overline{Q}_\phi$ は安定であり

$$w_{DE} = w_{\rm eff} = -1 + \frac{\lambda^2}{3}$$

をもつ最終状態に近づいていく。

2.2 Method

使用されたデータセットは以下の通りである

1. CMB(Plank)
2. BAO(DESI DR1)
3. Ia 型超新星 (Pantheon+,Union3,DESY5)

マルコフ連鎖モンテカルロ（MCMC）法を用いて、パラメータ空間を探索する。

3 Results

宇宙論的パラメータの制限は表 2 にまとめた。得られた λ の値は宇宙定数に対応する $\lambda = 0$ から一貫して離れた値を示しており、これはデータが指数関数型のポテンシャルをもつスカラー場を宇宙定数の場合よりも支持することを意味する。その統計的有意性は超新星のデータセットによって異なるが、約 $2 \sim 4\sigma$ 離れている。曲率についてはどのデータセットでもわずかに $\Omega_k > 0$(開いた宇宙) を示したが、平坦な宇宙と無矛盾なほどの大きさであった。図 2 は今回のクインテッセンスモデルでのフィッテイングを示している。$w < -1$ のファントム領域を通ることなく、DESI の観測 (青の領域) を再現していることが分かる。

4 Discussion

本稿では、指数関数型のポテンシャル $V = V_0 e^{-\lambda\phi/M_{\rm pl}}$ をもつ単一クインテッセンス場について CMB,DESI(DR1) による BAO, 超新星のデータを用いた解析の結果をレビューした。パラメータ λ について

$$\lambda = 0.48^{+0.28}_{-0.21}, \quad 0.68^{+0.31}_{-0.20}, \quad 0.77^{+0.18}_{-0.15}$$

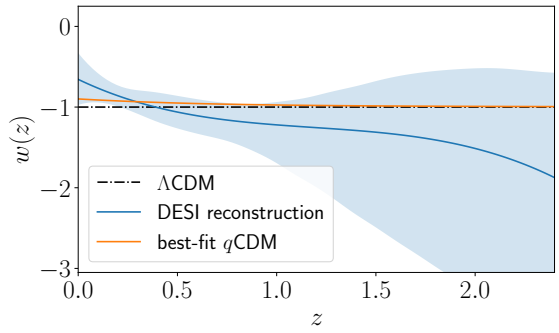


図 2: w についてのフィッテイング。青の領域が DESI の観測、オレンジ色の線が今回のモデルのベストフィットの線である。[Bhattacharya et al. (2024)]

という値と 68% 信頼区間を得た。それぞれ CMB+DESI のデータに PantheonPlus、Union3、DESY5 の超新星データセットを組み合わせた結果である。解析の結果は宇宙項に対応する $\lambda = 0$ よりも 0 でない λ を好む傾向があることを示している。λ の値が $\sqrt{2}$ より小さいことは、永遠に加速し続ける固定点に向かって宇宙が進化することを示している。この解析は DESI のデータリリース 1(DR1) に基づくものである。ΛCDM との更なる逸脱が検出されたデータリリース 2(DR2) の解析を組み合わせれば、さらに大きな λ とより高い統計的有意性が得られることが期待される。

Reference

DESI Collaboration and M.Abdul-Karim et al. 2025,arXiv:2503.14738

S.Bhattacharya, G.Borghetto, A.Malhotra, S.Parameswaran, G.Tasinato, and I.Zavala, JCAP 09,073 (2024), arXiv:2405.17396

固定点 $(\overline{x},\overline{y},\overline{z},\overline{u})$	Ω_ϕ	w_{eff}	存在条件	安定性
$\overline{Q}^{\pm}_{kin}=(\pm1,0,1,0)$	1	1	$\forall\lambda$	$\overline{Q^-_{kin}}$: 不安定 $\overline{Q}^+_{kin}$: $\lambda\leq\sqrt{6}$ で不安定 $\lambda>\sqrt{6}$ で鞍点
$\overline{Q}_m=(0,0,1,0)$	0	0	$\forall\lambda$	鞍点
$\overline{Q}_{k\phi}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{\lambda}{\sqrt{2}},0\right)$	$\frac{2}{\lambda^2}$	$-\frac{1}{3}$	$\lambda<\sqrt{2}$	鞍点
$\overline{Q}_\phi=\left(\frac{\lambda}{\sqrt{6}},\pm\frac{\sqrt{6-\lambda^2}}{\sqrt{6}},1,0\right)$	1	$-1+\frac{\lambda^2}{3}$	$\lambda<\sqrt{6}$	$\lambda<\sqrt{2}$ で安定 $\lambda>\sqrt{2}$ で鞍点
$\overline{Q}_{m\phi}=\left(\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{3}{2}},\pm\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{3}{2}},1,0\right)$	$\frac{3}{\lambda^2}$	0	$\lambda>\sqrt{3}$	鞍点
$\overline{Q}_r=(0,0,1,\pm1)$	0	$\frac{1}{3}$	$\forall\lambda$	鞍点
$\overline{Q}_{r\phi}=\left(\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{8}{3}},\pm\frac{2}{\lambda\sqrt{3}},1,\pm\sqrt{1-\frac{4}{\lambda^2}}\right)$	$\frac{4}{\lambda^2}$	$\frac{1}{3}$	$\lambda>2$	鞍点

表 1: $\Omega_k\leq0$ の場合の各固定点の Ω_ϕ,w_{eff}, 存在条件, 安定性 [Bhattacharya et al. (2024)]

Parameter	**CMB+DESI**	**+Pantheon+**	**+Union3+**	**+DESY5**
$\boldsymbol{\lambda}$	<0.537	$0.48^{+0.28}_{-0.21}$	$0.68^{+0.31}_{-0.20}$	$0.77^{+0.18}_{-0.15}$
$\boldsymbol{\Omega_k}$	0.0026 ± 0.0015	0.0025 ± 0.0015	$0.0028^{+0.0016}_{-0.0019}$	0.0027 ± 0.0016
$\boldsymbol{\Omega_c h^2}$	0.1196 ± 0.0012	0.1197 ± 0.0012	0.1195 ± 0.0012	0.1195 ± 0.0012
$\boldsymbol{H_0}$	$67.89^{+0.96}_{-0.61}$	$67.73^{+0.72}_{-0.64}$	$67.12^{+0.97}_{-0.83}$	66.95 ± 0.72
$\boldsymbol{\Omega_b h^2}$	0.02219 ± 0.00014	0.02219 ± 0.00013	$0.02220^{+0.00013}_{-0.00015}$	0.02221 ± 0.00013

表 2: CMB+DESI のデータに、各種超新星データを追加した場合の宇宙論パラメータの制限。二列目が CMB+DESI、三列目以降が CMB+DESI にそれぞれの超新星のデータを加えた場合 [Bhattacharya et al. (2024)]

——index へ戻る

SK-32

コンパクト天体への重力崩壊による粒子生成

大阪公立大学
山村　勇斗

コンパクト天体への重力崩壊による粒子生成

山村 勇斗 (大阪公立大学大学院 理学研究科)

Abstract

ブラックホールは光さえもその外部に脱出できない時空領域である。近年の観測により、多くのブラックホール候補天体が発見され、ブラックホールは宇宙物理学において非常に重要なテーマとなっている。ところが、ブラックホールはその定義により、外部からは観測不可能である。我々が観測できるのは、永遠に重力崩壊しつづける天体か、途中で重力崩壊が停止したコンパクト天体のいずれかである。したがって、古典論の範囲においては、事象の地平面をもたない非常にコンパクトな天体とブラックホールを区別することは困難である。

一方、量子論を考慮すると、ブラックホールは熱的スペクトルをもつ放射（Hawking 放射）を発することが知られている。この Hawking 放射は、ブラックホールであることを示す証拠の一つとなりうる。しかし、複数の先行研究により、重力崩壊によってブラックホールではなくコンパクト天体が形成される場合においても、Hawking 放射と似た放射が発せられることが示唆されている。よって、ブラックホールとコンパクト天体とを区別するためには、コンパクト天体における Hawking 放射と同様の現象について調べることは重要である。

[3] は、球殻の重力崩壊がある段階で減速して最終的に停止し、コンパクト天体が形成されると仮定した。その結果、Hawking 放射と同じ熱的スペクトルを持つ放射が一時的に放出された後に、さらに強い 2 回の「バースト」と呼ばれる急激な放射が起こることを示した [3]。本講演では、文献 [3] についてのレビューを行う。

1 Introduction

近年、電波や重力波を用いた観測によって多数のブラックホール候補天体が発見され、ブラックホールの存在は広く受け入れられている。ところが、ブラックホールは未来の光的な無限遠 $\mathscr{I}^+$ の因果的過去の補集合として定義される。すなわち、ブラックホールはその定義により、原理的に観測が不可能である。我々が観測可能なものはブラックホールそのものではなく、重力崩壊を続ける天体である。したがって、事象の地平面を持たないが、その半径がシュバルツシルト半径に非常に近いコンパクト天体を考慮すると、古典論の範囲においては、そのような天体はブラックホールとの区別が困難である。

一方、量子論的効果を考慮に入れると、ブラックホールはその表面重力 κ に比例する温度の熱的スペクトルをもつ放射を発することが知られている [1]。これをホーキング放射と呼ぶ。ホーキング放射はブラックホールの特徴的な現象であるため、ブラックホールとコンパクト天体とを区別する手がかりとなりうる。ところが、Paranjape らは重力崩壊が途中で停止し、事象の地平面を持たない非常にコンパクトな天体が形成される場合において、ホーキング放射と似た熱的な放射が一時的に発せられることを示した [2]。よって、ブラックホールとコンパクト天体とを区別するためには、重力崩壊の結果コンパクト天体が形成される場合に発せられる放射とホーキング放射との相違を調べる必要がある。

Harada らは [2] と同様の条件において、重力崩壊の結果コンパクト天体が形成される場合について調べ、[2] が示した熱的な放射に加えて、「バースト」と呼ばれる短時間の急激な放射が複数回生じることを示した [3]。本講演では [3] のレビューを行う。[3] が用いた複数の重力崩壊のモデルのうち、最も単純なモデルである null-shell collapse についてレビューし、放射のエネルギー流束に複数回のデルタ関数的なピークが生じることを見る。

2 球対称な物体の重力崩壊による粒子生成

球対称な物体が重力崩壊する時空を考える。物体の外部を真空とすると、Birkhoff の定理により、外部の時空はシュバルツシルト時空となる。この時空において、外向き、内向きの null の球面波はそれぞれ

$$u = \text{const.}, \quad v = \text{const.} \tag{2.1}$$

で表される。ここで $u = t - r^*, v = t + r^*$ であり、$r^* := r + 2M\ln(r/2M - 1)$ である。

ここで、$\mathscr{I}^-$ から発せられた内向きの球面波が物体を通過して中心 $r = 0$ に達し、外向きに転じて $\mathscr{I}^+$ に達する場合を考える。この内向きと外向きの球面波のペアを

$$v = v_{\text{in}}, \quad u = u_{\text{out}} \tag{2.2}$$

と表すと、v_{in} と u_{out} は一対一に対応する。したがって v_{in} と u_{out} の関係はある関数 G を用いて

$$v_{\text{in}} = G(u_{\text{out}}) \tag{2.3}$$

と表される。さらに、これを用いて関数 κ を

$$\kappa(u_{\text{out}}) := -\frac{d}{du_{\text{out}}} \ln \frac{dG(u_{\text{out}})}{du_{\text{out}}} \tag{2.4}$$

と定義する。この κ は、球面波が崩壊する物体を通過することによって生じる赤方偏移の変化率を表し、赤方偏移を z とすると

$$\kappa(u_{\text{out}}) = \frac{z'(u_{\text{out}})}{1 + z(u_{\text{out}})} \tag{2.5}$$

となる。ここで、z' は z の u_{out} 微分を表す。

この時空において質量のないスカラー場 ϕ を考えると、ϕ はクライン・ゴルドン方程式を満たす：

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) = 0 \tag{2.6}$$

このスカラー場 ϕ を量子化し、次のようにモード関数 $f_{\omega lm}$ で展開する。

$$\hat{\phi} = \sum_{l,m} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega (\hat{a}_{\omega lm} f_{\omega lm} + \hat{a}^{\dagger}_{\omega lm} f^{*}_{\omega lm}) \tag{2.7}$$

ここで $f_{\omega lm}$ は $\mathscr{I}^-$ において

$$f_{\omega lm} \sim \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega r}} e^{-i\omega v} Y_{lm}(\theta, \phi) \tag{2.8}$$

となり、正規直交性を満たす関数である。始状態として $\mathscr{I}^-$ における自然な真空、すなわち

$$\hat{a}_{\omega lm} f_{\omega lm} |0\rangle = 0 \tag{2.9}$$

を満たす状態 $|0\rangle$ をとる。ω が十分大きいとして幾何光学近似を用い、さらに s 波 ($l = m = 0$) のみを考慮すると、$\mathscr{I}^+$ で観測される放射のエネルギー流束 P は (2.4) で定義された κ を用いて

$$P = \frac{\kappa^2}{48\pi} \tag{2.10}$$

と表される。さらに、$\kappa(u)$ が**断熱条件**

$$|\kappa'(u_*)| \ll \kappa^2(u_*) \tag{2.11}$$

を満たすとすると、$\mathscr{I}^+$ の時刻 $u = u_*$ で観測されるスペクトルは温度

$$T = \frac{\kappa(u_*)}{2\pi k_{\mathrm{B}}} \tag{2.12}$$

のプランク分布となる。ただし、k_{B} はボルツマン定数である。

以上より、関数 κ を計算することで、重力崩壊によって生じる放射のエネルギー流束 P を計算することができる。

3 重力崩壊する薄い球殻

前節で定義した κ から放射のエネルギー流束を求めるため、単純なモデルとして球対称な薄い球殻 (spherical shell) の重力崩壊を考える。shell の内側の時空はミンコフスキー時空とし、内側の時間 T は外側の時間 t と異なるとする。また、内側の null 座標として $U = T - r, V = T + r$ を定義する。また、shell 上の固有時を τ とし、内向きと外向きの球面波が shell を横切る時刻をそれぞれ $\tau_{\mathrm{in}}, \tau_{\mathrm{out}}$ とする。また、崩壊による shell の面積半径の変化を

$$r = R(\tau) \tag{3.1}$$

と表すと、関数 G の微分は

$$G'(u_{\mathrm{out}}) = \frac{A(\tau_{\mathrm{out}}(u_{\mathrm{out}}))}{B(\tau_{\mathrm{in}}(u_{\mathrm{out}}))} \tag{3.2}$$

と計算できる。ここで、

$$\begin{aligned} A(\tau) &= \frac{\dot{U}(\tau)}{\dot{u}(\tau)} \\ &= \frac{f(R)(\sqrt{1+\dot{R}^2} - \dot{R})}{\sqrt{f(R)+\dot{R}^2} - \dot{R}}, \\ B(\tau) &= \frac{\dot{V}(\tau)}{\dot{v}(\tau)} \\ &= \frac{f(R)(\sqrt{1+\dot{R}^2} + \dot{R})}{\sqrt{f(R)+\dot{R}^2} + \dot{R}} \end{aligned} \tag{3.3}$$

であり、ドットは τ 微分を表す。また、$f(R) := 1 - 2M/R$ とした。

これを用いると、(2.4) より κ を計算でき、さらに (2.10) を用いてエネルギー流束 P が求められる。また、(3.2)、(3.3) より、shell の運動 $R(\tau)$ が与えられれば、P の振る舞いが決まる。次の節では、具体的な shell の運動のモデルとして null-shell collapse を考え、エネルギー流束 P の振る舞いについて議論する。

4 null-shell collapse における放射

前節の議論を踏まえ、具体的な shell の運動として null-shell collapse を考え、それによって発生する放射の時間変化を調べる。すなわち、shell の運動として次を仮定する。

(1)$u < u_0$ のとき：$r = R_{\mathrm{i}}$ で一定。
(2)$u_0 < u < u_1$ のとき：shell は $V = 0$ で表される null 超曲面に沿って崩壊する。
(3)$u_1 < u$ のとき：$r = R_{\mathrm{f}} = 2M/(1-\varepsilon^2)$ で一定。ただし、$0 < \varepsilon \ll 1$ である。

ここで、u_0, u_1 に加えて $\tilde{u}_1$ を次のように定義する。すなわち、null 超曲面 $V = 0$ がさらに内向きに延長し、中心 $r = 0$ を通過して外向きに転じ、再び shell の外側に出たとき、この外向きの null 超曲面を $u = \tilde{u}_1$ とする。

このような shell の運動のもとで、(3.2) と (2.4) より G' と κ を計算すると以下のようになる。

(1)$u < u_0$ のとき

$$G'(u_{\mathrm{out}}) = 1, \quad \kappa(u_{\mathrm{out}}) = 0 \tag{4.1}$$

(2)$u_0 < u < u_1$ のとき

$$\begin{aligned} G'(u_{\mathrm{out}}) &= \left(1 - \frac{2M}{R_{\mathrm{i}}}\right)^{-1/2} \left(1 + \frac{4M}{U(u_{\mathrm{out}})}\right), \\ \kappa(u_{\mathrm{out}}) &= \frac{4M}{U(u_{\mathrm{out}})^2} \end{aligned} \tag{4.2}$$

ただし $U(u_{\mathrm{out}})$ は、U についての方程式

$$u - u_0 = U - 4M \ln\left(-\frac{U}{4M} - 1\right) + 2R^*_{\mathrm{i}} \tag{4.3}$$

の解である。ここで

$$R_{\rm i}^* := R_{\rm i} + 2M \ln\left(\frac{R_{\rm i}}{2M} - 1\right) \tag{4.4}$$

とした。

(3)$u_1 < u < \tilde{u}_1$ のとき

$$G'(u_{\rm out}) = \varepsilon \left(1 - \frac{2M}{R_{\rm i}}\right)^{-1/2}, \quad \kappa(u_{\rm out}) = 0 \tag{4.5}$$

(4)$\tilde{u}_1 < u$ のとき

$$G'(u_{\rm out}) = 1, \quad \kappa(u_{\rm out}) = 0 \tag{4.6}$$

以上の結果と (2.10) より、連続的な放射が発せられるのは $u_0 < u < u_1$ の間のみであることが分かる。この放射は熱的なスペクトルを持ち、その温度は $k_{\rm B}T = \kappa(u_{\rm out})/(2\pi)$ で与えられる。この放射を、transient Hawking radiation と呼ぶ。

さらに、(2.4) より κ は G' の微分で定義されるが、上の結果より G' は $u = u_0, u_1, \tilde{u}_1$ において不連続となっている。したがって、$u = u_0, u_1, \tilde{u}_1$ において κ にデルタ関数的なピークが生じる。これは、$u = u_0, u_1, \tilde{u}_1$ 放射のエネルギー流束 P が発散し、瞬間的に急激な放射が発せられることを示している。これを「バースト」と呼ぶ。

5 Conclusion

Harada ら重力崩壊が途中で停止しコンパクト天体が形成されるモデルとして、最も単純な null-shell collapse を考えると、一時的に発生する熱的なスペクトルをもつ放射、transient Hawking radiation に加えて、デルタ関数的なピークを持つ急激な放射、「バースト」が複数回生じることを示した。本講演では null-shell collapse のみについてレビューを行ったが、[3] ではより現実的なモデルとして、timelike-shell collapse についても議論している。このモデルにおいても、null-shell collapse の場合と同様に、transient Hawking radiation に加えて、2 回のバーストが生じることが示されている。この結果より、重力崩壊が途中で停止し、ブラックホールではなくコンパクト天体が形成される場合、ブラックホールが生じる場合、すなわち通常の Hawking 放射とは異なる特徴をもつ放射が発せられることを示唆している。

References

[1] S.W. Hawking, Nature **248**, 30 (1974).

[2]A. Paranjape and T. Padmanabhan, Phys. Rev. D, **80**, 044011 (2009).

[3]T. Harada, V. Cardoso and D. Miyata, Phys. Rev. D **99** (2019) no.4, 044039.

——index へ戻る

SK-33

IDECAMB による相互作用するダークエネルギーモデルの統一的解析

名古屋大学
石川　陽

IDECAMB による相互作用するダークエネルギーモデルの統一的解析

石川 陽 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

DESI DR2 の BAO 測定の結果など，近年の観測は宇宙定数 Λ による標準的なダークエネルギーモデル（ΛCDM）からの逸脱を示唆している．ΛCDM からの拡張として，ダークエネルギーとダークマターの相互作用を仮定する Interacting Dark Energy(IDE) モデルが注目されている．しかし標準の CMB 解析コード CAMB は IDE モデルに対応していない．本講演では IDE モデルに適用できるように拡張した「IDECAMB」についての論文 [1] のレビューを行い，その有用性と今後の IDE 研究への応用を議論する．

1 Introduction

現代宇宙論の標準モデルは，様々な観測により ΛCDM モデルが最もよく支持されている．ここで Λ は宇宙の加速膨張を駆動するダークエネルギー（dark energy, DE），CDM は構造形成の源となる冷たいダークマター（cold dark matter, DM）を指す．CMB 観測などから，現在の宇宙のエネルギーの構成要素のうち約 68 %が DE，約 27 %が DM，約 5 %がバリオンとされ，これら未知成分の理解は宇宙論における最重要課題の一つである．

しかし近年，ΛCDM に対する観測的不一致が報告されている．たとえば 2025 年の DESI DR2[2] では，BAO 測定により得られた状態方程式 w が ΛCDM が要請する $w = -1$ から逸脱する可能性が示唆された．これに対する DE モデルの修正案として，w の時間変化を許す動的 DE モデルや，重力理論自体を拡張する修正重力理論（MG）などが提案されてきた．

[1] では，DE と DM が相互作用する Interacting Dark Energy（IDE）モデルに注目する．これは w の変動に加え，エネルギー・運動量のやりとりによって観測との整合性を改善する可能性を持つ．IDE モデルの多くは ΛCDM を上回る適合度を示しているが，標準の CMB 解析コードである CAMB[1] は IDE に非対応であるため，従来は各研究ごとに CAMB の個別改変が必要であった．

本稿では，多様な IDE モデルに対応可能な拡張版 CAMB である IDECAMB[1] を紹介し，その設計思想と今後の IDE 研究への貢献について論じる．

[1]CAMB とは宇宙の摂動の進化を計算するためのパッケージである．標準では ΛCDM モデルを仮定し，摂動の時間進化の方程式を計算している．ΛCDM 以外にも典型的な動的 DE モデル w_0w_a などの計算にも対応している．

2 Models

本論文では，DE が DM とのみエネルギーや運動量の相互作用を行うようなモデルを考える．一般に，IDE モデルでは次のようなエネルギー運動量テンソルの保存関係が成り立つ．

$$\nabla_\nu T^\nu_{\mu,de} = -\nabla_\nu T^\nu_{\mu,c} = Q_\mu. \tag{1}$$

ここで，Q_μ エネルギー運動量輸送ベクトルと呼ばれ，相互作用を表す．Q_μ は全体で保存しており，

$$\sum_{I=de,c} Q_{\mu,I} = 0, \tag{2}$$

が成り立つ．

2.1 Linear Perturbation Theory

次に，摂動の進化の方程式を CAMB で解くために線形摂動理論について整理した後．IDE モデルにおける摂動の進化の方程式を導く．

一般的な FLRW 計量では一様等方の仮定から計量を導くが，今回は摂動時空を考えるために，一様等方な背景時空に非一様非等方な摂動を加えた計量を考える．摂動時空における計量を，

$$g_{00} = -a^2(1 + 2AY), \tag{3}$$

$$g_{0i} = -2a^2 BY_i, \tag{4}$$

$$g_{ij} = a^2(\gamma_{ij} + 2H_L Y\gamma_{ij} + 2H_T Y_{ij}), \tag{5}$$

と定義する．この時，A，B，C，H_L，H_T はそれぞれ計量の摂動パラメータ，Y はラプラス演算子の調和関数，a は宇宙膨張に関するスケールファクター

である．また，摂動時空におけるエネルギー運動量テンソルは，非等方な摂動を加えて，

$$T_0^0 = -(\rho + \delta\rho Y), \tag{6}$$
$$T_0^i = -(\rho + p)vY^i, \tag{7}$$
$$T_j^i = (p + \delta pY)\delta_j^i + p\Pi Y_j^i, \tag{8}$$

のように書ける．ここで，p は圧力，$\delta\rho$ はエネルギー密度摂動，v は速度，δp は等方圧力摂動，Π は非等方ストレスを表す．これらを用いると，DE や DM の 4 元速度が，

$$u_{\mu,I} = a\left(-1 - AY, (v_I - B)Y_i\right), \tag{9}$$

のように書ける．[3]

次に，IDE モデルにおける摂動量を考えるために，Q_μ を 3 つの相互作用量 Q，δQ，f によって記述することを考える．これらの量はそれぞれ，エネルギー輸送率，エネルギー輸送摂動，運動量輸送率を表し，これらを用いて Q_μ を，

$$Q_\mu = a\left(-Q(1 + AY) - \delta QY, [f + Q(v - B)]Y^i\right), \tag{10}$$

と表す．式 (1) に式 (10) を代入して線形摂動理論の下で解くと，背景時空のエネルギー密度の進化が，

$$\rho'_{de} + 3\mathcal{H}(1 + w)\rho_{de} = aQ, \tag{11}$$
$$\rho'_c + 3\mathcal{H}\rho_c = -aQ, \tag{12}$$

のように書ける．また，摂動時空のエネルギー密度摂動の進化と速度の進化はそれぞれ，

$$\begin{aligned}&\delta\rho'_I + 3\mathcal{H}(\delta\rho_I + \delta p_I)\\ &\quad + (\rho_I + p_I)(kv_I + 3H'_L) = a(\delta Q_I + AQ_I),\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}&[(\rho_I + p_I)\theta_I]' + 4\mathcal{H}(\rho_I + p_I)\theta_I - \delta p_I\\ &\quad + \frac{2}{3}c_K p_I\Pi_I - (\rho_I + p_I)A = a(Q_I\theta + f_{k,I}),\end{aligned} \tag{14}$$

のように書ける．$'$ は共形時間での微分を表す．

2.2 Parametrization

統合的な CAMB 計算コードの開発のために，様々なモデルに共通するパラメータの設定を考える．ここでは代表的に，DE をスカラー場として扱う Coupled Quintessence（CQ）モデルと，流体として扱う Coupled Fluid（CF）の 2 つを考える．

まず，CQ モデルのラグランジアンから，CQ モデルにおける Q_μ を以下のように定義する．

$$Q_\mu = \frac{\partial \ln m(\phi)}{\partial\phi}\rho_c\partial_\mu\phi \tag{15}$$

ここで，$m(\phi)$ はスカラー場 ϕ に依存する DM 質量であり，相互作用の度合いを表す結合定数 β を用いて $m(\phi) \propto e^{-\beta\sqrt{\kappa}\phi}$ と仮定する．これらを元に，相互作用量をそれぞれ導くと，

$$Q = \beta\rho_c\frac{\sqrt{\kappa}\phi'}{a}, \tag{16}$$
$$\delta Q = Q\left(\frac{\delta\phi'}{\phi'} + \frac{\delta\rho_c}{\rho_c} - A\right), \tag{17}$$
$$f_k = -Q\theta + Q\frac{\delta\phi}{\phi'}, \tag{18}$$

となる．

次に，CF モデルに対してエネルギーや運動量の輸送が，いずれかの 4 元速度に比例すると考えると，Q_μ は，

$$Q_\mu = Qu_{\mu,I} \tag{19}$$

と定義できる．このとき相互作用量は，

$$Q = \beta H\rho_I, \tag{20}$$
$$\delta Q = Q\left(\frac{\delta\rho_{de}}{\rho_{de}} + \frac{\delta\rho_c}{\rho_c}\right), \tag{21}$$
$$f = Q(v_I - v), \tag{22}$$

のようにかける．

式 (17)，(18)，(21)，(22)，はそれぞれ整理すると，δ_{de}，δ_c，θ_{de}，θ_c の線型結合で書かれることがわかる（$\delta_I = \rho_I/\delta\rho_I$）．同様の手順を踏むと，ほとんどの CQ モデルと CF モデルについて相互作用量を書き下すことができるため，一般的にこれらの相互作用量は自由関数[2]C_1，C_2，C_3，D_1，D_2 を用いて，

$$\delta Q = C_1\delta_{de} + C_2\delta_c + C_3\theta_{de} \tag{23}$$
$$f_k = -Q\theta + D_1\theta_{de} + D_2\theta_c \tag{24}$$

のようにパラメータ化できる．

2.3 Implementation

摂動の進化の方程式 (13)，(14) にパラメータ化した相互作用量 (23)，(24) を代入する．これによってパラ

[2]モデルによって形が決まる関数

Model	Q	C_1	C_2	C_3	D_1	D_2
$Q_\mu = Qu_{\mu,c}$	$\beta H\rho_{de}$	Q	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	Q
	$\beta H\rho_c$	$\cdots$	Q	$\cdots$	$\cdots$	Q
	$\beta H\frac{\rho_{de}\rho_c}{\rho_{de}+\rho_c}$	Q	Q	$\cdots$	$\cdots$	Q
$Q_\mu = Qu_{\mu,de}$	$\beta H\rho_{de}$	Q	$\cdots$	$\cdots$	Q	$\cdots$
	$\beta H\rho_c$	$\cdots$	Q	$\cdots$	Q	$\cdots$
	$\beta H\frac{\rho_{de}\rho_c}{\rho_{de}+\rho_c}$	Q	Q	$\cdots$	Q	$\cdots$
$Q_\mu = \beta^{ij}H\rho_i u_{\mu,j}$	$\sum_{j=1}^{2}\beta^{ij}H\rho_i$	$\sum_{i=1}^{2}\beta^{1i}H\rho_1$	$\sum_{i=1}^{2}\beta^{2i}H\rho_2$	$\cdots$	$\beta^{i1}H\rho_i$	$\beta^{i2}H\rho_i$
$Q_\mu = -\beta\rho_c\sqrt{\kappa}\partial_\mu\phi$	$\beta\rho_c\frac{\sqrt{\kappa}\phi'}{a}$	$\frac{Q}{1+w}$	Q	$\frac{a^2U_\phi}{-\phi'}Q$	Q	$\cdots$

図 1: 各モデルに対する自由関数の対応表 [1]

メータ化された摂動の進化の方程式が得られ，CAMB に標準搭載された摂動の進化の方程式の代わりに用いることで，IDE モデルに汎用的な CAMB の拡張が可能となる[3]．このようにして開発された CAMB パッケージ，および宇宙論的 MCMC コードである CosmoMC の拡張パッチが「IDECAMB」である[4]．

このパッケージでサポートされている具体的なモデルを図 1 に示す．計算の際には，プログラム内の引数を計算したいモデルに応じて変えることによって容易に計算することができる．

3 Results & Discussion

ここまで論文 [1] を元に、IDE モデルにおける摂動進化と IDECAMB の実装について論じてきた。ここでは，実際に IDECAMB を用いて計算を行い，その結果について議論を行う．

まず初めに，DE と DM のエネルギー密度の進化を，CF モデルの一つである $Q = \beta H\rho_{de}$ モデルについて結合定数 β を変えて計算を行った結果を図 2 に示す．ΛCDM を考えると，ρ_{de} はフリードマン方程式 $d\rho/dt + 3H\rho(1+w) = 0$ と $w = -1$ から常に一定になると考えられる．また，DM の質量は CMB 以後一定であるため，ρ_c は宇宙の膨張に伴い a^{-3} で減少すると考えられる．したがって a^{-3} による規格化を行った値は常に一定となることが期待される．ここで図 2 を見ると，いずれも $\beta = 0$ のときに常に 1 となっている．$\beta = 0$ は相互作用がない場合を意味し，すなわち ΛCDM と一致するため，この結果は矛盾しない．また，$\beta > 0$ のときには式 (11)，(12) から，エネルギーが DM から DE に輸送されるため，規格化した DE のエネルギー密度は増加し，DM の場合は特に DE 優勢期に減少することが予想されるが，計算結果はこれらを正しく再現している．

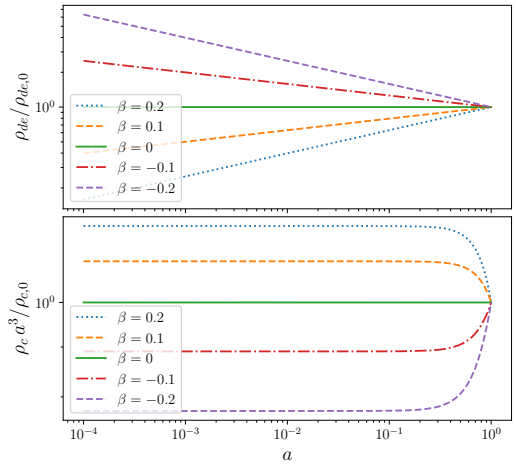


図 2: （上）DM のエネルギー密度の進化.（下）DE のエネルギー密度の進化．いずれも現在のエネルギー密度 $\rho_{c,0}$，$\rho_{de,0}$ による規格化を行っている．

次に，β による物質のパワースペクトルの違いについて計算した結果を図 3 に示す．物質のパワースペクトルは物質の量が多くなるほど，放射期から物質期へのターンオーバー，即ちピークの位置が高波

[3] 他にも計算しやすいようにゲージを取り直し，数値計算上の不安定性を取り除くプログラム (PPF 法) を加えるなどの操作を行なっている．最終的には CosmoMC パッケージのパッチにも修正を加えることで，IDE モデルに対して CAMB を用いた MCMC 解析が可能となる．

[4] https://github.com/liaocrane/IDECAMB

数側にシフトすることが知られている．DM の量が減る $\beta > 0$ では，一見逆の結果となっている様に見えるが，この計算では現在の物質の量を固定値として計算していることに注意すると，矛盾のない結果となっていることがわかる．

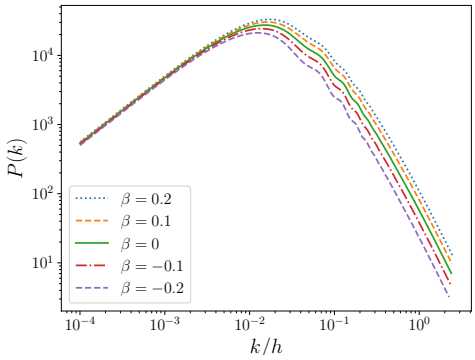


図 3: 物質のパワースペクトル $P(k)$.

以上の議論から，IDECAMB で行った計算は, いずれの結果もモデルから予想される振る舞いと整合したと言える．これは IDECAMB が正しく機能していることを示している．

最後に，IDECAMB が今後の IDE 研究に与える影響について議論する．冒頭で述べた DESI の結果について，IDE モデルによる説明の試みが報告されている．その中でも，[4] では，IDECAMB を使った計算により，モデルの具体形についての制限を与えている．その結果を図 4 に示す．

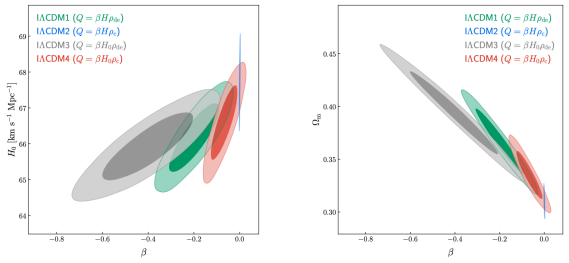


図 4: IDECAMB を用いたモデル制限 [4].

図 4 は典型的な 4 種類の CF モデルについて，β と H_0 の推定値を与えており，この結果から $Q = \beta H \rho_c$ モデルが高確率で棄却されることがわかる．また，Q が ρ_{de} に比例するモデルについては ΛCDM よりも DESI 等の観測と整合性があるという結果も示された．

以上の議論から，IDE モデルは ΛCDM よりも DESI の結果に整合的であることが示唆され，同時に IDECAMB はこれらの IDE 研究を押し進める有効なツールであることも確認された．したがって，この IDECAMB を用いることで，この先も IDE 研究がより一層進展することが期待される．

4 Conclusion

本稿では，[1] のレビューを行った．CQ モデルと CF モデルについて相互作用量による共通のパラメータ化をすることで，IDE モデルにおける統合的な摂動の進化の方程式を導けることを確認した．

実際に IDECAMB を使用して計算してみることで，多くの IDE モデルに対して引数を変えるだけで計算できることを確認した．計算の結果は ΛCDM や IDE モデルから予想される物理的振る舞いに整合的であり，IDECAMB の有用性が改めて確認された．

IDECAMB を用いた IDE 研究の中には，IDE モデルの制限と DESI の結果との整合性を議論したものもあり，今後も IDE 研究の進展が期待される．

Acknowledgement

日頃から議論に参加していただいた名古屋大学宇宙論研究室の皆様に感謝いたします．

Reference

[1] Yun-He Li and Xin Zhang. Idecamb: an implementation of interacting dark energy cosmology in camb. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2023(09):046, 2023.

[2] M Abdul Karim, J Aguilar, S Ahlen, S Alam, L Allen, C Allende Prieto, O Alves, A Anand, U Andrade, E Armengaud, et al. Desi dr2 results ii: Measurements of baryon acoustic oscillations and cosmological constraints. *arXiv e-prints*, pages arXiv–2503, 2025.

[3] Hideo Kodama and Misao Sasaki. Cosmological perturbation theory. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 78:1–166, 1984.

[4] Tian-Nuo Li, Peng-Ju Wu, Guo-Hong Du, Shang-Jie Jin, Hai-Li Li, Jing-Fei Zhang, and Xin Zhang. Constraints on interacting dark energy models from the desi baryon acoustic oscillation and des supernovae data. *The Astrophysical Journal*, 976(1):1, 2024.

——index へ戻る

SK-34

静的球対称時空における二つのレンズ方程式間の対応

Correspondence between two gravitational lens equations in a static and spherically symmetric spacetime

弘前大学
佐藤　晴

静的球対称時空における二つのレンズ方程式間の対応 〜Correspondence between two gravitational lens equations in a static and spherically symmetric spacetime〜

佐藤　晴 (弘前大学大学院 理工学研究科)

Abstract

重力レンズは、ブラックホールや銀河などの周りにおいて重力場の影響で時空が曲がっているために光の軌道が歪む現象である。重力レンズの屈折角や像の位置、光源の位置についての関係式はレンズ方程式と呼ばれる。現在レンズ方程式として、VE (Virbhadra and Ellis) 方程式と、OB (Ohanian and Bozza) 方程式の二つがある。重力レンズは、レンズ天体によって曲げられた屈折光を観測することでレンズ天体について知ることができ、それによって物質分布のマッピング、宇宙モデルや宇宙の大きさの推定、レンズ効果による増光を利用して暗い天体の観測といった応用に繋げられる。

本発表では、静的球対称時空において次の二つの点について文献 [1] を基にして紹介する。一つ目は、VE 方程式には非物理的な枝が存在するが、これを排除して方程式を改良することが出来るということである。二つ目は、屈折角を適切に変換する事で VE 方程式と OB 方程式の二つのレンズ方程式は等価である事が証明できるという事である。以上の事に加えて今後、レンズ方程式の適応範囲を拡張していく事についても紹介していく。

1 Introduction

Event Horizon Telescope(EHT) の観測により、強重力場での重力レンズ効果による大角度散乱への関心が高まっている [6,7]。Virbhadra と Ellis（VE）は静的球対称時空における非常に正確な重力レンズ方程式を提唱した。彼らの幾何学的なアプローチはほとんど厳密であるが、光の屈折はレンズ面上で引き起こされると推測していた。彼らの推測は観測者、レンズ、光源の配置がほとんど整列している場合に良い近似である。近年、VE 方程式は Schwarzschild ブラックホール重力レンズによる像の歪みについての詳細な議論に用いられている。

対称な配置を推測する代わりに、Bozza は正確なレンズ方程式の改良型を得るためにより一般的な配置に対して Ohanian 関係を利用した [15]。単純に、改良された方程式は Ohanian-Bozza(OB) 方程式と呼ばれている。

この論文の主な目的は VE 方程式が本当に OB 方程式とは異なっているのかということを調べることである。VE 方程式には物理的な枝だけでなく非物理的な枝もあるという二重性がある。この VE 方程式は非物理的な枝を取り除く事で改良する事ができる。次に、我々は二つの表式で異なる定義がなされた屈折角の間で適切な変形を行なう場合に改良型 VE 方程式は OB 方程式と同じになり得ると主張をする。その後、屈折角の変形を無視した場合に生じ得る数値的な差を論じる。なおこの論文全体を通して、静的球対称時空に焦点を当てており、漸近平坦性も仮定している。

2 Two lens equations

Virbhadra と Ellis による強重力場でのレンズ方程式は次の式で表せる。

$$D_S \tan\beta = D_S \tan\theta - D_{LS}[\tan\theta + \tan(\alpha_{VE} - \theta)]$$

D_S、D_L、D_{LS} は角径距離を表している。角径距離とは、天体のみかけの大きさと実際の大きさの比から算出した距離である。この VE 方程式は弱重力場での小角度散乱だけでなく、強重力場での大角度散乱にも適用できる。レンズ天体 L は光源と観測者のほぼ中央にあり、レンズ面上に屈折角 α を割り当てている。

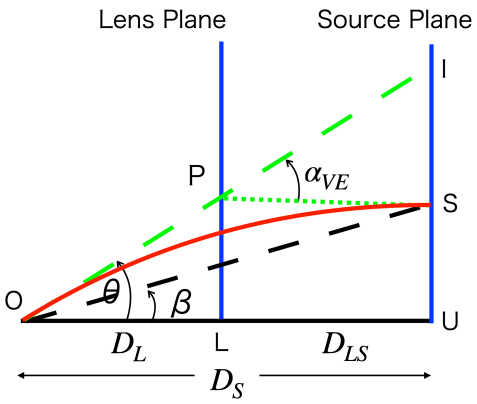


図 1: VE 方程式の屈折角と配置

Bozza がより一般的な配置に対して導いた方程式は OB 方程式と呼ばれ、次のような式で表される。

$$D_S \tan\beta = \frac{D_L \sin\theta - D_{LS}\sin(\alpha_{OB}-\theta)}{\cos(\alpha_{OB}-\theta)}$$

このとき、レンズ天体 L は光源と観測者のほぼ中央でなくてもよく、光の屈折角 α はレンズ面上に割り当てなくても良い。Bozza がこの方程式を導く際に導いた関係を Ohanian 関係と呼び、図 2 における四角形 OLSQ の内角の間の関係のことを指す。

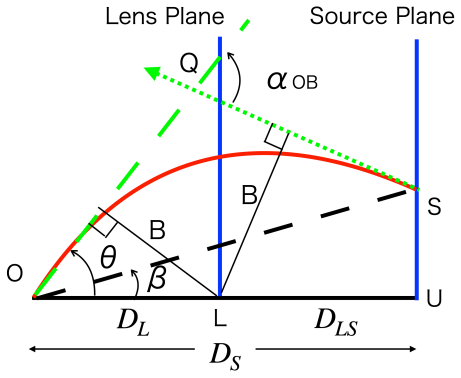


図 2: OB 方程式の屈折角と配置

3 Improved VE equation

VE 方程式において、正接の加法定理を用いると、$\tan\theta$ の二次式となり $\tan\theta$ について解くと次の二つの表式が現れる。

$$\tan\theta = \frac{D_S(\tan\beta\tan\alpha_{VE}-1)\pm\sqrt{\mathcal{D}}}{2D_L\tan\alpha_{VE}}$$
$$\mathcal{D} \equiv (D_S)^2(\tan\beta\tan\alpha_{VE}-1)^2 + 4D_L\tan\alpha_{VE}(D_S\tan\beta + D_{LS}\tan\alpha_{VE})^2$$

現れた表式のうち、負符号のものは小角度近似を用いた場合には $\alpha_{VE}\to 0$ であるため次に示す式の第三項が発散してしまう。このため、Minus branch は非物理的として排除する必要がある。詳しい証明は論文 [1] の APPENDIX にある。

4 Correspondence between VE and OB equations

レンズ天体、観測者、光源、像の位置が全て等しい場合、つまり、β、θ、D_L、D_{LS} が全て等しい場合には改良型 VE 方程式は OB 方程式と一致する。この際、二つの方程式で別々に定義されている屈折角 α の間にある変換式は次のようなものとなっている。

$$\tan\alpha_{VE} = \frac{D_S F(E - F\tan\beta)}{D_{LS}F^2 + D_S EF\tan\beta - D_L E^2},$$

$$where \quad E \equiv D_{LS}\sin\alpha_{OB} + D_S\tan\beta\cos\alpha_{OB}$$
$$F \equiv D_L + D_{LS}\cos\alpha_{OB} - D_S\tan\beta\sin\alpha_{OB}$$

5 Summary and outlook

VE 方程式には非物理的な枝が存在することを示した。VE 方程式はこの非物理的な枝を排除して改良することが出来る。また、屈折角の変形が適切に行われれば改良した VE 方程式は OB 方程式と同じになると分かった。

今後は、今回の結果を定常で軸対象なレンズに拡張するということがある。また、今回のような配置の重力レンズだけでなく異なる配置で起こる重力レンズについても考えていきたいということもある。

Reference

[1]Ryuya Kudo & Hideki Asada(2025),
Phys. Rev. D 111, 044014

[2] P. Schneider, J. Ehlers, and E. E. Falco, Gravitational Lenses(1992),
Springer, New York

[3] A. O. Petters, H. Levine, and J. Wambsganss, Singularity Theory and Gravitational Lensing(2012)
Springer, New York,

[4] S. Dodelson, Gravitational Lensing (Cambridge University Press, New York, 2017).

[5] A. B. Congdon and C. R. Keeton, Principles of Gravita- tional Lensing (Springer, New York, 2018).

[6] C. M. Will, Living Rev. Relativity 17, 4 (2014).

[7] K. Akiyama et al. (Event Horizon Telescope Collaboration), Astrophys. J. 875, L1 (2019); 875, L2 (2019); 875, L3 (2019); 875, L4 (2019); 875, L5 (2019); 875, L6 (2019).

[8] K. Akiyama et al. (Event Horizon Telescope Collaboration), Astrophys. J. 930, L12 (2022); 930, L13 (2022); 930, L14 (2022); 930, L15 (2022); 930, L16 (2022); 930, L17 (2022).

[9] C. Darwin, Proc. R. Soc. A 249, 180 (1959).

[10] V. Bozza, Phys. Rev. D 66, 103001 (2002).

[11] V. Perlick, Phys. Rev. D 69, 064017 (2004).

[12] https://www.ngeht.org/

[13] K. S. Virbhadra and G. F. R. Ellis, Phys. Rev. D 62, 084003 (2000).

[14] K. S. Virbhadra, Phys. Rev. D 106, 064038 (2022).

[15] K. S. Virbhadra, Phys. Rev. D 109, 124004 (2024).

[16] H. C. Ohanian, Am. J. Phys. 55, 428 (1987).

[17] V. Bozza, Phys. Rev. D 78, 103005 (2008).

[18] G. W. Gibbons and M. C. Werner, Classical Quantum Gravity 25, 235009 (2008).

[19] A. Ishihara, Y. Suzuki, T. Ono, T. Kitamura, and H. Asada, Phys. Rev. D 94, 084015 (2016).

[20] A. Ishihara, Y. Suzuki, T. Ono, and H. Asada, Phys. Rev. D 95, 044017 (2017).

[21] K. Takizawa, T. Ono, and H. Asada, Phys. Rev. D 102, 064060 (2020).

[22] M. P. Dabrowski and F. E. Schunck, Astrophys. J. 535, 316 (2000).

[23] S. Gillessen et al., Astrophys. J. 837, 30 (2017).

[24] V. Perlick and O. Tsupko, Phys. Rep. 947, 1 (2022).

[25] 公益財団法人　日本天文学会「天文学辞典」角径距離
https://astro-dic.jp/angular-diameter-distance/

——index へ戻る

SK-35

Kerr 時空における光子の球面軌道

慶應義塾大学
細川　睦

Kerr 時空における光子の球面軌道

細川 睦 (慶應義塾大学大学院 理工学研究科)

Abstract

Carter (1968) により、Kerr 時空における Hamilton-Jacobi 方程式は変数分離可能なことが示され、それにより測地線方程式は積分可能であることが示された. 以降、Carter の研究に基づいた測地線分析はさまざまな研究がなされてきたが、今回の発表では Teo (2003) を中心に光子の球面軌道について紹介する.
光子が Schwartzshild ブラックホールの周りを一定の半径で周回することはよく知られている.Schwartzshild ブラックホールの場合は、時空の球対称性から半径一定の軌道は平面上の円軌道となるが、Kerr ブラックホールの場合はそうとは限らない. 同一平面上にない半径一定軌道は球面上を動くような軌道となり、そのような軌道が存在することは Wilkins (1972) によって示されている.Teo (2003) はその後続研究であり、Wilkins (1972) で研究されたさまざまな束縛軌道のうち、光子の球面軌道に対象を絞ってさまざまな性質を調べたものである. 本発表では Wilkins の研究に基づいて timelike な場合についても触れつつ、光子の場合について具体的な軌道の性質を紹介する.

1 Introduction

Kerr 時空の計量は、Boyer-Lindquist 座標 (t, r, θ, φ) において以下の形で表現される.

$$\begin{aligned} ds^2 =& \rho^2\Delta^{-1}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \\ &+ \rho^{-2}\sin^2\theta[ad\hat{t} - (r^2+a^2)d\hat{\varphi}]^2 \\ &- \rho^{-2}\Delta[d\hat{t} - a\sin^2\theta d\hat{\varphi}]^2 \end{aligned} \tag{1}$$

ここで用いた ρ と Δ は

$$\begin{aligned} \rho^2 &= r^2 + a^2\cos^2\theta \\ \Delta &= r^2 - 2mr + a^2 \end{aligned} \tag{2}$$

で定義される. また、m はブラックホールの質量、a はブラックホールの角運動量を m で割ったものである. 時空は電荷を持っていないものとする. この時空における測地線方程式は、4 変数について分離した形で書けることが Carter の研究 [1] によって示されている.

$$\rho^2\dot{r} = \pm\sqrt{R(r)} \tag{3a}$$
$$\rho^2\dot{\theta} = \pm\sqrt{\Theta(\theta)} \tag{3b}$$
$$\rho^2\dot{\varphi} = (\Phi\sin^{-2}\theta - aE) + a\Delta^{-1}P(r) \tag{3c}$$
$$\rho^2\dot{t} = a(\Phi - aE\sin^2\theta) + (r^2+a^2)\Delta^{-1}P(r). \tag{3d}$$

ただし、

$$\Theta(\theta) = Q - \cos^2\theta[a^2(\mu^2 - E^2) + \Phi^2\sin^{-2}\theta] \tag{4a}$$
$$P(r) = E(r^2+a^2) - \Phi a \tag{4b}$$
$$R(r) = P^2 - \Delta[\mu^2 r^2 + Q + (\Phi - aE)^2] \tag{4c}$$

である. また、ドットはパラメータ λ による微分であり、

$$\tau = \mu\lambda \tag{5}$$

で定義される. 粒子の運動は、4 つの定数 μ, E, Φ, Q によって決定される. これらはそれぞれ粒子の質量、エネルギー、角運動量、カーター定数である. $R(r)$ と $\Theta(\theta)$ については非負であることが要請され、これによって 4 つの定数が満たすべき条件がいくつか得られる. さらに球面軌道、すなわち r が一定となる軌道を考える際には $R(r)$ と $dR(r)/dr$ が 0 であることも要請される. これによって運動の定数が満たすべき更なる条件を求めることができる.

timelike な場合も lightlike な場合も、式の無次元化を行うことで議論を簡単にすることができる.timelike な場合は μ と m を用いて無次元化するのが一般的であるが、lightlike な場合は $\mu = 0$ であるため、E と m を用いて無次元化を行う.timelike な場合は μ で無次元化された E, Φ, Q について考える必要があるが、lightlike な場合は E で無次元化された Φ, Q について考えれば良いので、より簡単に軌道の性質を見ることができる.

2　束縛軌道が存在する条件

以降は $\mu = 0$ とし、E で無次元化して考える. まずは束縛軌道が存在する条件を考える.$R(r)$ と $\Theta(\theta)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} R(r)/m^4E^2 &= \hat{r}^4 + [\hat{a}^2 - \hat{\Phi}^2 - \hat{Q}]\hat{r}^2 \\ &\quad + 2[(\hat{a} - \hat{\Phi})^2 + \hat{Q}]r - \hat{a}^2\hat{Q} \\ &\equiv \hat{R}(r) \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \Theta(\theta)/m^2E^2 &= \hat{Q} - \cos^2\theta[-\hat{a}^2 + \hat{\Phi}^2\sin^{-2}\theta] \\ &= \hat{\Theta}(\theta) \end{aligned} \tag{7}$$

ただし、

$$\begin{aligned} \hat{r} &= r/m \\ \hat{a} &= a/m \\ \hat{\Phi} &= \Phi/mE \\ \hat{Q} &= Q/m^2E^2 \end{aligned} \tag{8}$$

とした. 以降は簡単のためにハットは省略する. θ 座標についてはさらに $u = \cos\theta$ と変数変換すると良い.(3b) 式の 2 乗は、

$$\begin{aligned} \frac{\rho^4}{m^2E^2}\frac{\dot{u}^2}{1-u^2} &= Q - u^2[-a^2 + \frac{\Phi^2}{1-u^2}] \\ \frac{\rho^4}{m^2E^2}\dot{u}^2 &= Q(1-u^2) + a^2u^2(1-u^2) - \Phi^2u^2 \\ &= -a^2u^4 + (a^2 - \Phi^2 - Q)u^2 + Q \\ &\equiv \Theta(u) \end{aligned} \tag{9}$$

$R(r)$ は 4 次関数であるため非負となる条件を考えることは難しいが、$\Theta'(u)$ は u^2 を変数として考えれば 2 次関数となるので、非負となる条件は簡単に考えることができる. $\Theta(0) = Q, \Theta(1) = -\Phi^2 \leq 0$ より、グラフは Q の値によって分類することが合理的である. ただし、以後 $Q < 0$ となる球面軌道は存在しないことがわかるので、ここでは $Q \geq 0$ の場合について考える.

図 1 は $\Theta(u)$ のグラフである. $|u_0|$ は $\Theta(u)$ の正の根であり、緯度方向の運動の最大、最小値に対応する.(b) の場合は運動は赤道面に束縛される.

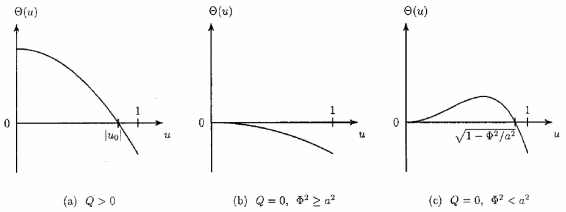


図 1: $\Theta(u)$ のグラフ (Teo (2003) より引用)

3　球面軌道となる条件

球面軌道、すなわち r が一定となる軌道が存在するためには

$$\begin{aligned} R(r) &= 0 \\ \frac{dR(r)}{dr} &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

が必要である. これを Φ, Q の連立方程式として解くことで、Φ, Q を球面軌道の半径の関数として見ることができる.(10) 式の解は

$$\phi = \frac{r^2 + a^2}{a},\ Q = -\frac{r^4}{a^2} \tag{11a}$$

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{r^3 - 3r^2 + a^2r + a^2}{a(r-1)} \\ Q &= -\frac{r^3(r^3 - 6r^2 + 9r - 4a^2)}{a^2(r-1)^2} \end{aligned} \tag{11b}$$

(11a) の解では $Q < 0$ であるが、$a^2 - Q - \phi^2 = -2r^2 < 0$ であるため、$\Theta > 0$ を満たす θ が存在しない. そのため、球面軌道の半径と Φ, Q を関係づける式は (11b) 式となる. この時の $a^2 - Q - \Phi^2$ は

$$\begin{aligned} a^2 - Q - \Phi^2 &= -\frac{2r(r^3 - 3r + 2a^2)}{(r-1)^2} \\ &< --\frac{2r_+(r_+^3 - 3r_+ + 2a^2)}{(r_+ - 1)^2} \\ &= -\frac{2r_+^2(1-a^2)}{(r-1)^2} < 0 \end{aligned} \tag{12}$$

であるため、この場合も結局 $Q > 0$ でないと $\Theta > 0$ を満たす θ が存在しない.

4　球面軌道の分類

Q, Φ の r 依存性は図 2 のとおりである.$Q > 0$ の条件から、球面起動の半径は $r_1 \geq r \geq r_2$ となる. ま

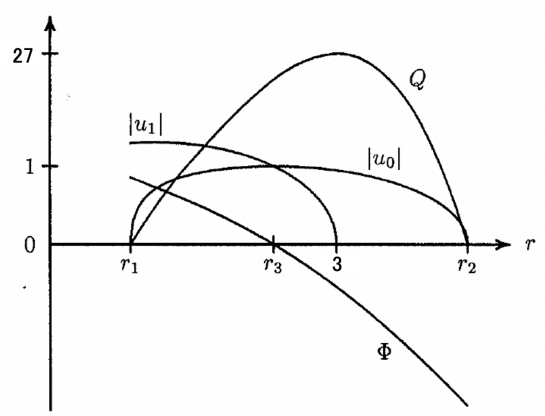


図 2: $Q, \Phi, |u_1|, |u_0|$ の r 依存性 (Teo (2003) より引用)

た、Φ は $r = r_3$ で正から負へと切り替わる.$|u_0|$ は $\Theta'(u)$ の正の根であり、軌道の緯度方向の最大値を表すものである. $|u_1|$ は $\dot{\varphi}$ の切り替わる場所の u 座標である.

以上の結果から Kerr 時空における球面軌道は 3 種類に分けることができる.$r_1 < r < r_3$ の時、Φ は正で $\dot{\varphi}$ も常に正となる順行軌道である. $r_3 < r < 3$ の時、Φ は負であるが軌道の緯度によって $\dot{\varphi}$ の符号は変化する.$3 < r < r_2$ の時、Φ は負で $\dot{\varphi}$ も常に負となる逆行軌道である.

5 節の引きずり

軌道が赤道面と交わる点を節と呼ぶことにする. 同じ方向から赤道面と交わる節は、軌道の種類に関わらず時空の回転方向へと引きずられていくことを確認する.

θ 座標が 1 周期分振動する際の、φ 座標の変化分を $\Delta\varphi$ とする.(9) 式においてさらに $w = u^2$ として、

$$\begin{aligned}\frac{\rho^4}{m^2E^2}\frac{\dot{w}^2}{4w} &= -a^2w^2 + (a^2 - \Phi^2 - Q)w + Q \\ \frac{\rho^2}{mE}\dot{w} &= 2\sqrt{-a^2w^3 + (a^2 - \Phi^2 - Q)w2 + Qw} \\ &\equiv 2Y(w)\end{aligned} \tag{13}$$

となる. ただし、復号は + を選択した. これと (3c) 式より、

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{d\theta} &= \left(\frac{2ra}{\hat{\Delta}} + \frac{\hat{\rho}^2 - 2r}{\hat{\Delta}}\frac{\Phi}{\sin^2\theta}\right) \times \frac{1}{2Y(w)} \\ &= \left(\frac{2ra - a^2\Phi}{\hat{\Delta}} + \frac{\Phi}{1-w^2}\right) \times \frac{1}{2Y(w)}\end{aligned} \tag{14}$$

となる. ただし、$\hat{\rho^2} = \rho^2/m, \hat{\Delta} = \Delta/m$ であり、このハットも以後省略する.

$Y(w)$ については

$$Y(w) = -a^2w(w - w_+)(w - w_-) \tag{15}$$

と $w_\pm$ を定義しておく.(3b) 式の対称性から、$\Delta\varphi$ は

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= 4\int_0^{w_+}\frac{d\varphi}{d\theta}dw \\ &= \frac{4ra - 2a^2\Phi}{\Delta}\int_0^{w_+}\frac{dw}{Y(w)} \\ &\quad + 2\Phi\int_0^{w_+}\frac{dw}{(1-w)Y(W)}\end{aligned} \tag{16}$$

と積分することで求めることができる. 第 1 項は第一種楕円積分、第 2 項は第三種楕円積分を用いることで計算ができ、

$$\begin{aligned}\Delta\varphi = &\frac{2(4r - 2a\Phi)}{\Delta w_-^{\frac{1}{2}}}K\left(\sqrt{\frac{w_+}{w_-}}\right) \\ &+ \frac{4\Phi}{aw_-^{\frac{1}{2}}}\Pi\left(w_+, \frac{w_+}{w_-}\right)\end{aligned} \tag{17}$$

となる.K,Π はそれぞれは第一種と第三種楕円積分である.

$\Delta\Phi$ の r 依存性をグラフにしたものが図 5 である.

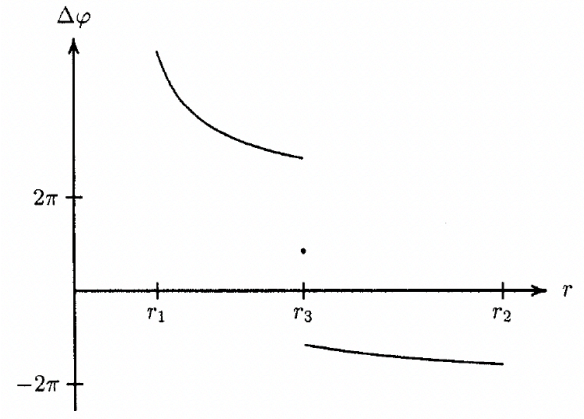


図 3: $\Delta\phi$ の r 依存性 (Teo (2003) より引用)

$r < r_3$ では順行軌道となるが、この時は緯度方向の振動が 1 周する間に回転方向に 1 回転以上してい

ることがわかる.$r > r_3$ では半径によっては順行、逆行が入り混じる軌道となるが、いかなる場合においても緯度方向の振動が一周する間に、回転方向と逆向きに 1 回転未満の回転が起こる.$r = r_3$ においてグラフは不連続となっているが、節の位置に関しては不連続とはならない. φ と $\varphi + 2\pi$ が同一視されることを考えてグラフをプロットし直せば、グラフは全域で連続となる.

6　軌道の計算

具体的な軌道計算の結果を以下に示す.$\Delta\varphi$ が不連続となっている $r = r_3$ 付近で、r の摂動に対して r は不連続になっておらず、$\Delta\varphi$ の不連続性は球面座標の特徴によるものであることを確認する.

簡単のために、軌道計算は $a = 1$(無次元化前では $a = m$) となる極限 Kerr 時空について行う. 初期位置は赤道面であり、南の方向に向けて出発する. 計算は Wolfram Mathematica により行った.

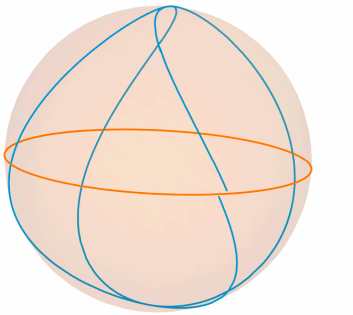


図 4: $r = r_3$ の軌道

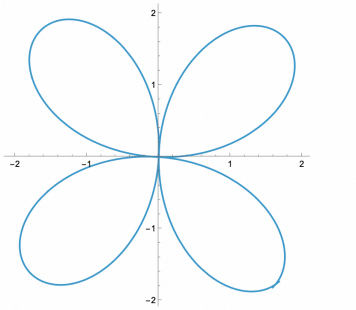


図 5: $r = r_3$ の軌道 (赤道面に射映した図)

この場合は軌道は両極に達し、φ は常に増加している.$\Delta\varphi$ は π より少し大きな値を取るため、赤道方向の振動を 2 回行うと出発位置より少し回転方向にずれた場所に戻ってくる.

この図を見ることで、$\Delta\varphi$ の不連続性は極の通過に起因することが見て取れる. 軌道が極のどちら側を通過するかによって φ 座標には $\pm 2\pi$ だけのずれが生じ、緯度方向の振動が一周する間に極付近は 2 回通過することになるため、合わせて 4π だけのずれが生じることになる.

Reference

Carter, B. (1968). Global structure of the Kerr family of gravitational fields. Physical Review, 174(5), 1559.

Teo, E. (2003). Spherical photon orbits around a Kerr black hole. General Relativity and Gravitation, 35(11), 1909-1926.

Wilkins, D. C. (1972). Bound geodesics in the Kerr metric. Physical Review D, 5(4), 814.

——index へ戻る

SP-02

重力レンズ効果の再現

甲南大学
西原　翼

重力レンズ効果の再現

西原　翼 (甲南大学大学院 自然科学研究科 宇宙理論研究室)

Abstract

重力レンズ効果とは質量を持った天体の近くを光が通ると、光には質量がないにも関わらずその軌道が曲げられるという現象である。重力レンズ効果により湾曲される光線の曲率は理論的に計算されており、この計算はこれまでの観測の結果によりその整合性が確認されている。しかし、重力レンズ効果を含めた宇宙の現象は視覚的、感覚的に理解しにくくい。そこで、視覚的、感覚的に理解しやすくするために実物の教具があればより理解しやすく天文教育に役立つだろう。本稿では重力レンズ効果による光の折れ曲がりを再現する光学レンズを設計する。一般相対性理論により導かれた重力レンズ効果による光の軌道を表す方程式を導出し、重力レンズの光の折れ曲がりを再現する光学レンズの設計法について横尾他 (1998) の理論 [2] をベースに議論する。さらに、3D プリンターを用いてレンズおよび光学系を製作し、光学レンズによって形成されるアインシュタイン半径を測定して、再現性および理論との整合性を評価する。

1 Introduction

アルベルト・アインシュタインが 1905 年の特殊相対性理論に続いて、それを発展させた一般相対性理論を 1915 年に発表した。一般相対性理論の予言の一部に重力レンズ効果というものがある。重力レンズ効果とは質量を持った天体の近くを光が通ると、光には質量がないにも関わらずその軌道が曲げられるという現象である。これは天体付近の時空が曲げられるからであり、この効果により、観測者と光源の間の天体がある種のレンズの役割を果たすことから、この現象は重力レンズ効果と名付けられた。

しかしながら、天文教育は未だ発展途上にあり、重力レンズ効果は天文学を専攻する者にとっては広く知れ渡っているが、一般の方々には認知度は低い。この理由の一つとして、重力レンズを含む宇宙の様々な現象は視覚や感覚に訴え理解するのは難しいことがあげられる。私は、宇宙の様々な現象を数式などを用いずに、視覚や感覚に訴えて一般の人々にも理解させることを目指している。現在、コンピュータやシミュレーションを用いた動画が活躍しているが、実物の教具があれば、より視覚的・感覚的に理解しやすくなり、天文教育に大いに貢献できると考えられる。

そこで本稿では横尾他 (1998) の理論 [2] に基づいて重力レンズ効果による光の折れ曲がりを再現する光学レンズの設計について議論する。さらに、3D プリンターを用いてレンズおよび光学系を製作し、光学的に形成されたアインシュタインリングの半径を測定した。得られた測定結果と実際のアインシュタイン半径との対応を検討するため、導出した縮尺の関係式を用いて両者を比較し、モデルの整合性と再現性について評価を行った。

2 Methods/Instruments and Observations

重力レンズ効果による光の折れ曲がり方は一般相対性理論により計算されており。アインシュタイン方程式は以下で表される。

$$R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ij} \tag{1}$$

ここで R_{ij} は曲率テンソル g_{ij} は計量テンソル T_{ij} は運動量テンソル c は光速 G は万有引力定数である。この式はほとんどの場合、解析的に解くことはできないが、静的、真空、球対称の場合では解くことが出来、その解はシュバルツシルト解と呼ばれ

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)dt^2 \\ &+\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}dr^2 \\ &+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2) \end{aligned} \tag{2}$$

と書くことが出来る。この計量内で運動方程式

$$\frac{d^2x^m}{d\tau^2} + \Gamma^m_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau} = 0 \tag{3}$$

を解く事で重力場内での粒子の運動が求まる。
シュバルツシルト計量内での運動方程式 (3) 式は具体的に

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{1}{l^2}\left(\epsilon^2 - 1\right) + \frac{1}{l^2}u - u^2 + u^3 \qquad (4)$$

と書くことができる。ここで、$u = r_g/r$ であり、r_g はシュバルツシルト半径と呼ばれ $2GM/c^2$ で表される。また l は角運動量 L を規格化した無次元角運動量であり、ϵ はエネルギー E を規格化した無次元エネルギーである。ここで、簡単のため軌道面を $\theta = \pi/2$ とした。光子の運動を考えると、質量 m は 0 の極限をとるので (4) は

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \alpha^{-2} - u^2 + u^3 \qquad (5)$$

となる。ここで α は

$$\alpha^{-2} \equiv \lim_{m\to\infty}\frac{\epsilon^2 - 1}{l^2} = \left(\frac{Er_g}{Lc}\right)^2 \qquad (6)$$

である。この (5) 式が重力場内での光子の軌道運動の式となる。一般相対性理論の効果を表す u^3 の項を無視すると $u = \alpha^{-1}\cos\phi$ となり、α^{-1} は十分小さく、(5) のは重力源の無い直線の解となる。光線が直線からずれる効果を摂動計算から求めるために近似解として

$$u = \alpha^{-1}\cos\phi + \alpha^{-2}f(\phi) \qquad (7)$$

とおく。これを (5) に代入し計算すると

$$f(\phi) = \frac{1}{2}(\sin\phi^2 + 1) \qquad (8)$$

が得られる。これを (7) に代入し直行座標に書き換えると

$$y = \begin{cases} -\alpha(x - \alpha r_g) & (y \gg 0) \\ \alpha(x - \alpha r_g) & (y \ll 0) \end{cases} \qquad (9)$$

となる。これをグラフにすると図 1 のようになる。
図 1 のように θ,δ,y_0,r_0 をとると、$y = 0$ と $x = 0$ を代入することで $r_0 = \alpha r_g$,$y_0 = \alpha^2 r_g$ と求まり、

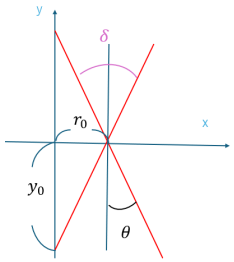


図 1: 弱い重力場近似した重力レンズの光線軌道

$$\tan\theta = \frac{1}{\alpha}$$
$$\theta \simeq \alpha^{-1} \qquad (10)$$

となる。よって、

$$\delta = 2\alpha^{-1} = \frac{r_g}{r_0} = \frac{4GM}{c^2 r_0} \qquad (11)$$

という式が現れる。これが原点を重力源とし、弱い重力場近似した重力レンズ効果による光の折れ曲がり角を表す式となる [1]。後の便宜のために (11) の文字を書き換える。

$$\Delta\theta = \frac{4GM}{c^2 r} \qquad (12)$$

δ を $\Delta\theta$ に、r_0 を r に変えた。ここから先は [2] を参考に議論する。

次に、光学レンズの屈折によりこの軌道を再現する。屈折率 n の材質を考えると、入射角 Ψ と屈折角 Φ の関係はスネルの法則より、$n = \sin\Phi/\sin\Psi$ 十分小さい近似をすると、$n = \phi/\Psi$ となる。したがって触れ角は

$$\Delta\theta = \Phi - \Psi \sim \frac{n-1}{n}\Phi = (n-1)\Psi \qquad (13)$$

となる。(図 2 参照) 光軸からの距離を r、レンズの厚みを z とすると、レンズ表面の勾配は

$$\frac{dz}{dr} = -\tan\Psi \sim -\Psi \qquad (14)$$

が成り立ち、(13) から

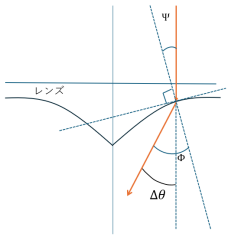


図 2: 等価レンズによる光線の折れ曲がり

$$\frac{dz}{dr} = -\frac{1}{n-1}\Delta\theta \tag{15}$$

となり、(12) を代入すると、

$$\frac{dz}{dr} = -\frac{4GM}{c^2(n-1)}\frac{1}{r} \tag{16}$$

これを積分すると、

$$z = -\frac{4GM}{c^2(n-1)}\ln r + \text{定数} \tag{17}$$

となり、レンズの表面が対数関数になっていればよいことがわかる。

しかし、実際の重力レンズ効果を忠実に再現するためには、式中の質量 M に対応する天体の実際の質量を代入する必要がある。このとき、得られる光線の曲がり角に対応する光学レンズを設計しようとすると、必要とされるレンズのサイズは極めて大きくなり、実験的に製作・取り扱うことが困難となる。したがって、光学的手法に基づく重力レンズ効果の再現を実現可能なものとするためには、レンズサイズを適切に縮小する必要がある。そのため (16) に両辺分母分子を 1/s 倍すると

$$\frac{dz/s}{dr/s} = -\frac{4GM/s}{c^2(n-1)}\frac{1}{r/s} \tag{18}$$

となる。この関係式は、質量 M と空間スケール r,z が共に 1/s 倍されても基礎方程式が不変であることを示している。つまり、レンズサイズを 1/s に縮小することは、対応する重力源の質量を 1/s 倍することと等価であることが分かる。したがって、光学レンズ系を用いて重力レンズ効果を再現する際には、縮小スケールに応じて質量スケールを対応させることで、幾何学的および物理的整合性を保った再現が可能となる。

今考えているシステムのアインシュタイン半径は

$$\theta = \left(\frac{4GM}{c^2}\frac{l}{x(x+l)}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{19}$$

と表せる（図 3）。l は光源から天体までの距離、x は天体から観測者までの距離を表す。本実験では、天体

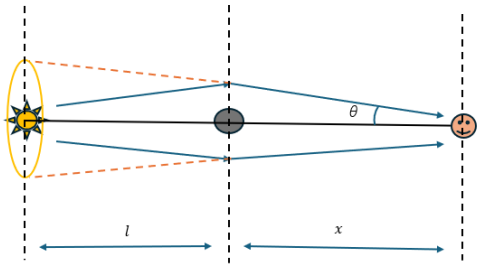


図 3: 重力レンズの幾何

の位置に対応する箇所に光学レンズを配置し、アインシュタイン半径を測定するための光学系を図 4 のように構築した。ここで、x は凸レンズから光学レンズまでの距離、l は光源から光学レンズまでの距離、a は光学レンズから凸レンズまでの距離、b は凸レンズから像（スクリーン）までの距離である。この時、凸レンズの焦点は光学レンズであるため、像として映るアインシュタインリングは凸レンズ上の大きさとなる。つまり、アインシュタイン半径は $x\tan\theta$ となる。a,b は $a = b = 15$cm となるようにして測定した。また、l =2.5cm, 5.0cm, 15.0cm の 3 パターンで測定を行った。

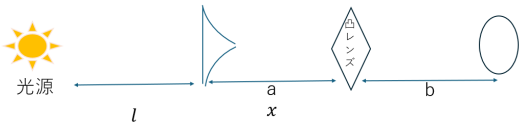


図 4: 設置した光学系

3 Results

表面形状が対数関数に従う光学レンズを、3D プリンターを用いて作製した。まず、3D CAD ソフトウェ

アを用いて本レンズの形状を設計し、スライサーソフトによりコンパイルした後、3D プリンターによって造形を行った。造形には Anycubic 製の高透明樹脂「High Clear Resin」を使用し、その屈折率は n=1.52 である。

(18) 式の変換則に基づくと、半径約 5 cm の光学レンズは、太陽質量の 1/2,000,000 に相当する重力源と等価の光線曲げを再現できると考えられる。式（20）にこの縮小質量を代入し、光源からレンズまでの距離 l をそれぞれ 2.5cm, 5.0cm, 15.0cm とした場合、理論的に得られるアインシュタイン半径はそれぞれ 0.796 cm,1.054 cm,1.493 cm となる。

一方、製作した光学レンズを用いた実験により得られたアインシュタイン半径は、それぞれ 1.850 cm、1.375 cm、1.150 cm であった（図 5 参照）。これらの結果は理論値とおおむね同程度ので一致しており、レンズ形状の妥当性および光線曲げの再現性を示唆している。

光源からレンズまでの距離l(cm)	アインシュタイン半径の実測値(cm)	アインシュタイン半径の理論値(cm)
15	1.85	1.493
5	1.375	1.054
2.5	1.15	0.796

図 5: 測定結果と 1/2000000 太陽質量でのアインシュタイン半径

4 Conclusion

重力レンズ効果によって曲げられる光線の軌道は、式 (12) によって記述され、その軌道を再現する光学レンズの表面形状は、文献 [2] 式 (17) により理論的に導出されることが示されている。

本研究では、半径約 5 cm の光学レンズを製作し、それにより太陽質量の 1/2,000,000 に相当するブラックホールによる重力レンズ効果を模擬的に再現した。図 4 に示す光学系を用いてアインシュタイン半径を測定した結果、図 5 に示すように、理論値と実測値は同程度一致しており、設計したレンズ形状の妥当性および光線の曲がり角の再現性が確認された。

Acknowledgement

天文・天体物理若手夏の学校を運営して下さったスタッフの方々、支援して下さった方々に心より感謝申し上げます。また天文・天体物理若手夏の学校に参加するにあたって、ご指導ご鞭撻のほどをしてくださった、先生方、同じ宇宙理論研究室の皆様に心より感謝申し上げます。

Reference

[1] 佐藤勝彦 1996, 岩波書店

[2] 横尾武夫, 加藤好博, 蜂谷正雄,& 福江純 1998, 天文月報

——index へ戻る

SP-03

Could Gravitational Waves Unlock the Inflaton Sector?

総合研究大学院大学
辻　天太

Could Gravitational Waves Unlock the Inflaton Sector?

辻 天太 (KEK Theory Center)

Abstract

The scale of the inflaton sector can be as high as 10^{16} GeV, comparable to physics beyond the Standard Model such as supersymmetry and grand unification, and may offer clues to outstanding cosmological puzzles—like the matter–antimatter asymmetry and the nature of dark matter. In other words, the inflaton sector lies at the nexus of beyond the Standard Model(BSM) physics and unresolved questions in cosmology, yet its detailed structure remains unknown. Gravitational waves produced during reheating may be the key to unlocking this structure, probing both the inflaton potential and its interactions. In this work, I will discuss recent progress in probing the inflaton sector through High-Frequency Gravitational Waves.

1 Introduction

Cosmic inflation offers an elegant solution to several problems of the standard Big Bang cosmology, such as the horizon and flatness problems, while also providing the primordial seeds for large-scale structure formation.

However, the microscopic origin of the inflaton sector remains unknown. What is known is the energy scale of inflation, which is constrained by inflationary observables. According to the Planck 2018 and BICEP/Keck results, this scale can reach up to 10^{16} GeV. This is comparable to energy scales associated with physics beyond the Standard Model (BSM), such as supersymmetry or grand unification. Therefore, exploring the inflaton sector may not only shed light on the early Universe, but also provide valuable clues about fundamental particle physics.

After inflation ends, the energy stored in the inflaton field must be transferred to radiation, eventually forming a thermal bath—a process known as reheating. Reheating can probe important aspects of the inflaton sector, such as the shape of the inflaton potential near its minimum and the couplings between the inflaton and other fields.

Interestingly, gravitons may also be produced during reheating via perturbative processes. These gravitational waves can carry direct information about the inflaton sector, and may be detectable by future high-frequency gravitational wave detectors.

In this work, I will review several scenarios proposed in the literature [3, 4, 5, 6, 9], and present the related open questions as well as our ongoing work.

2 Post-Inflationary Gravitational Waves

After inflation, the Universe is dominated by the inflaton condensate ϕ. As mentioned in the introduction, gravitons—appearing as high-frequency gravitational waves (GWs)—can be produced via decay or scattering processes during reheating.

In this section, we briefly review how to compute such GWs. The GW spectrum can be evaluated using the Boltzmann equation, owing to the weak coupling of gravitons.

Denoting the phase-space distribution function of gravitons by $f_h(t,k)$, where k is the graviton momentum, the Boltzmann equation takes the form

$$\left[\partial_t - Hk\frac{\partial}{\partial k}\right] f_h(t,k) = \Gamma_h(f_h, a, k), \qquad (1)$$

where Γ_h is the collision term describing graviton production.

A detailed derivation of the collision term can be found in Ref. [10]. Due to the weakness of gravitational interactions, we can safely assume that the collision term depends only on a and k, and is independent of f_h.

Under this assumption, Eq. (1) can be solved analytically as

$$f_h(a,k) = \int_{a_{\rm end}}^{a} \frac{da'}{a'H(a')} \Gamma_h \left(a', \frac{ak}{a'}\right). \quad (2)$$

The present-day GW spectrum as a function of frequency $f = k/2\pi$ is then given by

$$\Omega_{\rm GW}(f) = \frac{1}{\rho_c}\frac{d\rho_h}{d\ln k} = 8\pi^2 g_h \frac{f^4}{\rho_c} f_h(f), \quad (3)$$

where f_h is evaluated today, $g_h = 2$ is the number of graviton polarizations, and ρ_c is the critical density.

Several specific mechanisms for graviton production during reheating can be considered:

1. Bremsstrahlung: $\phi \to \chi + \chi + h$
2. Inflaton annihilation: $\phi + \phi \to h + h$
3. Inflaton decay: $\phi \to h + h$
4. Thermal emission: $\chi + \chi \to \chi + h$
5. Other processes (preheating etc..)

In this work, we focus on the contributions from processes (1)–(3) as benchmark scenarios.

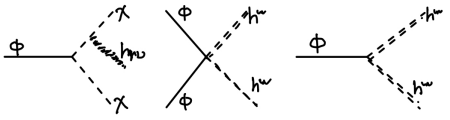


図 1: relevant diagram to produce GW from inflaton

2.1 Inflaton Bremsstrahlung

In order to produce a hot universe after inflation, the inflaton field ϕ must be unstable and possess a finite decay rate Γ_ϕ. Although the exact form of Γ_ϕ is model-dependent and generally unknown, the decay rate from Fig. 1 associated with bremsstrahlung processes universally takes the form

$$\Gamma_{\rm br} \sim \Gamma_\phi \times \left(\frac{1}{16\pi^2}\frac{m^2}{M_{\rm pl}^2}\int^{m/2}\frac{d\omega}{\omega}\right), \quad (4)$$

where m is the mass of the inflaton.

From this relation, the differential energy fraction of gravitational waves at reheating is given by

$$\frac{d\left[\rho_{\rm GW}(T_R)/\rho_R(T_R)\right]}{dE_\omega} = \frac{1}{16\pi^2}\frac{M}{M_{\rm pl}^2}(1-2x)^2, \quad (5)$$

where $x \equiv E_\omega/m$. The important point is that this expression does not depend on the coupling constant. Therefore, the resulting GW spectrum from inflaton bremsstrahlung is given by

$$\begin{aligned}\Omega_{\rm GW}(f) &= \Omega_\gamma^{(0)} \frac{d\left[\rho_{\rm GW}(T_R)/\rho_R(T_R)\right]}{d\ln f} \\ &\sim 10^{-11}\left(\frac{T_R}{10^{13}\,{\rm GeV}}\right)\left(\frac{m}{M_{\rm pl}}\right)\left(\frac{f}{10^{12}\,{\rm Hz}}\right) \\ &\quad \times \left(1-\frac{f}{f_*}\right)^2,\end{aligned} \quad (6)$$

where f_* is the maximal frequency of the spectrum, estimated as

$$f_* = \frac{M}{4\pi}\cdot\frac{T_0}{T_R}\left(\frac{g_s^*(T_0)}{g_s^*(T_R)}\right)^{1/3}, \quad (7)$$

and the peak frequency is roughly given by $f_{\rm peak} \sim \frac{1}{3}f_*$.

2.2 Inflaton Annihilation

In this section, we calculate the gravitational wave (GW) spectrum originating from the inflaton annihilation process $\phi + \phi \to h + h$.

The key point is that the coherent oscillation of the inflaton field during reheating leads to gravitational wave production, which can be interpreted as inflaton annihilation into gravitons [7]. Accordingly, the GW spectrum can be computed using either the Boltzmann or the Bogoliubov approach [**?**]. In this work, we follow the Boltzmann approach as discussed above.

From Fig. 1, we obtain the collision term as

$$\Gamma_h = 2\cdot\frac{\pi}{64}\frac{\rho_\phi^2}{m^2 M_{\rm pl}^2}\delta(\omega - m). \quad (8)$$

Substituting this into Eq. (2), the phase-space distribution function of gravitons at the end of reheating is given by

$$f_h(a_{\rm rh},k)=2\cdot\frac{9\pi}{64}\left(\frac{H_{\rm end}}{m}\right)^3\left(\frac{a_{\rm end}}{a_{\rm rh}}\cdot\frac{m}{k}\right)^{9/2}. \quad (9)$$

Due to the exponential suppression of the inflaton number density after reheating, we can safely neglect the contribution from the regime $a > a_{\rm rh}$ when computing the GW spectrum.

Under this assumption, the present-day GW spectrum becomes

$$\begin{aligned}\Omega_{\rm GW}(f)&=8\pi^2 g_h\frac{f^4}{\rho_c}f_h(a_0,k)\\&=8\pi^2 g_h\frac{f^4}{\rho_c}f_h\left(a_{\rm rh},k\frac{a_0}{a_{\rm rh}}\right)\\&\sim 10^{-21}\left(\frac{m}{10^{13}\ {\rm GeV}}\cdot\frac{T_R}{10^{13}\ {\rm GeV}}\right)^{3/2}\\&\times\left(\frac{\rm GHz}{f}\right)^{1/2}\cdot g(k),\end{aligned} \quad (10)$$

where the spectral shape function $g(k)$ is defined as

$$g(k)=\left[1+\left(\frac{k}{k_{high}}\right)^{1/2}\right]\exp\left[-\frac{k^2}{k_{\rm high}^2}\right]. \quad (11)$$

2.3 Inflaton decay

In this section, we calculate GW spectrum originated from the inflaton decay process $\phi\to h+h$. We begin by summarizing the relevant terms in the Lagrangian that involve nonminimal couplings between the inflaton and gravity:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\sim\ &c_1\phi R+c_2\phi R^2+c_3\phi R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}+c_4\phi R_{\mu\nu}\tilde{R}^{\mu\nu}\\&+c_5\phi R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma}+c_6\phi R^{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{R}_{\mu\nu\rho\sigma}\end{aligned} \quad (12)$$

The first four terms do not contribute due to the on-shell conditions $R=0$ and $R^{\mu\nu}=0$. Thus, only the fifth and sixth terms can induce the decay of the inflaton into a pair of gravitons.

In other words, such a decay can only be mediated by higher-dimensional operators. Some models predict the existence of such couplings. One possibility is that the inflaton is the lightest particle in a dark sector that interacts with the Standard Model (SM) solely through gravity. In this case, a dimension-five operator is expected to arise from integrating out particles heavier than the inflaton.

A detailed derivation of the scalar coupling to quadratic curvature terms by integrating out heavy fields from renormalizable interactions is beyond the scope of this work, so we simply quote the result.

Starting from a scalar field theory coupled to a fermion,

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}\ \bar{\psi}\left[i\gamma^\mu\nabla_\mu-m_\psi-\lambda\phi\right]\psi, \quad (13)$$

we obtain the effective Lagrangian by integrating out the fermion field [4]:

$$\mathcal{L}_{\rm eff}=-\frac{7}{360}\frac{1}{16\pi^2}\frac{\lambda\phi}{m_\psi}R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (14)$$

It is convenient to define a new scale Λ such that

$$\frac{1}{\Lambda}=\frac{7}{360}\cdot\frac{1}{16\pi^2}\cdot\frac{\lambda}{m_\psi}, \quad (15)$$

in which case the decay rate of the inflaton into a pair of gravitons (Fig. 1) is given by

$$\Gamma(\phi\to 2h)=\frac{1}{4\pi}\frac{m_\phi^7}{\Lambda^2 M_{\rm pl}^4}. \quad (16)$$

If the inflaton couples to the Standard Model (SM) only via gravitational interactions, its decay into SM particles proceeds through virtual one-graviton exchange. As a result, the decay rate is expected to be suppressed by four powers of the Planck mass:

$$\Gamma_{\rm SM}\sim\frac{g_* M}{4\pi}\left(\frac{M}{M_{\rm pl}}\right)^4. \quad (17)$$

In this case, the characteristic frequency of the associated gravitational waves is given by

$$f_{\rm rh}=\frac{M}{4\pi}\left(\frac{a_{\rm rh}}{a_0}\right)\sim T_0\left(\frac{M_{\rm pl}}{M}\right)^{3/2}. \quad (18)$$

This expression shows that the typical frequency of gravitational waves produced in this process is much higher than T_0 itself. Accordingly, the resulting GW spectrum can be approximately described by

$$\Omega_{\rm GW}\sim 10^{-14}\left(\frac{10^{18}\ {\rm GeV}}{\Lambda}\right)^2\left(\frac{m}{10^{13}\ {\rm GeV}}\right)^2. \quad (19)$$

To more accurately capture the full dynamics during reheating, one can take into account contributions from both the early and late stages of the epoch (corresponding to $a < a_{\rm rh}$ and $a > a_{\rm rh}$). In this case, the GW spectrum is better described by

$$\Omega_{\rm GW}(f) \sim 10^{-14} \left(\frac{10^{18}\ {\rm GeV}}{\Lambda}\right)^2 \left(\frac{m}{10^{13}\ {\rm GeV}}\right)^2 g(f), \tag{20}$$

where the spectral shape function $g(f)$ is given by

$$g(f) = \left(\frac{f}{f_{\rm rh}}\right)^{5/2} \exp\left[-\left(\frac{f}{f_{\rm rh}}\right)^{5/2}\right]. \tag{21}$$

From this analysis, we find that if the mass scale of the heavy particles is sufficiently low, the direct decay of the inflaton can produce a significant amount of gravitational waves.

3 Results

We summarize our results in Fig. 2.

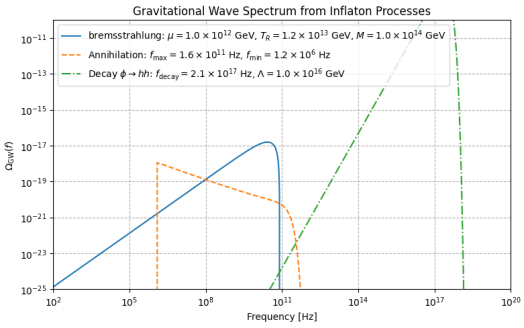


図 2: Gravitational Wave Spectrum from Reheating Processes

4 Discussion and Conclusion

In this work, we have computed the gravitational wave (GW) spectrum produced during reheating. The resulting spectrum is sensitive to key properties of the inflaton sector, such as its mass and decay rate. Thus, the detection of such GWs could offer valuable insights into the nature of the inflaton. Gravitational waves may serve as a powerful probe—or a “shotgun approach”—to explore this otherwise hidden sector.

Nonetheless, several open issues remain. First, our analysis assumes a simple chaotic potential, ϕ^2. Modifying the inflaton potential can alter the GW spectrum in a nontrivial way, and exploring this dependence may help constrain the shape of the potential.

Second, in the bremsstrahlung scenario, we included super-horizon modes in our computation. However, for such long wavelengths, spacetime curvature effects become important and cannot be neglected. Our treatment is therefore valid only for sub-horizon modes. This limitation is especially relevant for future experiments, as current detector designs lack sensitivity to the high-frequency regime [2]. In such cases, the soft tail of the spectrum may provide the most accessible observational window.

Reference

[1] Towards the Theory of Reheating After Inflation, arXiv:9704452

[2] Detecting High-Frequency Gravitational Waves with Microwave Cavities, arXiv:2112.11465

[3] Stochastic Gravitational Waves from Particle Origin, arXiv:1810.04975

[4] Scalar field couplings to quadratic curvature and decay into gravitons, arXiv:2112.12774

[5] Optical gravitational waves as signals of Gravitationally-Decaying Particles, arXiv:2501.09794

[6] High-frequency Graviton from Inflaton Oscillation, arXiv:2006.09972

[7] Gravitational effects on Inflaton decay, arXiv:1502.02475

[8] Boltzmann or Bogoliubov? Approaches Compared in Gravitational Particle Production, arXiv:2206.10929

[9] Full-Spectrum Analysis of Gravitational Wave Production from Inflation to Reheating, arXiv:2505.08868

[10] 宇宙論の物理, ISBN:978-4-13-062615-6

——index へ戻る

SP-04

3次元重力崩壊型超新星モデルに基づく重力波解析

福岡大学
久賀　紳ノ介

3 次元重力崩壊型超新星モデルに基づく重力波解析

久賀 紳ノ介 (福岡大学大学院 理学研究科)

Abstract

重力波は 2015 年に世界で初めて検出されて以来，これまでに 200 件以上のイベントが確認されている．これらは主にブラックホールや中性子星の連星系から放出されたものと考えられている．一方で，重力波の発生源として重力崩壊型超新星も候補に挙げられているが，振幅の小ささや発生頻度の低さなどの理由から，いまだ観測に成功していない．重力崩壊型超新星から放出される重力波を調査することで，近年の理論研究において重要視されている超新星中心部での非対称的な流体運動を解明する手がかりを得ることができる．最近の研究（Nakamura et al. （2025））では、弱磁場を想定し，磁気流体力学に基づく 3 次元の重力崩壊型超新星シミュレーションが実施された．この研究では，超新星ダイナミクスや原始中性子星のキック速度などに焦点が当てられ，多様な親星モデルに対して系統的な議論行われている．

そこで本研究では，Nakamura et al. （2025）で実施された 24 太陽質量の親星モデルに対する超新星シミュレーションに基づき，重力波の振幅やスペクトル特性を解析し，その結果について議論する．

1 Introduction

重力波とは時空の歪みが波として伝播する現象である．その存在は一般相対性理論により予言されており，2015 年 5 月 19 日にブラックホール連星合体による重力波イベントの初観測により存在が証明された．以降世界各地で観測が進められ，検出機の感度が向上した現在では，200 以上のイベントが観測されている．しかし，重力崩壊型超新星からの重力波は未だに観測されておらず，もし検出が実現されれば，重力崩壊型超新星の爆発メカニズムや原始中性子星（Proto-neutron stars; PNS）・ブラックホールの形成過程等の様々な情報が得られると期待されている．

重力崩壊型超新星による重力波の検出情報を最大限活用するためには，重力波の発生源やその特性の評価が最も重要である．そこで本研究では超新星重力波の解析領域を 5 つに分割し，各領域におけるスペクトル特性や重力波のエネルギー放出率について議論していく．

2 Methods

2.1 セットアップ

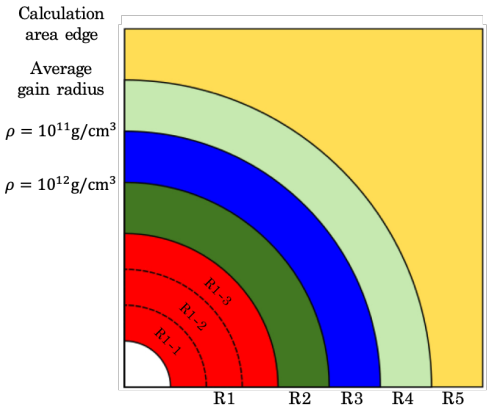
本研究で用いるセットアップは，Nakamura et al. (2025) に準じる．ここではその概要を示す．数値計算コードとして，重力崩壊型超新星の研究のために構築された 3DnSNe code に，磁気流体力学を考慮した数値コード (Matsumoto et al. 2020) を使用する．このコードはニュートリノ輸送や一般相対論的効果を考慮し，Nakamura et al. (2025) では，重力崩壊計算に弱い磁場が考慮されている．親星モデルは，太陽金属量かつ無回転の単独星である 24 太陽質量モデル (Sukhbold et al. 2016) を採用する．

2.2 重力波振幅の計算

本研究では，重力波の振幅を四重極公式に基づいて算出する. 四重極モーメントテンソル I_{ij} の 2 階時間微分によって重力波は記述でき，放射源から距離 r 離れた点における重力波振幅は以下の式で与えられる．

$$h_{ij}^{TT}(t,\mathbf{x}) = \frac{2G}{c^4 r}\frac{d^2}{dt^2} I_{ij}^{TT}(t - r/c) \qquad (1)$$

ここで,I_{ij}^{TT} はトランスバース・トレースレスを施した四重極テンソルであり,G は重力定数,c は光速で



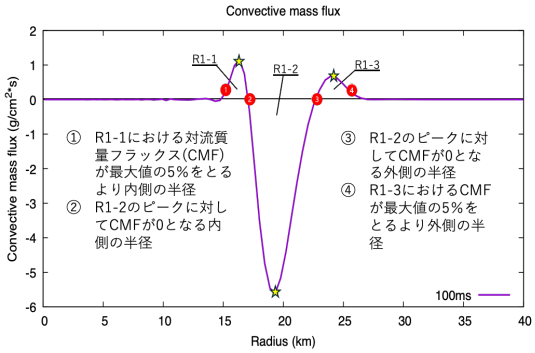


図 1　左図：計算領域を 5 つに分割した定義の概略図　右図：R1 を 3 つに分割した際の定義を示した対流質量フラックス (100ms) の図.

ある．　四重極モーメント I_{ij} は質量密度 ρ と座標 x^i を用いて次式で定義される．

$$I_{ij}(t) = \int \rho(t, \mathbf{x}) \left(x_i x_j - \frac{1}{3}\delta_{ij} r^2 \right) d^3x \qquad (2)$$

本研究では, この式に基づいてシミュレーションデータから I_{ij} を計算し, その時間 2 階微分を数値的に評価することで重力波の波形を得る．

2.3　領域分割の定義

重力波源となる超新星内部領域の分割として，Anthony Mezzacappa et al. (2023) や R. Daniel Murphy et al. (2025) の手法を参照する．さらに PNS 対流が生じる領域を，主要な対流層とオーバーシュート層とに分割する．以下は各領域境界の定義である (図 1)．

- 領域 1（R1）：内側と外側にあるオーバーシュート層の端でそれぞれ境界を定義する．(図 1 右図参照)．
- 領域 2（R2）：R1 の外側の境界から密度 $\rho = 10^{12}$ g/cm^3 で定義する．
- 領域 3（R3）：R2 の外側の領域から密度 $\rho = 10^{11}$ g/cm^3 で定義する．
- 領域 4（R4）：R3 の外側の境界から平均ゲイン半径までの領域で定義する．
- 領域 5（R5）：平均ゲイン半径から計算領域の端までで定義する．

これに加え R1 を更に分割する．上の右図は解析を行ったデータの 100ms での対流質量フラックス (Convectional mass flux; CMF) である．対流層に対しオーバーシュート層が内側と外側にそれぞれ確認でき，これらを基に領域の分解を行う．

- 領域 1-1（R1-1）：R1-1 における CMF が最大値の 5 %をとる内側の半径で境界を定義し，R1-2 のピークに対して CMF が 0 となる内側の半径で境界を定義する．
- 領域 1-2（R1-2）：R1-1 の外側の境界から R1-2 のピークに対して CMF が 0 となる外側の半径で境界を定義する．
- 領域 1-3（R1-3）：R1-2 の外側の境界から，R1-3 における CMF が最大値の 5 %をとるより外側の半径で境界を定義する．

3　Results

最新の 3 次元の重力崩壊型超新星シミュレーション（Nakamura et al. (2025)）を用いて，放出される重力波の振幅およびエネルギー放出率の解析を行う．特に，超新星内部を複数の領域に分割し，各領域ごとの重力波特性に着目して議論する．

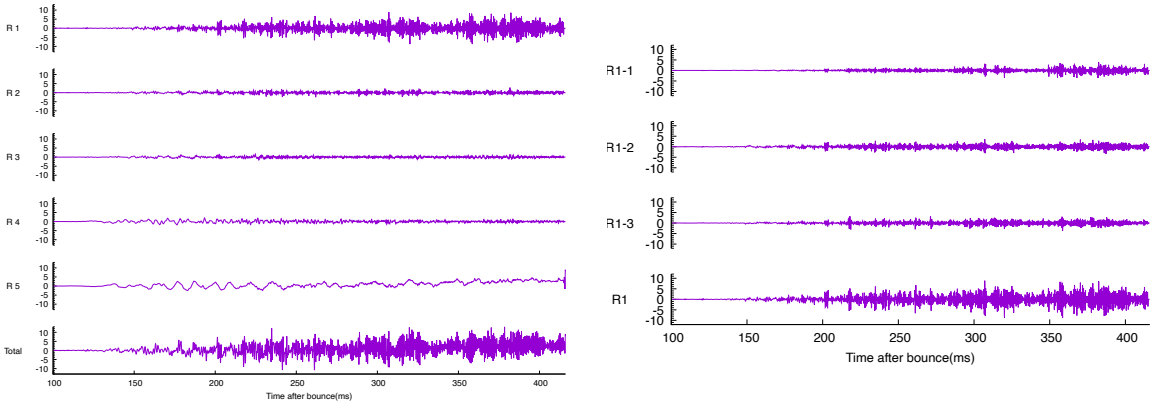


図 2　領域別の重力波振幅（+ モード，軸方向）．　左：5 領域　右：R1 を 3 分割した領域

3.1　重力波振幅

図 2 は各領域における軸方向から見たプラスモードの重力波振幅を示している．PNS 対流が生じる R1 からの振幅が最も大きく，全領域から得られる重力波と比較すると R1 が主要な重力波源であることが分かる．また R2，R3，R4 から生じる重力波の振幅は比較的小さく，これらの領域の寄与はわずかである．さらに R5 からの重力波は周波数は小さく，振幅が大きいと分かる．これは領域全体の重力波と比較しても影響が大きく，定在降着衝撃波不安定性 (Standing accretion shock instability; SASI) による寄与である．特に全領域の重力波振幅における時刻約 150-250ms，320ms，360ms に，R5 の重力波による寄与が反映されている．また右図は R1 を 3 分割した場合の各領域における重力波振幅である．R1 の重力波信号は，初期では主要な PNS 対流層 R1-2 と外側のオーバーシュート層 R1-3 が支配的である．しかし，R1-1 の 350ms 以降は，R1-2，R1-3 と同程度の重力波振幅を持ち，反跳後時間が経つほど R1 の各領域内で出力の差は無くなっている．

3.2　重力波エネルギー放射率

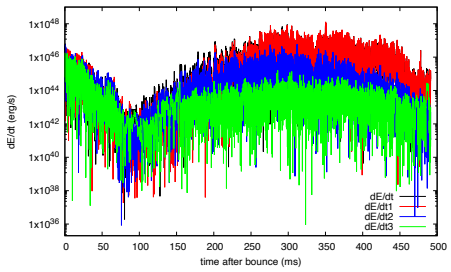


図 3　エネルギー放出率の時間発展（dE/dt）．中心〜R1（dE/dt1），R2〜R4（dE/dt2），R5〜衝撃波面（dE/dt3）．

図 3 には，領域別の重力波によるエネルギー放射率を示している．反跳直後（0-70ms）では，3 つの領域は同程度の放射率を示しており，いずれも同様の減少傾向を示している．その後の放射率は各領域で特徴が異なり，最も外側である R5 におけるエネルギー放射率（dE/dt3）は，最大でも約 1×10^{45}erg にとどまる．またより中心の領域から発生する重力波のエネルギー放射率 dE/dt1 および dE/dt2 は，時刻 100ms-200ms の増加率が比較的高い．一方で時刻 200ms 以降では，dE/dt2 のピークが 1×10^{46} erg に対して、dE/dt1 ではピークが 1×10^{48} erg にも達しており，最も高い，この原因は，PNS 対流が重力波のエネルギー放射率に大きく寄与しているためである．

3.3 スペクトル特性

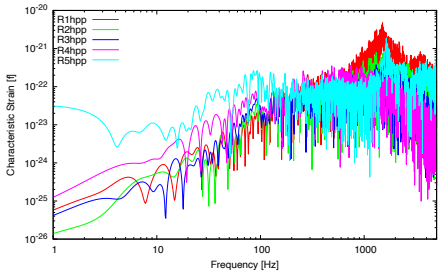


図 4　5 領域の重力波のスペクトル密度のグラフ.

図 4 は各領域における重力波のスペクトル密度のグラフである．100Hz あたりまでの低周波数帯では R5 のスペクトル振幅が最も大きく，これは SASI による寄与がこの周波数帯で大きいことが原因である．一方で 100-600Hz の周波数帯では，各領域のスペクトルは同程度の寄与を示す．さらに 1000Hz という高周波数帯では，R1 による寄与が支配的であり，5×10^{-21}f に達する．これは PNS 対流層・オーバーシュート層による寄与がこの周波数帯で大きいためである．R2 も R1 に影響を受けるような増加の仕方が見られるが 1×10^{-21}f ほどにとどまっており，内側の対流運動に影響を受けていることが示唆される．R3 と R4 は振る舞いが似通っており，どちらも最大は 5×10^{-22}f ほどにとどまり 1000Hz 以降の周波数帯では R4 の方が減衰が大きい．R5 は 1000Hz あたりまでスペクトル振幅は 1×10^{-22} 10^{-21}f あたりにとどまっているが，R1 のピークに対応するように急激な増加が見られピークに達する．その後も R1 と似た振る舞いが見られ，3000Hz 付近まで減少傾向を示し，その後再び増加を示している．

4 Conclusion

本研究では，非回転単独星の親星モデル（24 太陽質量）に対して数値計算が行われた，最新の 3 次元の重力崩壊型超新星シミュレーショ ン (Nakamura et al.(2025) を用いて，重力波信号の解析を実施した。特に超新星内部を複数の領域に分割し，各領域における重力波特性について詳細な解析を行った．

重力波の振幅・エネルギー放射率では，PNS 対流が生じる中心領域（R1）による寄与が支配的であることが明らかとなった．特に対流層の影響はもちろんだが，前後のオーバーシュート層の影響も無視できない規模のものであった．また重力波のスペクトル密度から，平均ゲイン半径より外側の領域（R5）は主に低周波数帯での寄与が目立ち，反跳後に SASI が活性化する頃合いでの増加が顕著であった．これらの特性の時間変化から，PNS 対流の発達や SASI の発達が重力波信号に与える影響が支配的であることが明らかとなった．

今後の研究では，分割した各領域に対しモード分解を行い，どのモードが重力波放出に影響を与えているかの具体的な寄与を明らかにする予定である．

Reference

Ko Nakamura et al. MNRAS 536, 280-294, (2025)
J. Matsumoto et al. MNRAS 499, 4174-4194, (2020)
Sukhbold et al. ApJ 821 38, (2016)
R. D. Murphy et al. Phys.Rev.D, (in press) (2025)

——index へ戻る

SP-05

正規直交化した準固有振動モードを用いたブラックホールリングダウン重力波データ解析に対する準解析的なアプローチ

東京大学
鈴木　幹基

正規直交化した準固有振動モードを用いたブラックホールリングダウン重力波データ解析に対する準解析的なアプローチ

鈴木 幹基 (東京大学大学院 理学系研究科, 宇宙線研究所)
森崎宗一郎 (東大宇宙線研), 本橋隼人 (東京都立大), 度會大貴 (東大 RESCEU)

Abstract

本発表は [1] に基づいて行う．ブラックホール (BH) 連星の合体後に生じる BH は重力波を放出しながら減衰振動し，定常状態に落ち着く．この過程は ringdown と呼ばれる．Ringdown 重力波は，準固有振動モード (QNM) と呼ばれる減衰振動モードの重ね合わせでモデル化される．減衰振動を特徴づける減衰率と振動数は合体後の BH の質量とスピンによって一意に定まる．Ringdown 重力波データから複数の QNMs が検出されると，それらの減衰率と振動数の整合性を検証することで，一般相対論の検証を行うことができる．このような方法は BH spectroscopy と呼ばれる．ところが，多くのモードを含んだ ringdown 重力波解析は，パラメータの相関と計算コストの増大をもたらす．このような問題を解決するために，我々は正規直交化した QNM を用いた新たな解析方法を構築した．この解析方法を模擬波形や数値相対論波形について適用して，パラメータの相関の減少と計算コストの削減を確認した．本発表では，この解析方法の詳細について述べるとともに，模擬波形や数値相対論波形に対する適用結果を紹介する．

1 Introduction

重力波は, 時空の歪みが波として伝播する現象である．LIGO–Virgo–KAGRA コラボレーションは, 現在進行中の第 4 次共同観測運転までに数百の重力波信号を観測し, そのほとんどは連星 BH の合体時に放出される重力波であると考えられている．Ringdown 重力波は，連星 BH が合体した後にできた BH が減衰振動を伴いながら放出する重力波である．この重力波波形は，QNM と呼ばれる減衰振動モードの重ね合わせでモデル化される．一般相対論では，この減衰振動モードを特徴づける減衰率と振動数は，合体後の BH の質量とスピンによって一意に定まる．従って，観測データから複数の QNMs が観測できると，それらの減衰率と振動数の整合性を検証することによって，一般相対論の検証を行うことができる．このような手法は，BH spectroscopy と呼ばれる．

今後，さらに重力波検出器の感度が向上すると，より多くの QNMs が観測されることが期待される．ところが，多くの QNMs を含んだリングダウン解析は主に以下のような問題を生む．一つは，解析に含まれるモードを増やすことによって，推定するべきパラメータの数が増え，計算コストが増大するという問題である．また，QNMs は直交化されていないので，それぞれのモードが相関を持ち，どのモードが存在するかを推定しづらくなってしまう．そのため，もう一つの問題は，解析に含むモードが増えると，そのような相関が強まって，観測データから QNMs を引き抜くことが難しくなってしまうという問題である．そこで我々は，正規直交化した QNM の波形を用いることによって，そのような相関を減少させる方法を構築した．また，この方法では，likelihood を振幅について解析的に積分することが可能であり，計算コストを大幅に削減することができる．

2 Methods

Ringdown 重力波の strain $h(t)$ を

$$h(t) = h_+(t) + ih_\times(t) = \sum_{\ell=2}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\mathcal{C}_{\ell mn}e^{-i\tilde{\omega}_{\ell mn}t}S_{\ell mn} + \mathcal{C}'_{\ell mn}e^{i\tilde{\omega}_{\ell mn}t}S'_{\ell mn}\right] \quad (1)$$

とする．ここで，$h_+, h_\times$ は重力波の $+$，$\times$ の偏光モードの strain を表す．また，$\mathcal{C}_{\ell mn}, \mathcal{C}'_{\ell mn}$ は複素振幅で，$\tilde{\omega}_{\ell mn} = \omega_{\ell mn} - i/\tau_{\ell mn}$ は BH の質量 M_f とスピン χ_f で決まる複素振動数である．$S_{\ell mn}$ はスピンウェイトが 2 のスピンで重み付けされた楕円体調和関数である．$m > 0$ は prograde モード，$m < 0$ は

retrograde モードに対応する．また，n は overtone のインデックスである．

I 番目の検出器で観測された重力波の strain は，

$$h^I(t) = \mathrm{Re}[F^I h(t - t^I_{\rm S})], \tag{2}$$

で表される．ここで，$F^I = F^I_+ - iF^I_\times$ は検出器のアンテナパターン関数，$t^I_{\rm S}$ は解析開始時刻である．式 (1) を式 (2) に代入すると，

$$h^I(t) = \sum_{\ell mn}\sum_{j=0}^{3} c_{j,\ell mn} v^I_{j,\ell mn}(t), \tag{3}$$

を得る．ここで，

$$\begin{aligned}
c_{0,\ell mn} &= \mathrm{Re}\left[\mathcal{C}_{\ell mn} S_{\ell mn} + \mathcal{C}'_{\ell mn} S'_{\ell mn}\right], \\
c_{1,\ell mn} &= \mathrm{Im}\left[\mathcal{C}_{\ell mn} S_{\ell mn} - \mathcal{C}'_{\ell mn} S'_{\ell mn}\right], \\
c_{2,\ell mn} &= \mathrm{Im}\left[\mathcal{C}_{\ell mn} S_{\ell mn} + \mathcal{C}'_{\ell mn} S'_{\ell mn}\right], \\
c_{1,\ell mn} &= \mathrm{Re}\left[-\mathcal{C}_{\ell mn} S_{\ell mn} + \mathcal{C}'_{\ell mn} S'_{\ell mn}\right],
\end{aligned}$$

であり，基底は，

$$\begin{aligned}
v^I_{0,\ell mn}(t) &= F^I_+ e^{-\frac{t-t^I_{\rm S}}{\tau_{\ell mn}}} \cos\big(\omega_{\ell mn}(t - t^I_{\rm S})\big), \\
v^I_{1,\ell mn}(t) &= F^I_+ e^{-\frac{t-t^I_{\rm S}}{\tau_{\ell mn}}} \sin\big(\omega_{\ell mn}(t - t^I_{\rm S})\big), \\
v^I_{2,\ell mn}(t) &= F^I_\times e^{-\frac{t-t^I_{\rm S}}{\tau_{\ell mn}}} \cos\big(\omega_{\ell mn}(t - t^I_{\rm S})\big), \\
v^I_{3,\ell mn}(t) &= F^I_\times e^{-\frac{t-t^I_{\rm S}}{\tau_{\ell mn}}} \sin\big(\omega_{\ell mn}(t - t^I_{\rm S})\big),
\end{aligned}$$

で与えられる．観測データが 1 つの検出器からのみ得られた場合，あるいは複数の検出器の向きがほとんど揃っている場合，$v^I_{2,\ell mn}$ と $v^I_{3,\ell mn}$ は，$v^I_{0,\ell mn}$ と $v^I_{1,\ell mn}$ と縮退する．そこで，$D = 2, 4$ を QNM ごとの基底の数とし，最終的に I 番目の検出器で観測された重力波の strain を

$$h^I(t) = \sum_{\ell mn}\sum_{j=0}^{D-1} c_{j,\ell mn} v^I_{j,\ell mn}(t),$$

でモデル化する．

検出器のノイズが定常 Gauss ノイズだと仮定すると likelihood は，

$$\ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{d} - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{d} - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\theta})), \tag{4}$$

で与えられる．ここで，パラメータをまとめて $\boldsymbol{\theta} = \{M_f, \chi_f, c_{0,\ell mn}, c_{1,\ell mn}, \ldots\}$ とし，noise-weighted innter product を

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \equiv \sum_I (\boldsymbol{a}^I)^{\rm T} (R^I)^{-1} \boldsymbol{b}^I,$$

とした．R^I は noise covariance matrix である．また，$\boldsymbol{d}^I$ と $\boldsymbol{h}^I$ は I 番目の検出器に対応する観測データとテンプレート波形のベクトルで，

$$\boldsymbol{d}^I = \begin{pmatrix} d^I(t^I_0) \\ d^I(t^I_1) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{h}^I(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} h^I(t^I_0; \boldsymbol{\theta}) \\ h^I(t^I_1; \boldsymbol{\theta}) \\ \vdots \end{pmatrix},$$

で与えられる．ここで，t^I_i は I 番目の検出器の i 番目の時間サンプルを表す．式 (3) を式 (4) に代入すると，likelihood は，

$$\ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = (V, \boldsymbol{d})^{\rm T} \boldsymbol{c} - \frac{1}{2} \boldsymbol{c}^{\rm T} (V, V) \boldsymbol{c} + \text{const.}, \tag{5}$$

となる．ここで，テンプレートの基底とその振幅のベクトルを

$$\begin{aligned}
V &\equiv (\boldsymbol{v}_{0,\ell_0 m_0 n_0}, \ldots, \boldsymbol{v}_{D-1,\ell_0 m_0 n_0}, \boldsymbol{v}_{0,\ell_1 m_1 n_1}, \ldots), \\
\boldsymbol{c} &\equiv (c_{0,\ell_0 m_0 m_0}, \ldots, c_{D-1,\ell_0 m_0 n_0}, c_{0,\ell_1 m_1 n_1}, \ldots)^{\rm T},
\end{aligned}$$

とした．ここで，テンプレートの基底 $\boldsymbol{v}_{j,\ell mn}$ を noise weighted inner product $(\boldsymbol{v}_{j,\ell mn}, \boldsymbol{v}_{j',\ell' m' n'})$ について Gram–Schmidt の直交化法によって正規直交化して得られたものを $\tilde{\boldsymbol{v}}_{j,\ell mn}$ とする．これらは，正規直交化の過程を表す上三角行列 U を用いて，

$$\begin{aligned}
\tilde{V} &\equiv (\tilde{\boldsymbol{v}}_{0,\ell_0 m_0 n_0}, \ldots, \tilde{\boldsymbol{v}}_{D-1,\ell_0 m_0 n_0}, \tilde{\boldsymbol{v}}_{0,\ell_1 m_1 n_1}, \ldots) \\
&= VU,
\end{aligned}$$

と表される．この正規直交化の過程によって得られた基底は，$(\tilde{V}, \tilde{V}) = \mathbb{I}$ という正規直交化の関係を満たす．この基底を用いると，式 (5) の likelihood は，

$$\ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = \tilde{\boldsymbol{d}}^{\rm T} \tilde{\boldsymbol{c}} - \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{c}}^{\rm T} \tilde{\boldsymbol{c}} + \text{const.},$$

となる．ここで，

$$\tilde{\boldsymbol{d}} \equiv (\tilde{V}, \boldsymbol{d}), \quad \tilde{\boldsymbol{c}} \equiv U^{-1} \boldsymbol{c},$$

を定義した．さらに，正規直交化した (ℓ, m, n) モードの振幅を

$$\tilde{A}_{\ell mn} \equiv \sqrt{\sum_{j=0}^{D-1} (\tilde{c}_{j,\ell mn})^2}, \tag{6}$$

で定義すると，likelihood は以下のように各モードの積に分解できる：

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) \propto \sum_{\ell mn} \mathcal{L}_{\ell mn};$$
$$\mathcal{L}_{\ell mn} \equiv \exp\left[-\frac{1}{2}\tilde{A}^2_{\ell mn} + \tilde{A}_{\ell mn}\tilde{d}_{\ell mn}\cos\beta_{\ell mn}\right]. \tag{7}$$

ここで，$\tilde{d}_{\ell mn}$ は $\tilde{\boldsymbol{d}}_{\ell mn}$ の L^2 ノルム，$\beta_{\ell mn}$ は $\tilde{\boldsymbol{d}}_{\ell mn}$ と $\tilde{\boldsymbol{c}}_{\ell mn}$ の間の角を表す．

式 (7) の likelihood は，式 (6) について一様な prior

$$\pi(\{c_{j,\ell mn}\}) \prod_{j\ell mn} dc_{j,\ell mn} \propto \prod_{\ell mn} \frac{1}{\tilde{A}^{D-1}_{\ell mn}} \prod_{j\ell mn} d\tilde{c}_{j,\ell mn},$$

の下で $\{\tilde{c}_{j,\ell mn}\}$ について解析的に積分できる．まず，$\beta_{\ell mn}$ については，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\beta}_{\ell mn} &\equiv \int_0^{\pi} \sin^{D-2}\beta_{\ell mn} d\beta_{\ell mn} \mathcal{L}_{\ell mn} \\ &= 2^{\frac{D}{2}-1}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)(\tilde{A}_{\ell mn}\tilde{d}_{\ell mn})^{-\frac{D}{2}} \\ &\quad \times e^{-\frac{\tilde{A}^2_{\ell mn}}{2}}\left[D I_{\frac{D}{2}}(\tilde{A}_{\ell mn}\tilde{d}_{\ell mn}) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{A}_{\ell mn}\tilde{d}_{\ell mn} I_{\frac{D+2}{2}}(\tilde{A}_{\ell mn}\tilde{d}_{\ell mn})\right],\end{aligned}$$

のように積分できる．ここで，$I_n(z)$ は第 1 種の修正 Bessel 関数である．さらに，振幅についても積分すると，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{A,\beta}_{\ell mn} &\equiv \int_0^{\infty} d\tilde{A}_{\ell mn} \mathcal{L}^{\beta}_{\ell mn} \\ &= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right) \\ &\quad \times \left[2D_1 F^{\mathrm{R}}_1\left(\frac{1}{2}, \frac{D}{2}+1, \frac{\tilde{d}^2_{\ell mn}}{2}\right)\right. \\ &\quad \left. + \tilde{d}^2_{\ell mn 1} F^{\mathrm{R}}_1\left(\frac{3}{2}, \frac{D}{2}+2, \frac{\tilde{d}^2_{\ell mn}}{2}\right)\right], \end{aligned} \tag{8}$$

となる．ここで，${}_pF^{\mathrm{R}}_q(z)$ は正規化された合流型超幾何関数である．

式 (8) で与えれる周辺化された likelihood を用いて，我々は以下のような準解析的なサンプリング方法を用いる．まず，posterior

$$p(M_f, \chi_f) \propto \pi(M_f, \chi_f) \prod_{\ell mn} \mathcal{L}^{A,\beta}_{\ell mn},$$

から M_f と χ_f のサンプルを得る．続いて，そのようにして得られた M_f と χ_f のサンプルのそれぞれについて，posterior

$$p(\tilde{A}_{\ell mn}|M_f, \chi_f) = \frac{p(M_f, \chi_f, \tilde{A}_{\ell mn})}{p(M_f, \chi_f)} \propto \mathcal{L}^{\beta}_{\ell mn},$$

から $\tilde{A}_{\ell mn}$ のサンプルを得る．最後にそれぞれのサンプルセット $(M_f, \chi_f, \tilde{A}_{\ell mn})$ について，角度のパラメータを $\mathcal{L}_{\ell mn}$ からサンプルする．これらのサンプルから $\{\tilde{c}_{j,\ell mn}\}$ を再構築して，最終的にサンプルセット $(M_f, \chi_f, \tilde{c}_{0,\ell_0 m_0 n_0}, \tilde{c}_{1,\ell_0 m_0 n_0}, \ldots)$ を得る．

3 Results and Discussion

上述の準解析的な方法を評価するために，減衰振動の足し合せで構築された模擬波形に対して準解析的な方法を適用する．模擬波形の QNM の振動数と減衰時間は $M_f = 68.2\,M_\odot, \chi_f = 0.692$ とした時の Kerr QNM の値を用いる．これらの QNM の振動数と減衰時間，及びパラメータ推定には [2] に基づいて計算した QNM の振動数と減衰時間の値を用いる．

減衰振動の足し合せで構築された模擬波形が LIGO Hanford と Livingston の 2 台の検出器で観測される場合を考える．また，ランダムな検出器のノイズはないものと仮定する．データのサンプリングレートは 2048 Hz，解析に用いるデータの長さは $300M$ とする．ここで，$M = 68.2\,M_\odot$ である．Noise covariance matrix は，GW150914 の周りの観測データから推定された power spectral density [3] から構築する．赤経、赤緯、及び偏光角は，$\alpha = 1.96\,\mathrm{rad}$, $\delta = -1.27\,\mathrm{rad}$, $\psi = 0.82\,\mathrm{rad}$ とする．また，地球中心で観測された模擬波形の開始時刻は GPS time で 1126259462.423 s とする．

模擬波形は $\ell = m = 2$ モードで，$n = 3$ までの overtone を含み，$D = 4$ としたものを考える．模擬波形の $\{c_{j,\ell mn}\}$ の値は [1] の Tab. I の値を用いる．このようにして構築された模擬波形の signal-to-noise ratio は 30 となる．テンプレート波形として，$\ell = m = 2$ モードで，$n = 3$ までの overtone を含み，$D = 4$ とした減衰振動波を用いる．

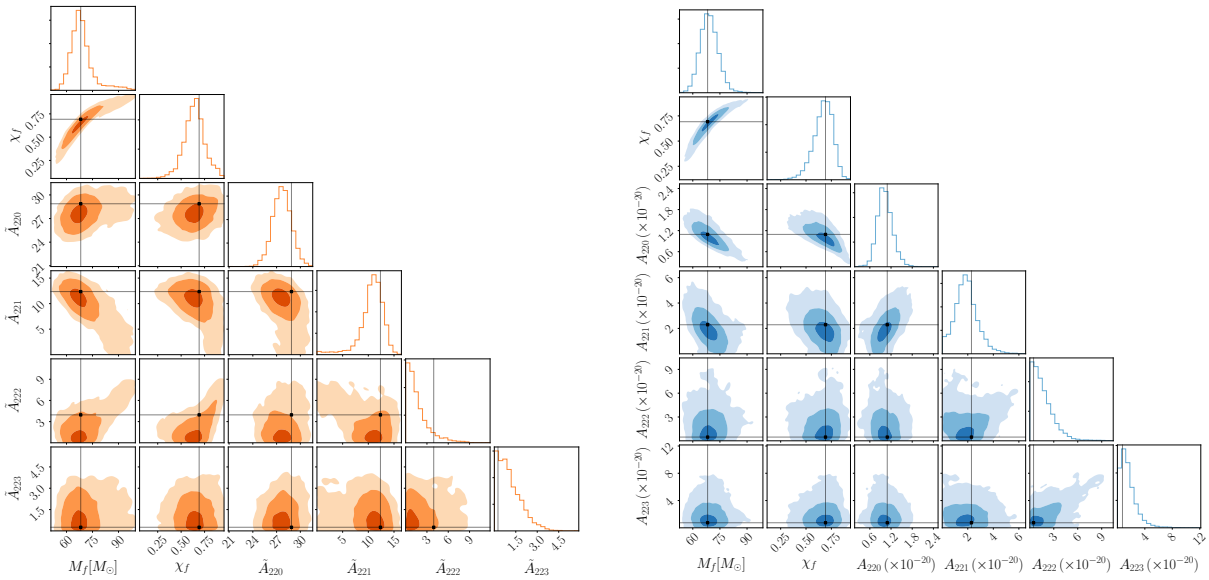


図 1: 合体後の BH の質量，スピン，及びモードの振幅についての posterior 分布．左（右）図は，準解析的な方法（マルコフ連鎖モンテカルロ (MCMC) 法）で得られた結果である．等高線は 1-σ (39.3%), 2-σ (86.5%), 及び 3-σ (98.9%) の信頼領域を表すように色分けされている．また，黒線は各パラメータの真の値を表す．

比較のため，直交化されていないモードの振幅

$$A_{\ell mn} \equiv \sqrt{\sum_{j=0}^{D-1} (c_{j,\ell mn})^2},$$

について一様な prior の下で MCMC 法を用いて同様の解析を行う．振幅の prior の範囲は $(0, 2.5\times10^{-19})$ とする．また，質量，スピンついての priors も次のように一様とる：$M_f/M_\odot \sim \mathcal{U}(40, 100)$, $\chi_f \sim \mathcal{U}(0, 0.99)$.

図 1 は，合体後の BH の質量，スピン，及び QNMs の振幅の posterior 分布を示す．左側が準解析的な方法，右側が MCMC 法を用いて得られた結果である．MCMC 法を用いて得られた posterior を見ると，A_{221} と A_{222} は負の相関があり，両方の振幅の値が 0 になる確率は小さいことが分かる．定量的には，$A_{221} = A_{222} = 0$ は 99% の信頼領域の外側にある．しかし，それぞれの 1 次元 posterior では，明確に $A_{221} = 0$ や $A_{222} = 0$ を排除していないので，それらのうち一方のモードの振幅が 0 でない可能性が高いという事実は，1 次元 posterior を見るだけでは明らかではない．一方で，準解析的な方法で得られた posterior では，そのような相関が弱まり，$\tilde{A}_{221} = 0$ は 97.6% の確率で排除されている．これは，1 次元 posterior のみを見て，(2,2,1) モードがデータから抽出できることを示す．

4 Conclusion

我々の構築した準解析的な ringdown 解析方法は，noise-weighted inner product について正規直交化した QNM の基底を用いることで，モード間の相関を減少させることを，模擬波形について確認した．また，正規直交化した QNM の基底を用いることによって，likelihood を解析的に周辺化することができ，計算コストの削減を可能にする．この準解析的な方法は，より多くの QNMs が観測される重力波信号の解析において，より有効になると考えられる．

Reference

[1] S. Morisaki, H. Motohashi, M. Suzuki, and D.Watarai. Analyzing black-hole ringdowns with orthonormal modes, 2025. arXiv:2507.12376 [gr-qc].

[2] H. Motohashi. Kerr quasinormal mode frequencies and excitation factors, 2024. Zenodo. Data set.

[3] LIGO Scientific Collaboration. Power Spectral Densities (PSD) release for GWTC-1, 2019. LIGO-P1900011-v1.

——index へ戻る

SP-06

ランダム磁場中を伝搬する重力波-電磁波系の解析について

神戸大学
千葉　航

ランダム磁場中を伝搬する重力波-電磁波系の解析について

千葉　航 (神戸大学大学院 理学研究科)

Abstract

本発表は、arXiv:2505.10926 [1] に基づく。この研究では、パワースペクトルで記述される磁場 (ランダム磁場) の存在下に誘起される重力波から電磁波への転換現象を解析した。非自明なヘリシティを持ちうるガウス分布の磁場 (ヘリカル磁場) と、無偏光の重力波を初期状態と仮定し、有限距離を伝搬した後の重力波の強度および直線・円偏光の表式を導出する。解析の結果、強度に対しては分散が抑制され、観測に適した周波数帯域が現れた。また、磁場にヘリシティがある場合には、円偏光の期待値にピーク構造が生じることを見出したのでこれを発表する。

0 Notations

本集録で用いる記法をまとめる。空間座標に関する積分を以下のように記す。

$$\int_{s_1,\cdots,s_n} \equiv \int_0^d ds_1 \cdots ds_n \,. \tag{1}$$

これは、距離 d までの空間座標の積分に相当する。

また、関数の Fourier 変換を以下で定義する。

$$f_i(\vec{x}) \equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \tilde{f}_i(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{2}$$

この時、波数ベクトル $\vec{k}$ の引数を添え字にして略記した。また、ノルムを $k \equiv \sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}$、方向ベクトルを $\hat{k}_i \equiv k_i/k$ と記す。

1 Introduction

宇宙空間には様々なスケールで磁場の存在が観測されている。特に、銀河間空間におよぶ宇宙論的スケールの磁場 (以下では、宇宙磁場) の存在も示唆されているが、その生成機構は未だ解明されていない。宇宙論的スケールにおよぶ波長の磁場を作る機構として初期宇宙の急膨張 (インフレーション) が有力視されている。このため、宇宙磁場の観測を通じた初期宇宙物理の探査が盛んに行われている。しかしながら、磁場の強度が微弱であるため、従来の光学観測から得られる情報には限界があり、磁場の構造や起源といった詳細な情報を手にいれることは困難である。

そこで私は重力波を用いた宇宙磁場探査の方法を提案する。重力波とは、近年人類が手に入れた「新たな観測手段」の一つであり、電磁波のように 2 つの独立な偏光を持つ波である。一般相対性理論によると、背景磁場のもとで重力波と電磁波は互いに転換することができる。さらに、この転換現象を通じて、重力波の偏光に背景磁場の情報が刻み込まれることが期待される。

以上のことを踏まえて、宇宙磁場の新たな観測手法の構築を目的とする本研究では、宇宙磁場が、ランダム磁場で記述される場合に「ランダム磁場中の重力波ー電磁波系」の解析を行う。そして、転換現象により生成される重力波の偏光の期待値および分散を解析的に与える定式化を提供する。これにより、重力波の偏光観測を通じて、宇宙磁場の強度やヘリシティといった性質を推定することができる。

2 Methods

2.1 重力波の Stokes パラメタ

背景磁場中を z 方向に伝播する重力波ー電磁波系は、以下の伝搬方程式で記述される。

$$i\partial_z \begin{pmatrix} A_x(z) \\ A_y(z) \\ h_+(z) \\ h_\times(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_\gamma & 0 & \Pi_{My} & -\Pi_{Mx} \\ 0 & \Pi_\gamma & \Pi_{Mx} & \Pi_{My} \\ -\Pi_{My} & -\Pi_{Mx} & \Pi_g & 0 \\ \Pi_{Mx} & -\Pi_{My} & 0 & \Pi_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x(z) \\ A_y(z) \\ h_+(z) \\ h_\times(z) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

ここで、$h_i(z)\,(i=+,\times)$ および $A_i(z)\,(i=x,y)$ は位置 z における $x-y$ 平面内の重力波および電磁波の振幅を表す。

行列の各成分は、

$$\Pi_\gamma = -\omega + \frac{m_{\rm pl}^2}{2\omega}\,, \quad \Pi_g = -\omega\,, \tag{4}$$
$$\Pi_{Mx} = \frac{i}{\sqrt{2}M_{\rm P}} B_x(z)\,, \quad \Pi_{My} = \frac{i}{\sqrt{2}M_{\rm P}} B_y(z)\,.$$

である。対角成分は、振動数 ω の波動の分散公式に対応する。特に、電磁波はプラズマ有効質量 $m_{\rm pl}$ を持つとした。一方、非対角成分は、$x-y$ 平面内の背景磁場 $B_i\,(i=x,y)$ を介した結合を表し、その強さは (換算)Planck 質量 $M_{\rm P}$ に比例する。

重力波と電磁波の結合が十分に小さいことから、方程式を磁場の 1 次摂動で解く。これにより磁場中の波動の伝搬が決まり、その偏光状態が解析できる。重力波のように 2 つの偏極モードを持つ波の偏光状態は、Stokes パラメタという 4 つの量で記述される。本研究では特に、独立な偏極モードが 1 対 1 に混合され、統計的に偏光がない状態 (無偏光状態) を初期条件に仮定する。この時、磁場中の伝搬の転換に伴い現れる Stoeks パラメタは、I(強度) と V(円偏光) のみであり、直線偏光は現れない。これらは次のようにかける。

$$I(\omega) = 1 - a(\omega)\,, V(\omega) = -i\,b(\omega)\,, \tag{5}$$

ここで、a と b は以下のように与えられる。

$$a(\omega) = \frac{1}{2M_{\rm P}^2}\int_{s,s'} e^{-i\Pi(\omega)(s-s')}[B_x(s)B_x(s') + B_y(s)B_y(s')]\,, \tag{6}$$

$$b(\omega) = \frac{1}{2M_{\rm P}^2}\int_{s,s'} e^{-i\Pi(\omega)(s-s')}[B_x(s)B_y(s') - B_y(s)B_x(s')]\,. \tag{7}$$

ここで、

$$\Pi(\omega) \equiv \Pi_\gamma - \Pi_g = \frac{m_{\rm pl}^2}{2\omega} \tag{8}$$

とした。これは、2 順位間のエネルギー差に対応し、背景磁場との共鳴により転換現象が誘発される。

以下では、便宜上、$1-I$ という量を考える。これは、転換確率に相当する。

2.2 ランダム磁場中の伝搬

本研究では、一様等方でガウス分布に従い確率的に生成される磁場 (ランダム磁場) の元を伝搬する重力波を解析する。ガウス分布の性質から、磁場はパワースペクトルで記述され、それは、以下で定義する 2 点関数で特徴つけられる。

$$\langle B_i B_j\rangle = \int_k e^{ik_z(s-s')}[(\delta_{ij} - \hat{k}_i\hat{k}_j)P_B(k) - i\epsilon_{ijm}\hat{k}_m P_{aB}(k)]\,, \tag{9}$$

ここでは、スペースの都合上、磁場の引数 s が省略されているが、z 軸方向の値である。このため、Fourier 変換で、指数の肩が z 方向の波数のみに依存する。

ブラケット $\langle\cdots\rangle$ は、確率的に生成される磁場に関するアンサンブル平均を表す。$P_B(k)$ および $P_{aB}(k)$ は、磁場のパワースペクトルの対称および反対称成分である。

ここで、$P_{aB}(k) \neq 0$ であることは、ヘリカルな磁場の実現が含まれることを意味する。本研究では、$|P_{aB}(k)| = P_B(k)$ である場合、すなわち、最大限にヘリカル磁場が実現される場合 (maximal helicity) を解析する。

2.3 ランダム磁場に関する統計量

Stokes パラメタは磁場に 2 次式で書かれていることから、これらの磁場に関する統計量 (期待値および標準偏差) が計算できる。物理量 O の磁場に関するアンサンブル平均を以下の記法で定義する。期待値 μ_O および標準偏差 σ_O は以下のよう。

$$\mu_O \equiv \langle O\rangle\,, \quad \sigma_O^2 \equiv \left\langle (O - \langle O\rangle)^2\right\rangle\,. \tag{10}$$

これを用いて、Stokes パラメタの磁場に関するアンサンブル平均および標準偏差は以下のようにかける。

$$\begin{cases} \mu_{1-I}(\omega) = 2\alpha\,, \\ \sigma_{1-I}^2(\omega) = 2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\delta^2)\,, \\ \mu_V(\omega) = -2\beta\,, \\ \sigma_V^2(\omega) = 2(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2+\delta^2)\,. \end{cases} \tag{11}$$

ここで、$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ は磁場のパワースペクトルと以下で定義される積分核との波数の畳み込み積分で与えられる。

$$\begin{cases} \alpha(\omega) = \dfrac{1}{8\pi^2 M_{\rm P}^2}\displaystyle\int_0^\infty dk\, P_B(k)\,\mathcal{C}_\alpha(\Pi d, kd)\,, \\ \beta(\omega) = \dfrac{1}{8\pi^2 M_{\rm P}^2}\displaystyle\int_0^\infty dk\, P_{aB}(k)\,\mathcal{C}_\beta(\Pi d, kd)\,, \\ \gamma(\omega) = \dfrac{1}{8\pi^2 M_{\rm P}^2}\displaystyle\int_0^\infty dk\, P_B(k)\,\mathcal{C}_\gamma(\Pi d, kd)\,, \\ \delta(\omega) = \dfrac{1}{8\pi^2 M_{\rm P}^2}\displaystyle\int_0^\infty dk\, P_{aB}(k)\,\mathcal{C}_\delta(\Pi d, kd)\,. \end{cases} \tag{12}$$

各量の積分核は以下のよう。

$$\begin{cases} \mathcal{C}_\alpha \equiv (kd)^2 \int_{-1}^{1} dz \left[\dfrac{2\sin(\theta_-/2)}{\theta_-}\right]^2 \dfrac{1+z^2}{2}\,, \\ \mathcal{C}_\beta \equiv (kd)^2 \int_{-1}^{1} dz \left[\dfrac{2\sin(\theta_-/2)}{\theta_-}\right]^2 z\,, \\ \mathcal{C}_\gamma \equiv (kd)^2 \int_{-1}^{1} dz \left[\dfrac{2\sin(\theta_+/2)}{\theta_+}\right]\left[\dfrac{2\sin(\theta_-/2)}{\theta_-}\right] \dfrac{1+z^2}{2}\,, \\ \mathcal{C}_\delta \equiv (kd)^2 \int_{-1}^{1} dz \left[\dfrac{2\sin(\theta_+/2)}{\theta_+}\right]\left[\dfrac{2\sin(\theta_-/2)}{\theta_-}\right] z = 0\,, \end{cases} \tag{13}$$

ここで、$\theta_\pm = \Pi(\omega)d \pm kd\cdot z$ とした。z 方向に軸対称な系であるため $k_z = k\cos\theta = k\cdot z$ のような変数変換を施した。

また、積分核 $\mathcal{C}_\delta$ は、奇関数の積分により恒等的に 0 となる。

3 Results

積分 α, β, γ の組み合わせで、磁場に関するエラー (期待値の周りの標準偏差) 付きの Stokes パラメタが評価できた。

宇宙磁場を記述するパワースペクトルが、次の関数で与えられる場合を考える [2]。

$$P_B(k) = P_{B*} \times \begin{cases} \left(\dfrac{k}{k_*}\right)^{n_l}, & n_l = 2\,, \quad (k \le k_*) \\ \left(\dfrac{k}{k_*}\right)^{n_h}, & n_h = -\dfrac{11}{3}\,, \quad (k > k_*) \end{cases} \tag{14}$$

ここで、P_{B*} は典型的な確率振幅の大きさで、その頂点は

$$B_* \equiv \sqrt{\frac{k_*^3 P_{B*}}{\pi^2}}\,, \tag{15}$$

のように与えられる。B_* は典型的な宇宙磁場の大きさに対応する。

このようなパワースペクトルで記述される磁場中を伝搬する「重力波ー電磁波系」の重力波における Stokes パラメタの周波数依存性を見る。今は、maximal helical な磁場を考えているため、$P_B = P_{aB}$ である。

3.1 積分 α, β, γ

まずは、積分 α, β, γ の振る舞いを確認する。ここで、積分 β はヘリカル磁場 P_{aB} からの寄与であることに注意されたい。典型的な無次元パラメタ k_*d のいくつかの振る舞いを見る。

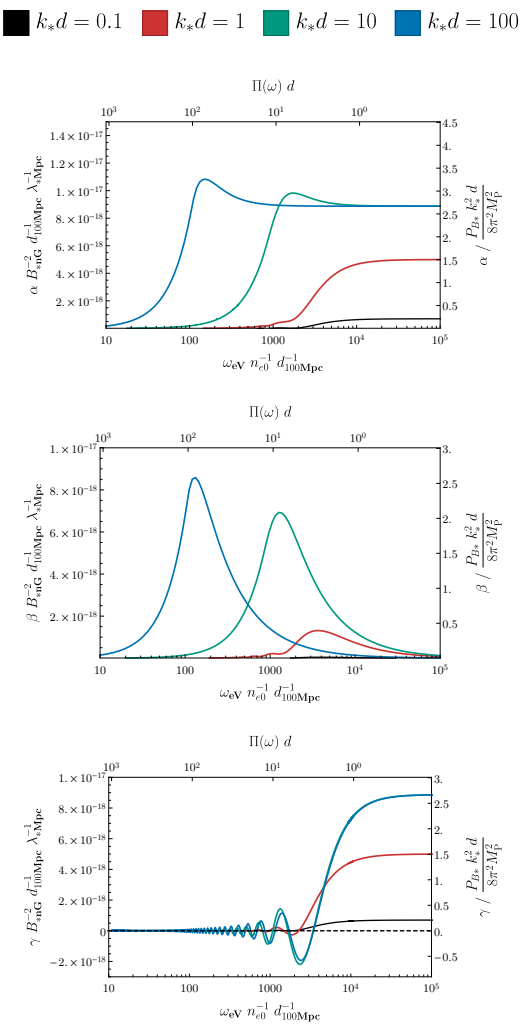


図 1: 上から順に、積分 α, β, γ をパラメタ k_*d ごとにプロットした。下軸は周波数を決める電磁波のプラズマ振動数による無次元量で規格化されている。上軸は周波数に対応した無次元量 Πd である。右軸は典型的なスケールで規格化された積分量である。左軸は距離 $d = 100$Mpc、磁場の大きさ $B* = 1$nG とその波長 $\lambda* = 1$Mpc の宇宙論的なスケールで規格化された積分量である。

これらの振る舞いから、周波数に応じたいくつかの特徴的なレジームが存在していることが伺える。低周波側から α と β が立ち上がり、周波数の増加につれて α は一定地に収束していく。一方で、β はピークを過ぎると 0 へ向かって落ちていく。さらに高周

波側に向かうと γ が振動しながら立ち上がり、その値は α へ近ついていくことが見て取れる。実際の解析で、高周波領域において α と γ が位置することが確かめられた。

3.2 転換確率 $1-I$ および円偏光 V

3.1 で見た積分量 α、β および γ の組み合わせで Stokes I, V の統計的な振る舞いが決まる。ここでは、スペースの都合上パラメタ $k_* d = 100$ の場合のみを掲載する。

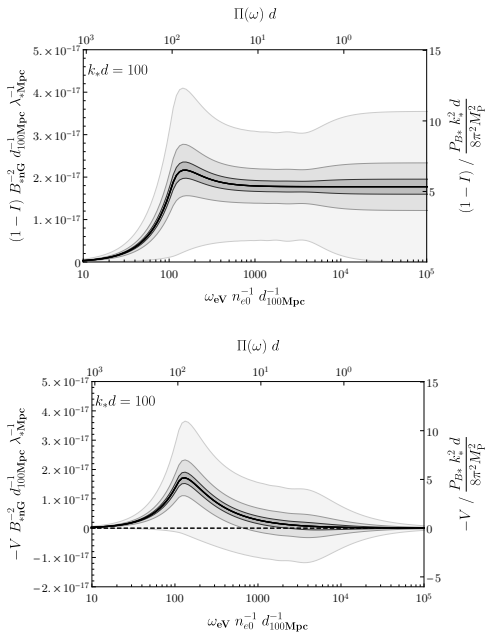


図 2: 上から順に、$1-I$(転換確率)、V(円偏光)をパラメタ $k_* d = 100$ の場合でプロットした。各軸のスケールは図 1 と同様である。

$1-I$ の期待値は積分 α である。また、V の期待値は積分 β であることから、ヘリカル磁場が存在する場合には非自明な期待値を持つことがわかる。

4 Discussion

転換確率 $1-I$ の振る舞いを見る。低周波側からは、積分 α と β の寄与が効き始める。ところが、β がピークを迎へ、その寄与が小さくなるため標準偏差が小さくなる。高周波側へ向かうと今度は積分 γ が効き始め再び標準偏差が大きくなることがわかる。このような積分 α と β そして γ の異なる周波数依存性により、非自明な構造が現れる。特に、β と γ が小さく α のみが支配的な場合は、転換間確率の期待値が 0 でなく標準偏差が小さい特徴的なレジームが現れる。

次に円偏光 V の振る舞いを見る。低周波側からの構造は転換確率と同じ振る舞いである。ところが、高周波側では α と β の差が支配的になるが、これらの高周波側の振る舞いが同じであるため、差が 0 へ向かう。なので、高周波側の V の標準偏差は 0 となる。

これらの振る舞いは、すべて積分核が決めている。詳細は [1] を参照されたい。

5 Conclusion

本研究は、パワースペクトルで記述されるランダム磁場中を伝搬する重力波ー電磁波系における統計的な定式化を行なった。そこで、転換現象に伴い、重力波には非自明な偏光が現れることがわかった。また、これらの磁場に関する統計的な量は、積分核とパワースペクトルとの畳み込みで与えられる、3 つの典型的な量で関係つけられることがわかった。特に、パワースペクトルにヘリカル成分が存在する場合には、円偏光に非自明な期待値が現れることがわかった。

これらの量には、周波数に依存したピーク構造が現れる。さらに、標準偏差が期待値に比べ相対的に小さくなる周波数領域が確認された。このことから、観測に際して、磁場の統計誤差が効きづらく、観測的に有利になる周波数領域を指摘することができた。

しかしながら、ピークが現れる典型的な周波数領域はかなり高周波であるため、このような周波数を持つ重力波源は現在までに見つかっていない。

Reference

[1]W.Chiba, R.Jinno, K.Nomura, "Graviton-photon conversion in stochastic magnetic fields", arXiv:2505.10926 [gr-qc].

[2]R.Durrer, A.Neronov, "Cosmological Magnetic Fields: Their Generation, Evolution and Observation",Astron. Astrophys. Rev. 21, 62 (2013), 1987.

——index へ戻る

SP-07

N 体シミュレーションにおける重力ポテンシャルに基づいたサブハロー同定手法の検討

京都産業大学
中西　稜

N 体シミュレーションにおける重力ポテンシャルに基づいたサブハロー同定手法の検討

中西　稜 (京都産業大学大学院 理学研究科 物理学専攻)

Abstract

本研究では、宇宙論的 N 体シミュレーションにおけるサブハローの同定手法として、重力ポテンシャルに基づくアプローチの最適化と検証を行った。宇宙の大規模構造形成において、ダークマターハロー内のサブ構造（サブハロー）は、銀河形成や進化の理解に不可欠である。従来の同定手法は、位置空間や速度空間の情報に依存するものが多く、特に高密度領域やホストハロー近傍におけるサブハローの検出精度などに課題が残されていた。そこで本研究では、シミュレーション粒子が持つ重力ポテンシャルの極小構造を手がかりとしてサブハローを同定する手法を提案した。本手法は、重なり合う構造の中から物理的に意味のあるサブハローを検出することを目的としている。実際に、既存の N 体シミュレーションデータに適用し、従来手法との比較を通じて、特に中心付近のサブハローに対して高い識別能力を示すことを確認した。今後は、質量関数や回転速度といった物理量との整合性を確かめると共に、高分解能シミュレーションや観測データとの比較解析へ応用していく予定である。

1 Introduction

現在の標準的な宇宙論モデルである ΛCDM モデルの解析にはダークマターの分布と進化を追跡するための数値シミュレーションが不可欠であり、中でも N 体シミュレーションは大規模構造形成過程の理論的理解を深める手法となっている。シミュレーションで得られるダークマター粒子について解析する際に、宇宙構造の基本であるダークマターハローおよびその内部構造のサブハローの正確な同定が重要である。

ハローは銀河団などの形成母体として機能し、内部構造であるサブハローは衛星銀河や構造の階層的性質を知る上で重要な情報を持つ。したがって、サブハローの同定精度は、銀河形成モデルや観測との比較に影響を与える。

従来のサブハロー同定手法の多くは、粒子の局所密度や位相空間に基づいており、それらはハロー中心部におけるサブハローの識別が不安定になりやすい、手法に含まれる閾値の設定に依存するなどの課題を抱えている。(Alexander Knebe et al. 2011)(Arnau Pujol et al. 2014)

これらの課題に対して、ポテンシャル場に基づいたサブハロー同定手法を提案する。重力ポテンシャルは粒子が受ける重力の影響を反映する物理量であり、構造形成において物質が集積する場所や束縛領域を特徴付ける指標になり得る。特に、ポテンシャルの局所的な谷底 (極小点) はハローやサブハローの中心に対応する傾向があり、これを基に構造の抽出を行うことができる。また鞍点などは構造の階層性や分離性を反映する。これによって、密度場に基づく手法と比べ物理的に意味のある構造抽出が可能となる。さらに、重力ポテンシャルはシミュレーション内で直接計算可能な量であり、閾値設定を必要とせず依存性も減少する。

本研究では、これらの特性を活かし、N 体シミュレーションデータに対して重力ポテンシャル場に基づくサブハロー同定手法の有効性を検討する。

2 Methods

使用する N 体シミュレーションの設定はボックスサイズ：$20^3(h^{-1}Mpc)^3$ 粒子数：500^3 この設定はプランク衛星による観測データと整合性のある ΛCDM モデルを採用しており、解析には $z = 0$(現在の宇宙) に対応するスナップショットを用いる。また、重力ポテンシャルは Tree-PM 法によって計算されたものを用いる。(J.S.Bagla 2002)

初期の検討では、粒子を重力ポテンシャルの最大降下方向となる接続粒子に移動させ、ポテンシャル

の極小点への収束から構造を抽出する方法を試みたが、小規模構造の識別や鞍点の処理に限界があった。

そこで本研究では、より局所的かつ構造に忠実なサブハロー検出を目的とし、以下のようなポテンシャルベースの判定手法を導入する。まず、N 体シミュレーションデータに対してある粒子間距離（*linking length*）を用いた FoF（Friend-of-Friends）法を適用し、ハロー群の位置を決定する。その中から粒子数が最大のハローを選び、当該ハロー内で以下の処理を行いサブハローを決定する。

1. ハロー内の粒子座標をドロネー三角分割 (Delaunay tessellation) を用いて粒子間に関係性を持たせる。
2. 任意の 1 粒子に着目し、その粒子のポテンシャルと隣接点のポテンシャルの平均を比べ、平均値より低い場合、ポテンシャルの局所な谷をサブハローの第 1 候補として対象粒子とその隣接点を返す。
3. 第 1 候補の粒子群のそれぞれに関数フィッティングを行い、ヘッセ行列の固有値解析によってその点が谷構造なのかどうか判別する。

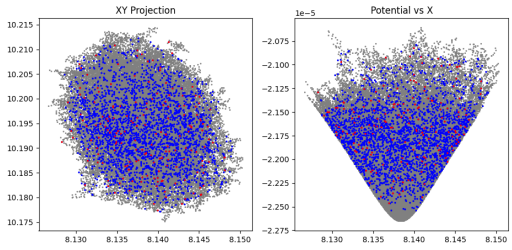


図 1: ヘッセ行列の凹面判定によるサブハロー検出

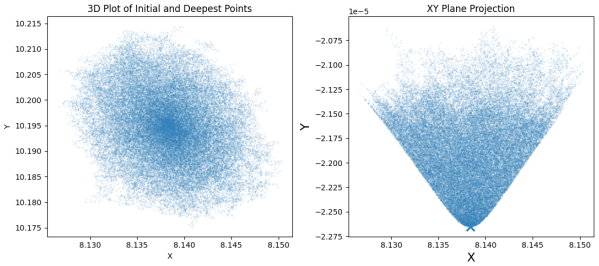


図 2: ポテンシャル勾配法でのサブハロー検出

3 Results

linking length $= 0.0005\,h^{-1}$Mpc の条件で、粒子数が最大のハロー（$N = 60008$（灰色））に対して提案手法を適用した。その結果、図 1 のようになり、ポテンシャル場の局所極小点を第 1 候補として抽出した個数は 2885 個（青色）であり、そこからヘッセ行列によって絞り込んだ最終的な谷構造（サブハロー候補）は 177 個（赤色）となった。

同じ条件でポテンシャル勾配が最大になる粒子に移動してゆくことで構造を検出する手法を試みたところ図 2 のようになり、この手法では一つのサブハローしか検出されず、微細構造の識別性能が著しく低いことが確認された。

4 Discussion

本研究では、重力ポテンシャルの極小点や谷構造を利用して、N 体シミュレーションにおけるサブハロー候補の抽出を試みた。従来手法が局所密度や位相空間の情報に依存していたのに対し、本手法はポテンシャル場に着目することで、より物理的な意味を持つ構造の抽出を目指している。特に、ポテンシャルの谷底がハロー・サブハローの位置に対応するという仮定のもと、構造の候補点を定量的に導出可能とする点が本手法の特徴である。現時点では、ポテンシャル構造の地形的特徴に基づく抽出結果を示すに留まり、その正確性や一貫性については検証がなされていない。今後は、既存のサブハロー同定手法（ROCKSTAR や SUBFIND 等）との比較を通じて、同定される粒子の対応関係や物理量（質量、速度分布など）の比較を行い、提案手法の精度と特性を明らかにする必要がある。

また、今回用いた重力ポテンシャルは、粒子がどれだけ深い重力の「井戸」にいるかを表す量であり、これは重力赤方偏移の原因でもある。今後は、抽出されたサブハロー構造における重力赤方偏移の大きさを、このポテンシャルから予測することも目指している。

特に、重力ポテンシャルには周囲の大規模構造による影響（大域的な傾き）が含まれるため、それを取り除いた「補正ポテンシャル（boosted potential）」を使うことで、より純粋にサブ構造内部の力学的状

態を反映させることができる。実際、この補正処理を行うと、サブハローの力学的安定性を示すビリアル比が理論値に近づくことがわかっており、そこで本研究でも、この補正ポテンシャルの導入を検討し、より正確なサブハロー同定や物理量評価に役立てたいと考えている。(Jens Stücker et al. 2021)

5 Conclusion

本研究では、重力ポテンシャル場の極小点とその地形的特徴に着目し、N 体シミュレーションデータからサブハロー構造を抽出するための手法を提案した。従来の密度ベースの手法とは異なり、物理的に意味のあるポテンシャル構造を利用することで、構造の空間的分布を定義する新たなアプローチの可能性を示した。

今回の解析は、主にポテンシャル構造の探索とサブ構造候補点の抽出に焦点を当てたものであり、その有効性や妥当性の検証は今後の課題である。今後は、他の手法との比較検証や、重力赤方偏移の解析への応用などを通して、本手法の拡張と精緻化を進めていく予定である。

Reference

Alexander Knebe, Steffen R. Knollmann, Stuart I. Muldrew et al. 2011 Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 415 2293 – 2318

Arnau Pujol, Enrique Gaztanaga, Carlo Giocoli et al. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 438 3205 – 3221

Jens Stücker, Raul E. Angulo, Philipp Busch 2021 Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 508 5196 – 5216

J.S.Bagla 2002 Journal of Astrophysics and Astronomy 23 185 – 196

——index へ戻る

SP-08

Possible consistent model of parity violations in the symmetric teleparallel gravity

岡山理科大学
山中　大和

Possible consistent model of parity violations in the symmetric teleparallel gravity

山中 大和 (岡山理科大学大学院 理工学研究科)

Abstract

一般相対性理論は時空の歪みである曲率をもとに重力を表している。しかし、重力を表すことができる物理量は曲率しかない訳ではない。一般相対性理論を提唱したアインシュタインは理論の前提となる条件の 1 つとして計量性条件を要請したが、“ 計量を共変微分したときに値を持つ ” という条件に変えたとしてもいくつかの変換を経ることで矛盾しない理論を作ることができる。このような接続の対称性を認め、曲率が 0 である重力理論を Symmetric Teleparalell Gravity（STG）という。ここでは、STG 下におけるパリティ対称性の破れについて検討する。リーマン幾何学でパリティ対称性の破れを持つ重力モデルを考えると、負の運動項であるゴーストが現れるため、従来のリーマン幾何学では考えることが困難である。そのため、リーマン幾何学の枠を超えた修正重力である STG でパリティ対称性の破れを考察する。STG 下におけるパリティ対称性の破れを考察するにあたり、線形摂動論を用いる。特にパリティ対称性の破れに深く関わるベクトル摂動に焦点を当て、どのようにゴーストを回避するかを考察する。

1 Introduction

パリティ対称性を破る重力モデルとして Chern–Simons（CS）項を加えた CS 修正重力がある。しかし、リーマン幾何学で考えられる CS 項 $R\widetilde{R}$ を加えた一般相対性理論では重力波の円偏光成分の 1 つが高周波数で負の運動項になってしまうため、真空不安定性の問題に悩まされる。その後も CS 修正重力の拡張が行われたが、この問題は解決しなかった。リーマン幾何学の枠組みで負の運動項を持たないパリティ対称性の破れに関する重力モデルを考えることは難しい。

この問題を解決する手段の 1 つとして曲率以外の物理量を使い、重力を記述する非リーマン幾何学でパリティ対称性の破れを考えるというものがある。ここでは、いくつかある非リーマン幾何学の中で non-metricity tensor $Q_{\lambda\mu\nu}$ で重力を記述した Symmetric Teleparalell Gravity(STG) を取り扱う。STG は計量性条件を”計量を共変微分したときに値を持つ”という条件に変え、接続の対称性を認め、曲率をゼロとした重力の理論である。ここでは、STG にパリティ対称性の破れを表す項を加えた作用を宇宙論的摂動論を用いて考察している。このモデルの宇宙論的摂動論ではテンソル摂動は調べられているが、ベクトル摂動とスカラー摂動は調べられていなかった。スカラー摂動はパリティ対称性の破れに関わる項がすべて 3 次量になるため GR のスカラー摂動と同じになる。パリティ対称性の破れはベクトルに関わる量であるため、ここではベクトル摂動を重要視し、どのような条件下でゴーストを回避できるのかについて考察する。

2 Symmetric Teleparalell Gravity

Symmetric Teleparalell Gravity(STG) では接続の添字の対称性を認め、曲率が 0 の重力を考える。

$$\hat{R} \equiv \partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\nu\alpha} + \Gamma^\rho{}_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho{}_{\nu\alpha}\Gamma^\alpha{}_{\mu\sigma}$$
$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} \tag{1}$$

このとき、計量の共変微分を

$$Q_{\lambda\mu\nu} \equiv \nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\rho{}_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} - \Gamma^\rho{}_{\lambda\nu} g_{\mu\rho} \tag{2}$$

と定式化することができ、STG ではこの non-metricity tensor $Q_{\lambda\mu\nu}$ を重力を表す物理量として扱う。
ここで、接続は

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\alpha}\partial_\mu\partial_\nu y^\alpha \tag{3}$$

と表される。任意関数 y^α は接続を 0 にする座標系とみなすことができる。このようなゲージを”coincident gauge”という。STG では計量 $g_{\mu\nu}$ と任意関数 y^α を基本変数として考える。重力は non-metricity tensor に起因しているため、計量と接続を独立変数として扱う。
STG の作用は次のように表される。

$$S_{STG} = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\mathbb{Q} \tag{4}$$

ここで、non-metricity scalar $\mathbb{Q}$ は次のように定義される。

$$\mathbb{Q} = -\frac{1}{4}Q_{\rho\mu\nu}Q^{\rho\mu\nu} + \frac{1}{2}Q_{\rho\mu\nu}Q^{\mu\nu\rho} + \frac{1}{4}Q_\mu Q^\mu - \frac{1}{2}Q_\mu\tilde{Q}^\mu \tag{5}$$

ここで、$Q_\mu = Q_{\mu\nu}{}^\nu, \tilde{Q}_\mu = Q^\nu{}_{\nu\mu}$ という変換を行っている。$P^{\rho\mu\nu}$ は non-metricity tensor と共役な量である。また、曲率 $\mathring{R}$ を non-metricity tensor を用いて表すと恒等式 $\mathring{R} \equiv -\mathbb{Q} - \mathring{\nabla}_\mu(Q^\mu - \tilde{Q}^\mu)$ が成り立つ。ここで、$\mathring{R}$、$\mathring{\nabla}$ はそれぞれレヴィ・チヴィタ接続から構成される曲率と共変微分の演算子 ∇ である。ここで、STG の作用を考えると、

$$S_{STG} = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\{-\mathring{R} - \mathring{\nabla}_\mu(Q^\mu - \tilde{Q}^\mu)\} \tag{6}$$

となる。第 2 項、第 3 項は境界項で 0 になるため STG の運動方程式は一般相対性理論と等価な式を与える。

3 parity violation term

この章ではパリティ対称性の破れを加えた作用について見ていく。作用 (6) にパリティ対称性を破る作用

$$S_{PV} = \int d^4x\sqrt{-g}\phi\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}Q_{\mu\nu\alpha}Q_{\rho\sigma}{}^\alpha \tag{7}$$

を加えることで、STG のパリティ対称性の破れを考えたモデルを作ることができる。ここで、重力におけるパリティ対称性の破れに関する項は、スカラー場と non-metricity tensor の相互作用によって表される。同時に、計量とスカラー場の運動方程式が 2 次であることを保証しなければならない。これは、高階微分に由来するオストログラドスキー・ゴーストを排除するためである。この条件を満たす結合は以下の 7 つである。

$$\begin{aligned}
M_1 &= \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}Q_{\mu\nu\alpha}Q_{\rho\sigma}{}^\alpha\nabla_\beta\phi\nabla^\beta\phi,\\
M_2 &= \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}Q_{\mu\nu\alpha}Q_{\rho\sigma}{}^\beta\nabla^\alpha\phi\nabla_\beta\phi,\\
M_3 &= \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}Q_{\mu\nu\alpha}Q_\rho{}^{\alpha\beta}\nabla_\sigma\phi\nabla_\beta\phi,\\
M_4 &= \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}Q_{\mu\nu\alpha}Q^{\alpha\beta}{}_\rho\nabla_\sigma\phi\nabla_\beta\phi,\\
M_5 &= \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}Q_{\mu\nu\alpha}Q^{\beta\alpha}{}_\rho\nabla_\sigma\phi\nabla_\beta\phi,\\
M_6 &= \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}Q_{\mu\nu\alpha}Q_\rho\nabla^\alpha\phi\nabla_\sigma\phi,\\
M_7 &= \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}Q_{\mu\nu\alpha}\bar{Q}_\rho\nabla^\alpha\phi\nabla_\sigma\phi
\end{aligned} \tag{8}$$

よってパリティ対称性の破れの項は次のようになる。

$$S_{PV} = \int d^4x\sqrt{-g}\sum_a c_a(\phi, \nabla^\mu\phi\nabla_\mu\phi)M_a \equiv \sum_a S_{PVa} \quad (9)$$

ここで c_a は結合係数で $a = 1, 2, \ldots, 7$ である。これらの作用をまとめた STG におけるパリティ対称性の破れを加えた作用は次のようになる。

$$S = S_{STG} + S_{PV} + S_\phi = \int d^4x\sqrt{-g}[\frac{\mathbb{Q}}{2} + \sum_a c_a(\phi, \nabla^\mu\phi\nabla_\mu\phi)M_a + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)] \quad (10)$$

以下ではスカラー摂動、ベクトル摂動、テンソル摂動のうちベクトル摂動を考える。

4 Cosmological perturbations

この章ではベクトル摂動の計算を行っていく。スカラー・ベクトル・テンソル分解により、摂動された計量は次のようになる。

$$ds^2 = a^2\{d\eta^2 + 2B_i d\eta dx^i - [\delta_{ij} + \partial_j E_i + \partial_i E_j]dx^i dx^j\} \quad (11)$$

ここでベクトル摂動でトランスバース条件 $\partial_i B_i = \partial_i E_i = 0$ を満たしている。接続を構成するために使用される関数は $y^\alpha = x^\alpha + u^\alpha$ と分解できる。このとき摂動 u^α はさらに $u^\alpha \equiv \{0, u_i\}$ と分解でき、トランスバース条件より $\partial_i u_i = 0$ となる。よって、y^α から構築される 2 次までの摂動接続は次のようになる。

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \partial_\mu\partial_\nu u^\lambda - \partial_\mu\partial_\nu u^\alpha\partial_\alpha u^\lambda \quad (12)$$

以下では計算の簡略化のために coincident gauge を使い、$u_i = 0$ として計算を行う。作用 (10) の運動方程式は計量 $g_{\mu\nu}$、接続 Γ、スカラー場 ϕ の摂動展開を計算することで得られる。S_{PV} に関する計算を行ったところ、以下の 5 つの作用がベクトル摂動の 2 次作用に寄与していることが分かった。

$$S_{PV1} = \int d^4x 2c_1\phi'^2\varepsilon_{ijk}[B_{j,i}B'_k - E_{j,il}E'_{k,l}]$$
$$S_{PV2} = \int d^4x 2c_2\phi'^2\varepsilon_{ijk}[B_{j,i}B'_k]$$
$$S_{PV4} = -\int d^4x c_4\phi'^2\varepsilon_{ijk}[B_{j,i}B'_k + E_{j,il}B_{k,l}]$$
$$S_{PV5} = \int d^4x c_5\phi'^2\varepsilon_{ijk}[E_{j,il}E'_{k,l} - B_{j,i}B'_k]$$
$$S_{PV7} = -\int d^4x c_7\phi'^2\varepsilon_{ijk}(B_{j,i}[B'_k + \nabla^2 E_k]) \quad (13)$$

その結果、作用 (10) のベクトル摂動に関する 2 次作用が得られた。

$$S_V^{(2)} = \int d^4x[\frac{1}{4}a^2(B_{i,j} + E'_{i,j})(B_{i,j} + E'_{i,j}) + \varepsilon_{ijk}\phi'^2(b_1 B'_k B_{j,i} - b_2 B_{k,l}E_{j,il} - b_3 E'_{k,l}E_{j,il})] \quad (14)$$

ここで、$b_1 = 2c_1 + 2c_2 - c_4 - c_5 - c_7$, $b_2 = c_4 - c_7$, $b_3 = 2c_1 - c_5$ と定義する。
上式をフーリエ空間に直し、摂動 B_i と E_i を平面波と円偏光基底 e_i^A を使い、$A = L, R$ として計算すると以下の式を得ることができる。

$$S_V^{(2)} = \sum_{A=L,R}\int d\eta d^3k(z_A^2 E'^A E'^{*A} - w_A^2 E^A E^{*A}) \quad (15)$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
z_A^2 &= \frac{\lambda^A (b_1 \phi'^2)' a^2 k^2}{2a^2 k + 4\lambda^A (b_1 \phi'^2)'} \\
w_A^2 &= \frac{a^2 k^4 b_2 \phi'^2 (b_1 \phi'^2)''}{[a^2 k + 2\lambda^A (b_1 \phi'^2)']^2} \\
&\quad + \frac{2k^5 b_2^2 \phi'^4 - \lambda^A a^2 k^4 (b_2 \phi'^2)'}{2a^2 k + 4\lambda^A (b_1 \phi'^2)'} \\
&\quad + \frac{1}{2} \lambda^A k^3 (b_3 \phi'^2)'
\end{aligned}
\tag{16}
$$

5 Discussion

パリティ対称性の破れとスカラー場を加えた STG の性質はベクトル摂動によって導かれた (15) 式,(16) 式から読み解くことができる。

1 つは $(b_1 \phi'^2)' \neq 0$ である限り、E^A の運動項の前にある $A = L, R$ の係数 z_A^2 は消えないため、ベクトル摂動の両成分は、力学的自由度を表すことである。

2 つ目は z_A^2 は波数 k だけでなくヘリシティにも依存する。前者の依存性は、偏光モードが宇宙を伝播する際に、偏光モードごとに異なる減衰率を引き起こし、振幅複屈折現象を意味する。k 依存性は、偏光モードの振る舞いがスケール依存であることを意味する。(16) 式から、large length scales が $k \ll 2a^{-2}|(b_1 \phi'^2)'|$ では、係数 $z_A^2 \simeq a^2 k^2/4 > 0$ が正でヘリシティに依存しないことがわかる。つまり、どちらの偏光モードも問題ない。しかし $k \gg 2a^{-2}|(b_1 \phi'^2)'|$, $z_A^2 \simeq \lambda^A (b_1 \phi'^2)' k/2$ という small length scales では $(b_1 \phi'^2)' \neq 0$ である限り、$\lambda^A = \pm 1$ であることがわかる。2 つの成分のうち 1 つは運動項にマイナスがついているため、ゴーストモードである。

3 つ目は $\omega_A^2 \equiv w_A^2/z_A^2$ を定義することができ、それらの波数 k の依存性が分散関係を定義する。一般に分散関係はヘリシティに依存すると予想され、これは速度複屈折現象を意味する。つまり、$(b_1 \phi'^2)' \neq 0$ である限り、この作用 (10) のベクトルは動的であり、振幅と複屈折現象の両方を示す。さらに悪い結果として、ベクトル摂動の円偏光成分の 1 つがゴーストモードとなり、真空不安定性を引き起こすことである。

6 Conclusion

ここでは、作用 (10) のベクトル摂動を重要視した。その結果、一般にベクトル摂動は力学的に伝播する場として働き、振幅と速度の複屈折現象を示すことが分かった。最も悪い結果として、ベクトル摂動の円偏光成分の 1 つの長さが小さい（運動量が大きい）スケールのとき、ゴーストになることも分かった。
ゴーストモードを回避するとして $z_A^2 = 0$ または、$(b_1 \phi'^2)' = 0$ すなわち、$b_1 = const./\phi'^2$ のときこの問題を回避できる。最も単純な方法は b_1 を消すこと、すなわち $b_1 = 2c_1 + 2c_2 - c_4 - c_5 - c_7 = 0$ とする場合である。この条件では、ベクトル摂動のどちらの成分も力学的な場ではなく、スカラー場が結合した GR のモデルと同じ式を表している。この場合、ゴーストの不安定性という問題は存在しなくなる。

Reference

Mingzhe Li et al., Phys.Rev.D 105 (2022) 10, 104002

——index へ戻る

SP-09

U(1) ゲージ不変スカラー・ベクトル・テンソル理論における帯電・帯磁したブラックホール解の安定性解析

東京理科大学
西村　俊太

$U(1)$ ゲージ不変スカラー・ベクトル・テンソル理論における帯電・帯磁したブラックホール解の安定性解析

西村 俊太 (東京理科大学大学院 理学研究科)
共著者 谷口 喜太郎，塚本 直樹，加瀬 竜太郎（東京理科大学）

Abstract

私たちは $U(1)$ ゲージ不変 SVT 理論のサブクラスの枠組みで，静的球対称な帯電および帯磁したブラックホール (BH) 解の線形摂動を考え，その安定性条件を調べた．詳細な議論は文献 [1] で行われているため，ここではその概要として，本研究のセットアップ，安定性解析の手法，得られた安定性条件の具体的なモデルへの適用に重点を置いて述べる．

1 Introduction

一般相対論（GR）の枠組みにおいては解決困難な問題に対処するために提案されている，拡張重力理論の多くは，観測との整合性を確保するため，弱重力場においては GR と同様の振る舞いを示す構造を備えている．一方で，BH 近傍のような強重力場においては，理論間に顕著な差異が生じる場合があり，BH は重力理論の選別において極めて興味深い物理系とされる．重力場と，スカラー場やベクトル場といった追加の場との結合を含む拡張重力理論では，GR の BH 解に対して，追加の自由度「ヘアー」が生じるヘアリー BH 解が現れる．さらに，重力場は GR と同様でも，スカラー場と電磁場の結合により間接的にヘアリー BH 解が生じることも報告されている．近年，重力場，単一の電磁場，スカラー場を含む理論において新たな漸近的平坦な静的球対称ヘアリー BH 解が発見された [3]．この解で記述される BH は電荷および磁荷を持ち，さらにスカラー場と電磁場の微分結合から生じる新たなヘアーを有する．本研究 [1] では，[3] で議論された理論を含む，$U(1)$ ゲージ不変スカラー・ベクトル・テンソル（SVT）理論 [2] のサブクラスに注目し，線型摂動解析を通じてより広範な BH 解の安定性を評価した．一般に，BH 解の安定性解析は，背景時空に静的球対称性を課し，その上での摂動を odd-parity 成分と even-parity 成分に分けて個別に解析する．しかし，本研究対象のように磁荷を有する場合，摂動を記述する作用においてこれらの成分が混合し，mixture 成分が現れるため，解析はより複雑なものとなる．次節以降では，本研究で扱うラグランジアンおよびセットアップ，安定性解析の手法，得られた安定性条件と具体的なモデルへの適用について述べる．

2 Action

本研究では，以下のような $U(1)$ ゲージ不変 SVT 理論のサブクラス

$$S = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left[\frac{M_{\rm pl}^2}{2}R + f_2(\phi, X, F, \tilde{F}, Y)\right], \tag{2.1}$$

を考える．R はリッチスカラー，g は計量 $g_{\mu\nu}$ の行列式を表す．また，$M_{\rm pl}$ は換算プランク質量であり，重力定数 G を用いて $M_{\rm pl} = (8\pi G)^{-1/2}$ と表される．f_2 はスカラー場 ϕ の他に以下の量に依存している．

$$\begin{aligned} &X = -\frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi\,, \quad F = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,, \\ &\tilde{F} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}\,, \qquad Y = \nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi F^{\mu\alpha}F_{\mu\alpha}\,. \end{aligned} \tag{2.2}$$

X はスカラー場の運動項であり，∇_μ は共変微分を表している．Y はスカラー場の微分とベクトル場の相互作用を表す量であり，文献 [3] における新たなヘアリー BH 解の発現に関わる量である．また，F は以下で定義される $U(1)$ ゲージ不変場の強度を表すテンソル $F_{\mu\nu}$ の内積であり，同様に $\tilde{F}$ は以下で定義される $F_{\mu\nu}$ とその双対テンソル $\tilde{F}^{\mu\nu}$ の内積である．

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu\,, \quad \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\mathcal{E}^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\,. \tag{2.3}$$

ただし，$\mathcal{E}^{\mu\nu\alpha\beta}$ は完全反対称テンソルであり，ここでは $\mathcal{E}^{\mu\nu\alpha\beta}\mathcal{E}_{\mu\nu\alpha\beta} = -4!$ となるように規格化を行なっている．

3 Set up

静的球対称な背景時空

$$\mathrm{d}s^2 = -f(r)\mathrm{d}t^2 + h(r)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2\,, \qquad (3.1)$$

を考える．ただし $\mathrm{d}\Omega^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2$ である．また，背景時空の対称性を考慮して，スカラー場 ϕ に対して

$$\phi = \overline{\phi}(r)\,, \qquad (3.2)$$

を仮定する．バー (-) は背景量であることを表しており，今後背景量は同様に表すこととする．一方，ベクトル場 A_μ に対しては

$$\overline{A}_\mu = (A_0(r), 0, 0, -P\cos\theta)\ , \qquad (3.3)$$

を仮定する．ここで P は磁荷を表している．一見，この仮定は背景レベルでの球対称性を破っているように思われるが，式 (2.2)，(2.3) のもと，実際に各背景量を計算すると以下のように得られ，依然として球対称性は守られていることがわかる．

$$\overline{X} = -\frac{h\phi'^2}{2}\,, \quad \overline{F} = \frac{hA_0'^2}{2f} - \frac{P^2}{2r^4}\,, \qquad (3.4)$$

$$\overline{\tilde{F}} = -\frac{PA_0'}{r^2}\sqrt{\frac{h}{f}}\,, \quad \overline{Y} = -\frac{h^2\phi'^2A_0'^2}{f}\,. \qquad (3.5)$$

ここで，プライムは r 微分を表している．

4 Stability analysis

この節では BH 摂動論に基づく安定性解析の手法を，本研究の場合で概説する．

まず，次のように計量 $g_{\mu\nu}$，スカラー場 ϕ，ベクトル場 A_μ に摂動を与えることを考える．

$$g_{\mu\nu} = \overline{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\,, \quad A_\mu = \overline{A}_\mu + \delta A_\mu\,,$$
$$\phi = \overline{\phi} + \delta\phi\,. \qquad (4.1)$$

背景時空が球対称である時，これら摂動量 $h_{\mu\nu}$, δA_μ,$\delta\phi$ は球面調和関数 $Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ を用いて展開することができる．例えば計量については $h(t,r,\theta,\varphi) = \sum_{\ell m} h_{\ell m}(t,r)X_{\ell m}(\theta,\varphi)$ といった形で展開できる．ここで $X_{\ell m}$ はテンソル球面調和関数と呼ばれるテンソルであり，$Y_{\ell m}$ とその微分によって書かれており，球面調和関数と同様に完全規格直交系を成している．同じようにベクトル場とスカラー場も展開することができる．また，$m = 0$ のモードに限定したとしても，議論の一般性が損なわれないことから，以降の議論では $Y_{\ell 0} = Y_\ell$ とし，φ 依存性を落としている．導出の詳細は省くが，計量およびベクトル場の Y_ℓ による展開は次のように表される．

$$h^{(\ell)}_{tt} = f(r)H_0(t,r)Y_\ell(\theta)\,, \qquad h^{(\ell)}_{tr} = h^{(\ell)}_{rt} = H_1(t,r)Y_\ell(\theta)\,, \qquad h^{(\ell)}_{t\theta} = h^{(\ell)}_{\theta t} = h_0(t,r)Y_{\ell,\theta}(\theta)\,,$$
$$h^{(\ell)}_{t\varphi} = h^{(\ell)}_{\varphi t} = -Q(t,r)(\sin\theta)Y_{\ell,\theta}(\theta)\,, \qquad h^{(\ell)}_{rr} = h^{-1}(r)H_2(t,r)Y_\ell(\theta)\,, \qquad h^{(\ell)}_{r\theta} = h^{(\ell)}_{\theta r} = h_1(t,r)Y_{\ell,\theta}(\theta)\,,$$
$$h^{(\ell)}_{r\varphi} = h^{(\ell)}_{\varphi r} = -W(t,r)(\sin\theta)Y_{\ell,\theta}(\theta)\,, \qquad h^{(\ell)}_{\theta\theta} = r^2K(t,r)Y_\ell(\theta) + r^2G(t,r)Y_{\ell,\theta\theta}(\theta)\,,$$
$$h^{(\ell)}_{\theta\varphi} = \frac{1}{2}U(t,r)\left[(\cos\theta)Y_{\ell,\theta}(\theta) - (\sin\theta)Y_{\ell,\theta\theta}(\theta)\right]\,,$$
$$h^{(\ell)}_{\varphi\varphi} = r^2K(t,r)(\sin^2\theta)Y_\ell(\theta) + r^2G(t,r)(\sin\theta)(\cos\theta)Y_{\ell,\theta}(\theta)\,, \qquad (4.2)$$
$$\delta A^{(\ell)}_t = \delta A_0(t,r)Y_\ell(\theta)\,, \quad \delta A^{(\ell)}_r = \delta A_1(t,r)Y_\ell(\theta)\,, \quad \delta A^{(\ell)}_\theta = \delta A_2(t,r)Y_{\ell,\theta}(\theta)\,, \quad \delta A^{(\ell)}_\varphi = -\delta A(t,r)(\sin\theta)Y_{\ell,\theta}(\theta)\,. \qquad (4.3)$$

ここで，式 (4.2)，(4.3) はある一つのモード ℓ に注目していることに注意する．また，$Y_{\ell,\theta}$ といったカンマ以降の添え字はその添え字による微分を表している．スカラー場に関しても同じように

$$\delta\phi^{(\ell)} = \delta\phi(t,r)Y_\ell(\theta)\,, \qquad (4.4)$$

と展開する．このように摂動量を球面調和関数で展

開することで，摂動量から θ 依存性を切り離すことができる．これら摂動量は，パリティ変換に対する変換性から odd-parity 成分と even-parity 成分に分けることができる．式 (4.2)-(4.4) の摂動量のうち，Q ,W，U，δA は odd-parity 成分，H_0，H_1，H_2，h_0，h_1，K，G，δA_0，δA_1，δA_2，$\delta\phi$ は even-parity 成分に属する．

摂動の振舞いを見るために，式 (4.2)-(4.4) を式 (2.1) に代入し，摂動量についての 2 次のラグランジアン $\mathcal{L}^{(2)}$ に注目する．通常，$\mathcal{L}^{(2)}$ は odd-parity 成分と even-parity 成分それぞれ独立に解析することができる．しかしながら，本研究のように BH が磁荷を有する場合は，これら成分が混ざり合う mixture 成分が新たに出現する．そのため，2 つの成分を同時に扱う必要があり，解析はより複雑となる．

現状，計量，ベクトル場，スカラー場の摂動量は $10+4+1=15$ 個ある．しかし，これら場の摂動の物理的な自由度は $2+2+1=5$ であり，残り 10 個は余分，除去すべき自由度となる．摂動量に対するゲージ変換の式に対して，ゲージ変数を適切に固定することで，4 つの自由度を消去できる．加えてベクトル場が持つ $U(1)$ ゲージ対称性から，さらに自由度を 1 つ削ることができる．残り 5 個は，適切な補助場を導入したのちに摂動方程式を用いて消去することができる．こうして力学的な自由度のみとなった 2 次摂動ラグランジアンは，さらに部分積分を用いることで

$$\mathcal{L}^{(2)} = \dot{\vec{\mathcal{X}}}^t \boldsymbol{K} \dot{\vec{\mathcal{X}}} + \vec{\mathcal{X}}'^t \boldsymbol{G} \vec{\mathcal{X}}' + \vec{\mathcal{X}}'^t \boldsymbol{S} \vec{\mathcal{X}} + \vec{\mathcal{X}}^t \boldsymbol{M} \vec{\mathcal{X}} \quad (4.5)$$

のように整理できる．ここで $\vec{\mathcal{X}}$ は力学的自由度である 5 つの摂動量を縦に並べたベクトルであり，$\boldsymbol{K}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{M}$ は 5×5 の行列である．このうち $\boldsymbol{K}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{M}$ が安定性条件に密接に関わる．

4.1 No ghost conditions

式 (4.5) の右辺第一項を見ると，これは摂動の運動エネルギーに対応していることがわかる．その係数である $\boldsymbol{K}$ に注目すると，この固有値の符号によって，摂動の振る舞いが大きく変わることが推測できる．$\boldsymbol{K}$ の固有値がひとつでも負であると，それに対応する摂動の運動エネルギーが下に有界でなくなり，物理的に不安定となってしまう．これを避けるためには $\boldsymbol{K}$ の固有値が全て正，すなわち正定値行列である必要がある．この条件式は No ghost conditions と呼ばれ，大きく分けて 2 つある安定性条件のうちの 1 つとなる．

4.2 Propagation speeds

安定性条件のもう一つは，摂動の伝播速度に関連する．摂動の解の形として，平面波解 $\vec{\mathcal{X}} \propto e^{i(\omega t - kr)}$ を仮定する．ω，k はそれぞれ周波数と波数である．ここで，動径方向への摂動の伝播速度の二乗 c_r^2, ($c_r \equiv \omega/k$) の符号について考える．$c_r^2 < 0$ の場合，これを解の形に代入すると，摂動が成長するモードが現れてしまう．これは摂動が背景時空を破壊する恐れがあることを意味しており，避けるべき条件となる．すなわち $c_r^2 > 0$ が求めるべき安定性条件となる．角度方向の伝播速度 c_Ω についても同じように議論することが出来る．各摂動の c_r や c_Ω は，適切な極限操作のもと，式 (4.5) から導くことが出来，これに対して $c_r^2 > 0$ といった条件を課すことで求める条件式が得られる．

5 Results

前節までに述べた安定性条件について，ここではその結果のみを示し，議論を行う．

式 (4.5) から，式 (2.1) のラグランジアンから導かれる一般的な安定性条件が得られる．条件式は f_2 やその微分によって記述されており，これに対して具体的なモデルを適用することを考える．ここでは文献 [3] で扱われていた extended Einstein-Maxwell-scalar 理論

$$f_2 = F + X + g_1(\phi, X)F + g_2(\phi, X)\tilde{F} + \frac{g_3(\phi, X)Y}{4X}, \quad (5.1)$$

に注目する．これを一般的な安定性条件に適用すると，スカラー場を除く，摂動の伝播速度の二乗は動径，角度方向ともに 1 となり，自明に安定性条件が満たされる．残る非自明な安定性条件は 3 つある no ghost conditions s_1, s_2, s_3 とスカラー場の伝播速度 $c_{r\phi}$，$c_{\Omega\phi}$ の二乗の条件式

$$s_1 \equiv 1 + g_1 + g_3 > 0\,, \quad (5.2)$$

$$s_2 \equiv 1 + g_{1,X}\overline{F} + g_{2,X}\overline{\tilde{F}} + \frac{g_{3,X}\overline{Y}}{4\overline{X}} > 0\,, \quad (5.3)$$

$$s_3 \equiv 1 + g_1 > 0\,, \quad (5.4)$$

$$c_{r\phi}^2 = 1 + \frac{h\phi'^2}{s_1 s_2}\left[\left\{\sqrt{\frac{h}{f}}A_0'(g_{1,X}+g_{3,X}) - \frac{P}{r^2}g_{2,X}\right\}^2 - s_1\left(g_{1,XX}\overline{F} + g_{2,XX}\overline{\tilde{F}} + \frac{g_{3,XX}\overline{Y}}{4\overline{X}}\right)\right] \geq 0\,, \tag{5.5}$$

$$c_{\Omega\phi}^2 = 1 + \frac{g_3(r^4 h A_0'^2 s_1 + P^2 f s_3)}{r^4 f h \phi'^2 s_2 s_3} \geq 0\,, \tag{5.6}$$

のみとなる．ここからさらに (i) $g_1 \neq 0$， $g_2 = 0$， $g_3 = 0$， (ii) $g_1 = 0$， $g_2 \neq 0$， $g_3 = 0$， (iii) $g_1 = 0$， $g_2 = 0$， $g_3 \neq 0$ の 3 パターンに分けて，より具体的な検証を行う．

(i) $g_1 \neq 0$， $g_2 = 0$， $g_3 = 0$

この時，式 (5.2)-(5.6) は次のようになる．

$$s_1 = s_3 = 1 + g_1 > 0\,, \tag{5.7}$$

$$s_2 = 1 + g_{1,X}\overline{F} > 0\,, \tag{5.8}$$

$$c_{r\phi}^2 = 1 + \frac{h\phi'^2\left(hA_0'^2 g_{1,X}^2/f - s_1 g_{1,XX}\overline{F}\right)}{s_1 s_2} \geq 0\,, \tag{5.9}$$

また，$c_{\Omega\phi}^2$ は自明に 1 となる．式 (5.8)，(5.9) を見ると，$g_1 = g_1(\phi)$ であればこれらは常に満たされることがわかる．Einstein-Maxwell-dilaton（EMD）理論は式 (5.1) のサブクラスであり，$g_1(\phi) = 4e^{-\phi} - 1$ と選ぶことに対応する．この時，式 (5.7) も明らかに満たされる．これは EMD 理論の静的球対称な BH に対して，電荷に加えて磁荷を考慮した際に線形摂動に対して安定であることを示している．EMD 理論の静的球対称 BH 解は Gibbons，Maeda，Garfinkle，Horowitz，Strominger らによって発見された GMGHS 解として知られており，電荷のみを考慮した場合ではすでに先行研究 [4] が存在するが，磁荷を考慮したものとしては本研究が初となる．

(ii) $g_1 = 0$， $g_2 \neq 0$， $g_3 = 0$

この場合，非自明な安定性条件は以下のようになる．

$$s_2 = 1 + g_{2,X}\overline{\tilde{F}} > 0$$

$$c_{r\phi}^2 = 1 + \frac{h\phi'^2\left(P^2 g_{2,X}^2/r^4 - g_{2,XX}\overline{\tilde{F}}\right)}{s_2} \geq 0\,. \tag{5.10}$$

$g_2 = g_2(\phi)$ であれば，式 (5.10) は自明に満たされる．$g_2(\phi)\tilde{F}$ は axionic-type 結合であり，このような結合により発生するヘアリー BH 解は自明に安定であることが結論づけられる．

(iii) $g_1 = 0$， $g_2 = 0$， $g_3 \neq 0$

非自明な安定性条件は次の 4 つになる．

$$s_1 = 1 + g_3 > 0\,, \tag{5.11}$$

$$s_2 = 1 + \frac{hA_0'^2}{2f}g_{3,X} > 0\,, \tag{5.12}$$

$$c_{r5}^2 = 1 + \frac{h\phi'^2}{s_1 s_2}\left(\frac{hA_0'^2}{f}g_{3,X}^2 - \frac{s_1\overline{Y}}{4\overline{X}}g_{3,XX}\right) \geq 0\,, \tag{5.13}$$

$$c_{\Omega\phi}^2 = 1 + \frac{g_3(r^4 h A_0'^2 s_1 + P^2 f)}{r^4 f h \phi'^2 s_2} \geq 0\,, \tag{5.14}$$

g_3 が X 依存性を持たない時，式 (5.11)，(5.14) 以外は自明に満たされる．先行研究 [3] では，$g_3 = c_3\phi/M_{\rm pl}$ のような結合を考えたとき，c_3 が定数であればヘアリー BH 解が得られることが示されている．この場合を考えると，残りの 2 つの条件式 (5.11)，(5.14) は $c_3 > 0$ の時に常に満たされる．

6 Conclusion & Future works

ここまで，本研究の概要について，特に安定性解析の手法と extended Einstein-Maxwell 理論における安定性条件に重点を置いて述べた．さらに g_1，g_2，g_3 それぞれに注目することでさまざまなヘアリー BH 解の安定性について議論した．

この研究の更なる発展形として，完全な $U(1)$ ゲージ不変 SVT 理論への拡張や，研究の過程で得られた摂動方程式を用いて BH の準固有振動（QNMs）解析へと繋げることを考えている．

Reference

[1] K. Taniguchi, S. Nishimura, N. Tsukamoto and R. Kase, [arXiv:2504.21279 [gr-qc]].

[2] L. Heisenberg, JCAP **10**, 054 (2018) [arXiv:1801.01523 [gr-qc]].

[3] K. Taniguchi, S. Takagishi and R. Kase, Phys. Rev. D **110**, no.4, 044006 (2024) [arXiv:2403.17484 [gr-qc]].

[4] R. Kase and S. Tsujikawa, Phys. Rev. D **107**, no.10, 104045 (2023) [arXiv:2301.10362 [gr-qc]].

——index へ戻る

SP-10

Quasinormal Mode 観測による電荷 BH と磁荷 BH の識別は可能か?

東京理科大学
山本　忠彦

Quasinormal Mode 観測による電荷 BH と磁荷 BH の識別は可能か？

山本 忠彦 (東京理科大学大学院 理学研究科)

Abstract

2015 年の LIGO による重力波の初の直接観測以来、マルチメッセンジャー天文学における重力波の研究はその重要性を増している。重力波の観測には、重力波観測装置の開発に加えて、理論による重力波の予測が重要である。2 つのブラックホール（BH）の合体後に 1 つの BH として安定するまでの過程で放出される重力波はリングダウン重力波と呼ばれ、その BH の質量などに依存した減衰振動である準固有振動モード（Quasinormal Mode, QNM）の波の重ね合わせである。そして、この QNM は観測装置で観測し検証することが出来る。このとき、一般相対論においては電荷 BH と磁荷 BH はいずれも Reissner-Nordström 計量を持つため、背景時空での光的測地線では識別できない。そこで今回は、電荷 BH と磁荷 BH の QNM 観測による識別可能性を研究した論文 [1] のレビューを行った。なお、レビューは数値計算の再現までには至れず、その結果は論文より抜粋した。

1 Introduction

一般相対論は曲がった時空の重力の作用を表す基本的な理論である。質量 M を持つ Schwarzschild BH は静的・球対称 (SSS) な背景での真空解である。電磁場を考慮すると、SSS BH 解は質量 M に電荷 q_E を加えた Reissner–Nordström(RN) 計量で表される。また、Einstein 方程式は磁荷 q_M を持った BH の存在も示唆している。その電荷 BH と磁荷 BH を区別することは、それらの理論的な特性を理解し、観測と付き合わせるために重要である。

QNM は BH がどのような hair を持つかによって異なるので、QNM の観測は BH を区別する一つの手段となる。その QNM は摂動論を利用して摂動の運動方程式から得られる。この摂動は SSS 背景では 2 次元回転の元での変換特性に応じて偶パリティと奇パリティに分類できる。電荷 q_E を持つ RN BH においては、摂動方程式は偶パリティと奇パリティに分類され、それぞれの方程式において重力と電磁気の摂動が連成した形となることが知られている。そして、磁荷をもつ BH は、電磁場ラグランジアンが非線形である一般化された Einstein–Maxwell 理論において得られるが、同様に偶パリティと奇パリティで重力と電磁気の摂動が連成した方程式となる。これら QNM の研究は過去においては電荷のみの BH、または磁荷のみの BH に集中しており、電荷と磁荷の混在が QNM のスペクトルにどんな特徴をもたらすかはまだ明確ではない。

このレビュー論文では、標準 Einstein–Maxwell 理論における電荷と磁荷が混在した回転しない BH の QNM を shooting 法を用いて導出し、その識別が可能であるかの研究をしている。

2 Charged Black Holes

標準 Einsten–Maxwell 理論における作用は次式で与えられる。

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{M_{\rm pl}^2}{2}R - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) \tag{2.1}$$

ここで、$M_{\rm pl}$ は換算プランク質量、g は計量の行列式、R はチッリスカラー、$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ は電磁場テンソルである。ここで、ベクトル場 A_μ は、

$$A_\mu = (A_0(r), 0, 0, -q_M\cos\theta) \tag{2.2}$$

そして、以下の線素を持つ SSS 背景での帯電した BH の QNM を考える。

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h^{-1}(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{2.3}$$

f と h は、BH 質量、電荷、磁荷それぞれを M、q_E、q_M として

$$f(r) = h(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{q_E^2 + q_M^2}{2M_{\rm pl}^2 r^2} \tag{2.4}$$

で与えられる。

3 Black Hole Perturbations

(2.3) の計量に対する摂動と、ベクトル場 A_μ の摂動を球面調和関数展開し、ゲージ固定を行うことで、摂動を含んだ計量は

$$
\begin{aligned}
g_{tt} &= -f(r) + f(r)\sum_l H_0(t,r)Y_{l0}(\theta),\\
g_{tr} &= g_{rt} = \sum_l H_1(t,r)Y_{l0}(\theta),\\
g_{t\varphi} &= g_{\varphi t} = -\sum_l Q(t,r)(\sin\theta)Y_{l0,\theta}(\theta),\\
g_{rr} &= h^{-1}(r) + h^{-1}(r)\sum_l H_2(t,r)Y_{l0}(\theta),\\
g_{r\theta} &= g_{\theta r} = \sum_l h_1(t,r)Y_{l0,\theta}(\theta),\\
g_{r\varphi} &= g_{\varphi r} = -\sum_l W(t,r)(\sin\theta)Y_{l0,\theta}(\theta),\\
g_{\theta\theta} &= r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2\sin^2\theta
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

そして、ベクトル場 A_μ は

$$
\begin{aligned}
A_t &= A_0(r) + \sum_l \delta A_0(t,r)Y_{l0}(\theta),\\
A_r &= \sum_l \delta A_1(t,r)Y_{l0}(\theta), \quad A_\theta = 0\\
A_\varphi &= -q_M\cos\theta - \sum_l \delta A(t,r)(\sin\theta)Y_{l0,\theta}(\theta)
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

と表すことができる。

(3.1)(3.2) を (2.1) に代入すると摂動の 2 次の作用は $\mathcal{S}^{(2)} = \int dtdr(\mathcal{L}_A + \mathcal{L}_B)$ で表され、この時

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_A = {}& \frac{LM_{\rm pl}^2}{4}\left(\dot{W} - Q' + \frac{2Q}{r}\right)^2\\
&- \frac{Lq_E}{r^2}\left(\dot{W} - Q' + \frac{2Q}{r}\right)\delta A\\
&+ \frac{L[M_{\rm pl}^2(L-2)r^2 + 2q_M^2]}{4r^2 f}(Q^2 - f^2W^2)\\
&+ \frac{L}{2f}\left(\dot{\delta A}^2 - f^2\delta A'^2 - \frac{fL}{r^2}\delta A^2\right)\\
&- \frac{Lq_Eq_M}{r^4}Qh_1 + \frac{Lq_M}{r^2 f}(Q\delta A_0 - f^2W\delta A_1)\\
&- \frac{Lq_M}{2r^2}[2f\delta A'h_1 - \delta A(H_0 - H_2)]
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_B = {}& \frac{q_E^2}{8r^2}H_0^2 - \left[\frac{rM_{\rm pl}^2 f}{2}H_2' - \frac{LM_{\rm pl}^2 f}{2}h_1'\right.\\
&+ \frac{M_{\rm pl}^2(L+2)r^2 - q_M^2}{4r^2}H_2\\
&\left.- L\frac{2M_{\rm pl}^2 r^2(f+1) - q_E^2 - q_M^2}{8r^3}h_1\right]H_0\\
&+ \frac{LM_{\rm pl}^2}{4}H_1^2 + M_{\rm pl}^2\left(r\dot{H}_2 - \frac{L}{2}\dot{h}_1\right)H_1\\
&+ \frac{2M_{\rm pl}^2 r^2 - q_M^2}{8r^2}H_2^2\\
&- L\frac{2M_{\rm pl}^2 r^2(f+1) - q_E^2 - q_M^2}{8r^3}H_2h_1 + \frac{LM_{\rm pl}^2}{4}\dot{h}_1^2\\
&+ \frac{Lf(M_{\rm pl}^2 r^2 - q_M^2)}{2r^4}h_1^2\\
&+ \frac{r^2}{2}(\delta A_0' - \delta\dot{A}_1)^2 + \frac{q_E}{2}(H_0 - H_2)(\delta A_0' - \delta\dot{A}_1)\\
&- L\left(\frac{q_E}{r^2}h_1\delta A_0 - \frac{1}{2f}\delta A_0^2 + \frac{f}{2}\delta A_1^2\right)
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

となり、ラグランジアン密度は 9 個の摂動、Q, W, H_0, H_1, H_2, h_1, δA_0, δA_1, δA を持つ。
ここで、ラグランジュ乗数 χ_1、χ_2 と新しい場 v_1 を

$$
\chi_1 = \dot{W} - Q' + \frac{2Q}{r} - \frac{2q_E}{M_{\rm pl}^2 r^2}\delta A \tag{3.5}
$$

$$
\chi_2 = \delta\dot{A}_1 - \delta A_0' - \frac{q_E(H_0 - v_1)}{2r^2} + \frac{Lq_E h_1}{2r^3} \tag{3.6}
$$

$$
v_1 = H_2 - \frac{L}{r}h_1 \tag{3.7}
$$

と定義すると 9 個の摂動は、δA、χ_1、χ_2、v_1 で表すことができる。それらの変分を取り、連立させて $\ddot{\delta A}$、$\ddot{\chi_1}$、$\ddot{\chi_2}$、$\ddot{v_1}$ で解くと、4 つ摂動方程式が得られる。ここで、

$$
\beta \equiv \frac{2M_{\rm pl}^2(L+1)r^2 - q_E^2 - q_M^2}{2M_{\rm pl}^2 r^2} \tag{3.8}
$$

としている。

$$\ddot{\delta A} = f^2\delta A'' - \frac{f(L-\beta+f)}{r}\delta A' - \frac{f[(5L-4\beta+4)(3f-\beta)M_{\rm pl}^2 r^2 - 2q_M^2(5f-\beta)]}{M_{\rm pl}^2(3f-\beta)r^4}\delta A$$
$$- \frac{2f^2 q_M[2M_{\rm pl}^2 r f v_1' + M_{\rm pl}^2(2\beta-L)v_1 + 2q_E\chi_2]}{M_{\rm pl}^2(3f-\beta)r^2} - \frac{fq_E}{r^2}\chi_1 \tag{3.9}$$

$$\ddot{\chi}_1 = f^2\chi_1'' - \frac{f(L-\beta-f)}{r}\chi_1' - \frac{f[M_{\rm pl}^2(3L+4f-2\beta-2)r^2 + 2q_M^2]}{M_{\rm pl}^2 r^4}\chi_1 + \frac{4q_M f^2}{M_{\rm pl}^2 L r}\chi_2'$$
$$+ \frac{2q_M f[((5f+\beta)L + 4f(3f-3\beta-2))M_{\rm pl}^2 r^2 - 4fq_M^2]}{M_{\rm pl}^4 L(3f-\beta)r^4}\chi_2 + \frac{4q_E q_M f^2[2rfv_1' + (2\beta-L)v_1]}{M_{\rm pl}^2 L(3f-\beta)r^4}$$
$$- \frac{2q_E f[(L-2)(3f-\beta)M_{\rm pl}^2 r^2 + 2q_M^2(5f-\beta)]}{M_{\rm pl}^4(3f-\beta)r^6}\delta A \tag{3.10}$$

$$\ddot{\chi}_2 = f^2\chi_2'' - \frac{f(L-\beta-3f)}{r}\chi_2' - \frac{f[M_{\rm pl}^2\{(L-2\beta-8)f - 3\beta L + 2\beta^2\}r^2 + 4fq_M^2]}{M_{\rm pl}^2(3f-\beta)r^4}\chi_2 - \frac{q_M f L}{r^4}\chi_1$$
$$+ \frac{2q_E f[2M_{\rm pl}^2 r^3 f^2 v_1' - M_{\rm pl}^2(L-2\beta)r^2 f v_1 - Lq_M(5f-\beta)\delta A]}{M_{\rm pl}^2(3f-\beta)r^6} \tag{3.11}$$

$$\ddot{v}_1 = f^2 v_1'' + \frac{f[(L+4)f + 3f^2 + 3\beta(L-\beta)]}{(3f-\beta)r}v_1'$$
$$+ \frac{3(L-\beta+2)f^2 + f[(7L+2)\beta - 4\beta^2 - 2L^2 - 2L] - \beta(L-\beta)^2}{(3f-\beta)r^2}v_1$$
$$- \frac{2\beta L + 4fL - \beta^2 - 4f\beta - 3f^2 + 4f}{M_{\rm pl}^2(3f-\beta)r^4}(Lq_M\delta A - q_E r^2\chi_2) \tag{3.12}$$

この 4 式は、v_1、χ_1 が主に偶パリティ、χ_2、δA が主に奇パリティで、摂動が連成した時間の 2 階微分の運動方程式となっている。

4 Methods For Computing QNMs

この (3.9)〜(3.12) を亀座標で表し、そして v_1、χ_1、χ_2、δA に関連した新しい関数 ψ_1、ψ_2、ψ_3、ψ_4 を

$$v_1 = e^{-i\omega t}\frac{\psi_1}{M_{\rm pl}(r-r+)}, \quad \chi_1 = e^{-i\omega t}\frac{\psi_2}{M_{\rm pl}r},$$
$$\chi_2 = e^{-i\omega t}\frac{\psi_3}{r^2}, \quad \delta A = e^{-i\omega t}\psi_4 \tag{4.1}$$

と用意することで、(3.9)〜(3.12) は次の形に変更できる。

$$\left[\frac{d^2}{dr_*^2} + \omega^2 - \boldsymbol{V}(r)\right]\vec{\psi} - \boldsymbol{U}(r)\vec{\psi}' = \vec{0} \tag{4.2}$$
$$\vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^{\rm T} \tag{4.3}$$

さて、この (4.2) 式から QNM を計算するにあたって 2 種類の shooting 法を使う。

まず、1 つ目の手法は、horizon($r = r_+$) 近辺での ψ_i を次のように展開し、

$$\psi_i^h = e^{-i\omega r_*}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{G_i^{(n)}}{n!}(r-r_+)^n \tag{4.4}$$

無限遠周辺では次のように展開する。

$$\psi_i^\infty = e^{i\omega r_*}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{F_i^{(n)}}{n!}r^{-n} \tag{4.5}$$

そして、この ψ_i^h を r_+ から、ψ_i^∞ を $+\infty$ から積分し、$r_+ < r < +\infty$ 間で ψ_i^h と ψ_i^∞ が滑らかに接続し線形関係となる ω が QNM の周波数である。

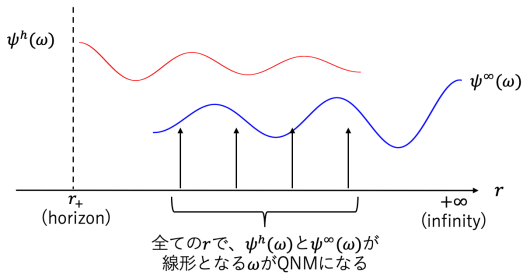


図 4.1: shooting 方法 1

2 つ目の手法は、ψ_i^h を無限遠まで外挿し、その無限遠での境界条件を課すことで QNM を得る。

この 2 つの手法で全電荷 $(q_T^2 = q_E^2 + q_M^2)$ を一定として q_E と q_M の比率 $\alpha(\tan\alpha = q_M/q_E)$ を変えた場合の QNM を識別できるかを検証する。さらに q_T^2 の値を変えて、同様の方法で QNM の違いを探る。

5 Numerical Determination Of QNMs

図 (5.1)(5.2) は、電荷と磁荷の比率が同じ $(\alpha = \pi/4, q_E = q_M)$ 場合の QNM と異なる比率の QNM との差を示している（オレンジ $(\alpha = \pi/2, q_E = 0)$、青 $(\alpha = 0, q_M = 0)$、緑 $(\alpha = \pi/3)$）。図 (5.1) は QNM の実部の差、(5.2) は虚部の差である。なお、x 軸の r_-/M の変化は q_T の変化に対応している。

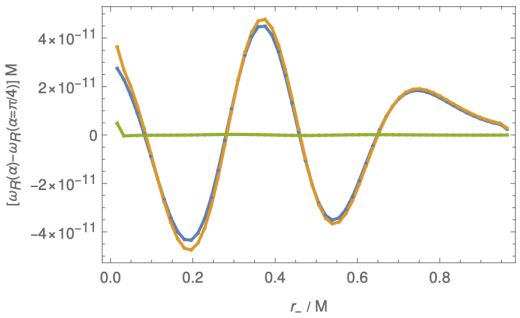


図 5.1: 比率 α の違いによる QNM 実部の差
（レビュー論文 [1] より抜粋）

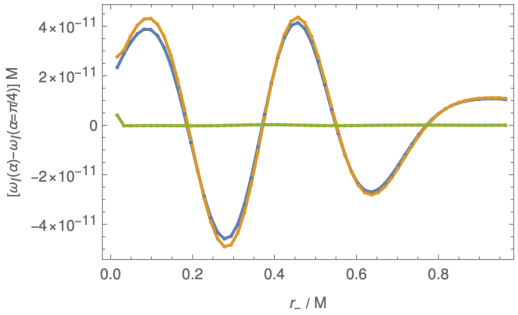


図 5.2: 比率 α の違いによる QNM 虚部の差
（レビュー論文 [1] より抜粋）

図 (5.1)(5.2) から、QNM は 10^{-11} のオーダーの精度で比率 α に依存しないことがわかった。この結果は $l = 2$ の基音（QNM の周波数の虚部の絶対値が一番小さい周波数）での結果であるが、$l = 3$ の基音でも同様な結果を得た。さらに、$l = 2$ の倍音（基音以外の周波数の QNM）の 1 つのケースでも、その QNM は比率 α に依存しないことがわかった。

6 Conclusion

上記の結果は、標準 Einstein–Maxwell 理論における電荷と磁荷が混在した回転しない BH において、その電荷と磁荷の比率が異なる BH を QNM の観測だけでは識別することが出来ないことを示している。しかし、BH 周辺での荷電粒子の運動は電荷 BH と磁荷 BH では異なるので、それらを識別する何らかの方法があるはずである。今回の論文レビューでは数値計算の再現までには至らなかったので、その数値計算を完了させた後、電磁場と相互作用する axion 場を含んだ Einstein-Maxwell-axion 理論を更に拡張した一般的な理論に基づいた QNM による BH の識別の研究を行う予定である。

Reference

[1] Antonio De Felice and Shinji Tsujikawa, Phys. Rev. D 109, 084022, 2024 [arXiv:2312.03191 [gr-qc]].

——index へ戻る

SP-11

U(1) ゲージ不変 scalar-vector-tensor 理論における BH 解

東京理科大学
北川　真生

U(1) ゲージ不変 scalar-vector-tensor 理論における BH 解

北川　真生 (東京理科大学大学院 理学研究科)

Abstract

一般相対論 (GR) に対して，追加の自由度を重力項と非最小結合させ GR を修正した理論を修正重力理論と呼ぶ．この追加の自由度がスカラー場である場合，運動方程式が 2 階微分までに保たれる最も一般的な理論として Horndeski 理論 [1] が存在する．一方，追加自由度が有質量ベクトル場である場合，同様の特徴を持つ一般的な理論として一般化 Proca 理論 [2] がある．更に，これらの 2 つの理論を統合したものがスカラー・ベクトル・テンソル理論（SVT 理論）[3] である．ベクトル場に U(1) ゲージ不変性を課した SVT 理論 [4] では，無毛定理からの逸脱を表す hair と呼ばれる特徴を持った非自明なスカラー場を含む解が得られた．本発表では先行研究 [4] のレビューとして，SVT 理論におけるスカラー場-ベクトル場間の 3 次相互作用項がどのようにして非自明なスカラー場を発現させるのかを明らかにする．

1　Introduction

GR は，太陽系内のような局所的領域では高い精度で観測・実験結果を説明しているが，極端な大スケールや小スケールにおける適用範囲には限界がある可能性がある．例えば，宇宙加速膨張を説明するために仮定された正体不明のエネルギー成分である暗黒エネルギーについて，一般相対論+素粒子論の標準模型の枠組みで説明することが困難な観測結果が近年現れている．一方，修正重力理論は重力場と結合した新たな自由度を理論に加えることで重力の法則自体を修正して加速膨張を説明する立場にあり，最新の観測結果と整合的な理論模型の構築が試みられている．GR+電磁気学の枠組みでは，定常で軸対称かつ無限遠で平坦という仮定のもと BH 解はその性質が質量，電荷，スピンの 3 つのパラメータで決定されるという無毛定理と呼ばれる定理が成立する [5]．しかし，修正重力理論に基づくと追加自由度の影響により無毛定理から逸脱した hairy BH 解が得られる場合がある．この追加自由度の振る舞いは BH に関する様々な可観測量に影響を与えることから，観測を介して修正重力理論を検証するためには，予め修正重力理論に基づいた BH 解と強重力領域における物理への理解が必要となる．

GR に対してスカラー 1 成分を追加して運動方程式を 2 階に保った最も一般的な理論は Horndeski 理論であり，オストログラドスキー不安定性を回避する．

スピン 1 場を追加すれば固有ベクトルモードが現れ，現象論が豊かになる．この場合に同様な特徴を持つ最も一般的な理論は一般化 Proca 理論として知られている．

これら 2 つの理論を統合したものが スカラー-ベクトル-テンソル (SVT) 理論である.U(1) ゲージ不変／非不変の両ケースで運動方程式を 2 階に保つ最も一般的な構成が示され，新自由度はブラックホール，インフレーション，ダークエネルギー，ダークマター，磁場生成などに関与し得る．

本稿で取り上げる論文 [4] では U(1) ゲージ不変かつシフト対称な SVT 理論を静的・球対称 BH 解を解析し，3 次のスカラー-ベクトル相互作用 f_3 によってイベントホライズン周辺で顕著な振る舞いを見せるスカラー hair を持つ新規 BH 解を発見し，さらに 4 次相互作用 f_4 を加えた場合にもスカラーとベクトル双方の hair を備えた正則解が存在することを示す．また 3 次相互作用項がスカラー・ヘア生成に不可欠である点を強調し，数値的に外部領域の正則性を確認する．

2　U(1) ゲージ不変 SVT 理論

2 次の運動方程式を導く最も一般的な $U(1)$ ゲージ不変を持つ SVT 理論の作用は

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\sum_{i=3}^{5}\mathcal{L}^i_{\rm ST} + \sum_{i=2}^{4}\mathcal{L}^i_{\rm SVT}\right), \qquad (1)$$

である．ここで,g は計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の行列式であり,$\mathcal{L}^3_{ST}, \mathcal{L}^4_{ST}, \mathcal{L}^5_{ST}$ はそれぞれ 3 次, 4 次, 5 次の純粋

な Horndeski 理論におけるラグランジアンである．また,$\mathcal{L}^2_{SVT}, \mathcal{L}^3_{SVT}, \mathcal{L}^4_{SVT}$ はスカラー-ベクトル-テンソル相互作用に対応しており次のように与えられる．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^2_{\rm SVT} &= f_2(\phi, X, F, \tilde{F}, Y),\\ \mathcal{L}^3_{\rm SVT} &= \mathcal{M}^{\mu\nu}_3 \nabla_\mu \nabla_\nu \phi,\\ \mathcal{L}^4_{\rm SVT} &= \mathcal{M}^{\mu\nu\alpha\beta}_4 \nabla_\mu \nabla_\alpha \phi \nabla_\nu \nabla_\beta \phi\\ &\quad + f_4(\phi, X) L^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta},\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}X = -\frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi, F = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},\\ \tilde{F} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}, Y = \nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi F^{\mu\alpha}F^{\nu}{}_{\alpha},\end{aligned}$$

ゲージ不変な場の強度 $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$ と, その双対強度テンソル $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}E_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ を考える. ここで、$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ は反対称のレヴィ・チヴィタテンソルであり、正規化条件 $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = -4!$ を満たす. また, ラグランジアン $\mathcal{L}^{SVT}_3$ における 2 階テンソル $\mathcal{M}^{\mu\nu}_3$ は次の形式をとる.

$$\mathcal{M}^{\mu\nu}_3 = [f_3(\phi, X)g_{\rho\sigma} + \tilde{f}_3(\phi X)\nabla_\rho\phi\nabla\sigma\phi]\tilde{F}^{\mu\rho}\tilde{F}^{\nu\sigma} \tag{2}$$

また 4 階テンソル $\mathcal{M}^{\mu\nu\alpha\beta}_4$ は

$$\mathcal{M}^{\mu\nu\alpha\beta}_4 = [\frac{1}{2}f_{4,X}(\phi, X) + \tilde{f}_4(\phi)]\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}^{\alpha\beta} \tag{3}$$

f_4 は ϕ と X の関数であり, 記法 $f_{4,X} \equiv \frac{\partial f_4}{\partial X}$ を用いる. 一方, 関数 $\tilde{f}_4$ は ϕ のみの関数である. 二重双対リーマンテンソル $L_{\mu\nu\alpha\beta}$ は, リーマンテンソル $R_{\rho\sigma\gamma\delta}$ を用いて次のように構築される.

$$L^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\rho\sigma\gamma\delta} \tag{4}$$

構成上，これらの理論は 5 つの伝播する自由度（1 つのスカラー，2 つのベクトル，および 2 つのテンソル）を含む.

また，静的球対称時空を考えるため，計量は

$$\begin{aligned}ds^2 &= -f(r)dt^2 + h^{-1}(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2, \qquad (5)\\ d\Omega^2 &= d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2,\end{aligned}$$

のように定める.

ここで，t，r，および θ, φ はそれぞれ時間，動径座標，角度座標を表し，関数 f と h は r に依存している．イベントホライズン半径を r_h とし，これは $f(r_h) = h(r_h) = 0$ を満たすように定義される．さらに，イベントホライズンの外部 $(r > r_h)$ では $f(r) > 0$ および $h(r) > 0$ である.

背景計量 (5) の下で，スカラー場 ϕ は $\phi = \phi(r)$ の形をとる．ベクトル場は時間成分 A_0 と空間成分 A_i を持ち、空間成分 A_i はさらに横成分と縦成分に分解される：

$$A_i = A^{(T)}_i + \nabla_i\chi,$$

ただし $\nabla_i A^{(T)}_i = 0$ ．ベクトル場の $r = 0$ での正則性を要求すると，横モード $A^{(T)}_i$ は消失しなければならない．したがって，背景計量 (3.1) と整合するベクトル場は次のように与えられる.

$$A_\mu = (A_0(r), A_1(r), 0, 0),$$

ここでスカラー関数 $\chi(r)$ を用いて $A_1(r) = \chi'(r)$ であり, プライム $(')$ は r に関する微分を表す.$U(1)$ ゲージ不変性のため, この背景構成において縦モード $A_1(r)$ はベクトル場の動力学に寄与しない.

3 解析

本研究ではアインシュタイン・ヒルベルトラグランジアン R に加えて, スカラー-ベクトル-テンソル相互作用 $\mathcal{L}^i_{\rm SVT}$ を足した次のような作用を考える.

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\Big(\frac{M^2_{\rm pl}}{2}R + \sum_{i=2}^{4}\mathcal{L}^i_{\rm SVT}\Big), \tag{6}$$

$M_{\rm pl}$ は reduced plank mass であり $M_{\rm pl} := \sqrt{\frac{1}{8\pi G}}$ で定義される. ただし光速度 $c = 1$, プランク定数 $\hbar = 1$ である. 作用 (6) の変分計算から各物理量の運動方程式が得られる．また，スカラー場に対するシフト対称性により相互作用関数はそれぞれ

$$f_2 = f_2(X, F), \quad f_3 = f_3(X), \quad f_4 = f_4(X), \tilde{f}_4 = \text{constant}. \tag{7}$$

となり，さらに作用 (6) のスカラー場 ϕ による変分から得られる方程式はスカラー場の保存則に対応する．解析はまずイベントホライズン近傍と空間的無限遠における 2 つの漸近的領域で級数解を求める．その際，ライスナーノルド・シュトロム (RN) 解：

$$f_{\rm RN} = h_{\rm RN} = (1-\frac{r_h}{r})(1-\mu\frac{r_h}{r}), A^{\rm RN}_0 = P + \frac{Q}{r} \tag{8}$$

に補正が加わることを仮定する．ここで P, Q は定数，μ はインナーホライズンを定めるパラメータで，$0 < \mu < 1$ である．
イベントホライズン周りの級数解は

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i (r - r_h)^i, \quad h = \sum_{i=1}^{\infty} h_i (r - r_h)^i,$$
$$A_0 = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i (r - r_h)^i.$$

無限遠における級数解は

$$f = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{f}_i}{r^i}, \quad h = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{h}_i}{r^i}, \quad A_0 = P + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{a}_i}{r^i}.$$

とおいて運動方程式に代入し，方程式を各オーダーごとに逐次的に解くことで得られる．

4 結果

3 次および 4 次のスカラー・ベクトル相互作用項に具体的な形を当てはめ，その影響を詳細に解析した結果を示す．ここで 3 次の相互作用項において n を 0 以上の整数,β_3 を定数として $f_3 = \beta_3 X^n$ とおくと，スカラー場のシフト対称性により n が 1 以上の場合はスカラー hair が現れないことが導かれるため $f_3 = \beta_3$ と定める．

4.1 3 次スカラー・ベクトル相互作用の効果

まず，3 次のスカラー・ベクトル相互作用 $f_3(X) = \beta_3$ を含み，4 次以降の相互作用 $f_4 = \tilde{f}_4 = 0$ を仮定した系を考察する．このとき，スカラー場 ϕ にシフト対称性（$\phi \to \phi + c$）を課すと，対応する 保存則によりスカラー場の導関数は以下のように与えられる：

$$\phi'(r) = \frac{2\beta_3 h}{rf}(A_0')^2. \tag{9}$$

この結果は，$\phi'(r)$ がベクトルポテンシャルの導関数 A_0' によって駆動されることを意味し，特にイベントホライズン上で ϕ' が有限値を取るため，非自明なスカラー・hair が存在することが示唆される．

イベントホライズン $r = r_h$ の近傍では，メトリック関数 $f(r), h(r)$ およびベクトルポテンシャル $A_0(r)$ は次のように展開される：

$$f(r) = (1-\mu)\left(\frac{r}{r_h} - 1\right) - [1 - 2\mu + 12\tilde{\beta_3}^2\mu^2(1-\mu)]\left(\frac{r}{r_h} - 1\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{r}{r_h} - 1\right)^3,$$
$$h(r) = (1-\mu)\left(\frac{r}{r_h} - 1\right) + -[1 - 2\mu - 4\tilde{\beta_3}^2\mu^2(1-\mu)]\left(\frac{r}{r_h} - 1\right) + \mathcal{O}\left(\frac{r}{r_h} - 1\right)^3,$$
$$A_0 = a_0 + \sqrt{2\mu}M_{\rm pl}\left(\frac{r}{rh} - 1\right) - \sqrt{2\mu}M_{\rm pl}[1 + 4\tilde{\beta_3}^2\mu(2-\mu)]\left(\frac{r}{r_h} - 1\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{r}{r_h} - 1\right)^3,$$

ここで $\tilde{\beta_3} \equiv \beta_3 M_{\rm pl}/r_h^2$ である。また、$a_1 > 0$ の場合を選んだ. 方程式 (9) より

$$\phi' = \frac{4\tilde{\beta_3}\mu M_{\rm pl}}{rh}\left[1 - \{5 + 32\tilde{\beta_3}^2\mu(1-\mu)\}\left(\frac{r}{r_h} - 1\right) + \mathcal{O}\left(\frac{r}{r_h} - 1\right)^2\right],$$

が得られる．

無限遠 $r \to \infty$ においては，解は次のように展開される：

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{2M_{\rm pl}^2 r^2} + \frac{3\beta_3^2 Q^4}{14 M_{\rm pl}^2 r^8} + \mathcal{O}(r^{-9}),$$
$$h(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{2M_{\rm pl}^2 r^2} - \frac{2\beta_3^2 Q^4}{7 M_{\rm pl}^2 r^8} + \mathcal{O}(r^{-9}),$$
$$A_0(r) = P + \frac{Q}{r} - \frac{8\beta_3^2 Q^3}{7r^7} + \mathcal{O}(r^{-9}),$$

方程式 (9) より

$$\phi'(r) = \frac{2\beta_3 Q^2}{r^5} + \mathcal{O}(r^{-11}). \tag{10}$$

が得られる．
これらの式から明らかなように，スカラー場の勾配 ϕ' は遠方で急速に減衰し，スカラー hair は主にイベントホライズン近傍に局在する．またこれは漸近値 0 にむかって急速に減衰していく. 式 (10) より, スカラー hair は振る舞いが電荷 Q に依存するため、secondary type のヘアであるとわかる (secondary hair)．また，

f, h においての β_3 の効果は $1/r^8$ のオーダーで現れる.A_0 についての RN 解からの修正は $1/r^7$ のオーダーから現れることが分かる．

続いてイベントホライズンの外部からの積分により得られた数値解は，f, h, A_0', ϕ' がホライズン外部全域で正則であることを示しており，解の物理的正当性が確認されている（図.1 参照）.

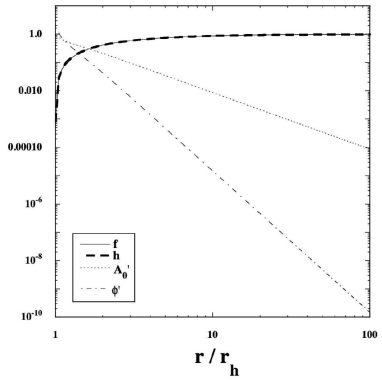


図 1: f, h, A_0', ϕ' のイベントホライズン外における数値解．横軸は $u = r/r_h$，縦軸は各物理量の値である．$\tilde{\beta}_3 = \beta_3 M_{\rm pl}/r_h^2 = 1.0, \mu = 0.5$ また,A_0', ϕ' に関してはともに $M_{\rm pl}/r_h$ で正規化した.

図 1 から分かるように, スカラー hair の r 微分 ϕ' はベクトル hair の r 微分 A_0' に対してより急速に減衰しており ϕ' はイベントホライズン近傍では A_0' に比べて無視できないが, 無限遠に近づくにつれてその値は無視できるほど小くなっていく. つまり非自明なスカラー hair を持つ正則な BH 解が存在し, その効果は非線形な重力領域において顕著に現れる.

4.2 4 次相互作用を加えた場合

続いて，$f_4 \neq 0$ の 4 次相互作用を含むケースを考察する．特に，$f_4(X) = \beta_4 X^n$（$n = 0, 1$）の 2 つのモデルを取り上げる．ここで注意したいのが，$f_3 = 0$ の場合は 4 次の相互作用項による効果ではスカラー hair は生えないことが確認された.

(a) $f_4(X) = \beta_4$（定数）

このモデルでは，ϕ' は 3 次結合項と同様に A_0' によって決定され，スカラー場の保存則により式 (9) が維持される．ただし，メトリック関数 f, h および A_0 の無限遠解には，β_4 による補正が $1/r^4$ や $1/r^5$ の項から現れ，3 次結合のみの場合と比較してより早い次数で有意となった.

(b) $f_4(X) = \beta_4 X$

この場合，$\phi'(r)$ は以下のように非線形な形で与えられる：

$$\phi'(r) = \frac{2\beta_3 r h (A_0')^2}{f r^2 + 2\beta_4 h(2-3h)(A_0')^2}. \qquad (11)$$

β_4 の効果は主にイベントホライズン近傍の f, h, A_0 の $(r-r_h)^2$ 項や，ϕ' の $(r-r_h)^0$ 項に現れるが，遠方では $1/r^8$ オーダー以上の補正にとどまり，空間無限遠では影響が抑制される．また (a),(b) の両パターンにおいて数値計算によりイベントホライズン外部全域において図 1 ど同様に正則な hairy BH 解が確認された.

以上のように，3 次結合 f_3 の導入によりスカラー hair が実現され，さらに 4 次項 f_4 を加えることでスカラーとベクトルの両 hair をもつ正則なブラックホール解が構成されることが確認された.

5 Conclusion

本研究では U(1) ゲージ不変な SVT 理論に基づき BH 解を求めた結果，スカラー場のシフト対称下では 3 次相互作用項がない場合，スカラー hair は発生しない．しかし $f_3 \neq 0$ がこの構造を破り, BH 解のスカラー場とベクトル場において新たな new hair を生やすことが示された.

4 次相互作用項について，定数項モデル $f_4 = \beta_4$ のみではスカラー hair は現れないが，3 次相互作用項と併せるとスカラー場とベクトル場両方の hair を持つ新規な BH 解が得られた．また線形 X 依存モデル $f_4 = \beta_4 X$ を加えた場合も同様に正則な複合 hairy BH 解が得られた.

Reference

[1] G. W. Horndeski 2013, Int. J. Theor. Phys.10.

[2] L. Heisenberg 2024,JCAP 05,015, [arXiv:1402.7026 [hep-th]].

[3] L. Heisenberg 2018,JCAP 10,054,[arXiv:1801.01523 [gr-qc]].

[4] L. Heisenberg & S. Tsujikawa (2018), Phys. Lett. B 780,638-646, [arXiv:1802.07035 [gr-qc]].

[5] W. Israel 1967, Phys. Rev. 164 (1967), 1776-1779.

——index へ戻る

SP-12

確率背景重力波 (SGWB) を含めた spectal siren 法による宇宙論パラメータ推定

東京大学
今井　健人

確率背景重力波 (SGWB) を含めた spectal siren 法による宇宙論パラメータ推定

今井 健人 (東京大学大学院 理学系研究科 M1)

Abstract

H_0 tension は宇宙論における重要課題の 1 つである。現在、重力波は H_0 の新たな測定手段として注目されており、H_0 tension の解決の糸口になることが期待されている。ただし重力波それ自身には赤方偏移の情報が含まれておらず、赤方偏移を得るために電磁波との同時観測を行う手法 (brght siren) や銀河カタログや大規模構造との相関をとる手法 (dark siren)、さらにはコンパクト連星合体 (CBC) の宇宙での質量分布を推定する (specral siren) 手法などが提案されている。本稿では spectral siren 法に注目し Ferraiuolo et al. (2025) で行われた確率背景重力波 (SGWB) を含めた解析手法とシミュレーション結果についてレビューを行う。

1 Introduction

コンパクト連星合体 (CBC) から得られる重力波は宇宙膨張に関する手がかりとなる。電磁波観測と違って CBC は光度距離に関し直接的な推定を可能にするので標準サイレン (**standard siren**) と呼ばれる。赤方偏移の情報と結び付けることでハップルパラメータといった宇宙論パラメータを推定することができる。しかしながら重力波のみでははは赤方偏移がわからないため様々な手法が提案されている。**Bright siren** は標準サイレンの一種であり GW 放出天体を特定し、その天体の電磁波観測を行うことにより正確な赤方偏移を得ることができる。**dark siren** は対応する電磁波観測がない重力波観測イベントの天球位置と銀河カタログとの照らし合わせから赤方偏移を得るための手法である。具体的には複数検出によりさて重力波信号はその振幅が非常に小さいことから検出が可能になった今も検出できるイベントは多くない。したがって重力波信号は個別に検出できるイベントに加えて確率的背景重力波 (SGWB) と呼ばれる複数のイベントが混ざり合った信号も検出されることが期待される。本稿では **spectral siren** と呼ばれる方法に SGWB も加えてパラメータ推定を行った Ferraiuolo et al. (2025) をレビューする。§2 で解析手法について、§3 でシミュレーションの枠組みと実行結果による解析手法の評価、LVK データの解析について、§4 で結論について述べる。

2 Analysis methods

2.1 spectral siren

この手法は検出器系の質量と重力波波源の間の固有の縮退を利用した方法である。

$$m_{det} = (1+z)m_s \tag{1}$$

これは我々が検出する質量は真の質量とは異なるということを意味している。したがって赤方偏移に対する質量分布モデルを仮定することで赤方偏移は間接的に推定できる。この手法の有効性は使用する CBC の質量分布モデルの正確性に影響される。

2.2 Setting

重力波データセットを $N_{\rm obs}$ 個の個別イベントのセットと観測時間 $T_{\rm obs}$ の間で得られた検出器間の相関ノイズの量を記述する $\hat{C}(f)$ のセットとして記述する。Φ を CBC の分布を特徴付けるハイパーパラメータや宇宙論パラメータとする。仮定として結合尤度を

$$\mathcal{L}(x,\hat{C}|\Phi) = \mathcal{L}_{\rm CBC}(x|\Phi)\mathcal{L}_{\rm SGWB}(\hat{C}|\Phi) \tag{2}$$

と CBC,SGWB で分解できるものとする。これは SGWB の信号がすべての個別イベントを取り除いた後も変わらないという仮定であるが、検出器の感度が CBC の分布の内かなりの量を検出できる程度の

場合は正しくない。この問題を対処するために Ferraiuolo et al. (2025) では観測期間 $T_{\rm obs}$ の内半分は個別 CBC イベントの検出に、もう半分は SGWB の検出に用いられた。

2.3 Hierarchical Bayesian Likelihood

GW イベントの検出は選択効果を考慮した非一様ポアソン仮定としてモデリングされる。(Mandel et al. (2019)) 観測期間 $T_{\rm obs}$ で $N_{\rm obs}$ 個に信号に対してハイパーパラメータ Φ が与えられた特定の重力波のデータセット $\{x\}$ を得る確率は

$$\mathcal{L}_{\rm CBC}(x|\Phi) \propto e^{-N_{\rm exp}(\Phi)} \prod_{i=1}^{N_{\rm obs}} T_{\rm obs} \int d\theta dz \times \mathcal{L}_{\rm GW}(x_i|\theta,z,\Phi) \frac{1}{1+z} \frac{dN_{CBC}}{d\theta dz dt_s}(\Phi) \quad (3)$$

と書ける。ここで $N_{\rm exp}$ は検出数の期待値であり、モンテカルロインジェクションで評価され、選択効果の補正に使われる。変数 z, θ は赤方偏移と個別の CBC のパラメータ (質量など) を表している。個々の重力波尤度 $\mathcal{L}_{\rm GW}(x_i|\theta,z,\Phi)$ は、パラメータ θ の不確実性を考慮している。式 (3) の最終項はソースフレーム時間 t_s における CBC レートに対応する。

2.3.1 Stochastic Gravitational-Wave Background Likelihood

SGWB は慣例的に密度パラメータとして

$$\Omega_{\rm GW}(f) = \frac{1}{\rho_c} \frac{d\ln \rho_{\rm GW}(f)}{d\ln f} \quad (4)$$

と定義される。ここで $\rho_c = 3H_0^2c^2/(8\pi G)$ は宇宙の臨界エネルギー密度であり $\rho_{\rm GW}(f)$ は周波数 f での SGWB のエネルギー密度である。この密度パラメータは CBC の分布を用いて次のようにモデル化される。(Phinney (2001))

$$\Omega_{Gw}(f) = \frac{f}{\rho_c} \int_0^{+\infty} dz \frac{R(z)}{H(z)(1+z)} \left\langle \frac{dE_s}{df_s}\Big|_{f(1+z)} \right\rangle \quad (5)$$

$R(z)$ は単位共動体積当たり、単位時間当たりの衝突発生率である。$H(z)$ はハッブルパラメータであり、ここでは ΛCDM モデルを仮定としている。つまり $H(z) = H_0\sqrt{\Omega_m(1+z)^3+\Omega_\Lambda}$ である。衝突発生率を単位共同体積当たりで考えていることから SGWB は H_0^{-3} に比例する。式 (5) の最後の項はある赤方偏移 z での重力波源の分布で平均化された CBC 分布によって放出されるエネルギースペクトルである。LIGO-Virgo-Kagra(LVK)collaboration での SGWB の探査計画ではこの $\Omega_{\rm GW}(f)$ を測定することを目標としている。これらのネットワークにおける検出器をラベル I で特徴づけると検出器 I,J 間の最適化された相互相関推定値は

$$\hat{C}_{IJ}(f) = \frac{2}{T_{\rm obs}} \frac{10\pi^2}{3H_0^2} \frac{f^3}{\gamma_{IJ}(f)} \tilde{s}_I(f)\tilde{s}_J^*(f) \quad (6)$$

で与えられる。$T_{\rm obs}$ は検出期間で $\tilde{s}_I(f), \tilde{s}_J(f)$ は得られたデータのフーリエ変換である。$\gamma_{IJ}(f)$ は重複削減関数と呼ばれるもので検出器 I, J の位置に依存するものである。すべての検出器を足し合わせた相互相関推定値は

$$\hat{C}(f) = \frac{\sum_{IJ} \hat{C}_{IJ}(f)\sigma_{IJ}^{-2}}{\sum_{IJ}\sigma_{IJ}^{-2}} \quad (7)$$

となり、さらに $\left\langle \hat{C}(f) \right\rangle = \Omega_{GW}(f)$ である。検出器間 I, J 間の分散推定値は SGWB の SNR が十分小さいという仮定の下で

$$\sigma_{IJ}^2(f) \simeq \frac{1}{2T_{\rm obs}\Delta f} \left(\frac{10\pi^2}{3H_0^2}\right)^2 \frac{f^6}{\gamma_{IJ}^2(f)} P_I(f)P_J(f) \quad (8)$$

と近似される。$P_I(f)$ は検出器 I の片側パワースペクトル密度であり、Δf は検出器の分解能である。すべての検出器が統計的に独立であるとすれば

$$\sigma^2(f) = \left(\sum_{IJ} \frac{1}{\sigma_{IJ}^2(f)}\right)^{-1} \quad (9)$$

である。この分散は SGWB の上限と設定するのに使われる。相互相関推定値は SGWB の尤度を定義するのに使われる。ガウス分布を仮定すれば、

$$L_{\rm SGWB}(\hat{C}|\Phi) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_k \left(\frac{\hat{C}(f_k) - \Omega_{GW}(f_k,\Phi)}{\sigma(f_k)}\right)^2\right] \quad (10)$$

と近似される。尤度は H_0^{-1} に比例する。

3 How to simulate and Results

3.1 Setting

§ 2 で述べたように Ferraiuolo et al. (2025) では以下の 2 通りの観測シナリオでシミュレートされている。1 つは 2 年間の GW データを個別のイベント検出に用いた場合。もう 1 つは階層ベイズ推定が CBC と SGWB に分離したがために、2 年の内 1 年は個別 CBC イベントの検出に、もう 1 年は SGWB の検出に用いた場合である。これに加え、1 年間のデータを分布の重力波源の分布に対する SGWB の寄与を探るために用いるというシナリオもある。CBC と SGWB の両方に共通する、シミュレーションに必要なものとして重力波源の分布と宇宙モデルがある。宇宙モデルに関しては ΛCDM モデルを採用し、分布に関しては

$$\frac{dN_{CBC}}{d\theta dz dt_s} = R_0 \Psi(z,\Phi) p_{pop}(\vec{m}_s|\Phi) \frac{dV_c}{dz} \tag{11}$$

とパラメトライズされている。$R_0 = 20$ は $z = 0$ での局所的な合体率で,$\Psi(z,\Phi)$ は z に関する合体率の発展を表している。また $p_{pop}(\vec{m}_s|\Phi)$ は質量系での質量 $\vec{m}_s = (m_{1,s}, m_{2,s})$ の確率密度関数である。dV_c/dz は単位赤方偏移当たりの共動体積の変化率である。今回の $\vec{m}_s$ モデルとして power-law plus peak (PLP) が採用されている。具体的には

$$\begin{aligned} p(m_{1,s}|m_{min}, m_{max}, \alpha) &= (1-\lambda_g) \\ &\times P(m_{1,s}|m_{min}, m_{max}, \alpha) \\ &+ \lambda_g G(m_{1,s}|\mu_g, \sigma_g), with(0 \le \lambda_g \le 1) \end{aligned} \tag{12}$$

$$p(m_{2,s}|m_{min}, m_{1,s}, \beta) = P(m_{1,s}|m_{min}, m_{1,s}, \beta) \tag{13}$$

ここで m_1 は λ を重みづけとしてガウス分布とべき乗分布の足し合わせたものとして、m_2 はべき乗分布に m_1 を上限としたものとして仮定している。z に関する合体率の発展 $\Psi(z,\Phi)$ は Madau & Dickinson (2014) によるものが採用されている。

$$\Psi(z,\Phi) = \left[1 + (1+z_p)^{-\gamma-\kappa}\right] \frac{(1+z)^{\gamma}}{\left(1 + \frac{1+z}{1+z_p}\right)^{\gamma+\kappa}} \tag{14}$$

z_p は合体率が最も高くなる赤方偏移であり、γ, κ はそれぞれ z が小さい時と大きい時に主要となるパラメータである。そしてこれらはハイパーパラメータ Φ に相当する。

パッケージ ICAROGW を用いて前述のフレームワークで信号を生成し、ベイズ推定を行った。このシミュレーションでは個別検出可能な SNR 閾値を $\rho_{det} > 12$ とした. 使用したモデルパラメータは表 1 に示す。

表 1: シミュレーションに使用した各パラメータの値と prior

Parameter	Injected Value	Prior Range
Cosmological Parameters (flat ΛCDM)		
H_0	67.7	$U(10, 200)$
Ω_m	0.3065	$U(0, 10)$
Rate Evolution (Madau-rate)		
γ	4.56	$U(0, 12)$
κ	2.86	$U(0, 6)$
z_p	2.47	$U(0, 4)$
R_0	20	$U(0, 100)$
Mass Function Parameters (PowerLaw+Peak)		
α	3.78	$U(1.5, 12)$
β	0.81	$U(-4, 12)$
δ_m	4.8	$U(0, 10)$
$m_{\min}$	4.98	$U(2, 10)$
$m_{\max}$	112.5	$U(50, 200)$
μ_g	32.27	$U(20, 50)$
σ_g	3.88	$U(0.4, 10)$
λ_g	0.03	$U(0, 1)$

結果としては分解可能な個別イベントは BBH 分布の 0.6% を占めていることがわかった. さらに個別イベントを取り除く前と後の SGWB は 30%小さくなった。したがって (2) は分離できず観測データを２つに分けて解析を行う必要があることが確認された。観測期間 $T_{\rm obs} = 2$yr の想定では CBC のみの信号は約 1200 個,CBC と SGWB の信号は 600 個ほど生成された。

3.2 Results and simulated data

信号を以上のセッティングで生成し階層ベイズを行った。さらに検出器の感度は o5 を想定している。図 1 は宇宙論パラメータと Population

のパラメータのコーナープロットを示している。CBC のみの解析では 68% 信頼区間で H_0 =

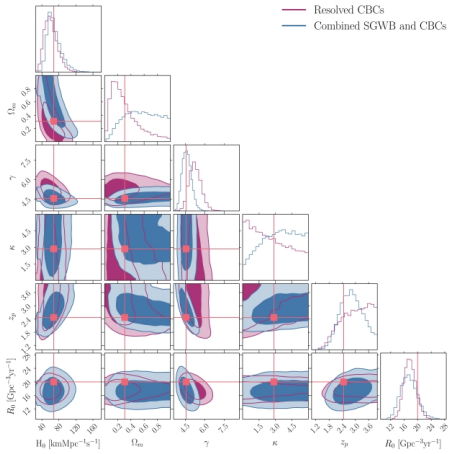


図 1: 宇宙論パラメータと population パラメータの posterior のコーナープロット. 赤色は CBC のみ、青色は CBC と SGWB の解析結果を示す.(Ferraiuolo et al. (2025) より引用)

$59.7^{+17.1}_{-13.4}\mathrm{km\,s^{-1}Mpc^{-1}}$、CBC と SGWB の統合解析では $H_0 = 66.2^{+19.3}_{-12.1}\mathrm{km\,s^{-1}Mpc^{-1}}$ という結果が得られた。ここから spectral siren method において H_0 の測定精度は CBC に多く依存していることが示唆される。しかし SGWB が $1/H_0$ に比例していることから下限値の推定に対しては SGWB が貢献していることがわかった。また R_0 に関しては 2 つの解析法は同じ程度の精度であることもわかった。これは個別の信号は z が小さい領域で多く検出されるからである。γ に関しては統合解析が 10% の精度上昇を達成できた。z_p, κ にもわずかだが統合解析の方が良い推定をしている。これは SGWB が遠方宇宙の情報を含むことに起因している。図 2 は質量モデルのパラメータ,H_0 との相関に焦点を当てたものになっている。CBC のみの解析の方が良い結果を示している。

4 Reanalysis of GWTC-3

Ferraiuolo et al. (2025) では同様な方法で GWTC-3 の再解析を行っている。o-3 中の 59 個の BBH イベントを用いて統合解析が行われた。この解析ではシミュレーションとは異なり質量分布モデルとして multipealmodel を採用している結果として統合解析による精度の向上は見られなかった。

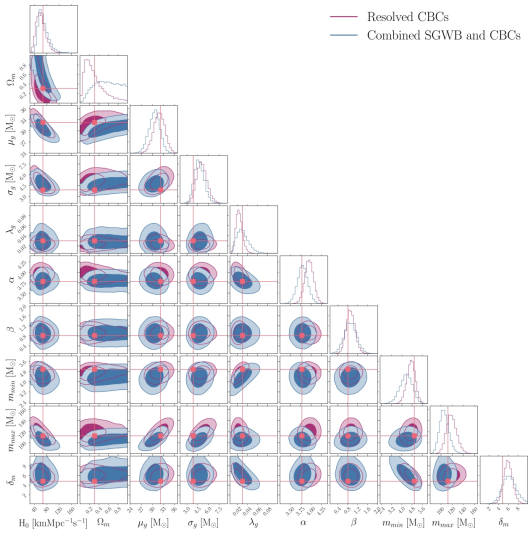


図 2: 宇宙論パラメータと population パラメータの posterior のコーナープロット. 赤色は CBC のみ、青色は CBC と SGWB の解析結果を示す.(Ferraiuolo et al. (2025) より引用)

5 Conclusion

CBC と SGWB による統合解析は現在の検出感度では CBC のみの解析と比較して明らかな推定精度の向上は見られない。しかし SGWB を含めることで宇宙論パラメータの下限に対しては制限を与えることがわかった。さらに SGWB は高赤方偏移の情報を含むために CBC の rate の z 依存性に関してもより制約を与えることができることもわかった。論文でも指摘されているように CBC と SGWB の尤度を分離可能と仮定した点が改善すべき点である。また multi-peak-model によってモデル化できる, BNS や NBHB を考慮していない点も改善点に挙げられる。

Reference

Ferraiuolo,S., Mastrogiovanni,S., , Escoffier3, S. & Kajfasz3,E. 2025, arXiv.2503.14686

Mandel,I., Farr,W.M., & Gair,J.R. 2019, arXiv.1809.02063

Phinney,E.S 2001, https://arxiv.org/abs/astro-ph/0108028v1

Madau,P. & Dickinson,M. 2014, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 52, 415

——index へ戻る

SP-14

DESI DR2 を用いたバリオン音響振動の観測に基づく宇宙論の制限

東京大学
名倉　幸祐

DESI DR2 を用いたバリオン音響振動の観測に基づく宇宙論の制限

名倉 幸祐 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

現在の標準宇宙模型 ΛCDM に基づく宇宙論では、初期宇宙と現在の宇宙のパラメータ間に観測誤差を上回るずれが確認されており、ΛCDM を超える新物理の可能性が示唆されている。宇宙の加速膨張を説明するダークエネルギーのエネルギー密度は、ΛCDM においては時間に依存しないもの (=宇宙定数 Λ) と見做されており、新物理の候補として時間変化するダークエネルギーが考えられる。再結合以前の初期宇宙では、トムソン散乱によってバリオン-光子流体が形成されており、空間的な密度揺らぎが音波として伝播している（バリオン音響振動、BAO)。この典型的なスケールは現在の宇宙の大規模構造にも刻まれており、銀河のクラスタリング解析によってそのスケールを調べることができる。これにより宇宙の膨張史がわかり、ダークエネルギーの性質を制限できる。さらに、クラスタリング解析を宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) データと組み合わせることで、ダークエネルギーの性質に関してより強い制限が得られる。ダークエネルギー分光観測装置 (DESI) は銀河の分光観測を行うことで、ダークエネルギーの性質をより強く制限することを目的として設計された装置である。そこで、本稿では [1] のレビューを行う。この研究では、DESI の 2 回目のデータリリース（DR2）を利用し、約 1400 万天体に及ぶ銀河とクエーサーのクラスタリングを測定することで BAO 解析を行った。その結果、ΛCDM に基づく測定では、DESI DR2 の BAO 解析が示す宇宙論パラメータは CMB 観測との間に 2.3σ のずれが見られた。一方で、時間進化するダークエネルギーを考慮に入れた wCDM に基づく測定では、BAO のみを用いた場合、$w_0 = -0.48^{+0.35}_{-0.17}$, $w_a < -1.34$ という制限が得られ、1.7σ で ΛCDM が棄却された。また、BAO と CMB のデータを合わせると、$w_0 = -0.42 \pm 0.21$, $w_a = -1.75 \pm 0.58$ という結果が得られ、3.1σ で ΛCDM が棄却された。このことは、ΛCDM モデルからの逸脱を示唆しており、時間進化するダークエネルギーが有力となる。

1 Introduction

1.1 標準宇宙模型とダークエネルギー

Ia 型超新星の観測が示した宇宙の加速膨張は、負の圧力を持つ成分・ダークエネルギーの存在を示唆している。6 つのパラメータ (宇宙論パラメータ) に基づく現在の標準宇宙模型 ΛCDM では、ダークエネルギーのエネルギー密度は時間に依存しないもの (= 宇宙定数 Λ) と見做されており、これは一般相対性理論 (GR) の枠組みで説明される。一方、ΛCDM モデルに基づく宇宙論では、CMB の観測から得られる初期宇宙におけるパラメータと現在の宇宙における宇宙論パラメータの間に観測誤差を大きく超えるずれが見られる (テンション)。このことから、ΛCDM の破綻が示唆されており、新たな物理が必要となる可能性がある。

新物理の候補として、エネルギー密度が時間変化するダークエネルギーが挙げられる。一般にダークエネルギーのエネルギー密度は以下の式で与えられる。

$$\frac{\rho_{\mathrm{DE}}(z)}{\rho_{\mathrm{DE},0}} = \exp\left[3\int_0^z [1+w(z')]\frac{dz'}{1+z'}\right] \quad (1)$$

上式の左辺は、任意の赤方偏移 z(すなわち任意の時刻) におけるダークエネルギーのエネルギー密度を、現在の値で規格化したものであり、w をダークエネルギーの状態方程式パラメータという。ΛCDM の場合、$w = -1$ であり、

$$\frac{\rho_{DE}(z)}{\rho_{DE,0}} = 1 \quad (2)$$

となる。これはダークエネルギーのエネルギー密度が時間に依存しないことを示している。一方、時間変化するダークエネルギーの場合、

$$w = w_0 + w_a(1-a) \quad (3)$$

とおくと、

$$\frac{\rho_{DE}(a)}{\rho_{DE,0}} = a^{-3(1+w_0+w_a)}e^{-3w_a(1-a)} \quad (4)$$

となり、ダークエネルギーのエネルギー密度がスケールファクター $a(t)$、すなわち時間に依存する。ここで w_0, w_a は他の宇宙論パラメータには依存しない定数である。よって w_0, w_a の値を調べることで、GR を超えた理論、またその他のダークエネルギーを記述できる標準模型を超えた理論の探索に貢献できると考えられる。

1.2 バリオン音響振動

再結合以前の初期宇宙では、トムソン散乱によってバリオン-光子流体が形成されており、空間的な密度揺らぎが音波として球殻状に伝播している（バリオン音響振動、BAO）。宇宙の晴れ上がりが起きると光子とバリオンの結合が切れるため、振動が凍結する。この時、球殻上でバリオンの密度が高くなっており、球殻の半径、すなわち BAO のスケールは宇宙膨張と共に引き伸ばされ、現在の宇宙の大規模構造にも刻まれている。銀河のクラスタリング解析によってそのスケールを調べることができ、それを標準物差しとして利用することで、宇宙論パラメータを測定できる。よって、ダークエネルギーの性質に関する制限を得ることができる。

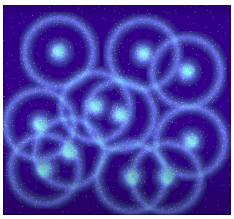


図 1: BAO の概念図 ([2])。バリオン-光子流体の密度揺らぎが音波として球殻状に伝播し、晴れ上がりが起きると振動が凍結して、球殻上でバリオンの密度が高くなる。

2 Methods/Dataset

本稿がレビューする研究 [1] では、まず ΛCDM におけるテンションを確認するために、ΛCDM モデルを仮定し、宇宙論パラメータ、特に H_0(現在の宇宙の膨張率) と Ω_m(現在の物質密度の割合) の推定を DESI のデータに BAO 解析を用いて行う。そして、推定された値を Planck の CMB 観測から得られる値と比較し、有意なずれが見られることを確かめる。

次に、ダークエネルギーの状態方程式パラメータが式 (3) に従って時間変化する wCDM を仮定し、w_0, w_a の推定を行う。この時、BAO 解析のみを用いた推定と、Planck の CMB 観測データを組み合わせた推定を行う。

BAO 解析には、以下で定義される二点相関関数を用いる。

$$\xi(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) = \langle \delta(\mathbf{x}_1)\delta(\mathbf{x}_2) \rangle \tag{5}$$

ここで $\delta(\mathbf{x})$ は、位置 $\mathbf{x}$ におけるバリオンの密度揺らぎを表す。二点相関関数は、銀河のクラスタリング解析によって銀河の空間的な分布を調べることで測定することができ、BAO は二点相関関数にピークとして現れる (図 2)。

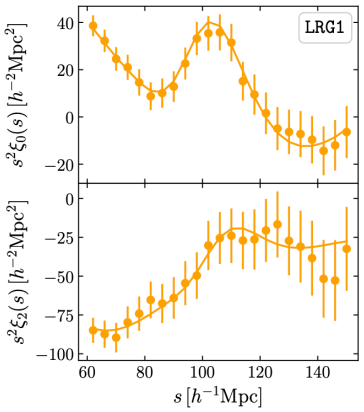


図 2: 二点相関関数。BAO がピークとして現れている。

二点相関関数の測定には、銀河分布に対し、3 次元デカルト座標 (x, y, z) を用いる必要があり、そのためには観測から得られる (z, θ, ϕ) に基準となる宇宙論 (すなわち宇宙論パラメータ) を仮定した変換を施す必要がある。しかし、ここで仮定する宇宙論は一般に真の宇宙論とは異なるので、この誤り度合いを $\alpha_\parallel$, $\alpha_\perp$ として定量化する。

$$\alpha_\parallel = \frac{D_H(z) r_\mathrm{d}^\mathrm{fid}}{D_H^\mathrm{fid}(z) r_\mathrm{d}} \tag{6}$$

$$\alpha_\perp = \frac{D_M(z) r_\mathrm{d}^\mathrm{fid}}{D_M^\mathrm{fid}(z) r_\mathrm{d}} \tag{7}$$

ここで、$D_H(z), D_M(z), r_\mathrm{d}$ はそれぞれ以下で定義される。

$$D_H(z) = \frac{c}{H(z)} \tag{8}$$

$$D_M(z) = \frac{c}{H_0}\int_0^z \frac{dz'}{H(z')/H_0} \tag{9}$$

$$r_\mathrm{d} = \int_{z_\mathrm{d}}^{\infty} \frac{c_s(z)}{H(z)} dz \tag{10}$$

$D_H(z)$ は赤方偏移 z における視線方向の共動距離で、赤方偏移差を距離に変換したものに対応する。$D_M(z)$ は赤方偏移 z における角度方向の共動距離で、角度を距離に変換したものに対応する。r_d は再結合前にバリオン-光子流体の音波が晴れ上がりまでに伝わった共動距離で、音響ホライズンと呼ばれる。また、fid は最初に仮定した、基準となる宇宙論に基づく量を表している。BAO のピークの位置は理論的に良く分かっている為、二点相関関数の BAO ピークの位置に着目することで、$\alpha_\parallel$, $\alpha_\perp$ を決定でき、これによって距離と赤方偏移の間の真の関係として、$D_H(z), D_M(z)$ が決定できる。$D_H(z), D_M(z)$ は H_0, Ω_m, w_0, w_a などの宇宙論パラメータに依存するので、決定した $D_H(z), D_M(z)$ から、宇宙論パラメータを推定することができる。

Tracer	# of good z	z range	Area [deg^2]	C_assign	z succ.
BGS	1,188,526	$0.1-0.4$	12,355	75.5%	98.8%
LRG	4,468,483	$0.4-1.1$	10,031	82.6%	99.0%
ELG	6,534,844	$0.8-1.6$	10,352	53.7%	73.9%
QSO	2,062,839	$0.8-3.5$	11,181	93.6%	68.0%

図 3: BAO 解析に使われた DESI の各トレーサーの統計量。

[1] では DESI DR2 から 1400 万体以上の銀河・QSO を用いて BAO を高精度で測定した (図 3)。このデータは $z = 0.1-3.5$ の広い赤方偏移範囲を網羅しており、幅広い時期に対して宇宙膨張史の追跡が可能となる。

3 Results

3.1 ΛCDM に基づく結果

ΛCDM モデルを仮定し、DESI DR2 の BAO 解析によって宇宙論パラメータを推定したところ、

$$\Omega_m = 0.2957 \pm 0.0086 \tag{11}$$

$$hr_\mathrm{d} = (101.54 \pm 0.73)\ \mathrm{Mpc} \tag{12}$$

という結果が得られた。(図 4) ここで h は以下のように定義される。

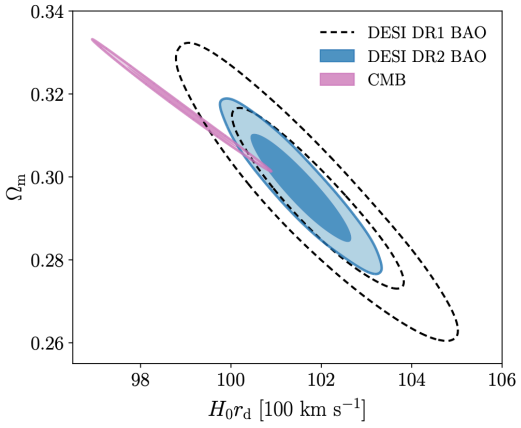


図 4: DESI DR1、DR2 の BAO 解析と CMB の観測によって得られた宇宙論パラメータの比較。等高線は 68% と 95% の信頼区間を表す。

$$h = \frac{H_0}{100\ \mathrm{km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}}} \tag{13}$$

BAO 解析で得られたこれらの宇宙論パラメータを、Planck の CMB 観測によって得られた宇宙論パラメータと比較すると 2.3σ のずれが見られる。

3.2 ダークエネルギーの時間進化を仮定した場合

ダークエネルギーの状態方程式パラメータを $w = w_0 + w_a(1-a)$ とした場合、DESI DR2 の BAO 解析によって w_0, w_a はそれぞれ以下のように制限された。

$$w_0 = -0.48^{+0.35}_{-0.17} \tag{14}$$

$$w_a < -1.34 \tag{15}$$

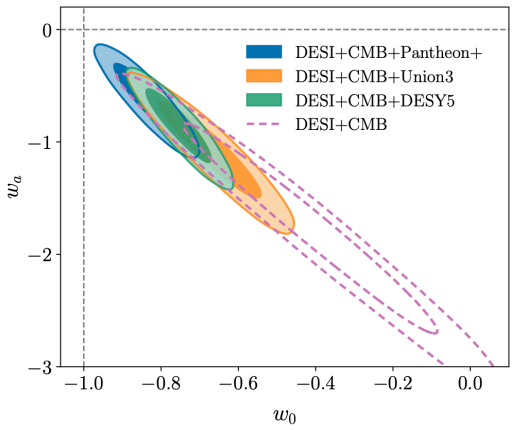


図 5: DESI DR2 の BAO 解析を用いて w_0, w_a を推定した結果。点線の交わる部分が ΛCDM に対応。

この場合、1.7σ で ΛCDM は棄却される。

また、DESI データの BAO 解析と Planck の CMB 観測のデータを合わせると、w_0, w_a は以下のように推定された (図 5)。

$$w_0 = -0.42 \pm 0.21 \tag{16}$$

$$w_a = -1.75 \pm 0.58 \tag{17}$$

この場合、3.1σ で ΛCDM は棄却される。

4 Conclusion

本稿では [1] のレビューを行った。現在の標準宇宙模型 ΛCDM に基づく宇宙論には初期宇宙と現在の宇宙の間にテンションが見られ、標準模型を超える物理として、時間進化するダークエネルギーが候補となる。そこで、DESI DR2 から得られたデータに対して BAO 解析を行ったところ、ΛCDM はおよそ $2-3\sigma$ で棄却され、時間進化するダークエネルギーが有力となった。また、そのようなダークエネルギーを仮定した wCDM に基づく解析では $w_0 = -0.42,\ w_a = -1.75$ という推定値が得られた。

Reference

[1] M. Abdul Karim et al. (2025). DESI DR2 Results II: Measurements of Baryon Acoustic Oscillations and Cosmological Constraints. arXiv preprint arXiv:2503.14738.

[2] 天文学辞典編集委員会, 「バリオン音響振動」, 天文学辞典（日本天文学会）, https://astro-dic.jp/baryon-acoustic-oscillation/

——index へ戻る

SP-15

Axion-photon conversion in quantum field theory

九州大学
池田　大樹

Axion-photon conversion in quantum field theory

池田 大樹 (九州大学大学院 理学府)
共著者： 菅野 優美 (九州大学), 早田 次郎（神戸大学）

Abstract

アクシオンは元々、量子色力学における強い CP 問題を解決するために導入された仮想粒子である [1]。しかし観測結果を基にした研究が進むにつれて、ダークマターやダークエネルギーの候補として非常に注目されるようになった。そんなアクシオンだが、現時点で未だ検出はなされておらず、検出手段としては、磁場中での光子とアクシオンの変換現象を利用する方法が提案されてきた。従来、この変換は、理論の枠組みとしては古典的な波動方程式の形式で扱われてきたが、量子センサーによる高感度検出を背景に、コヒーレント状態やスクイーズド状態など、量子効果を組み込める理論体系にすべきだということが課題として挙げられていた [2]。そこで本研究 [3] では、光子からアクシオンへの変換現象を量子場理論の枠組みで定式化し、光子の量子状態からアクシオンの量子状態への変換確率を評価することに成功した。特に、実験としても比較的実現しやすいとされているスクイーズド・コヒーレント状態を用いると、変換確率が少々増大することが明らかとなった。

1 Introduction

アクシオンは元々、量子色力学における強い CP 問題を解決するために導入された仮想粒子である [1]。興味深いことに、アクシオンは宇宙論においても重要な役割を果たし、宇宙の組成のうち約 4 分の 1 を占めると考えられているダークマターの有力な候補とされている (図 1)。

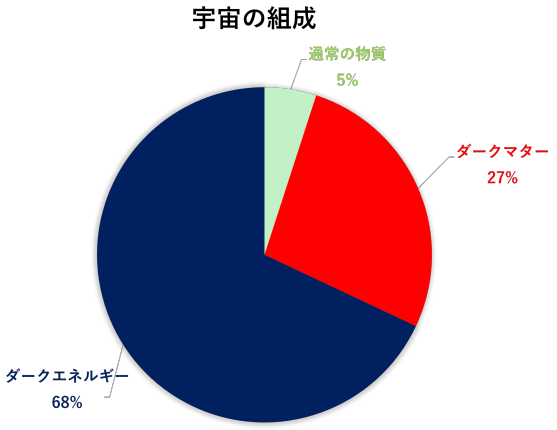


図 1: 宇宙の組成

その他の観点からも、宇宙論に広範な影響を持つことから、アクシオンの実験的検出は極めて重要である。

質量 m を持つアクシオン場 ϕ は、Chern-Simons 型の結合 $g\phi\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$ を通じて電磁場と相互作用する。ここで g はアクシオンと光子の結合定数、$\mathbf{E}$ および $\mathbf{B}$ はそれぞれ電場および磁場を表す。この結合定数 g は、現在のところ $4.0\times10^{-12}\mathrm{GeV}^{-1}$ 以下に制限されている [4] が、外部磁場が存在する場合、この相互作用によって光子がアクシオンへ、またアクシオンが光子へと変換される現象が生じると考えられている [5]。

さて、この光子からアクシオンへの変換は、従来は古典的な波動方程式の枠組みで解析されてきた (図 2)。

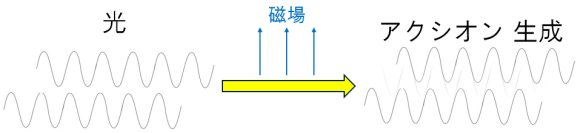


図 2: 古典的描像

そのため、光子の non-classical な性質を理論の側面から考慮することはあまりできていなかった。一方で、量子センシングの分野では、non-classical な状態のビーム光を用いることで、検出感度を高められることが知られている [2]。

今回紹介する論文 [3] の目的は、光子からアクシオ

ンへの変換過程を、量子場理論の観点から再検討することである (図 3)。

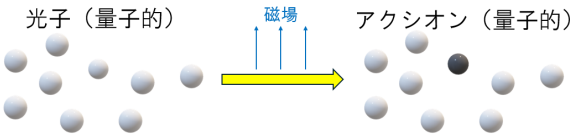


図 3: 量子場理論的描像

先行研究 [6, 7] に基づきつつ、より基本的な立場から問題を定式化し、最も簡単な場合を考察する。この定式化により、non-classical な光子状態を取り扱うことが可能となる。

2 Methods

アクシオンは、電磁場と Chern-Simons 結合を持ち、式 (1) のように外部磁場中で光子と相互変換する。

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{g}{8}\phi\,\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho} \right] \quad (1)$$

ここで、m はアクシオンの質量、g はアクシオンと光子の結合定数、$\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$ はレヴィ＝チヴィタテンソルであり、符号の取り方として $\epsilon^{0123} = -1$ を採用する。ゲージ場 A_μ は光子を表し、対応する電磁場のテンソルは $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ により定義される。

ここでは、光子のエネルギーが 1 MeV より十分小さい場合、すなわち電子・陽電子対生成が起こらないエネルギー領域を考えるため、電子の 1-loop 効果に起因する Euler-Heisenberg 項や、プラズマ効果は無視できるものと仮定する。

運動方程式は、式 (1) から、

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi - m^2\phi = \frac{g}{8}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho} \quad (2)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{g}{2}\partial_\mu\phi\,\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\lambda\rho} \quad (3)$$

と導かれるが、実験室において一定の外部磁場が印加された状況を考えると、

$$\phi = 0\ , \quad \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{B} = \text{const} \quad (4)$$

が解になっていることが分かるため、以後はこのような状況下にあるものとする。

アクシオン場のフリーパートに関する作用は、ドットで時間微分、∂_i で空間微分を表すものとして、式 (5) のように与えられる。

$$S_\phi = \frac{1}{2}\int d^4x\ \left[\dot{\phi}^2 - (\partial_i\phi)^2 - m^2\phi^2\right] \quad (5)$$

光子場については、A_i について 2 次のオーダーまで展開し、

$$A^0 = 0 \quad (6)$$

$$A^i{}_{,i} = 0 \quad (7)$$

とクーロンゲージ固定すると、式 (8) のようになる。

$$S_A = \frac{1}{2}\int d^4x\ \left[\dot{A}_i^2 - (\partial_k A_i)^2\right] \quad (8)$$

以上をまとめれば、式 (1) の作用は、式 (9) のように書き換えられることとなる。

$$S = \frac{1}{2}\int dtd^3x \left[\dot{\phi}^2 - (\partial_i\phi)^2 - m^2\phi^2 + \dot{\psi}^2 - (\partial_i\psi)^2 + gB\phi\,\dot{\psi} - gB\psi\dot{\phi}\right] \quad (9)$$

ただしここで、光子を表す変数 ψ を、式 (10) のように定義した。

$$\psi(t, x^i) = \frac{B^i}{B}A^i \quad (10)$$

式 (9) において相互作用項を除いた部分に着目して正準量子化を行えば、光子場とアクシオン場のモード関数をそれぞれ

$$\phi_{\boldsymbol{k}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_\phi}}\ e^{-i\omega_\phi t} \quad (11)$$

$$\psi_{\boldsymbol{k}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_\psi}}e^{-i\omega_\psi t} \quad (12)$$

と定義することにより、

$$\phi(t, x^i) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\ \left[\phi_{\boldsymbol{k}}(t)a_{\boldsymbol{k}}\ + \phi^*_{\boldsymbol{k}}(t)a^\dagger_{-\boldsymbol{k}}\right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (13)$$

$$\psi(t, x^i) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\ \left[\psi_{\boldsymbol{k}}(t)b_{\boldsymbol{k}}\ + \psi^*_{\boldsymbol{k}}(t)b^\dagger_{-\boldsymbol{k}}\right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (14)$$

とモード展開することができる。

一方で、式 (9) に基づくと相互作用ハミルトニアンは式 (15) のように表せる。

$$H_I = -\frac{1}{2}gB\int d^3x\ \left[\phi\,\dot{\psi} - \psi\dot{\phi}\right] \tag{15}$$

更にこれを用いて、時間発展演算子を式 (16) のように定義できる。

$$U(t) = \exp\left[-i\int_0^t H_I(t)dt\right] = \exp[-iQ] \tag{16}$$

ここで登場する Q は、これまでの結果を踏まえると、

$$Q = -\frac{i}{2}gB\int d^3k\ \Big[U_{\boldsymbol{k}}f(t)\,b^\dagger_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}} - U_{\boldsymbol{k}}f^*(t)\,a^\dagger_{\boldsymbol{k}}b_{\boldsymbol{k}} + V_{\boldsymbol{k}}g(t)\,b_{\boldsymbol{k}}a_{-\boldsymbol{k}} - V_{\boldsymbol{k}}g^*(t)\,a^\dagger_{\boldsymbol{k}}b^\dagger_{-\boldsymbol{k}}\Big] \tag{17}$$

と表示できる。ただし、

$$U_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\omega_\phi}{\omega_\psi}} + \sqrt{\frac{\omega_\psi}{\omega_\phi}}\right) \tag{18}$$

$$V_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\omega_\phi}{\omega_\psi}} - \sqrt{\frac{\omega_\psi}{\omega_\phi}}\right) \tag{19}$$

というパラメータを用いた。また、

$$f(t) = \frac{\sin\frac{\omega_\phi-\omega_\psi}{2}t}{\frac{\omega_\phi-\omega_\psi}{2}}e^{-\frac{i}{2}(\omega_\phi-\omega_\psi)t} \tag{20}$$

$$g(t) = \frac{\sin\frac{\omega_\phi+\omega_\psi}{2}t}{\frac{\omega_\phi+\omega_\psi}{2}}e^{-\frac{i}{2}(\omega_\phi+\omega_\psi)t} \tag{21}$$

という関数も新たに定義した。

これらから、光子からアクシオンへの変換確率 $P(\gamma\to\phi)$ を式 (22) のようにして計算できる。

$$P(\gamma\to\phi) = \left|\langle\phi|e^{-iQ}|\gamma\rangle\right|^2 \tag{22}$$

最後に、光子に関するコヒーレント状態、スクイーズド状態、スクイーズド・コヒーレント状態を、真空 $|0\rangle$ に演算子を作用させる形式で、順番に以下のように定義しておく。

$$|\beta\rangle = D(\beta)|0\rangle = \exp\left[\beta b^\dagger_{\boldsymbol{k}} - \beta^* b_{\boldsymbol{k}}\right]|0\rangle \tag{23}$$

$$|\zeta\rangle = S(\zeta)|0\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}\zeta^* b^2_{\boldsymbol{k}} + \frac{1}{2}\zeta b^{\dagger 2}_{\boldsymbol{k}}\right]|0\rangle \tag{24}$$

$$|\zeta,\beta\rangle = S(\zeta)D(\beta)|0\rangle \tag{25}$$

なお、スクイーズド状態については、$\zeta = re^{i\varphi}$ と表すとき、以下の関係式 (26) が一般に成立する。

$$S^\dagger(\zeta)b_{\boldsymbol{k}}S(\zeta) = b_{\boldsymbol{k}}\cosh r + b^\dagger_{\boldsymbol{k}}e^{i\varphi}\sinh r \tag{26}$$

3 Results

まず、波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ を持つ 1 個の光子からなる初期状態 $|\boldsymbol{k}_\psi\rangle = b^\dagger_{\boldsymbol{k}}|0\rangle$ を用意し、ここから時間発展した後、アクシオン 1 個が生成された状態 $|\boldsymbol{k}_\phi\rangle = a^\dagger_{\boldsymbol{k}}|0\rangle$ へ変換する場合を計算すると、式 (27) のように求まった。

$$P\left(\gamma\to\phi\right)_{\text{vacuum}} = \left|\langle 0|a_{\boldsymbol{k}}e^{-iQ}b^\dagger_{\boldsymbol{k}}|0\rangle\right|^2 \simeq \left|\frac{1}{2}gBU_{\boldsymbol{k}}f^*(t)\right|^2 \tag{27}$$

ただしこの表式は、絶対値の中身について g の 1 次のオーダーまで摂動展開することにより表現したものとなる。以下の計算でも同様に、絶対値の中身については g の 1 次のオーダーまでを考えることとする。

次に、classical な状態に最も近い量子状態として挙げられるコヒーレント状態 (23) を光子の初期状態にとり、時間発展させた後に、アクシオンが 1 個加わった光子のコヒーレント状態（$|\boldsymbol{k}_\phi,\alpha\rangle = a^\dagger_{\boldsymbol{k}}|\alpha\rangle$）となる変換確率を計算した。すると、式 (29) のように求まった。

$$P\left(\gamma\to\phi\right)_{\text{coherent}} = \left|\langle\alpha|a_{\boldsymbol{k}}e^{-iQ}|\beta\rangle\right|^2 \tag{28}$$

$$\simeq \left(\frac{1}{2}gB\right)^2 U^2_{\boldsymbol{k}}\left|f^*(t)\right|^2|\beta|^2\ \ e^{-|\alpha-\beta|^2} \tag{29}$$

最後に、スクイーズド・コヒーレント状態 (25) に 1 個の光子を加えた状態（$|\boldsymbol{k}_\psi,\zeta,\beta\rangle = b^\dagger_k|\zeta,\beta\rangle$）を初期状態にとり、ここから時間発展させた後、スクイーズド・コヒーレント状態にアクシオンが 1 個加わった状態（$|\boldsymbol{k}_\phi,\zeta,\beta\rangle = a^\dagger_{\boldsymbol{k}}|\zeta,\beta\rangle$）へ変換する確率を計算した。すると、式 (30) のように求まった。

$$\begin{aligned} &P\left(\gamma\to\phi\right)_{\text{squeezed}} \\ &= \left|\langle\zeta,\beta|a_{\boldsymbol{k}}e^{-iQ}b^\dagger_k|\zeta,\beta\rangle\right|^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}gB\right)^2 U^2_{\boldsymbol{k}}\left|f^*(t)\right|^2\Big[\cosh^2 r \\ &\qquad + |\beta|^2\Big(\cosh 2r + \sinh 2r\cos(2\arg\beta - \varphi)\Big)\Big] \end{aligned} \tag{30}$$

式 (27) と比較すると、変換確率が少々増大していることが分かる。なお、同じスクイーズド・コヒーレント状態 (25) に対して光子を N 個加えた状態を初期状態として用意したところ、変換確率が大きく上昇する傾向は見られなかった。

4 Conclusion

本研究では、光子からアクシオンへの変換を量子場理論の枠組みで定式化した。その結果、スクイーズド・コヒーレント状態にある光子がアクシオンへ変換する確率を導出することに成功した。量子状態特有の non-classical な状態は様々に考えることができるが、その中でもスクイーズド状態及びスクイーズド・コヒーレント状態は比較的実験的に実現しやすいとされており、そういった背景の中、スクイーズド・コヒーレント状態においては、光子からアクシオンへの変換確率が少々増大することが明らかとなった。

今後の展望として、本研究で用いた手法は、光子と重力子の変換にも拡張可能であることが 1 つ挙げられる [8]。また、このような変換過程は、高周波重力波の検出においても有用であり、そこでは様々な変換メカニズムが活用されている [9, 10, 11]。

Acknowledgement

まず、論文 [3, 8] の作成に向け、時には深夜であっても Zoom に応じてくださるなど何度も指導・助言を下さった共同研究者の方々に厚く御礼申し上げます。また、私を陰でサポートしてくださった量子宇宙物理理論研究室の方々にも、この場を借りて感謝申し上げます。そして最後に、惜しくもポスター発表という形式にはなってしまいましたが、発表の場を用意してくださった天文・天体物理若手夏の学校を運営して下さっているスタッフの方々にも深謝いたします。

Reference

[1] R. D. Peccei and Helen R. Quinn. CP Conservation in the Presence of Instantons. *Phys. Rev. Lett.*, 38:1440–1443, 1977.

[2] C. L. Degen, F. Reinhard, and P. Cappellaro. Quantum sensing. *Rev. Mod. Phys.*, 89:035002, Jul 2017.

[3] Taiki Ikeda, Sugumi Kanno, and Jiro Soda. Enhancing photon-axion conversion probability with squeezed coherent states. 6 2025. arXiv:2506.14354 [quant-ph].

[4] Hai-Jun Li, Wei Chao, and Yu-Feng Zhou. Upper limit on the axion-photon coupling from markarian 421. *Physics Letters B*, 858:139075, 2024.

[5] Georg Raffelt and Leo Stodolsky. Mixing of the Photon with Low Mass Particles. *Phys. Rev. D*, 37:1237, 1988.

[6] Michael Binger and Chueng-Ryong Ji. Quantum field theory of meson mixing. *Phys. Rev. D*, 60:056005, 1999.

[7] Massimo Blasone, Antonio Capolupo, Oreste Romei, and Giuseppe Vitiello. Quantum field theory of boson mixing. *Phys. Rev. D*, 63:125015, 2001.

[8] Taiki Ikeda, Youka Kaku, Sugumi Kanno, and Jiro Soda. Toward graviton detection via photon-graviton quantum state conversion. 7 2025. arXiv: 2507.01609[quant-ph].

[9] Asuka Ito, Tomonori Ikeda, Kentaro Miuchi, and Jiro Soda. Probing GHz gravitational waves with graviton–magnon resonance. *Eur. Phys. J. C*, 80(3):179, 2020.

[10] Asuka Ito and Jiro Soda. A formalism for magnon gravitational wave detectors. *Eur. Phys. J. C*, 80(6):545, 2020.

[11] Asuka Ito and Jiro Soda. Exploring high-frequency gravitational waves with magnons. *Eur. Phys. J. C*, 83(8):766, 2023.

——index へ戻る

SP-16

クェーサー吸収線を使用したz=0.89における宇宙マイクロ波背景放射温度の計測

慶應義塾大学
小谷　竜也

クェーサー吸収線を使用した $z = 0.89$ における宇宙マイクロ波背景放射温度の計測

小谷 竜也 (慶應義塾大学大学院 理工学研究科)

Abstract

宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) の温度は宇宙年齢と共に変化し、標準宇宙モデルでは現在値 $T_0 = 2.73\,\mathrm{K}$ と赤方偏移 z を用いて $T_{\mathrm{CMB}}(z) = T_0(1+z)$ と表されることが知られている。このことは、遠方銀河での T_{CMB} 測定により宇宙モデルが検証できることを意味する。PKS1830–211 は、前景の $z=0.89$ の渦巻銀河により、そのスペクトル中に吸収線群を呈する。我々は、ALMA で観測されたこの天体のミリ波帯データから、HCN J=2–1, J=3–2, J=4–3, J=5–4 回転遷移の吸収スペクトルを取得した。HCN 回転遷移の臨界密度は $10^{6-8}\,\mathrm{cm^{-3}}$ と非常に高いため、回転準位の励起温度は CMB 温度に等しいと考えられる。これから、吸収雲による遮蔽率 f_{c} を仮定すれば、吸収線強度から $T_{\mathrm{CMB}}(z = 0.89)$ を見積もることができる。励起温度 (=CMB 温度) を正確に評価するためには、吸収雲によるクェーサーの遮蔽率の不定性や吸収雲の非一様性、および吸収強度の時間変動を考慮する必要がある。これらの不定性を詳細に評価し、HCN 吸収スペクトルから励起温度の速度プロファイルを計算したところ、$V_{\mathrm{rad}} = -18.3 \sim +12.5\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ において励起温度の不確かさが極めて小さい事が判明した。そこで、当該速度範囲の励起温度の加重平均を取ることにより、$T_{\mathrm{CMB}}(z=0.89) = 5.17 \pm 0.03\,\mathrm{K}$ を得た。

1 Introduction

宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) は全天を満たすほぼ一様等方な $\sim 2.7\,\mathrm{K}$ の黒体放射である。これは、ビッグバン後約 38 万年の高温高密度な宇宙を満たした光子が宇宙膨張と共に温度を下げながら現在の宇宙を満たしていると解釈され、ビッグバンモデルの強力な観測的証拠である。CMB の温度 (T_{CMB}) は、断熱膨張する標準ビッグバンモデルにおいて、赤方偏移 z と共に

$$T_{\mathrm{CMB}}(z) = T_0\,(1+z) \tag{1}$$

のように進化する。ここで、T_0 は現在の CMB 温度であり、$2.72548 \pm 0.00057\,\mathrm{K}$ と計測されている (Fixsen 2009)。

(1) 式は、$z > 0$ での $T_{\mathrm{CMB}}(z)$ を測定することで、宇宙モデルの検証が可能であることを意味する。そのため、これまでに熱的 Sunyaev-Zel'dovich 観測 ($z < 1$; e.g., Horellou et al. 2005) やクェーサー方向の原子分子吸収線の励起解析 ($z > 1$; e.g., Klimenko et al. 2020) 等により、数多くの $T_{\mathrm{CMB}}(z)$ 測定が行われてきた。これらの測定値は標準ビッグバンモデルの予想と概ね矛盾しない。しかしながら、その測定値の不確かさは $z \gtrsim 1$ において数%を超えている。

PKS1830–211 は赤方偏移 $z = 2.507$ (Lidman et al. 1999) のクェーサーで、$z = 0.88582$ (Wiklind & Combes 1996) に豊富な吸収線系を示す。この吸収線系は、前景にあるほぼ face-on な渦巻銀河に起因すると考えられ (Winn et al. 2002; Courbin et al. 2002)、その重力レンズ効果により、ミリ波域で 2 つの点状成分 (NE, SW) に分裂して観測される。本研究では、アタカマ大型ミリ波/サブミリ波干渉計 (ALMA) で観測された PKS1830–211 SW 成分のミリ波データから、新たな $T_{\mathrm{CMB}}(z=0.89)$ の測定値を得た。

2 Data

本研究で使用した PKS1830–211 の観測データは、ALMA Science Archive から取得したものである。使用したデータセットは、2013.1.01099.S (PI:K. Kawaguchi, Band 3)、2017.1.01119.S (PI:S. Wallström, Band 4)、2018.1.00051.S (PI:S. Muller, band 5) および 2018.1.00692.S (PI:I. Martí-Vidal, band 6) である。これらにはそれぞれ、$z=0.89$ におけるシアン化水素 (HCN) の回転準位 J=2–1、J=3–2、J=4–3、J=5–4 遷移の吸収スペクトル線が含まれていた。

データ較正および整約は、Common Astronomy Software Applications (CASA) パッケージ内の標準的な手順に従って実施した。PKS1830–211 の NE, SW 成分に対するスペクトルは、Python ベースのパッケージ `UVMULTIFIT` (Martí-Vidal et al. 2014) を使用して抽出した。本研究では、高い強度の分子吸収線が豊富に見られる SW 成分方向のスペクトルを解析に使用した。得られたスペクトルの周波数は、相対論的ドップラー関係式を用いて視線速度に変換し、その後、吸収雲の赤方偏移 ($z = 0.88582$) に対応するシステム速度 $V_{\rm sys} = 1.6820 \times 10^5$ km s^{-1} を差し引いた。

3 Analyses

3.1 基礎

一様な吸収雲がクェーサーの視線を遮ると仮定する。この下で、連続波放射 ($I_{\rm c}$) に対して吸収線スペクトルが深さ ΔI で観測されたとき、そのスペクトル線の光学的厚みは

$$\tau_\nu = -\ln\left(1 - \frac{1}{f_{\rm c}}\frac{\Delta I}{I_{\rm c}}\right) \tag{2}$$

により得られる。ここで $f_{\rm c}$ は吸収雲による背景クェーサーの遮蔽率で、$\Omega({\rm quasar}\cap{\rm cloud})/\Omega({\rm quasar})$ により定義される。

分子の純回転遷移に限定すると、$J \to J+1$ 吸収線の光学的厚みは、分子の下位準位と上位準位における柱密度を用いて

$$\int \tau_{J+1,J}\sqrt{\frac{1+V/c}{1-V/c}}\frac{1}{(1+V/c)^2}dV = \\ = \frac{c^3 A_{J+1,J} N_{J+1}}{8\pi\nu_{J+1,J}^3}\left[\frac{g_{J+1}N_J}{g_J N_{J+1}} - 1\right] \tag{3}$$

と記述される。ここで、$\nu_{J+1,J}$ は $J \leftrightarrow J+1$ 遷移の周波数、$A_{J+1,J}$ はアインシュタインの A 係数、$\tau_{J+1,J}$ は単位速度幅あたりの光学的厚みを表し、$g_J \equiv 2J+1$ は準位 J の統計的重率を表す。N_J は準位 J における分子の柱密度を表し、h と $k_{\rm B}$ はそれぞれプランク定数とボルツマン定数である。局所熱力学平衡条件下では、N_J（および N_{J+1}）は励起温度 ($T_{\rm ex}$) を用いて

$$N_J = \frac{N}{Z(T_{\rm ex})} g_J \exp\left(-\frac{E_J}{k_{\rm B}T_{\rm ex}}\right) \tag{4}$$

と記述される。ここで、N は分子の全柱密度、$Z(T_{\rm ex}) \equiv \sum g_J \exp(-E_J/k_{\rm B}T_{\rm ex})$ は分配関数、E_J は準位 J のエネルギーを表す。そのため、$E_{J+1} - E_J = h\nu_{J+1,J}$ を用いると

$$\frac{8\pi\nu_{J+1,J}^3}{c^3 A_{J+1,J} g_{J+1}}\int \tau_{J+1,J}\sqrt{\frac{1+V/c}{1-V/c}}\frac{1}{(1+V/c)^2}dV \\ = \frac{N}{Z(T_{\rm ex})}\exp\left(-\frac{E_{J+1}}{k_{\rm B}T_{\rm ex}}\right)\left[\exp\left(\frac{h\nu_{J+1,J}}{k_{\rm B}T_{\rm ex}}\right) - 1\right] \tag{5}$$

が得られる。この式より、少なくとも 2 つの遷移のデータを用いて右辺を左辺にフィットさせることで、励起温度 $T_{\rm ex}$ と全柱密度 N が得られる。本研究では、式 (5) の N を単位速度幅あたりの柱密度として考え、各単位速度ビンに対して計算を行うことで、ある遮蔽率 $f_{\rm c}$ の下での光学的厚みおよび励起温度のプロファイルを得た。

3.2 $T_{\rm CMB}$ の計測

星間空間における分子の回転エネルギー準位の分布は、衝突過程と放射過程によって決定される。HCN のように大きな電気双極子モーメントを有する分子の回転遷移は、大きな臨界密度を持ち $n_{\rm crit}({\rm H_2}) \sim 10^{6-8}$ cm^{-3} 程度である。PKS1830–211 SW 成分方向の吸収雲の密度と運動温度は、$n_{\rm H_2} \sim 2600$ cm^{-3} (Henkel et al. 2009) および $T_{\rm kin} \sim 80$ K (Henkel et al. 2008) と推定されている。また、吸収雲周辺の局所輻射場の効果は無視できることが報告されている (Muller et al. 2013)。したがって、SW 吸収雲において、HCN の回転準位の占有数は CMB 放射と平衡状態にあると結論付けられ、

$$T_{\rm CMB} = T_{\rm ex} \tag{6}$$

という近似が成立する (e.g., Wiklind & Combes 1996)。

3.3 不確かさ

測定された $T_{\rm ex}$ の不確かさの要因として、主に $f_{\rm c}$ の不定性、柱密度の非一様性、および吸収強度の時間変動が考えられる。

3.3.1 f_c の不定性

SW 成分方向における f_c の値は、飽和した吸収スペクトルの底の値から評価され、0.91–1.0 の範囲にある (e.g., Muller et al. 2014; Tercero et al. 2020)。しかし、依然として広く公認された値は存在せず、その不定性は光学的厚みの計算に影響を及ぼす。加えて、f_c は時間および周波数依存性を示すことが知られている (e.g., Muller et al. 2023)。

そこで本研究では、これらの不確かさを厳密に評価した。まず f_c が 0.90–1.00 の範囲の一様分布に、各観測データ点 $I_{\rm obs} \equiv I_c - \Delta I$ が、観測値を平均、不確かさを標準偏差とする正規分布にそれぞれ従うと仮定した。そして各遷移の各速度ビンに対して、これらの分布から f_c と $I_{\rm obs}$ のランダムサンプルを独立に抽出し、式 (2) を用いて光学的厚みを計算した。このプロセスを 100,000 回繰り返して得られた光学的厚みの確率分布の中央値と 1σ 信頼区間を、観測された光学的厚み（$\tau_{\rm obs}$）とその不確かさとした。これにより、f_c の不定性を反映した光学的厚みの推定値を得た。

3.3.2 柱密度の非一様性

式 (2) では、背景クェーサーを部分的または完全に覆う一様な柱密度の吸収雲を仮定したが、実際には吸収雲は非一様な柱密度を有する。そこで、柱密度が対数正規確率分布関数 (N-PDF) に従うと仮定して、観測された光学的厚み $\tau_{\rm obs}$ と実際の光学的厚み $\tau_{\rm real}$ との間の補正係数を計算し、$T_{\rm ex}$ の計算に適用した。N-PDF のパラメーターには、平均柱密度が類似のオリオン A 巨大分子雲において決定されたもの (Ma et al. 2020) を採用した。

3.3.3 吸収強度の時間変動

PKS1830–211 方向の分子吸収プロファイルには、顕著な時間変動が報告されている (e.g., Muller et al. 2023) 。本研究で用いた HCN J=4–3 と J=5–4 データの観測時期 (それぞれ 2019 年 7 月 28 日と 4 月 11 日) にも、$H_2^{18}O$ や CH_3OH 等の吸収プロファイルで、フレアに起因すると考えられる顕著な時間変動が確認されている (Muller et al. 2020, 2023)。

この影響を定量化するため、フレア前 (2009 年, Muller et al. 2011) とフレア中 (2019 年, Tercero et al. 2020) の HCN J=1–0 吸収スペクトルの深さを比較した。その結果、吸収強度の変動はおよそ 3–6% であることが判明した。そこで、HCN J=4–3 および J=5–4 スペクトルにおいても同様の変動が発生すると仮定し、それによる不確かさ ($\sigma_{\rm var}$) と統計誤差 ($\sigma_{\rm sta}$) を用いて、観測された吸収強度の不確かさを $\sigma_{I_{\rm obs}} \equiv \sqrt{\sigma_{\rm var}^2 + \sigma_{\rm sta}^2}$ により見積もった。これを考慮し、光学的厚みの計算を行った。

4 Results

図 1 に、PKS1830–211 SW 方向の HCN J=2–1、J=3–2、J=4–3、および J=5–4 の吸収スペクトルを示す。図 2 の上段は、不確かさを考慮した光学的厚みのプロファイルを示している。励起温度 $T_{\rm ex}$ と柱密度 N を決定する際には、最も低い速度分解能であった J=5–4 データの速度間隔（$\Delta V_{\rm bar} = 1.71\,{\rm km\,s^{-1}}$）で各遷移の吸収スペクトルをリサンプリングし、各速度ビンの光学的厚みに対して式 (5) で最小二乗フィットを行った。その際、photon trapping が無視できる $\tau_\nu < 1$ のデータのみ用いた。

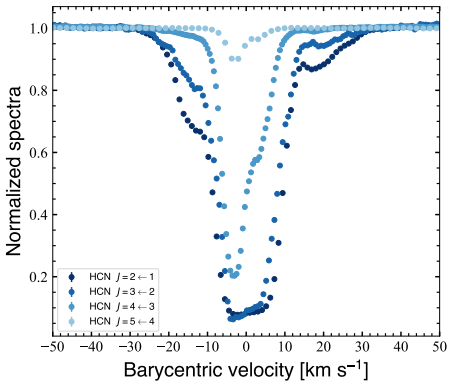


図 1: PKS1830–211 SW 方向で検出された HCN の各回転遷移の吸収スペクトル。強度は連続波レベルで正規化されている。

図 2 の中段と下段には、励起温度とその不確かさの速度プロファイルを示す。$T_{\rm ex}$ の計算に使用した遷移の組み合わせを色分けして示している。励起温度の不確かさのプロファイルより、$V_{\rm bar} = -18.3 \sim +12.5\,{\rm km\,s^{-1}}$ (ビン数:14) では、他の速度範囲に比べて不確かさが低いことがわかる。これらのうち 11 の

速度ビンでは、$T_{\rm ex}$ の不確かさが特に小さい（$\sigma_{T_{\rm ex}} < 0.15\,{\rm K}$）。そのため、これらの速度範囲における励起温度が最も信頼できる値であるとみなし、加重平均をとることで $\langle T_{\rm ex}\rangle = 5.165 \pm 0.032\,{\rm K}$ と計算された。よって、HCN の回転準位が CMB と輻射平衡にあるという仮定の下で、$T_{\rm CMB}(z=0.89) = 5.165 \pm 0.032\,{\rm K}$ が得られた。 これは、標準ビッグバンモデルから予想される値（5.14 K）と不確かさの範囲内で良く一致している。また、この測定値を先行研究の測定値と共に Lima et al. (2000) の理論式

$$T_{\rm CMB}(z) = T_0\,(1+z)^{1-\beta} \tag{7}$$

でフィットすることにより、$\beta = (-1.8^{+6.6}_{-7.1}) \times 10^{-3}$ を得た。この結果は、$T_{\rm CMB}(z)$ の測定値が標準ビッグバンモデルと矛盾しないことを示しており、Riechers et al. (2022) による最近の値 $\beta = (3.4^{+8.1}_{-7.3}) \times 10^{-3}$ よりも厳しい制約を与えるものである。

5 Conclusion

本研究では、ALMA で観測された PKS1830–211 方向の HCN 回転遷移に伴う吸収線を詳細に解析し、$z = 0.89$ における CMB 温度として $5.165 \pm 0.032\,{\rm K}$ を得た。これは標準的なビッグバンモデルの予測値と良く一致するものである。今後は $z = 2$–3 の吸収体を有するクェーサー吸収線系を ALMA で観測することにより、$z > 1$ での CMB 温度の測定値を増やしたい。

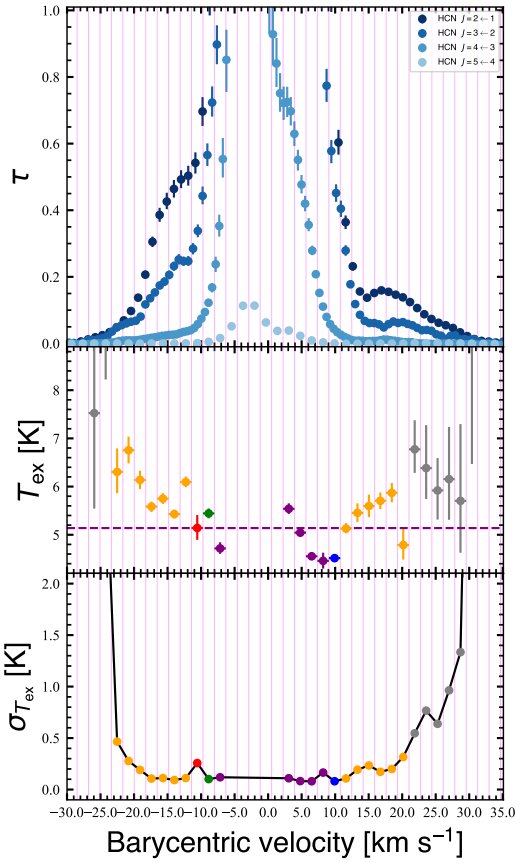


図 2: (上) 得られた光学的厚みのプロファイル。桃色の垂線は速度ビン境界を示す。(中) 励起温度の速度プロファイル。 紫の破線は $T_{\rm ex} = 5.14\,{\rm K}$ を示し、これは標準的なビッグバンモデルから予想される $z = 0.89$ における CMB 温度である。(下)$T_{\rm ex}$ の不確かさのプロファイル。プロットの色分けは、灰:(2–1, 3–2)、橙:(2–1, 3–2, 4–3)、 赤:(2–1, 3–2, 4–3, 5–4)、緑:(3–2, 4–3, 5–4)、青:(3–2, 4–3)、紫:(4–3, 5–4) にそれぞれ対応する。

Reference

Courbin, F. et al. 2002, ApJ, 575, 95

Fixsen, D. J. 2009, ApJ, 707, 916

Henkel, C. et al. 2008, A&A, 485, 451

Henkel, C. et al. 2009, A&A, 500, 725

Horellou, C. et al. 2005, A&A, 441, 435

Klimenko, V. V. et al. 2020, Astron. Lett., 46, 715

Lidman, C. et al. 1999, ApJL, 514, L57

Lima, J. A. S. et al. 2000, MNRAS, 312, 747

Ma, Y. H. et al. 2020, RAA, 20, 060

Martí-Vidal, I. et al. 2014, A&A, 563, A136

Muller, S. et al. 2011, A&A, 535, A103

Muller, S. et al. 2013, A&A, 551, A109

Muller, S. et al. 2014, A&A, 566, A112

Muller, S. et al. 2020, A&A, 637, A7

Muller, S. et al. 2023, A&A, 674, A101

Riechers, D. A. et al. 2022, Natur, 602, 58

Tercero, B. et al. 2020, A&AL, 636, L7

Wiklind, T., & Combes, F. 1996, Natur, 379, 139

Winn, J. N. et al. 2002, ApJ, 575, 103

——index へ戻る

SP-18

MWA 観測を用いた月反射 RFI の解析と 21cm 線観測への影響

熊本大学
長倉　大知

MWA 観測を用いた月反射 RFI の解析と 21cm 線観測への影響

長倉 大知 (熊本大学大学院 自然科学教育部理学専攻物理科学コース)

Abstract

宇宙の夜明け期は、ビッグバンから約 2 億年後の最初の星や銀河が形成され始めたとされる時代であり、銀河の初期形成や宇宙の再電離の進行、その時間スケールやエネルギー源など未解明な点が多く残っている。中性水素原子の超微細構造の遷移によって放射される波長 21cm の電波（21cm 線) の観測は、当時の中性水素の分布を三次元的に捉えることが可能であり、天体形成の進行状況や構造形成の空間的特徴を明らかにする手がかりとして注目されている。宇宙の夜明け期からの 21cm 線は現在では 100MHz 前後の低周波電波として地上で観測される。しかしこの周波数帯は FM ラジオ放送 (約 90MHz) などの強力な地球由来の強力な人工電波 (RFI:Radio Frequency Interference) と重なることが深刻な障害になりうる。さらに過去の観測により、これらの RFI が月面で反射され、強い電波源 (月反射 RFI）として地上で観測されることが明らかになっている。この月反射 RFI は強度が高い上、周波数構造も複雑であるため、極めて微弱な 21cm 線の検出において無視できない系統誤差を引き起こす可能性がある。

本研究では、MWA(Murchison Widefield Array) の観測データを用いて月反射 RFI の強度を明らかにする。また観測シミュレーションを用いて、将来的な宇宙の夜明け期からの 21cm 線観測における月反射 RFI の影響を評価する

1 Introduction

宇宙の夜明け期（Cosmic Dawn）は、ビッグバンから約 2 億年後に最初の星や銀河が形成され始めたとされる時代である。この時代の観測は、初期宇宙における構造形成や宇宙再電離の進行を理解するうえで極めて重要である。特に、21cm 線（中性水素原子の超微細構造遷移に由来する電波）の観測は、当時の中性水素の三次元的分布を捉えることで、銀河の形成過程や再電離の時間スケールなどを直接的に探る手段として期待されている。

しかしながら、この 21cm 線は極めて微弱であり、現代においては約 100MHz 以下の低周波帯に赤方偏移している。この帯域は、地上の FM ラジオ放送をはじめとした強力な人工電波（RFI: Radio Frequency Interference）と重なっている。特に、RFI が月面で反射し、地球に再到達する月反射 RFI は、非常に強度が高く、空間的にも広がりを持つため、広視野干渉計を用いた 21cm 観測において重大な系統誤差源となる可能性がある。

今回の解析では Murchison Widefield Array（MWA）を用いた観測データを用いて解析を行なった。MWA は西オーストラリアに設置された電波干渉計である。80〜300MHz という広い周波数帯域に対応しており、宇宙初期の 21cm 線の観測に適している。また、1 回の観測で広い空を一度に観測可能な広視野性と、短い基線配置による大スケール構造への感度を持つため、本研究のように月の通過による RFI の空間的変化を捉えるのに有利である。MWA は電波の仕様が制限される不感地帯に位置しているため、地球由来の RFI が比較的少ない環境にある。それにもかかわらず、月反射 RFI のような二次的な誤差源が観測に影響を及ぼす可能性がある。

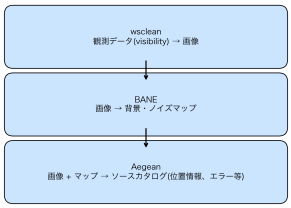
本研究では、MWA を用いた観測データを用いて、月反射 RFI の性質を定量的に評価し、その空間的・周波数的特徴を明らかにすることを目的とする。

2 Methods

2.1 Data processing

初めに観測データである visibility を、wslcean を用いて 80kHz ごとにイメージングした。

次に BANE で先程 wsclean で得られた画像から背景レベル (バックグラウンド) とノイズをチャンネル毎に測定した。画像上にノイズとシステム雑音が広がっており、天体の flux を正しく測るにはそれを取



り除くために使用した。BANE によるノイズ推定を飛ばして次のステップに進んでしまうと極端に大きなエラーが生成されてしまう恐れがある。

次に Aegean を用いて画像中の天体ソース（点源）を正確に検出し、それぞれの周波数帯における位置・flux・誤差などを測定した。wsclean を用いて得られた画像を見ただけでは、どこに天体ソースがあるかは曖昧である。

最後に月の位置を特定した。この時、RA(Right Ascension、赤経): 東西方向 、 Dec(Declination 、赤緯): 南北方向 、 単位は degree で統一して月の位置を求めた。以上の過程で得られた情報をもとにしてフラックス、周波数、時間の関係を見た。また本研究では、観測された電波信号における月反射 RFI の特徴を明らかにするために、3 種類のパワースペクトル (実データ、前景成分のみの数値シミュレーション、前景成分のみの数値シミュレーションに今回の月からの反射 RFI のデータを足したもの) を比較した。これにより、RFI の影響がどのように前景成分に上乗せされ、21cm 信号の検出にどのような系統的影響を与える可能性があるかを視覚的に確認する。

2.2 Data

RFI の特徴を調べるために 2 日の観測データを用いて解析を行なった。データはいずれも 2023 年のものである（表 1)。

表 1: 観測データ一覧

観測日時	観測周波数 (MHz)	ビームレスポンス
8 月 29 日 15:02 (観測データ 1)	74〜105	0.9
9 月 1 日 18:18〜18:48 (観測データ 2)	74〜105	0.1

本解析で用いた各データの観測時間は 5 分であり、その間にも月の見える位置は変化する。その変化量は 5 分間で RA 方向に約 0.026 度、Dec 方向に約 0.024 度程度である。これは月の視直径に対して無視できない変化量であり、解析において考慮する必要がある。そこで、本研究では各観測データの中間時刻における月の位置を算出し、その位置を中心として半径 10 分角 (直径 20 分角) 以内に存在する最も明るい天体を月と同定した。

3 Results and Discussion

まず、図 1 に示すのは観測データ 1 での各周波数とフラックス密度の関係である。これを見ると 90MHz、95MHz、103MHz 付近でピークを持っている。また、80MHz 以下の周波数では月を同定できなかった。

次に図 2 に示すのは、観測データ 2 の各周波数とフラックス密度の関係である。これを見るとどの時間の観測も 90MHz 付近でピークを持っている。

図 3 は、観測データ 2 における各周波数の平均をとったものである。図 3 ではフラックス密度が浮かび上がってきた 88MHz 付近以上のデータのみをプロットしてある。これを見ると図 2 と比べて、どこでピークを持っているかが分かりやすい。フラックス密度のピークは 91MHz と 92.5MHz 付近である。

図 4 は、データ 2 の flux-freqency の関係において一番大きいピークが集中していた 91.04MHz 〜 91.76MHz での時間と周波数の散布図である。これを見ると月による反射フラックスの強さは時間帯によっても、周波数によっても変化する。

図 2、図 3、図 4 で観測結果のプロット図でエラーバーが大きくなっているのは、周波数分解能が上がると余計なノイズが生じてしまうためである。これは、チャンネル幅が狭くなることで信号対雑音比（S/N 比）が低下すること、および RFI 由来の細かいスペクトル構造の影響を受けやすくなることに起因している (Tiwari et al. 2023)。

これらの結果から月は 88MHz 以上の電波をよく反射している。90 MHz 付近のピークは、地球上の FM ラジオ帯からの強力な人工電波が月に反射されて観測されたものと考えられる。88MHz 以下の周波数でのフラックスが観測できない理由として、地球で放射されている電力が弱いせいで実際には反射されているが観測できていない可能性がある。これは

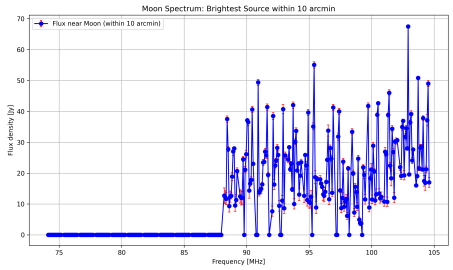


図 1: flux-frequency の関係。横軸は周波数、縦軸はフラックス密度である。エラーバーは観測データから得られたものである。

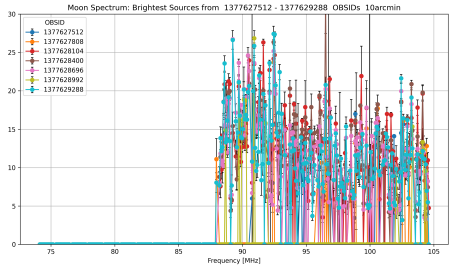


図 2: 5 分毎、計 30 分の観測の flux-frequency の関係をかさねた図。横軸は周波数、縦軸はフラックス密度である。エラーバーは観測データから得られたものである。

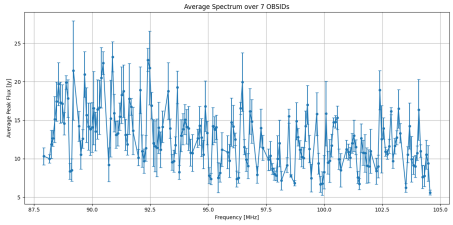


図 3: flux-frequency の関係の平均をとったもののプロットである。横軸は周波数、縦軸はフラックス密度である。

地球上の人工電波放射のスペクトル構造と整合的である。

最後に、図 5 は観測データ 1 でのパワースペクトルである。また図 6 は観測データ 2 の最初の 5 分間のパワースペクトルである。この 2 つの図において左の図は前景放射、月反射 RFI、システムノイズをすべて含む観測データである。中央の画像は前景成分のみをシミュレーションで再現した理想的なパワースペクトルであり、月反射 RFI を含まないため、ス

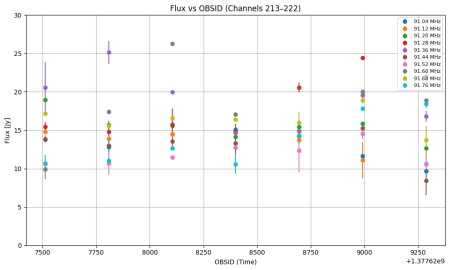


図 4: 横軸は 5 分毎の時間、縦軸はフラックス密度で書かれてある。エラーバーは観測データから得られたものである。

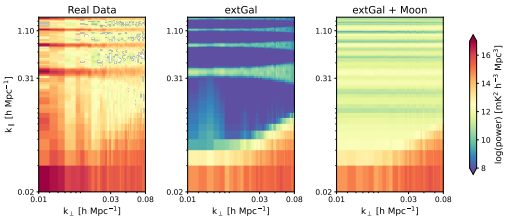


図 5: 観測データ 1 の観測およびシミュレーションに基づく uv パワースペクトルの比較。左：実データ。中央：前景成分のみをシミュレーションで再現した理想的なパワースペクトル。右：前景に加え、月反射 RFI を含むシミュレーションデータ。

ペクトル構造は滑らかである。右の画像は、前景成分のシミュレーションに今回観測された月反射 RFI を加えたシミュレーションデータのパワースペクトルである。この画像では RFI による特徴的な構造が k 空間に現れる様子が確認できる。これは月反射 RFI がパワースペクトル中に明白な乱れを引き起こしていることを意味している。これは 21cm 信号の抽出に対して深刻な影響を及ぼすことを示す。パワースペクトルの時間変化を確認したところ、月反射 RFI に関する大きな時間依存性は見られなかった。

以上の結果から、異なるビームレスポンス（0.9 および 0.1）の観測条件において、月反射 RFI の検出に差が見られた。ビームレスポンス 0.9 の条件では、ビーム中心に銀河面が含まれてしまい、明るい銀河放射が月反射 RFI の検出を妨げていた。一方、ビームレスポンス 0.1 では、銀河面を避けることでフラックス密度が最適化され、月反射 RFI の成分をよりはっきり抽出できた。

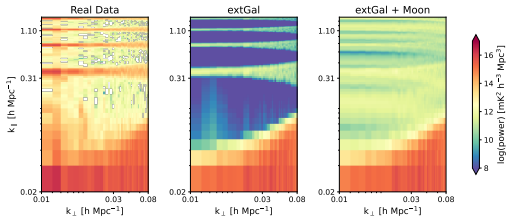


図 6: 観測データ 2 の観測およびシミュレーションに基づく uv パワースペクトルの比較。

4 Conclusion

本研究では MWA による観測データと数値シミュレーションを用いて、月によって反射された人工電波（RFI）が 21cm 線観測に与える影響を定量的に評価した。月は 88MHz 以上の RFI をよく反射し、観測する時間帯において反射される RFI の量が変化することや、パワースペクトルにも大きな影響を与えることが分かった。

今後の展望としては、観測における月反射 RFI の影響をより高精度でモデル化するために、地球起源の RFI スペクトルと月面の反射特性を組み合わせたシミュレーションを進めていく必要がある。また、異なる恒星時（LST）における月反射 RFI の強度変化を調べることで、干渉の少ない観測時間帯の選定や、将来の 21cm 観測プロジェクトにおける観測計画の最適化にもつながると期待される。

Reference

Tiwari, H., McKinley, B., Trott, C. M., & Thyagarajan, N. (2023). *Measuring the global 21-cm signal with the MWA-II: improved characterisation of lunar-reflected radio frequency interference*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 520(2), 2401–2417.

——index へ戻る

SP-19

ブラックホールへの非赤道面プラズマ流と衝撃波形成

名古屋大学
高木　大知

ブラックホールへの非赤道面プラズマ流と衝撃波形成

高木 大知 (名古屋大学大学院 理学研究科 QG 研)
高橋 真聡 (愛知教育大学), 野田 宗佑 (都城工業高等専門学校)

Abstract

ブラックホール磁気圏内に定常軸対称に降着する磁気流体が非赤道面に形成する定在衝撃波について研究する。衝撃波作る降着流はいくつかの磁気音速点を通過する必要があり、降着流のパラメータに制限が付く。衝撃波の下流のプラズマは、パラメータに依存して圧縮や磁化、加熱されるが、今回は熱エネルギーがすべて放射エネルギーに変換されるとする。本研究では、Kerr ブラックホール周りの衝撃波が非赤道面に形成される条件を調査する。非赤道面の衝撃波はブラックホール回転速度に関わらず可能であり、特に、ブラックホールの回転速度が磁力線の回転速度と比べて遅い場合は軸近くまで形成された。非赤道面の衝撃波が可能であるという結果は、AGN から観測される X 線 (鉄輝線) の放射源となり得ることを示している。

1 Introduction

この宇宙で発見されている銀河の中には、典型的な銀河と比べて、その中心領域が非常に活動的なものも存在する。このようなの中心領域を AGN（活動銀河核：Active Galactic Nucleus）という。AGN の具体的な特徴の一つとして、電波から γ 線まで幅広い波長帯で膨大な量のエネルギーを放射する点がある。これらの活動性を説明するモデルとして、AGN の中心には超大質量 Black Hole が存在して、その周りに降着円盤が存在するというものが考えられている。さらに、降着円盤を構成するガスは、Black Hole の強大な重力場によって高温になることでプラズマ（電離気体）化し、その結果、BlackHole 周辺には磁場が支配的な領域が形成される。

AGN から放射される X 線のスペクトルの中に、鉄輝線というスペクトルが観測されている。鉄輝線とは鉄から放射される輝線であり、降着円盤内の鉄原子から放射されていると考えられている。実験室では 6.4 KeV の線スペクトルとして観測されるが、AGN からは 2 つのピークを持つ非対称に広がったスペクトルが観測されている (Tanaka et al. 1995)。この観測されるスペクトルの違いはブラックホールの強重力場が原因であると考えられている。したがって、Black Hole 周囲の時空の構造を理解する上で、鉄輝線に注目することは極めて重要である。

鉄輝線は降着円盤内の鉄原子が X 線で励起されて発生するため、その生成には降着円盤以外の X 線を放射する光源が不可欠である。この光源の位置を説明するモデルとして、Black Hole の回転軸上に点状の光源が存在するという”Lamp post model”がある (Matt et al. 1991)。一方で、この光源の形成機構は諸説あり、未だに明らかになっていない。そこで本研究では、この光源の形成機構を、Black Hole に降着するガス (プラズマ) が非赤道面に形成する衝撃波で説明することにする (図 1)。衝撃波とは流体の物理量が不連続になる領域であり、衝撃波前後で流体は超音速から亜音速に減速する。この運動エネルギーの差の一部が熱エネルギーに転換することになる。しかし、本研究ではプラズマが直ちに冷却されて、熱エネルギーが放射エネルギー変換されて、光源が形成されると考えることにする。非赤道面に形成されるプラズマの衝撃波の研究は Fukumura et al. (2007) によって行われていて、Black Hole の回転速度が磁力線の角度と比べて遅い場合について、衝撃波形成の角度依存性が調べられた。そこで、本研究では先行研究とは異なる仮定・手法を選び、Black Hole の角度が速い場合も含めた広いパラメータ領域で、衝撃波の位置や放射エネルギー量の角度依存性を調査することにする。

2 Methods

2.1 Assumptions

1. 降着するプラズマを磁気流体として扱い、Kerr Black Hole に定常軸対称に降着するとする。
2. 磁場も考慮し、その形状をポロイダル面 (r-θ 面) に放射上の 1 本の磁力線として与えて、その磁力線に沿って磁気流体が降着するとする。
3. Black に降着する途中で衝撃波が形成され、その衝撃波の前後の磁気流体は Cold(磁気流体を構成する粒子の静止質量と比べて熱エネルギーが十分小さい：$k_{\rm B}T \ll m_p c^2$) とする。(衝撃波の前後で温度が変化しない等温衝撃波が発生するということである。)
4. 衝撃波前後のエネルギー差 ΔE のすべてが放射エネルギーとして放射されるとする。

2.2 Basic equations

一般相対論的に磁気流体を扱うため、一般相対論的な MHD(磁気流体力学:Magnetohydrodynamics) の基礎方程式を仮定する。:

$$\text{運動方程式}\dots T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0 \tag{1}$$

$$T^{\alpha\beta} = n\mu u^\alpha u^\beta - P g^{\alpha\beta} + \frac{1}{4\pi}\left(F^{\alpha\delta}F^\beta_\delta + \frac{1}{4}g^{\alpha\beta}F^2\right) \tag{2}$$

$$\text{粒子数保存則}\dots (nu^\alpha)_{;\alpha} = 0 \tag{3}$$

$$\text{ポリトロープ関係式}\dots P = K\rho_0^\Gamma \tag{4}$$

$$\text{Maxwell 方程式}\dots F_{[\alpha\beta;\delta]} = 0, \tag{5}$$

$$F^{\alpha\beta}_{;\beta} = -4\pi j^\alpha \tag{6}$$

$$\text{理想 MHD 条件}\dots u^\beta F_{\beta\alpha} = 0. \tag{7}$$

さらに、衝撃波前後での保存則 (Rankine-Hugoniot 関係式) も仮定する (Lichnerowicz (1967), Lichnerowicz (1976), Appl & Camenzind (1988), Takahashi et al. (2006))。

$$\text{粒子数保存則}\dots [nu^\alpha]^1_2\,\ell_\alpha = 0, \tag{8}$$

$$\text{エネルギー運動量保存則}\dots \left[T^{\alpha\beta}\right]^1_2\,\ell_\alpha = 0, \tag{9}$$

$$\text{磁束保存則}\dots \left[{}^*F^{\alpha\beta}\right]^1_2\,\ell_\alpha = 0. \tag{10}$$

なお、ある物理量 Z に対する四角カッコは $[Z]^1_2 \equiv Z_1 - Z_2$ であり、添え字の 1 と 2 はそれぞれ衝撃波面に対して上流と下流の物理量であることを示していて、ℓ^α は衝撃波面に垂直な単位ベクトルである。

2.3 磁力線に沿った保存量

磁気流体の流線は関数 $\Psi = \Psi(r,\theta)$ の一定面で表されるが、理想 MHD 条件を課すことで流線と磁力線が一致し、定常軸対称を仮定することで、磁力線に沿っていくつかの保存量が存在することが導かれる。:

$$\text{磁力線の角速度}\dots \Omega_{\rm F}(\Psi) = -F_{tA}/F_{\phi A}\ (A = r,\ \theta), \tag{11}$$

$$\text{単位磁気 flux 中の粒子数 flux}\dots \eta(\Psi) = \frac{nu^{\rm A}}{B^{\rm A}}, \tag{12}$$

$$\text{全エネルギー}\dots E(\Psi) = \mu u_t - \frac{\Omega_F}{4\pi\eta}B_\phi, \tag{13}$$

$$\text{全角運動量}\dots L(\Psi) = -\mu u_\phi - \frac{1}{4\pi\eta}B_\phi, \tag{14}$$

$$\text{エントロピー}\dots S. \tag{15}$$

これらの保存量が磁気流体の降着流のパラメータとなる。

2.4 MHD 降着流が起こす衝撃波の計算法

基礎方程式から、poloidal 方程式 (一般相対論的な Bernoulli の式) という Alfven Mach number$M^2 \equiv 4\pi\mu n u_p^2/B_p^2$ の二次方程式が導出できる (Takahashi & Tomimatsu 2008)。:

$$AM^4 - 2BM^2 + C = 0, \tag{16}$$

$$A = -(k+1) - \left(G_\phi\hat{E} + G_t\hat{L}\right)^2 / \left(\beta^2\rho_w^2\right), \tag{17}$$

$$B = \left(\hat{E} - \hat{L}\Omega_{\rm F}\right)^2 - \alpha, \tag{18}$$

$$C = \alpha B. \tag{19}$$

ここで、$k \equiv (g_{\phi\phi}\hat{E}^2 + 2g_{t\phi}\hat{E}\hat{L} + g_{tt}\hat{L}^2)/\rho_w^2$、$G_\phi \equiv g_{t\phi} + g_{\phi\phi}\Omega_F$、$G_t \equiv g_{tt} + g_{t\phi}\Omega_F$、$\alpha \equiv G_t + \Omega_F G_\phi$、$\rho_w^2 = g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}$ であり、β は磁場のポロイダル成分 B_p とトロイダル成分 B_ϕ の比で、手で与えることにする。

さらに、Rankine-Hugoniot 関係式から hump condition(衝撃波前後で物理量の間に成り立つ条件式) が導出できる (Takahashi & Takahashi 2010)。:

$$\left(M^2+\frac{1}{2}\beta^2\right)_1=\left(M^2+\frac{1}{2}\beta^2\right)_2. \qquad (20)$$

図 2 は衝撃波面に対して上流と下流のパラメータを与えて各々poloidal 方程式を解いて、さらに jump condition をプロットした図である。下流の降着流の速度分布 (青色) と jump condition(紫色) の交点が衝撃波前後の保存則が満たされた位置であり、この位置に衝撃波が形成されうる。この際の降着流に課される条件として、Alfven 点と速い磁気音速点という二つの音速点を通過する必要があり、今回注目する衝撃波 (ファスト衝撃波) に課される条件として超-速い磁気音速から亜-速い磁気音速に減速する必要がある。これらの条件を満たした交点で衝撃波が形成される。

3 Results

Black Hole の回転速度が磁力線の角速度と比べて遅い場合の衝撃波の位置を図**??**に示した。放射エネルギーが小さいほど、より高緯度帯に衝撃波が形成された。より高緯度帯に衝撃波形成されるという結果は、光源から放射される光がより広い範囲の降着円盤を照らすことができることを意味しており、鉄輝線の光源を衝撃波によって説明するという目的に適している。一方で、放射エネルギーが大きい場合は衝撃波の形成位置が低緯度帯に制限された。したがって、エネルギーが大きいほど光源は明るく光ることができるが、降着円盤を照らしにくいことを意味している。

Black Hole の回転速度が速い場合の衝撃波の位置を図 4 に示した。この場合でも赤道面から離れた位置に衝撃波が形成された。また、いずれの放射エネルギーでも衝撃波が形成できる角度の上限はあまり変化しなかった。この結果は、Black Hole の回転速度が高速になっても高緯度帯に衝撃波を形成できるが、極端に高い位置で光源を形成しずらいことを意味している。

4 Conclusion

鉄輝線の光源の形成機構を説明するために、高度帯に形成される磁気流体の衝撃波の形成証券を研究した。結果として、Black Hole の回転速度に関わらず高緯度帯に衝撃波は形成しうることが明らかになった。もっとも高緯度帯にできる衝撃波から放射されるエネルギーは静止エネルギー m_pc^2 の 10^{-2} 倍であり、これは静止エネルギーの 1%を放射することを意味している。しかし静止エネルギーは十分大きいエネルギーであり、そのエネルギーの数%だとしても明るく放射できると考える。

Acknowledgement

本研究は、愛知教育大学の高橋真聡教授と都城工業高等専門学校の野田宗佑准教授の共同研究に基づくものです。このテーマを進めてくださり、お忙しい中でも議論や研究についての助言をしてくださり、本当に多くのことを学ぶことができました。心より深く感謝申し上げます。また、本研究発表について助言してくださった名古屋大学の石橋明浩教授、柳哲文講師、松尾善典特任准教授、研究室の皆様方に深くお礼申し上げます。

Reference

Lichnerowicz, A, 1967, Relativistic Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics (New York : Benjamin Press)

Lichnerowicz, A, 1976, Math. Phys. 17, 2135

Appl, S, & Camenzind, M 1988, A&A, 206, 258

Tanaka, Y., et al. 1995, Nature, 375, 659

Matt, G., et al. 1991, A&A, 247, 25

Fukumura, K., et al. 2007, ApJ, 657, 415

Takahashi, M., & Takahashi, M., 2014, Phys. Rev. D, 78, 023012

Takahashi, M., et al. 2006, ApJ, 645, 1408

Takahashi, M., & Takahashi, R., 2010, ApJ, 714, L176

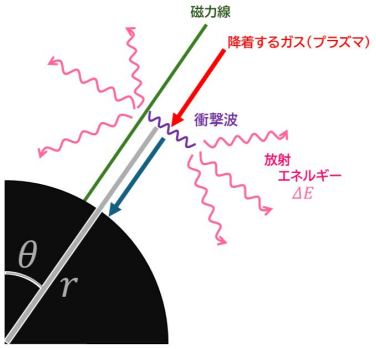


図 1: 高緯度帯に形成される衝撃波の概念図

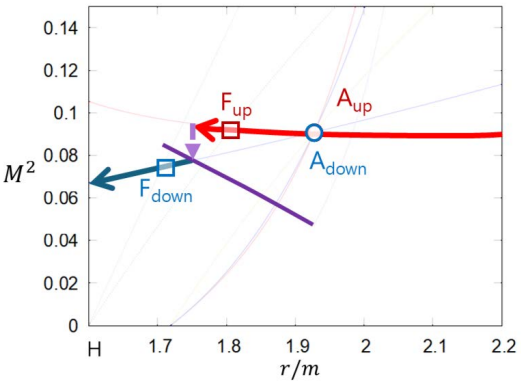


図 2: 降着流の速度分布
縦軸が Alfven Mach number で横軸が半径であり、衝撃波に対して上流と下流の降着流をそれぞれ赤色と青色、jump condition を紫色で示している。”A”で示した丸と”F”で示した四角の点はそれぞれ Alfven 点と速い磁気音速点で、赤色の”up”と青色”down”は上流と下流のものであることを示している。なお、”H”は Event Horizon の位置を示している。

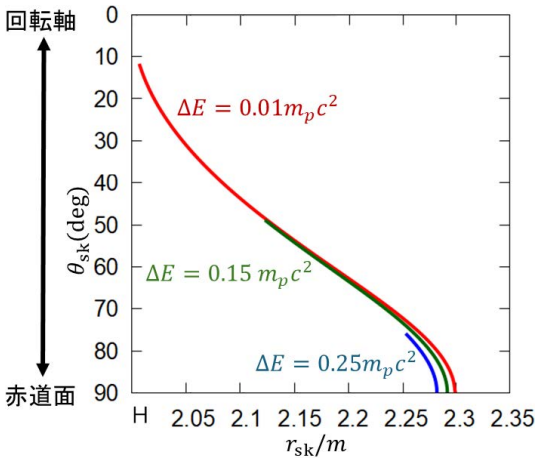


図 3: Black Hole の回転速度が遅い場合の衝撃波の形成位置
縦軸と横軸が衝撃波が形成した角度と高さで、角度が小さいほど赤道面から離れる。各色の実線が各放射エネルギーごとの衝撃波の位置である。なお、上流のパラメータは $\hat{E}_1 = 1.0,\ m\Omega_{F1} = 0.096,\ \hat{L}_1/\hat{E}_1 = 0.17/\Omega_{F1},\ C_1 = 0.0$ で、下流のパラメータは $\hat{E}_2 = 1.0 - \Delta E,\ m\Omega_{F2} = 0.096,\ \hat{L}_2/\hat{E}_2 = 0.17/\Omega_{F1},\ C_2 = 3.0$ で、Black Hole のスピンパラメータは $a = 0$ の場合である。

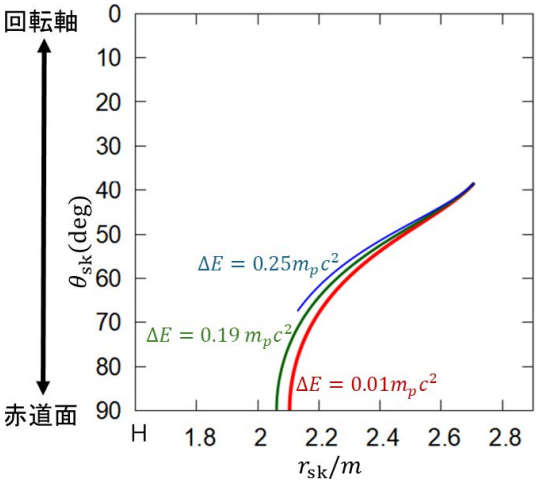


図 4: Black Hole の回転速度が速い場合の衝撃波の形成位置
上流のパラメータは $\hat{E}_1 = 1.0,\ m\Omega_{F1} = 0.123,\ \hat{L}_1/\hat{E}_1 = 0.1/\Omega_{F1},\ C_1 = 0.0$ で、下流のパラメータは $\hat{E}_2 = 1.0 - \Delta E,\ m\Omega_{F2} = 0.123,\ \hat{L}_2/\hat{E}_2 = 0.1/\Omega_{F1},\ C_2 = -3.0$ で、Black Hole のスピンパラメータは $a = 0.8$ の場合である。

——index へ戻る

SP-22

連星ブラックホールの角度分布を用いた宇宙論

千葉大学
中馬　史博

連星ブラックホールの角度分布を用いた宇宙論

中馬　史博 (千葉大学大学院 融合理工学府 先進理化学専攻 物理学コース)

Abstract

2015 年 9 月 15 日の重力波の初観測以来、重力波の観測数は順調に増加している。重力波はその波形から光度距離を直接測定することができ、宇宙論的情報を引き出すことができる強力な宇宙論探査ツールである。しかし、観測される重力波源の大半は赤方偏移の直接測定が難しく、他の手段で赤方偏移を得る必要がある。この課題を解決する手法の一つに連星ブラックホールの空間分布の自己相関や銀河の空間分布との相互相関を利用する手法がある。この手法は個別の天体の観測誤差やモデルの不定性に対してロバストな点が特長である。我々はこの手法を用いて、小スケールのダークマター分布の情報を含むレンズ収束場の分散（lensing dispersion）を制限できる可能性があることを示した。本集録では、この手法の提案と制限の可能性とこの手法を用いたハッブル定数の制限について紹介する。

1　Introduction

重力波は、その波形から波源までの光度距離を直接測定できるため、赤方偏移が得られれば、宇宙論において重要な距離–赤方偏移の関係を測定できる代替的手段を提供する。このため、連星ブラックホールや連星中性子星といったコンパクト天体は、「標準音源」と呼ばれる。特に、他の電磁波観測では観測困難な高赤方偏移における距離–赤方偏移の関係を測定する手段としても有望である (D. Holz & S. Hughes 2014) 。

しかし、これまでに見つかった重力波源のうち、ほとんどが赤方偏移の情報を得ることができない Dark siren と呼ばれる連星ブラックホールである。このことを鑑みると、Dark siren から宇宙論的情報を引き出す手法の開発が重要である。これまでに、Dark siren から宇宙論的情報、特にハッブル定数 H_0 を抽出するためのさまざまな手法が提案されている。

一つの手法として、連星ブラックホールの空間分布と銀河の空間分布の角度相関関数を用いる手法がある (M. Oguri 2016)。近年ではモックデータにも適用され、そのロバスト性と Habble 定数 H_0 の制限の実現可能性が示されている (J. Ferri et al. 2025)。この方法は、連星ブラックホールの母集団モデル、合体率、線形バイアスのモデルの不定性に対してロバストであり、その形成過程に不定性がある連星ブラックホールを用いた手法の難点を克服できる手法である可能性がある。

また、この手法を用いて重力レンズ効果を探査できる可能性も示されている。lensing dispersion は、距離と赤方偏移の関係にばらつきをもたらすため、小スケールの密度揺らぎに制限を与える有用な宇宙論的プローブとして提案されてきた。

我々は、初めて重力波源の空間分布の角度相関関数から、lensing dispersion を制限する手法を提案し、その制限の可能性を示した (F. Chuman & M. Oguri 2025)。この中で、天球面上における連星ブラックホールの自己相関および銀河との相互相関が、lensing dispersion にどのように依存するかを示し、累積信号対雑音比と Fisher 解析を通じてその検出可能性を、特に lensing dispersion と重力波源の線形バイアスとの縮退に注目して議論した。

本集録では、第 2 章で連星ブラックホールの空間分布と銀河の空間分布との角度相関関数を用いる手法に関して概説するとともに、この手法を用いた距離–赤方偏移関係の分散の制限 (F. Chuman & M. Oguri 2025) とハッブル定数の制限に関する研究 (M. Oguri 2016) について解説する。第 3 章では、これらの手法に関する解決すべき課題について今後の展望を述べる。

2　Methods & Result

重力レンズ効果と測定誤差の両方を考慮した光度距離 D の表式を示す。弱重力レンズ近似から

$$D = \bar{D}\mu^{-1/2} \tag{1}$$

ここで、μ は重力レンズ効果による増光率である。この増光率 μ をレンズ収束場 κ とシア場 γ でテーラー展開することで、重力レンズ効果を受けた光度距離は

$$D \simeq \bar{D}/\sqrt{1+2\kappa+3\kappa^2+\gamma^2} \tag{2}$$

と書くことができる。この式 (2) をレンズ収束場 κ の 1 次まで見ると、重力波源の分布に対して lensing bias を含めることができる。さらに 2 次まで見ると、lensing dispersion を含めることができる。

この表式を用いて重力波源の分布に対して光度距離ビンを定義する。選択関数は重力波源の 3 次元数密度場を適当な光度距離ビンで区切り、天球面上の 2 次元分布へと射影する。そこから密度場の平均を差し引くことで、光度距離ビンでの 2 次元数密度揺らぎを得る。銀河の空間分布も赤方偏移でビン分けを行う。得られた数密度揺らぎを用いて、重力波源の空間分布の自己相関角度パワースペクトルおよび重力波源の空間分布と銀河の空間分布の相互相関角度パワースペクトルを計算することができる。

これらの角度パワースペクトルは重力レンズ効果を明示的に含んでおり、適切にハッブル定数制限や距離と赤方偏移の関係への重力レンズ効果を調べることができる。詳しい表式の説明は F. Chuman & M. Oguri (2025)、2023 年度・2024 年度集録に記載しているので参照されたい。

2.1 連星ブラックホールの空間分布の角度相関からレンズ収束場の分散を得る

今回新しく得られた重力波源の自己相関角度パワースペクトル $C^{\rm ww}(\ell)$ を以下に示す。光度距離に対する重力レンズ効果を 2 次まで含めていること、重力波源の物質密度場のゆらぎ $\delta_{\rm m}$ と重力波源の数密度ゆらぎ $\delta_{\rm GW}$ の関係には線形バイアス $\delta_{\rm GW} = b_{\rm GW}\delta_{\rm m}$ を仮定し、ここでは大スケール ($\ell \gtrsim 300$) として $b_{\rm GW}$ を定数としていることが特に重要である。W は選択関数で、添字 s は重力波源本来のクラスタリング、添字 t, u は重力レンズ効果由来の選択関数である。$P_{\rm m}(k)$ は物質密度パワースペクトルである。

$$C^{\rm ww}(\ell) = C^{\rm ss}(\ell) + C^{\rm st}(\ell) + C^{\rm su}(\ell) + C^{\rm tt}(\ell), \tag{3}$$

$$C^{\rm ss}(\ell) = \int_0^\infty dz W^{\rm s}(z) W^{\rm s}(z) \times \frac{H(z)}{\chi^2} b_{\rm GW}^2 P_{\rm m}\left(\frac{\ell+1/2}{\chi}, z\right), \tag{4}$$

$$C^{\rm st}(\ell) = -2\int_0^\infty dz W^{\rm s}(z) W^{\rm t}(z) \times \frac{H(z)}{\chi^2} b_{\rm GW}^2 P_{\rm m}\left(\frac{\ell+1/2}{\chi}, z\right) \langle \kappa(z,\boldsymbol{\theta})^2 \rangle, \tag{5}$$

$$C^{\rm su}(\ell) = 2\int_0^\infty dz\, W^{\rm s}(z) W^{\rm u}(z) \times \frac{H(z)}{\chi^2} b_{\rm GW}^2 P_{\rm m}\left(\frac{\ell+1/2}{\chi}, z\right) \langle \kappa(z,\boldsymbol{\theta})^2 \rangle, \tag{6}$$

$$\begin{aligned} C^{\rm tt}(\ell) &= \int_0^\infty dz \left[W^{\rm t}(z) W^{\rm t}(z) \frac{H(z)}{\chi^2} b_{\rm GW}^2 P_{\rm m}\left(\frac{\ell+1/2}{\chi}, z\right) \right. \\ &\times \left. \int_0^z dz'' W^\kappa(z'';z)\, W^\kappa(z'';z) \frac{H(z'')}{\chi''^2} \right. \\ &\times \left. P_{\rm m}\left(\frac{\ell+1/2}{\chi''}, z''\right) \right] + \int_0^\infty dz \int_0^\infty dz'\, W^{\rm t}(z) W^{\rm t}(z') \\ &\times \int_0^{\min(z,z')} dz'' W^\kappa(z'';z)\, W^\kappa(z'';z') \\ &\times \frac{H(z'')}{\chi''^2} P_{\rm m}\left(\frac{\ell+1/2}{\chi''}, z''\right), \end{aligned} \tag{7}$$

ここで、

$$W^\kappa(z;z_s) \equiv \frac{3\Omega_{\rm m} H_0^2}{2} \frac{(\chi_{\rm s}-\chi)\chi}{\chi_{\rm s}}(1+z). \tag{8}$$

最初の項 $C^{\rm ss}$ は、連星ブラックホールの本来的なクラスタリングに由来する。これに対して、2 番目の項 $C^{\rm st}$ および 3 番目の項 $C^{\rm su}$ は、重力波源の光度距離に対する弱重力レンズ効果と連星ブラックホールのクラスタリングとの相関に起因する。4 番目の項は、重力波源の光度距離に対する弱重力レンズ効果そのものに由来する.

図 1 は重力波源の自己相関角度パワースペクトルを、lensing dispersion $\langle\kappa^2\rangle$ の関数として示しており、lensing dispersion が大きくなると自己相関角度パワースペクトルが減少することがわかる。これは lensing dispersion が大きくなると重力波源の分布がなまされ、自己相関が減少するためである。この関係を用いて観測量である自己相関角度パワースペクトルから lensing dispersion を制限できる可能性がある。しかし、信号対雑音比は次世代重力波観測器で十分観測可能であるものの、lensing dispersion と線型バイアス $b_{\rm GW}$ は強く縮退していることが判明した。

そこで、我々は重力波源の空間分布の自己相関に加え、重力波源の空間分布と銀河の空間分布との相互相関との joint 解析を行うことでこの縮退を一部解く

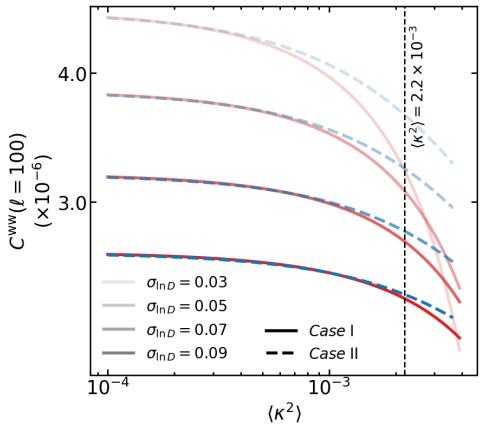


図 1: 多重極モード $\ell = 100$ における重力波源の自己相関角度パワースペクトルを、レンズ分散 $\langle\kappa^2\rangle$ の関数として示している。各プロットは観測誤差 $\sigma_{\ln D}$ の異なる値に対する結果を示しており、実線はテーラー展開で重力レンズ効果を組み込んだ場合（Case I）、破線は lensing dispersion の分だけ標準偏差を大きくした場合（Case II）を表している。縦の破線は、$z = 2.15$ における lensing dispersion の基準を示しており、これは ray-tracing simulation の結果 (R. Takahashi et al. 2011) に基づいている。

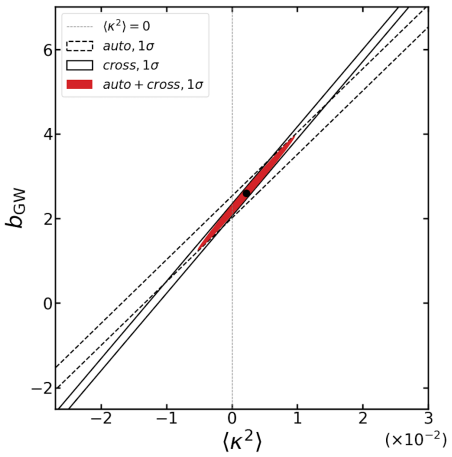


図 2: フィッシャー解析により得られた、lensing dispersion$\langle\boldsymbol{\kappa}^2\rangle$ と連星ブラックホールの線形バイアス $b_{\rm GW}$ に対するパラメータ制限（$\ell_{\rm max} = 100$）。黒の破線は自己相関の角度パワースペクトルから得られた 1σ 信頼楕円を示し、黒の実線は相互相関の角度パワースペクトルからの結果を示している。赤の領域は、自己相関と相互相関の両方を組み合わせた joint 解析による制限を表している。

ことに成功した。得られた 1σ の信頼楕円を図 2 に示す。

2.2 連星ブラックホールの空間分布と銀河の空間分布の角度相互相関から Hubble 定数を制限する

M. Oguri (2016) に基づき、連星ブラックホールの空間分布と銀河の空間分布の角度相関関数を用いて Hubble 定数を制限する手法を示す。Hubble 定数は宇宙の膨張率を表す極めて重要な宇宙論パラメータであるが、観測間のテンションが指摘され、この解決が喫緊の課題となっている。恒星質量の連星ブラックホールの起源については未解明な部分が多いが、連星ブラックホールと銀河には宇宙の大規模構造由来の相関があるとされる。したがって、赤方偏移を決定しやすいが光度距離が決めづらい銀河の空間分布と光度距離を決定しやすいが赤方偏移が決めづらい連星ブラックホールの空間分布の相互相関が大きくなる箇所を探すことで、距離と赤方偏移の関係を得て、ハッブル定数の制限を得ることができる。

重力波源と銀河の相互相関角度パワースペクトルを示す。詳しい導出は (M. Oguri 2016) を参照されたい。重力波源に関しては光度距離ビン、銀河については赤方偏移ビンで定義されている。添字 i, j はそれぞれのビンの番号を表す。

$$C^{\mathrm{w}_i\mathrm{g}_j}(\ell) = C^{\mathrm{s}_i\ \mathrm{g}_j}(\ell) + C^{\mathrm{t}_i\ \mathrm{g}_j}(\ell), \tag{9}$$

$$C^{\mathrm{s}_i\mathrm{g}_j}(\ell) = \int_0^\infty dz W_i^{\mathrm{s}}(z) W_j^{\mathrm{g}}(z) \frac{H(z)}{\chi^2} \times b_{\rm GW} b_{\rm g} P_{\rm m}\left(\frac{\ell+1/2}{\chi}; z\right), \tag{10}$$

$$C^{\mathrm{t}_j\mathrm{g}_j}(\ell) = \int_0^\infty dz W_i^{\mathrm{t}}(z) \int_0^z dz' W_j^{\mathrm{g}}(z') W^{\kappa}(z'; z) \times \frac{H(z')}{\chi'^2} b_{\rm g} P_{\rm m}\left(\frac{\ell+1/2}{\chi'}; z'\right). \tag{11}$$

第 1 項の $C^{\rm sg}$ は、連星ブラックホールと銀河の本来的なクラスタリングに由来する。一方で、第 2 項の $C^{\rm tg}$ は、重力波源の光度距離に対する弱重力レンズ効果と、銀河との相関に起因する。弱重力レンズ効果は、視線方向に沿ったすべての物質密度ゆらぎに依存するため、光度距離ビンと赤方偏移ビンの間隔が大きく離れていても、無視できない相互相関を引き起こす。

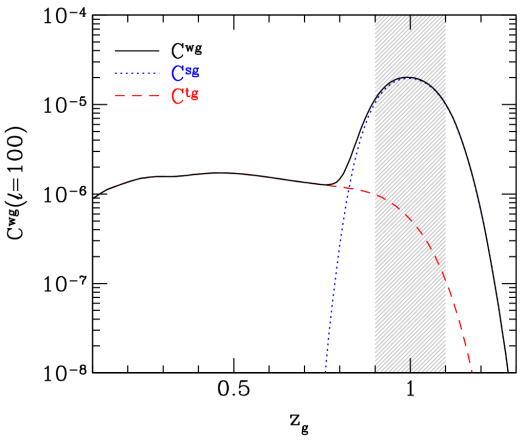


図 3: 重力波源と銀河の相互相関パワースペクトル $C^{\rm wg}$ を示す。重力波源の光度距離ビンは、基準となる宇宙論モデルにおいて $0.9 < z < 1.1$ に対応するように固定し、灰色の領域で示した。銀河は、$z_{\rm g} - \Delta z/2 < z < z_{\rm g} + \Delta z/2$ の範囲（$\Delta z = 0.1$）に設定されている。実線は、多重極モード $\ell = 100$ における相互相関パワースペクトルを、銀河サンプルの中心赤方偏移 $z_{\rm g}$ の関数として示している。点線および破線は、それぞれ $C^{\rm wg}$ に対する $C^{\rm sg}$ および $C^{\rm tg}$ の寄与を表している。

Network	H_0 [km s^{-1} Mpc^{-1}]	Ω_m	w_0	w_a
LVK O5 (only H_0)	70.4 ± 3.0	—	—	—
LVK O5 (ΛCDM)	$68.3^{+4.2}_{-5.0}$	$0.44^{+0.15}_{-0.37}$	—	—
LVK+ET (ΛCDM)	69.96 ± 0.67	$0.302^{+0.014}_{-0.016}$	—	—
ET+2CE (ΛCDM)	69.99 ± 0.42	0.301 ± 0.010	—	—
LVK+ET (w_0w_aCDM)	$69.7^{+1.6}_{-2.3}$	$0.325^{+0.058}_{-0.029}$	$-0.92^{+0.35}_{-0.21}$	$-1.06^{+2.00}_{-0.91}$
ET+2CE (w_0w_aCDM)	$69.5^{+1.5}_{-2.0}$	$0.317^{+0.060}_{-0.029}$	-0.90 ± 0.22	$-0.80^{+1.70}_{-0.81}$

表 1: 連星ブラックホールの空間分布と銀河の空間分布の角度相関の統計解析による宇宙論パラメータ制限の forcast(J. Ferri et al. 2025)

実際に、この手法を用いて宇宙の大規模構造由来の重力波源の空間分布と銀河の空間分布の相関を調べたのが、図 3 である。固定された重力波源の光度距離ビンと銀河の赤方偏移ビンが一致するところで相関が大きくなっていることがわかる。表 1 は、モックデータ解析で得られた Hubble 定数や $\Omega_{\rm m}$ といった宇宙論パラメータの LVK network による O5 観測、Einstein Telescope や Cosmic Explorer で得られる制限の forcast で、この手法で Hubble 定数問題を解決できる可能性があることが示された (J. Ferri et al. 2025)。

3 Discussion & Conclusion

連星ブラックホールの空間分布と銀河の空間分布との角度相関関数を用いる手法は、重力波源の観測数が増加するにつれ、今後ますます重要になってくると考えられる。本集録ではこの手法で宇宙論的情報を得る研究を紹介したが、今後は系統誤差の評価を進める必要がある。例えば、モックデータを作る際にはダークマターシミュレーションが使われるが、このスケールよりも連星ブラックホールの分布や重力波に対する重力レンズ効果のスケールは非常に小さい。また、重力波観測の角度分解能は非常に悪いが、高赤方偏移宇宙論を推し進めるためには、その影響を適切に考慮する必要がある。この手法の宇宙論への応用研究は盛んになされているが、未だ道半ばである。今後の発展に期待して本集録を閉じる。

Acknowledgement

指導教官である千葉大学先進科学センター教授・大栗真宗先生には指導教員として本研究の実施の機会を与えて戴き，その遂行にあたりご指導を戴いた。この場を借りて深謝の意を表する。本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2109 の支援を受けたものである。

Reference

D. E. Holz & S. A. Hughes, The Astrophysical Journal 629, 15 (2005), ISSN 0004-637X, 1538-4357, arXiv:astro-ph/0504616,

M. Oguri, Physical Review D 93, 083511 (2016), ISSN 2470- 0010, 2470-0029, arXiv:1603.02356 [astro-ph

F. Chuman, & M. Oguri (2025), arXiv:2506.10469

J. Ferri, I. L. Tashiro, L. R. Abramo, I. Matos, M. Quartin, and R. Sturani, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics 2025, 008 (2025), ISSN 1475-7516, arXiv:2412.00202 [astro- ph],

R. Takahashi, M. Sato, T. Nishimichi, A. Taruya, & M. Oguri 2015, The Astrophysical Journal 761, 152 (2012), ISSN 0004-637X, 1538-4357, arXiv:1208.2701 [astro-ph],

R. Takahashi, M. Oguri, M. Sato, and T. Hamana, The Astro- physical Journal 742, 15 (2011), ISSN 0004-637X, 1538-4357, arXiv:1106.3823 [astro-ph

——index へ戻る

SP-23

高密度核物理の解明にむけた重力波による連星中性子星パラメータ推定の精度向上

京都大学
宮園　隼人

高密度核物理の解明にむけた 重力波による連星中性子星パラメータ推定の精度向上

宮園 隼人 (京都大学大学院 理学研究科)
久徳 浩太郎 (千葉大学 理学研究院) 八木 絢外 (University of Virginia)

Abstract

物質の基本単位である原子核やクォークの低温高密度下での挙動は未解決問題であり，その解明には状態方程式の候補を絞る必要がある．それには，連星中性子星からの重力波観測による星が潮汐力で変形される度合い（潮汐変形率 Λ）の推定が有力な手段だが，質量や質量四重極モーメント Q などの相関する多数のパラメータにより精度が低下する．この課題は，Λ と Q の間に成り立つ「状態方程式によらない普遍関係 Q=Q(Λ)」を用いることで改善できる．今後稼働予定の第 3 世代の検出器では高次多重極（八重極・十六重極）の観測も可能になるが，これらも相関しているため精度が低下する原因となる．そのため本研究では，まず，高次多重極同士の普遍関係を構築する．加えてその評価のために十六重極まで含む連星中性子星からの重力波波形を計算し，それらを用いてパラメータ推定精度の向上の程度を計算する．これにより，第 3 世代検出器の観測で潮汐変形率 Λ の誤差は現在の O(100%) から O(10%) に減り，これまでにない高精度な Λ の推定が可能になる．その結果，中性子星の状態方程式の候補がより厳しく絞られ，低温高密度核物理の理解につながる．

1 背景と導入

1.1 重力波観測による状態方程式の制限

私達の体や宇宙の基本単位である核子やクォークの，低温高密度下での挙動は未解決問題である．この挙動は高密度下で圧力と密度を結ぶ状態方程式で決まるため，状態方程式の候補を絞ることがこの問題の解決の鍵となる.[1]しかし，このような高密度下では第一原理計算や地上実験は困難である．

一方，中性子星は約 $10^{15}\mathrm{g/cm^3}$ という高密度を持ち，その観測が状態方程式の制限に手がかりを与える．中でも連星中性子星からの重力波の観測は放射機構が明らかになっているため，系統誤差が電磁波観測と比べて小さく，注目されている．特に，重力波で観測できる,「星が潮汐力で変形される度合い（潮汐変形率 Λ)」は状態方程式に依存するため，その推定が状態方程式の制限に直結する．実際，2017 年の初観測では $\Lambda = 300^{+420}_{-230}$ と推定され (B.P.Abbott et al. 2019)，複数の状態方程式候補が排除された（図 1）.

1.2 普遍関係の使用による精度の向上

重力波による Λ の推定では，自転により発生した質量四重極モーメント Q などのパラメータが多いと，それらが相関して識別が難しくなり，パラメータ推定精度が下がる．この問題は，Q と Λ の間に誤差 1%以内で成り立つ「状態方程式によらない普遍関係 Q=Q(Λ)」(Yagi and Yunes 2013) を用いて改善された．2017 年の観測でもこの関係を用いてパラメータ Q を消去し，推定精度が上がった．つまり，まず状態方程式によらない普遍関係で Λ の推定精度を上げ，次に推定した Λ を用いて状態方程式の制限ができた (図 2)．現在の約 10 倍の感度を持つ第 3 世代重力波検出器の，2030 年代稼働の期待が高まっている (A. Abac et al. 2025)．この高精度観測では，四重極に加え八重極や十六重極など高次の変形の検出が見込まれる．それにより観測パラメータ数が増え，新たな相関によるパラメータ推定精度の低下が課題となる．すなわち，感度向上により新たなパラメータが観測可能となる一方，それがパラメータ推定の

[1]しかし，ここで図 1 にあるような状態方程式の「候補」はいずれも低密度極限や高密度極限の計算を内挿したものであり,「真の状態方程式」にはなり得ないことに注意されたい．あくまで状態方程式候補の絞り込みの過程から，高密度核物質の振る舞いに迫れるという認識である．

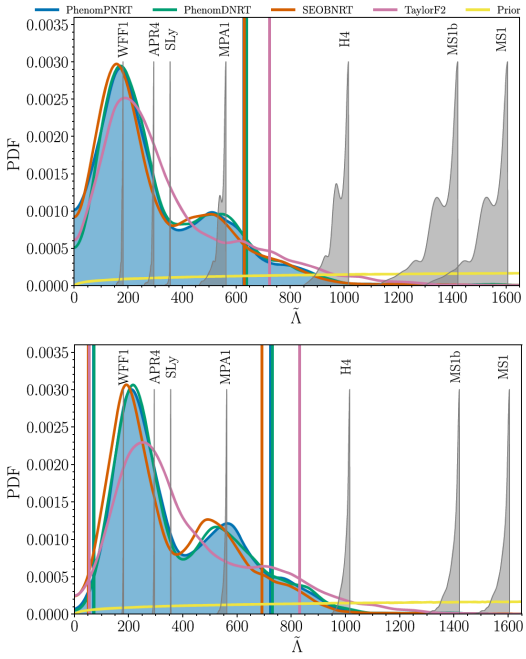


図 1: GW170817 による，潮汐変形率の制限.「重み付き平均」を取った量 $\tilde{\Lambda}$ を導入することで精度を上げている．上の図は high-spin prior，下の図は low-spin prior に対応する（つまり，ベイズ推定に用いる事前分布で，中性子星の速い自転を仮定したか，遅い自転を仮定したか）．異なる色の曲線は，マッチドフィルタリングに用いる異なる波形モデルの種類及び事前分布に対応し，90%の信頼区間を縦線で表している．high-spin prior を示す上の図では，90%信頼区間の下限が 0 である点に注意．青く塗られた部分は PhenomPNRT に対応．灰色の領域は，各状態方程式から求まる $\tilde{\Lambda}$ を示す．H4,MS1b,MS1 などの「硬い」状態方程式が 90%信頼区間の外に出て，棄却されたのが分かる．(B.P.Abbott et al. 2019) より引用

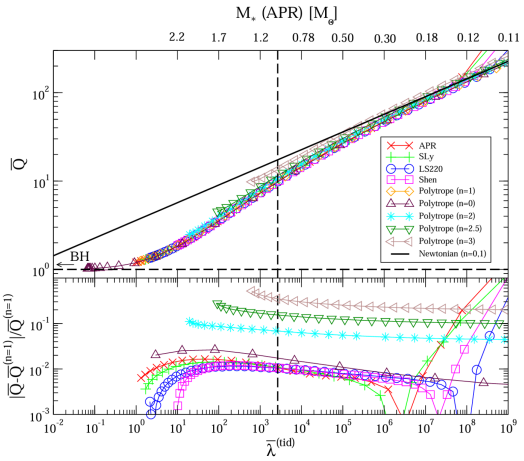


図 2: 異なる状態方程式に対して，$Q = Q(\Lambda)$ 関係がほぼ等しくなる様子．上の図は，$Q = Q(\Lambda)$ 関係，下の図はそれらをフィッティングすることで導いた関数 $Q = Q(\Lambda)$ と個々の関係との誤差を示す．なお，この図の $\bar{\lambda}^{(tid)}$ は，本論文の Λ に対応することに注意．図は (Yagi and Yunes 2013) より引用

不確かさの要因にもなる．先行研究と同様に「高次多重極間の，状態方程式によらない普遍関係」を発見し新たなパラメータを消去できれば，この推定精度低下を改善できる．それにより，まず現在の Λ の誤差 O(100%) を第 3 世代検出器で O(10%) まで減らし，次に状態方程式の候補をより厳しく絞り，高密度核物理の理解を進められると期待される．

1.3 潮汐変形率

潮汐変形率 λ および無次元化された Λ は，

$$Q_{ij} = -\lambda \mathcal{E}_{ij} = -\Lambda m^5 \mathcal{E}_{ij} \qquad (1)$$

で定義される（なお，本論文では $c = G = 1$ とする単位系を用いる）．ここで，Q_{ij} は星の質量四重極モーメントテンソル，$\mathcal{E}_{ij}$ は潮汐テンソルである．ニュートン極限で連星系を考える場合は相手の星の質量を m_2 として，$\mathcal{E}_{ij} := -m_2 \partial_i \partial_j (1/r)$ である．Λ が小さい (大きい) と，状態方程式は軟らかい (硬い) と分かる．これは，状態方程式が軟らかいと密度分布が中心に集中し四重極変形が小さくなるから，逆に硬いと密度分布は一様に近づき四重極変形は大きくなるからだと説明できる．

2 方法

2.1 高次の普遍関係の構築

星の自転を摂動量として扱うことで，非線形偏微分方程式である Einstein 方程式を常微分方程式に帰着できる．

(Yagi and Yunes 2013) と同様に，定常軸対称な計量を扱う．

$$
\begin{aligned}
ds^2 =& \\
&- e^{\nu(r)}\left[1+2\epsilon^2 h_2(r)\alpha Y_{2m}(\theta,\phi)\right]dt^2 \\
&+ e^{\lambda(r)}\left[1+\frac{2\epsilon^2 m_2(r)\alpha Y_{2m}(\theta,\phi)}{r-2M(r)}\right]dr^2 \\
&+ r^2\left[1+2\epsilon^2 k_2(r)\alpha Y_{2m}(\theta,\phi)\right] \\
&\times\left\{d\theta^2+\sin^2\theta\left[d\phi-\epsilon\left[\Omega_*-\omega_1(r)P_1'(\cos\theta)\right]dt\right]^2\right\} \\
&+ O(\epsilon^3)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

を用いる．ここで，$M(r) \coloneqq (1-e^{-\lambda(r)})$，$\alpha = 2\sqrt{\pi/5}$，$P_l(\cos\theta)$ は l 次のルジャンドル多項式，$P_1' = dP_1/d\cos\theta$，$Y_{lm}(\theta,\phi)$ は球面調和関数，Ω_* は星表面での角速度である．ϵ は自転の次数を表し，計算の際には 1 を代入する．この計量を Einstein 方程式

$$
G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \tag{3}
$$

に代入し，ϵ の 2 次の摂動をとる．ここで $G_{\mu\nu}$ は Einstein テンソルと呼ばれる量，$T_{\mu\nu}$ はエネルギー運動量テンソルである．これにより，摂動 h_2, m_2, k_2 に関する連立常微分方程式が得られる．これらの解から，星の質量四重極モーメント Q，潮汐変形率 Λ が求まる．これは星の変形と星内部の重力場とが対応していることによる．実際にはこれらを連立して得られる 2 変数 h_2, v の従う微分方程式

$$
\begin{aligned}
&\frac{dv}{dr} = -\nu_r h_2 + \\
&\left(\frac{1}{r}+\frac{\nu_r}{2}\right)\left[-\frac{1}{3}r^3\left(j^2\right)_r\bar{\omega}^2+\frac{1}{6}j^2r^4\left(\bar{\omega}_r\right)^2\right] \\
&\frac{dh_2}{dr} = \\
&\left\{-\nu_r+\frac{r}{(r-2M)\nu_r}\left[8\pi(E+P)-\frac{4M}{r^3}\right]\right\}h_2 \\
&-\frac{4v}{r\nu_r(r-2M)} \\
&+\frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}\nu_r r-\frac{1}{(r-2M)\nu_r}\right]r^3 j^2\left(\bar{\omega}_r\right)^2 \\
&-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\nu_r r+\frac{1}{(r-2M)\nu_r}\right]r^2\left(j^2\right)_r(\bar{\omega})^2.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

を解く．(Hartle 1967) ここで添え字の r は r 微分を意味し，$j = \exp(-(\nu+\lambda)/2)$ である．

なお，0 次の方程式は Tolman-Oppenheimer-Volkov 方程式と連続の式であり，解として質量 m，圧力 P が求まる．残る自由度は，低温下での状態方程式 $P = P(\rho)$ で消去する．1 次の方程式は摂動 ω の方程式となり，その解から星の慣性モーメント I が求まる．

2.2 高次多重極を含む重力波の理論波形の計算

質量や潮汐変形率 Λ など中性子星を特徴づけるパラメータの違いがより顕著に表れる重力波の位相を，高次の変形の寄与を含めて計算する．(E. E. Flanagan & T. Hinderer 2008) と同様に，高次変形の寄与を摂動的に取り入れた連星の力学的エネルギーの時間変化と，重力波の持ち去るエネルギーとを等置する断熱近似を用いる．

2.3 高次の普遍関係の評価

2.2 で求めた高次の変形を含む波形を用いて，重力波イベントを解析する際の潮汐変形率 Λ や他のパラメータ推定の統計誤差を，Fisher 解析で計算する．これは信号が雑音より十分大きい場合に使える近似的手法であり，強いパラメータ制限を与える近傍でのイベントに対しては有効である．

本研究では 2.2 で求めた理論波形と，第 3 世代検出器においてあらかじめ見積もられている雑音を用いる．実際に潮汐変形率 Λ の推定精度が普遍関数を使わない場合からどれだけ増加するかを定量的に明らかにする．加えて状態方程式を変えた際の普遍関数からの誤差はさらにそれより小さいかどうか確認し，普遍関数の有用性を確かめる．

さらに，高次の多重極を無視せず解析した場合 2.2 と無視した場合とのパラメータ推定を比較する．

3 結果

自転変形による四重極モーメント Q と潮汐変形率の八重極成分 Λ_3 との間の，状態方程式によらない普遍関数 $Q = Q(\Lambda_3)$ を図 3 に示す．なお，以下の結果では状態方程式としてポリトロープ方程式 $P = K\rho^\Gamma$（K は定数，Γ は中性子星では 2~3 の値が適切である．）を用いている．今後の研究では APR や Sly といっ

た現実的な状態方程式（realistic equations of state）を用いた計算を予定している．

状態方程式を変えた際の普遍関数からの誤差は広範囲で O(1%)，一部 O(10%) であった．十六重極の潮汐変形率 Λ_4 に関しても同様に計算し，同程度の誤差であった．

現在，Newton 極限との比較などによる，計算の正確性の評価中である．特に，$\Lambda \sim O(100)$ での誤差が大きい点は先行研究からの予想を外れており，数値計算の誤りの可能性もある．

残りの研究は，現在計算中である．

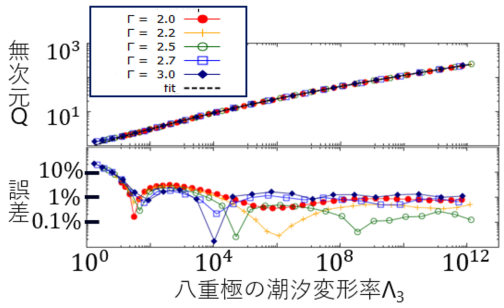


図 3: 異なる状態方程式に対して，$Q = Q(\Lambda_3)$ 関係がほぼ等しくなる様子．上の図は，$Q = Q(\Lambda)$ 関係，下の図はそれらをフィッティングすることで導いた関数 $Q = Q(\Lambda)$ と個々の関係との誤差を示す．

4 謝辞

本研究にあたり，京都大学理学研究科天体核研究室の先輩方から数多くの議論の機会やアドバイスを頂きました．この場を借りてお礼申し上げます．ありがとうございました．

Reference

B. P. Abbott et al., Phys Rev X 9, 1, 011001 (2019)

A. Abac et al., arXiv: 2503.12263

K. Yagi and N. Yunes, Science 341, 365-368 (2013)

E. E. Flanagan and T. Hinderer, Phys. Rev. D 77, 021502 (2008)

J.B.Hartle,Astrophys.J.150,1005(1967)

——index へ戻る

SP-24

Cosmic Topology: Is the Universe Finite?

総合研究大学院大学
He Yingqiu

Cosmic Topology: Is the Universe Finite?

Yingqiu He (SOKENDAI, KEK)

Abstract

Is space infinite or finite? What is the shape of our universe? What is the outside of cosmological horizon? These questions introduce cosmic topology – the study of the universe's global geometry, which goes beyond the local curvature described by General Relativity. Since the 1990s, it gained notice again through the work of few scientists explored how a multi-connected universe (such as a 3-torus) could be constrained by "circles-in-the-sky" method with the Cosmic Microwave Background (CMB) and galaxy clusters "cosmic crystallography" method. This proceeding also summarizes a recent study that uses Betti numbers, a persistent homology method, to search for imprints of such topology in the CMB. While observational and computational challenges remain, future may reveal these questions that waiting for us to answer.

1 Introduction

Whether the universe finite or infinite is one of the oldest philosophy questions. Behind this question, there is a subject called cosmic topology, which studies the non-trivial global geometry of the universe, unlike the local curvature described by General Relativity. It relates to if the space is closed, compact, orientable, and how it is connected. In this section, we first give a brief history of global geometry of the universe, then introduce the basic cosmic topology and 3-torus as a candidate for a finite universe. Finally, we introduced two observational methods to search for the possible signatures in the CMB and galaxy clusters.

1.1 Brief history

Almost 250 years ago, a philosopher named Kant proposed that human cannot perceive the universe as a whole, and it is not possible to know if the universe is finite or infinite. Until Newton's ages, space was tried to be scientifically identified with the infinite Euclidean space $\mathbb{R}^3$. By the end of 19th century, mathematicians such as Riemann had discovered finite spaces without boundaries. And Schwarzschild brought the work into astronomical context, suggesting a toroidal universe.

1915, Einstein equations of General Relativity explain gravity as the curvature of spacetime and provide a model for a finite, unbounded and static space. Some scientists, such as de Sitter pointed out the freedom of choice between spherical, elliptical or other topologies. With the mathematics of classification of space topology developed in 1920s, simple connectedness of space was gradually replaced by multi-connectedness, which allows for more complex topologies. The discovery of expanding universe by Friedmann and Lemaitre with big bang concept, a negative, positive or zero curvature space was proposed. Recent half century witnessed not only the rise of observational cosmology, as well as theoretical cosmology as the basis of a quantum gravity theory, to give a further understanding of spacetime.

1.2 Torus Universe

Basic concepts of topology

Topology is the mathematical study of shapes and spaces, focusing on properties that remain invariant under continuous transformations, such as stretching, squeezing, and bending, but not tearing or gluing. Global geometry refers to both the topology and the local geometry. In F-L model, the spacetime metric can be expressed as:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \qquad (1)$$

where $k = 0$ corresponds to a flat $\mathbb{R}^3$, $k = 1$ to a spherical $\mathbb{S}^3$, and $k = -1$ to a hyperbolic $\mathbb{H}^3$ universe. Open universes (zero or negative curvature) have no boundaries, while closed universes (positive curvature) are bounded. These are local properties. Particles follow worldlines from the past to the future, demonstrating local time orientability. Returning to global properties, two-sided surfaces are called orientable since their two-sidedness allows us to define an orientation (e.g., left and right or a direction in $\mathbb{R}^3$), whereas a Möbius strip is non-orientable.

Compact topology refers to spaces that are finite in extent, but not necessarily bounded, like 3-torus

which will be introduced later and compact hyperbolic space. In contrast, non-compact spaces extend infinitely and are unbounded. For surfaces, loosely speaking, multi-connectedness means there is at least one loop than cannot be shrunk to a point. In higher dimensions, algebraic topology provides tools to study more complex spaces. Someone think that connectedness is to play in quantum cosmology a role as much important, and probably more, than curvature.

2-Torus to 3-Torus

In the rest, we will consider a standard 3-torus universe that is a compact, unbounded, flat, orientable and multiply connected space.

A 2-torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ can be constructed by taking a square, identifying (gluing) the opposite edges, first left to right (forming a cylinder), then top to bottom (closing the cylinder into a doughnut shape). This creates a 2-dimensional space that is finite, boundaryless, and multiply connected, see Figure1.

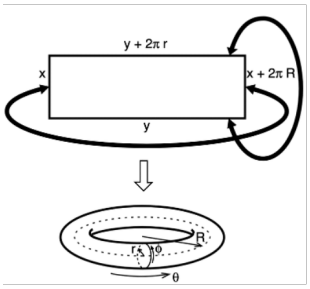


Figure 1: Construction of the flat torus. (From [1])

Mathematically, the 3-torus $\mathbb{T}^3$ is the quotient of $\mathbb{R}^3$ under the action of three linearly independent translations $\mathbb{T}_1$, $\mathbb{T}_2$, and $\mathbb{T}_3$, e.g., $\mathbb{T}_1 = (L_x, 0, 0)$, $\mathbb{T}_2 = (0, L_y, 0)$, and $\mathbb{T}_3 = (0, 0, L_z)$, where L_x, L_y, and L_z are the side lengths of the torus, or fundamental domain. We can image our Earth position in the 3-torus space. In this universe, if you travel far enough in one direction, you will eventually return to your starting point, similar to how traveling east on Earth eventually brings you back to the same longitude.

1.3 Observational Signatures

Circle-in-the-sky method

The method searches for matching circular patterns on the Last Scattering Surface (LSS, i.e., observable universe boundary) of the Cosmic Microwave Background, noting only effective when $L < LSSradius$. Planck 2015 data uses the method and disfavors small-scale topologies, but COMPACT Collaboration shows many possibilities remain unexplored using CMB.

As showing in Figure2, there are three balls corresponding to the surfaces of LSS and each cube is the side-length of torus. The circles are formed by the intersection of the LSS with each other. Then, in figure 4, we have reason to divide the circle into six regions (a-f). We can expect that each region corresponds to an opposite region. For example, the region a in the middle plot can be shifted parallel from right to left, i.e. the region a in the right plot.

Hence, the effect multi-connectedness would be that the values of the temperature fluctuations around certian circles on the CMB would map onto one another, since the circles correspond to the same set of points in space and time.

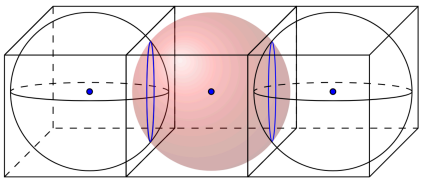


Figure 2: The LSS compared to the size of a 3-torus universe. For right the LSS intersects itself and will have circles of matching temperature distributions.

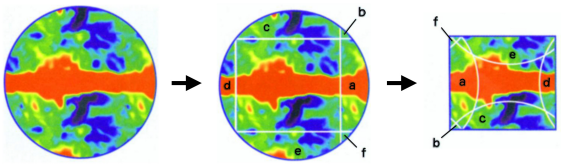


Figure 3: The visual circle can be divided into a fundamental domain and six other regions (a–f). Each of those regions corresponds to an area within the fundamental domain.

Cosmic crystallography

Cosmic crystallography was proposed to detect multiple images of the same object, such as galaxy clusters and quasars, causing sharp peaks in a histogram of pair separations (non-normalized two-point correlation function), indicating a periodic structure in a multi-connected universe.

2 Literature Review

This section reviews one of the recent literatures on cosmic topology, focusing on the use of Betti functionals and the Euler Characteristic to analyze on excursions set. The results give a hint of a non-trivial topology universe.

2.1 Method

The normalized temperature fluctuation field in the CMB on the sky is defined on the sphere $\mathbb{S}^2$ as

$$f(\hat{n}) \coloneqq \frac{\delta T(\hat{n}) - \mu}{\sigma_0},$$

where $\hat{n}$ is the direction on the sky, $\delta T(\hat{n})$ is the temperature fluctuation, μ is the mean, and σ_0 is the standard deviation. The topological descriptors are then computed as a functional of the excursion set

$$\mathbb{E}(\nu) = \{\hat{n} \in \mathbb{S}^2 \,|\, f(\hat{n}) \geq \nu\},$$

where ν is a threshold value, e.g., Figure4.

Originating from Betti numbers related to distinguish topological spaces, the Betti functional are defined here as

$$\beta_0(\nu) \coloneqq \#\text{ components of } \mathbb{E}(\nu),$$
$$\beta_1(\nu) \coloneqq \#\text{ topological holes of } \mathbb{E}(\nu).$$

It is agreed with the asymptotic behavior for $\nu \to -\infty$, then $\beta_0(\nu) \to 1, \beta_1(\nu) = 0$. One can also infer that the apparent symmetry $\beta_0(\nu) = \beta_1(-\nu)$, with respect to $\nu \to -\nu$ ($\delta T \to -\delta T$ respectively).

Some study have shown a parameter $\rho \coloneqq \sigma_1/\sigma_0$ does detect the change in size of the cubic 3-torus, where σ_1 is the standard deviation of the gradient of the $\delta T(\hat{n})$. The mean value of $\langle\rho(L)\rangle$ can be well approximated for tori of size $1.0 \leq L \leq 3.0$ by

$$\langle\rho(L)\rangle \approx 46.122 - 3.290L,$$

where L is the side-length of the torus in units of the Hubble length c/H_0.

The paper found that

$$\rho = \sqrt{\sqrt{2\pi e}(\beta_1(-1) - \beta_1(1))},$$

at maximum $\nu = 1$ and minimum $\nu = -1$ have such relation, which shows that a monotonic dependence of β_1 on the torus size leads to an analogous behaviour of ρ. While $\beta_1(\pm)$ is computed by counting the number of holes of excursion sets, ρ is computed by differentiating the CMB temperature field.

In real case of ground-based observation, a common connected masked region is applied to deal with an incomplete sky coverage. A lower bound $\beta_0^{\min}(\nu)$ is obtained by counting all components that are touched by a common masked region as a single component. Conversely, an upper bound $\beta_0^{\max}(\nu)$ is obtained by treating all components as separated.

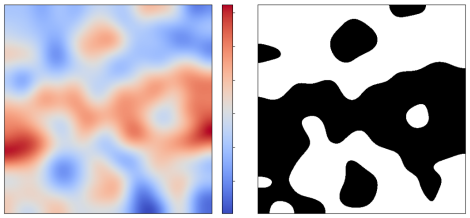


Figure 4: A random isotropic field and its excursion set.

2.2 Results

The method is applied to four sky maps released by Planck collaboration in 2018. The comparison with the cubic 3-torus simulations shows that the curves derived from the four Planck maps lie between the 3-torus models with side-length $L = 2.0$ and $L = 3.0$. So this measure gives a further hint of a non-trivial topology universe.

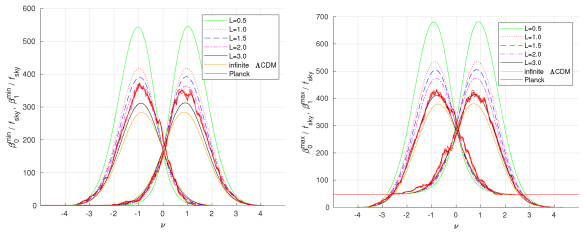


Figure 5: Plots for the 3-torus simulations, the infinite CDM model and the four Planck maps which are all subjected to the same mask. (f_{sky} = Area of the unmasked sky/Area of full sky)

3 Discussion and Conclusion

In last century, cosmic topology has been a subject of interest and several techniques have been developed to search for the signatures for a nontrivial topology universe. The CMB angular power spectrum and other galaxy anomalies may related to the choose of the topology, but they may also reflect errors or variance. Besides, the inconsistent models and biased surveys can also obscure the results. Even though the challenges remain, new techniques like the paper reviews here, we need to keep

exploring and asking questions about the complex topology and unclear data to reveal the universe's true nature.

Reference

M. Lachieze-Rey and J. P. Luminet, March 1995, Physics Reports, 254(3):135–214.

Jean-Pierre Luminet and Boudewijn F. Roukema, 1999.

Planck Collaboration, 2016, Astronomy & Astrophysics, 594:A18.

COMPACT Collaboration, 2024, Phys. Rev. Lett., 132(17):171501.

Ralf Aurich and Frank Steiner, 2024, Universe, 10(5).

——index へ戻る

SP-25

Superspinar の境界条件問題

大阪公立大学
林　知哉

Superspinar の境界条件問題

林 知哉 (大阪公立大学大学院 理学研究科)
共著者 中尾 憲一, 村上 由三, 末藤 健介, 松尾 賢汰

Abstract

Superspinar とは、超弦理論に基づいて Gimon と Hořava によって提案された、高速回転するコンパクト天体であり、その外側の時空は over-spinning Kerr 解によって記述される [1]。 このような天体の存在が観測的に確認されれば、超弦理論の傍証となる可能性がある。
Superspinar の性質に関しては未解明な点が多く、特に “ 表面 ” においてどのような境界条件を課すべきかは明らかでない。Pani らは特定の境界条件を仮定した下で重力場摂動による安定性を調べ、この系が不安定になることを示した [2]。
しかしその後、Nakao らにより、Pani らの仮定した境界条件は Superspinar に本質的に要求されるものではなく、実際には Superspinar が安定に存在し得るような境界条件が無数に存在する可能性があることが示された [3]。本講演では以上の内容についてのレビューを行う。

1 Introduction

Superspinar とは、超弦理論に基づいて Gimon と Hořava によって提案された高速回転するコンパクト天体である [1]。その天体の外側は、Over-spinning Kerr 時空によって記述される。しかし、天体の表面や内側については何もわかっていない。本文では、Supuerspinar の ” 表面 ” での振る舞い（境界条件）について評価する。

2 Over-spinnig Kerr 時空

Kerr 時空とは、Eintein 方程式の漸近平坦な定常軸対称真空解である。さらに、漸近 de Sitter 解を Kerr-de Sitter 時空 (KdS 時空) という。

Boyer-Lindquist 座標系 (t, r, θ, ϕ) にて、計量は以下のようになる。

$$\begin{aligned} ds^2_{\mathrm{KdS}} =& -\frac{\Delta}{(1+\alpha)^2\rho^2}(dt - a\sin^2\theta d\phi)^2 \\ &+ \rho^2\left(\frac{dr^2}{\Delta} + \frac{d\theta^2}{1+\alpha\cos^2\theta}\right) \\ &+ \frac{(1+\alpha\cos^2\theta)\sin^2\theta}{(1+\alpha)^2\rho^2}[adt - (r^2+a^2)d\phi]^2 \end{aligned}$$

ここで $\Delta(r) = (r^2+a^2)(1-\Lambda r^2/3) - 2Mr, \alpha = \Lambda a^2/3, \rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$ である。

この時空の Horizon は、４つある。

$$g^{rr} = \frac{\Delta}{\rho^2} = 0 \Leftrightarrow r = r'_-, r_-, r_+, r'_+$$

$r = r'_\pm$ は Cosmological Horizon であり、$r = r_\pm$ は Event(Cauchy) Horizon である。$(r'_- < 0 < r_- < r_+ < r'_+)$

$\alpha < 2 - \sqrt{3},\ m^2_- < M^2 < m^2_+$ の場合、$r = r_\pm$ は実数になり Black Hole 時空になるが (KdS BH 時空)、$0 < M^2 < m^2_-$ の場合は $r = r_\pm$ が複素数になり、Event(Cauchy) Horizon が存在しない。この時空を Over-spinning Kerr-de Sitter 時空（OS KdS 時空）と呼ぶ。

OS KdS 時空において、$\Lambda \to 0$ とすると、Superspinar の表面より外側を記述する Over-spinning Kerr 時空にすることができる。

3 Ergo 領域

Kerr 時空、KdS 時空の特徴的な領域として Ergo 領域がある。

Ergo 領域とは、無限遠で Timelike な Killing vector $\xi_{(t)} = \partial/\partial t$ が Spacelike になる領域であり以下の式を満たす。

$$\xi^\mu_{(t)}\xi_{(t)\mu} = g_{tt} > 0$$

ここで、Timelike Killing vector $\xi_{(t)}$ とエネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ で以下のような保存量を定義する。

$$J^{\mu} = -T^{\mu\nu}\xi_{(t)\nu} \tag{1}$$

(1) において、Ergo 領域外では時間成分 J^t はエネルギー密度を表し、空間成分 J^i $(i = 1, 2, 3)$ は運動量密度を表す。しかし、Ergo 領域内では $\xi_{(t)}$ が Spacelike になるため J^t は負になり得る。

Friedman は、定常な時空において Event Horizon が存在せず Ergo 領域のエネルギーが負になる場合、系が不安定になることを示した（Ergo 領域不安定性）[4]。Superspinar の場合も、Ergo 領域不安定性を持つ可能性がある。

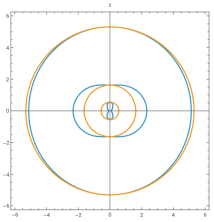


図 1: KdS BH 時空

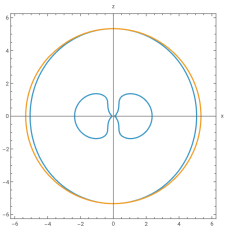


図 2: OS KdS 時空

図 1、図 2 において黄線が Horizon で、青線が Ergo 領域の境界である。図 1 の中心部において、内側の黄線が Cauchy Horizon$(r = r_-)$ で外側の黄線が Event Horizon$(r = r_+)$ である。図 2 においては、中心部の Horizon は存在しない。Cosmological Horizon$(r = r'_+)$ は、図 1、図 2 の最も外側の黄線である。

4 スカラー場摂動

Over-spinning Kerr-de Sitter 時空に対するスカラー場摂動を計算し線形安定性について考え Superspinar の ” 表面 ” における振る舞い（境界条件）を解析する。

massless 複素スカラー場 $\psi(t, r, \theta, \phi)$ の Klein-Gordon 方程式 $\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}\psi = 0$ を計算すると、時空の対称性から以下のように変数分離することができる。

$$\psi(t, r, \theta, \phi) = e^{-i\omega t}e^{im\phi}R(r)S(x) \tag{2}$$

ここで $m \in \mathbb{Z}, \omega \in \mathbb{R}, x = \cos\theta$ である。

スカラー場の方程式は以下のようになる。（λ は変数分離定数）

$$\begin{cases} \left[\frac{d}{dx}(1+\alpha x^2)(1-x^2)\frac{d}{dx}\right]S(x) \\ \quad + \left[\lambda - 2\alpha x^2 - \frac{(1+\alpha)^2[m-a\omega(1-x^2)]^2}{(1+\alpha x^2)(1-x^2)}\right]S(x) = 0 \\ \left[\frac{d}{dr}\Delta(r)\frac{d}{dr}\right]R(r) + \left[\frac{J(r)^2}{\Delta(r)} - \frac{2\alpha}{a^2} - \lambda\right]R(r) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

5 境界条件

(3) の角度方向の方程式 ($S(x)$ に関する式) は、$x = \pm 1 (\theta = 0, \pi)$ において正則であるという境界条件を課す。

動径方向の方程式 ($R(r)$ に関する式) については Superspinar の ” 表面 ” における振る舞いはわかっていないためどのような境界条件を課せばいいのかわからない。本研究では、外側（無限遠）のみ ” 外向き波条件 ” を課し、内側（Superspinar の ” 表面 ” ）ではあえて境界条件を課さない。安定な解を示す ω を予め決めておき、(3) を解くことによってスカラー場が Superspinar の ” 表面 ” と思われる場所でどのように振る舞うのかを解析するのが目標である。

しかし、先に述べたとおり Superspinar の場合、Ergo 領域不安定性があるため安定解が存在するかどうかわからない。今回は、Ergo 領域の表面でどのようにスカラー場が振る舞うか解析する。

6 Heun 方程式

(3) は、非線形連立常微分方程式でありそのまま解析的に解くことは難しい。二つの方程式は共に確定特異点を 4 つ持っているため、Heun 方程式に変換することができる [5]。

Heun 方程式は以下のような方程式である。

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\epsilon}{z-a}\right)\frac{dy}{dz} + \frac{\alpha\beta z - q}{z(z-1)(z-a)}y = 0, \\ \gamma + \delta + \epsilon = \alpha + \beta + 1, \quad a \neq 0, 1. \tag{4}$$

この方程式を満たす関数を Heun 関数と呼び、本文では $z = 0$ 周りの正則な解を以下のように表記する。（c_k は、漸化式を満たす必要がある）

$$y(z) = Hl(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

(3) において、以下のように変換すると Heun 方程式にすることができる。

$$\begin{cases} x = (-1, +1, -i/\sqrt{\alpha}, +i/\sqrt{\alpha}) \\ \qquad\qquad \to z = (0, 1, z_a, \infty) \\ S(x) = z^{A_1}(z-1)^{A_2} \\ \qquad\qquad \times (z - z_a)^{A_3}(z - z_\infty) y^{(a)}(z) \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} r = (r'_-, r_-, r_+, r'_+) \to v = (\infty, v_r, 0, 1) \\ R(r) = v^{B_1}(v-1)^{B_2} \\ \qquad\qquad \times (v - v_r)^{B_3}(v - v_\infty)^{B_4} y^{(r)}(v) \end{cases} \tag{6}$$

Heun 関数は、数理処理システム Mathematica の組み込み関数になっている。そのため、Mathematica を用いて Heun 関数を計算し (5), (6) に代入してスカラー場 (2) の値を得ることができる [6]。

7 Ergo 領域不安定性との関係

時間発展を考えると、スカラー場の絶対値が以下のようになるので Im[ω] の正負によって安定か（減衰するか）どうか判断できる。

$$|\psi|^2 = e^{2\mathrm{Im}[\omega]t}|R|^2|S|^2$$

また、Ergo 領域の保存量 (1) を考えると保存則より

$$\nabla_\mu J^\mu = 0 \Leftrightarrow \partial_i(\sqrt{-g}J^i) = -\partial_t(\sqrt{-g}J^t)$$

となるので、両辺を Ergo 領域で体積積分を行うと

$$L = -\frac{dE}{dt} = -2\mathrm{Im}[\omega]E, \quad E \equiv \int_{V^{(3)}_{\mathrm{Ergo}}} (\sqrt{-g}J^t)dV \tag{7}$$

で E は Ergo 領域内のエネルギーで、L は単位時間あたりに流出するエネルギーである。

(7) から Ergo 領域の境界で以下のような振る舞いをしていると考察できる。

1. 不安定のとき (Im[ω] > 0)
   (a) $E > 0$: Ergo 領域に正のエネルギーが流入
   (b) $E < 0$: Ergo 領域に正のエネルギーが流出
2. 安定のとき (Im[ω] < 0)
   (a) $E > 0$: Ergo 領域に正のエネルギーが流出
   (b) $E < 0$: Ergo 領域に正のエネルギーが流入

以上で述べた方法で、E と ω との関係を解析する。

Reference

[1] E. G. Gimon and P. Hořava, Phys. Lett. B672, 299 (2009), 0706.2873.

[2] P. Pani, E. Barausse, E. Berti and V. Cardoso, Phys. Rev. D 82 (2010) 044009.

[3] K. Nakao, P. S. Joshi , J. Guo, P. Kocherlakota, H. Tagoshi, T. Harada, M. Patil and A. Królak, Phys. Lett. B780 (2018) 410-413.

[4] Friedman, J. L. (1978). Communications in Mathematical Physics, 63(3), 243-255.

[5] Motohashi, H., and Noda, S. (2021). Progress of Theoretical and Experimental Physics, 2021(8), 083E03.

[6] Hatsuda, Y. (2020). Classical and Quantum Gravity, 38(2), 025015.

——index へ戻る

SP-26

スーパーカミオカンデにおける機械学習を用いた $p \to \bar{\nu}K^+$ 陽子崩壊事象の探索

東京大学
冨谷　卓矢

スーパーカミオカンデにおける機械学習を用いた $p \to \bar{\nu}K^+$ 陽子崩壊事象の探索

冨谷 卓矢 (東京大学大学院 理学系研究科)
共著者 田代拓也，三浦真，峰俊一，奥村公宏，早戸良成
(東京大学宇宙線研究所)
他 Super-Kamiokande Collaboration

Abstract

素粒子の大統一理論では、バリオン数が保存されない陽子崩壊が予言されている。世界最大の水チェレンコフ検出器であるスーパーカミオカンデでは、$p \to e^+\pi^0$ 過程をはじめとする様々な崩壊過程について探索が進められてきた。本研究では、超対称性大統一理論で主要な崩壊過程とされる $p \to \bar{\nu}K^+$ の探索をおこなう。陽子崩壊後の終状態の K^+ は、スーパーカミオカンデでは直接観測できないため、水中で静止した後、K^+ の崩壊粒子である $\mu^+\nu_\mu$(分岐比: 約 64%) や $\pi^+\pi^0$(分岐比: 約 21%) を検出して探索を行う。従来の手法では信号の検出効率が約 $10-30$%であった。本研究ではこの課題に対処するため、事象選別に機械学習手法を導入し、検出効率の向上と背景事象の低減を図る。ポスターセッションでは、陽子崩壊信号と背景事象の違いをモンテカルロシミュレーションに基づいて比較検証し、機械学習による新たな事象選択手法の効果と今後の方針について議論する。

1 Introduction

スーパーカミオカンデ (SK) は、岐阜県神岡町の地下 1000m に位置する水チェレンコフ検出器で、約 5 万トンの超純水と約 11,000 本の光電子増倍管から構成される。1996 年の運転開始以来、陽子崩壊やニュートリノ振動の観測など、多くの解析が行われてきた。

陽子崩壊は多くの大統一理論 (GUT) で予言され [1]、標準理論を超える物理の重要な手がかりである。中でも代表的な $p \to e^+\pi^0$ 過程には、$\tau/B(p \to e^+\pi^0) > 2.4 \times 10^{34}$ 年という世界最高の寿命下限が得られている [2]。

一方、超対称性大統一理論 (SUSY-GUTs) では $p \to \bar{\nu}K^+$ が有力な崩壊過程として予言されている [3]。ヒッグス粒子の発見以降、スフェルミオン質量やフレーバー混合を考慮した高スケール SUSY モデルの再検討が進められている [5]。SK ではこの過程の探索でも信号は観測されておらず、寿命の下限は $\tau/B(p \to \bar{\nu}K^+) > 8.2 \times 10^{33}$ 年の制限が得られている [6, 8]。従来手法では、複数の物理量に基づく背景低減が行われてきたが、検出効率には限界がある [7, 8]。そこで本研究では、機械学習による新たな手法により識別性能と検出感度の向上を目指す。

2 Methods

本研究では、$p \to \bar{\nu}K^+$ 過程において、検出器で直接観測できない ν および K^+ の代わりに、K^+ の崩壊に伴う粒子の特徴を用いて信号事象の識別を行う。

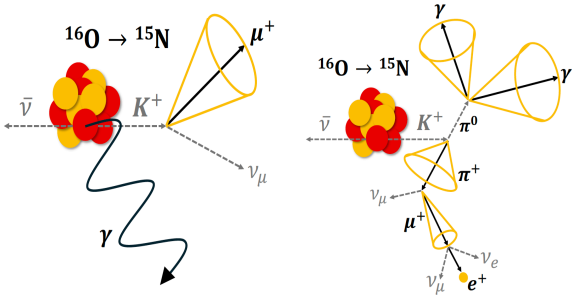


図 1: K^+ の崩壊過程。右:$K^+ \to \mu^+\nu_\mu$。左:$K^+ \to \pi^+\pi^0$。

K^+ の代表的な崩壊過程は主に 2 つあり (図 1)、1 つ目は $K^+ \to \mu^+\nu_\mu$(分岐比: 約 64%) 過程である [4]。この過程に続いて生じる μ^+ の崩壊電子も重要な手がかりとなる。加えて、陽子崩壊直後に原子核の脱励起により放出される即時的な 6 MeV の γ 線が約 40% の確率で放出され、これも信号判別に有効である。

2 つ目が $K^+ \to \pi^+\pi^0$(分岐比: 約 21%) 過程であ

る [4]。π^0 は即座に 2 つの γ に崩壊し、それぞれが電磁シャワーとしてリングを形成する。π^+ は崩壊して μ^+ を生成し、さらにその崩壊電子も検出される。

本解析では、$K^+ \to \mu^+\nu_\mu$ 過程を対象に検出効率を評価した。従来は、μ^+ の信号時刻を基準に、直前に放出された即時的 γ 線を探索する手法が用いられてきた。これは、K^+ 崩壊後の脱励起 γ 線の検出を通じて、K^+ 崩壊事象と他の事象を区別するためである。具体的には、μ^+ 信号の開始時刻から、12 ns の時間窓を過去に向かってスライドさせて、時間窓内のヒット数が最大となるところを γ 線の候補とする。μ^+ および γ 線の信号には、それぞれピーク時刻 t_μ と t_γ が対応付けられている (図 2)。

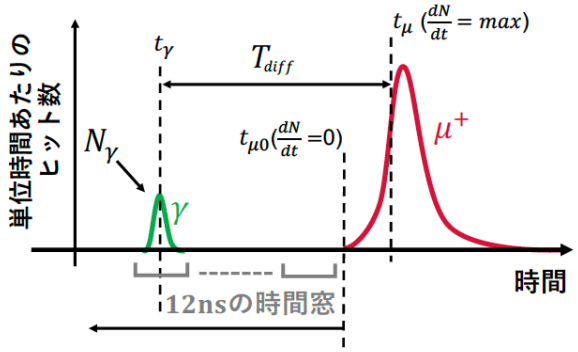


図 2: $K^+ \to \mu^+\nu_\mu$ 過程における変数の定義。

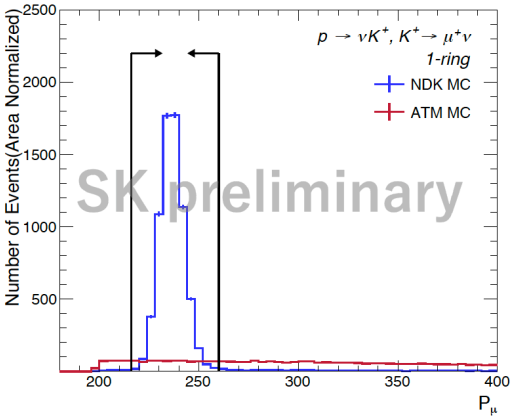


図 3: 単一 μ^+ の運動量分布。黒線範囲は、従来の解析の信号領域範囲は $215 < P_\mu < 260$ MeV/c。信号事象 (青)、背景事象 (赤)。

従来の事象選別では、μ^+ の運動量 P_μ(図 3) や γ 線のヒット数 N_γ(図 4) などの物理量が用いられてきた。本研究では、これらの量を入力変数とする変数指向型の機械学習手法 (Boosted Decision Tree: BDT) を導入し、識別器を構築することで識別性能および検出効率の改善を図った。

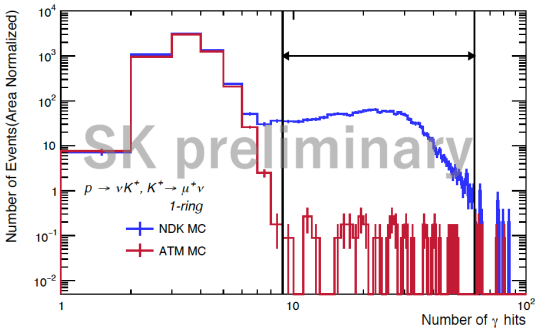


図 4: μ^+ の運動量分布カット後の脱励起 γ 線候補のヒット数分布。黒線範囲は、従来の解析の信号領域範囲は $8 < N_\gamma$(Number of γ hits) < 60。低領域のところはダークノイズによるピーク。信号事象 (青)、背景事象 (赤)。

3 Results

信号および背景事象 (50 年相当) のモンテカルロシミュレーション (MC) を用いて、学習用とテスト用のサンプルを作成した (表 1)。学習に用いる MC サンプルについては、背景事象を極力除去するため、以下の事前選択条件を課した：

- K^+ から放出されるリングが 1 つであること
- そのリングが μ^+ リングに由来していること
- 崩壊電子を 1 個伴うイベントであること

これらの条件を満たす事象を選択対象とした。

表 1: トレーニングとテストで用いた信号と背景事象 MC サンプルの事象数。

	Training	**Test**	**All**
Signal MC	30000	9135	39135
Background MC	30000	30984	60984

図 5 に示すように、BDT 識別出力では、信号事象と背景事象が明確に分離された。また、出力の閾値を変化させた時の、信号検出効率と背景除去効率の関係を図 6 に示す。従来のカットベース手法において、背景事象率 $0.00245 \pm 0.00173\%$ に対する信号検出効率は $18.3 \pm 0.1\%$ であった (図 7)。一方、同じ背景事

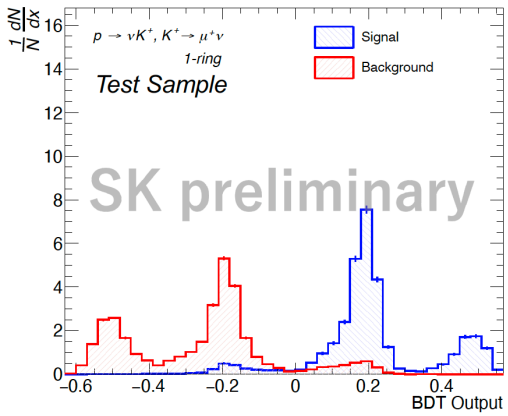


図 5: テストサンプルによる BDT 識別出力分布。信号事象 (青)、背景事象 (赤)。

象率に対する BDT の信号検出効率は $18.8 \pm 0.4\%$ となった (図 7)。以上の結果から、BDT は従来手法と比較してわずかに検出効率の向上が確認された。

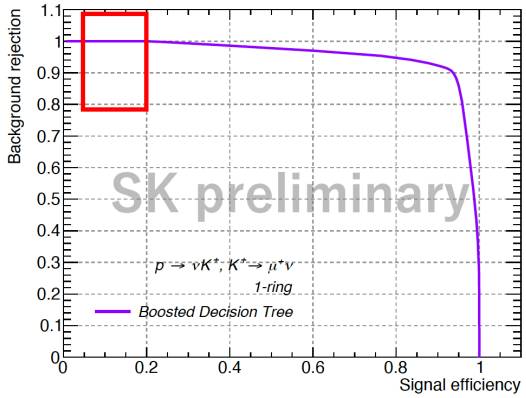


図 6: BDT による信号検出効率と背景事象低減率。

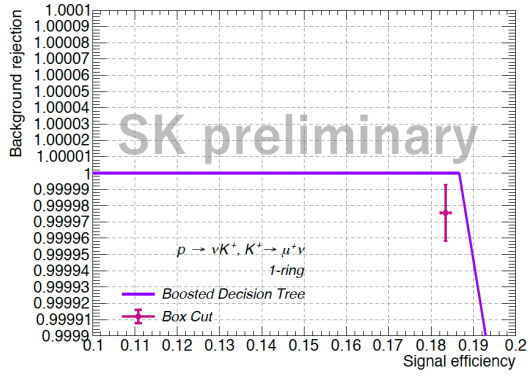


図 7: BDT による信号検出効率と背景事象低減率。図 6 の赤枠内の拡大。従来のカットベース手法との比較。BDT 手法 (紫)、カットベース手法 (マゼンタ)。

4 Discussion

今回の BDT 手法では、カットベース手法と比較して顕著な検出効率改善に至らなかった。その要因として、主に以下の 3 点が考えられる。

1 つ目は、従来のカットベース手法がすでに高い精度で背景事象を抑制しており、識別性能がすでに高い水準にあり、BDT によるさらなる改善が困難であった可能性がある。

2 つ目に、BDT の学習に用いた背景事象の MC サンプル数が 50 年分と比較的少なく、十分な統計量に基づく学習が困難であったことである。これが学習精度に影響を与え、識別性能の向上が限定的となった可能性がある。

3 つ目は、変数として用いた γ 線のヒット数 N_γ に手法上の制約がある点である。現在の解析では、N_γ は μ^+ 信号の主要ピークの立ち上がり時点よりも前の時間領域で探索されており、μ^+ 信号の立ち上がり時点より後に出現する γ 線信号は捉えられない。これにより、真の即時的な γ 線であっても検出されない可能性があり、探索時間窓の制限によって N_γ の識別力が十分に発揮されていないと考えられる。

5 Conclusion & Prospects

従来の物理量を機械学習の入力変数として用い、BDT による信号識別性能を評価した。その結果、従来のカットベース手法と比べて検出効率はわずかに向上したが、顕著な改善には至らなかった (図 7)。

要因の一つは、μ^+ 信号と即時的 γ 線の出現時刻差が小さい場合、γ 線のヒットが μ^+ 信号に埋もれてしまい、N_γ の検出効率が著しく低下する点である。実際、図 8 に示すように、真の即時的 γ 線を伴う全事象数 (青) と、従来の手法で取得された事象数 (赤) を比較すると、収集効率は約 40%にとどまっており、多くの γ 線が見逃されている。これは、$K^+ \to \mu^+\nu_\mu$ 崩壊過程において選別条件などを工夫することで、さらなる検出効率の向上が可能であることを示している。

今後の展望として、BDT については、背景事象の MC サンプル数が 50 年分と比較的少なく、十分な統計量に基づく学習が困難であったことが識別性能向上の制約となった可能性がある。今後は、より大規

模な背景事象の統計サンプルを用いて、識別性能の再評価を行う。

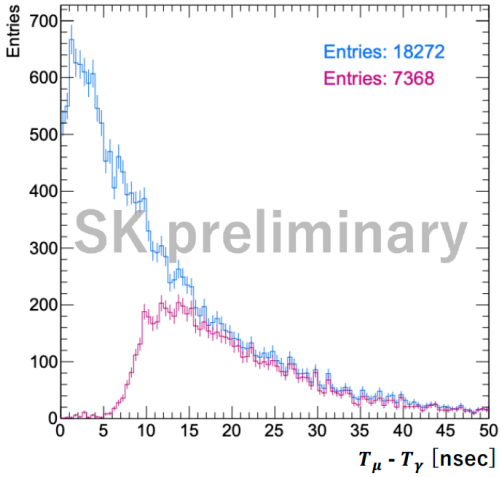


図 8: 真の即時的な脱励起 γ 線の検出数。横軸は μ^+ と γ 線の真の時間差。真の γ 線を伴う全事象数 (青) と、従来の解析精度で取得できる真の γ 線を伴う事象数 (赤) の比較分布。

さらに識別性能を抜本的に向上させるため、従来の即時的 γ 線に基づく変数を用いない新たな手法として、電荷および時間情報から再構成されたリングイメージ (図 9) を入力とする、畳み込みニューラルネットワーク (Convolutional Neural Network: CNN) による画像ベースの解析も進めている。また、$K^+ \to \pi^+\pi^0$ 崩壊過程に対しても、同様に BDT および CNN の適用を予定している。

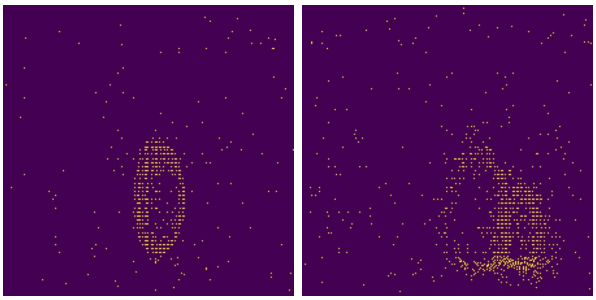


図 9: 陽子崩壊事象の K^+ の崩壊過程粒子におけるリングイメージ。右: $K^+ \to \mu^+\nu_\mu$ 過程。左 $K^+ \to \pi^+\pi^0$ 過程。

Acknowledgement

本研究を行うにあたり、Local NDK および ATMPD グループをはじめとする Super-Kamiokande 共同研究者の皆様には、日頃から会議等において貴重なご議論やご指摘をいただき、心より感謝申し上げます。また、本夏の学校の開催にあたり、企画・運営にご尽力いただいた関係者の皆様に、心より感謝申し上げます。

Reference

[1] H. Georgi and S. L. Glashow, Unity of All Elementary-Particle Forces, *Phys. Rev. Lett.* **32**, 438-441 (1974). https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.32.438

[2] A. Takenaka *et al.* (Super-Kamiokande Collaboration), Search for proton decay via $p \to e^+\pi^0$ and $p \to \mu^+\pi^0$ with an enlarged fiducial volume in Super-Kamiokande I–IV, *Phys. Rev. D* **102**, 112011 (2020). https://doi.org/10.1103/PhysRevD.102.112011

[3] S. Dimopoulos, S. Raby, and F. Wilczek, PROTON DECAY IN SUPERSYMMETRIC MODELS, *Phys. Lett. B* **112**, 133-136 (1982). https://doi.org/10.1016/0370-2693(82)90313-6

[4] Particle Data Group, Review of Particle Physics, *Phys. Rev. D* **110**, 030001 (2024). https://doi.org/10.1103/PhysRevD.110.030001

[5] N. Nagata and S. Shirai, Sfermion flavor and proton decay in high-scale supersymmetry, *J. High Energy Phys.* **2014**, 049 (2014). https://doi.org/10.1007/JHEP03(2014)049

[6] S. Mine, Nucleon Decay: Theory and Experimental Overview, *Zenodo* (2024). https://doi.org/10.5281/zenodo.10493165

[7] K. Abe *et al.* (Super-Kamiokande Collaboration), Search for proton decay via $p \to \nu K^+$ using 260 kiloton·year data of Super-Kamiokande, *Phys. Rev. D* **90**, 072005 (2014). https://doi.org/10.1103/PhysRevD.90.072005

[8] M. Miura, Nucleon Decay Searches in Super-Kamiokande and Hyper-Kamiokande, *BLV2019*, (2019).

——index へ戻る

SP-27

長さの最小値を持つ (2+1) 次元レギュラーブラックホール時空と測地線の構造

東京学芸大学
井上　拓人

長さの最小値を持つ (2+1) 次元レギュラーブラックホール時空と測地線の構造

井上 拓人 (東京学芸大学大学院 教育学研究科 物理学教室)
共著者 小林 晋平 (東京学芸大学 教育学部 自然科学系 基礎自然科学講座)

Abstract

ブラックホールの中心には、既知の物理法則が破綻する特異点が存在すると予測されている。この問題へのアプローチとして、特異点を持たないレギュラーブラックホールが提案され、近年注目を集めている。しかし、ブラックホール内部は直接観測できないため、その物理的性質は、外部を運動する光や粒子の測地線を通じて調べられる。本研究では、Jusufi によって提案された、長さの最小値を持つ (2+1) 次元レギュラーブラックホール時空 [3] における測地線について検討した。その結果、測地線方程式の解析解を求めることに成功し、軌道構造の分類を行った。

1 Introduction

ブラックホールは高密度で非常に重力が強い天体であり、中心には物質の密度や、時空の曲がり具合を表す曲率が無限大に発散してしまう特異点があると考えられている。この点では物理法則が破綻してしまうため、この問題を回避するべく一般相対性理論の枠組みの中で特異点を回避したブラックホールが研究されている。これらを総称してレギュラーブラックホールという。

ブラックホールは光すら脱出することができないホライゾンと呼ばれる境界を持つため、ブラックホールの内部構造を直接観測することは出来ない。そこで、その物理的特性を見るためにホライゾンの外側を運動する光や星などの軌跡を解析するという手法が用いられる。一般的に、自由粒子の軌跡は測地線と呼ばれ、測地線方程式で記述される。測地線方程式は非線形の複雑な偏微分方程式であるため、数値計算で解くことも多い。しかし解析解を求めることが出来れば、関数の性質から軌跡の詳細な議論が出来るという利点がある。

本研究では (2+1) 次元時空でのブラックホールを対象とした。(2+1) 次元の重力理論は (3+1) 次元と同様の性質を持ち、また自由度が低いため計算が単純になることが多い。つまり、比較的簡単な計算から大域的な重力の本質を知ることができるモデルとなる。この時空は自由度が低いため局所的な引力が存在しないが、Bañados らによって負の宇宙項があればブラックホール解 (以下、BTZ ブラックホール) が存在することがわかった [1]。

この流れの中で、本研究では、ある種の (2+1) 次元レギュラーブラックホール時空における測地線について考察した。その結果、我々は測地線方程式の解析解を求めることに成功し、その構造を分類することにも成功した。以下、本稿では $c = G = 1$ の単位系を用いる。

2 BTZ Black Hole

Cruz らは BTZ ブラックホールの周りを運動する光と粒子の測地線方程式の解析解を求めた [2]。その時空を表す線素は、

$$\begin{aligned} ds^2 =& -\tilde{f}(r)dt^2 + \tilde{f}(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\phi^2 \\ \tilde{f}(r) =& -M + \frac{r^2}{l^2} \end{aligned} \tag{1}$$

である。ただし、M はブラックホールの質量、l は時空の曲率半径である。E と L を光のエネルギーと角運動量とし、$r = 1$ がホライゾンの位置になるよう、

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \frac{r}{l\sqrt{M}}, \quad \hat{\phi} = \phi\sqrt{M}, \quad \hat{t} = \frac{\sqrt{M}}{l}t \\ \hat{\lambda} &= \frac{\lambda}{l}, \qquad \hat{E} = \frac{E}{\sqrt{M}}, \quad \hat{L} = \frac{L}{l\sqrt{M}} \end{aligned} \tag{2}$$

と無次元化すると、測地線方程式は以下のように書ける。

$$r^2\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = -\varepsilon r^4 + \alpha^2 r^2 + \beta \tag{3}$$

ここで、$\alpha^2 = E^2 - L^2$、$\beta = L^2$、λ はアフィンパラメータであり、hat 付きの量を改めて hat 無しで定義した。また、ε を以下のように定義した。

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & (\text{timelike}) \\ 0 & (\text{null}) \end{cases} \tag{4}$$

式 (3) より、BTZ ブラックホールでの光 ($\varepsilon = 0$) の測地線は以下のように場合分けされる。

$$r^2(\lambda) = \begin{cases} \alpha^2(\lambda - \lambda_0)^2 - \frac{\beta}{\alpha^2} & (\alpha^2 \neq 0,\ \beta \neq 0) \\ 2\sqrt{\beta}(\lambda - \lambda_0) & (\alpha^2 = 0,\ \beta \neq 0) \\ \text{const.} & (\alpha^2 = 0,\ \beta = 0) \end{cases} \tag{5}$$

ただし、λ_0 は積分定数である。

粒子 ($\varepsilon = 1$) の場合、測地線方程式の解析解は以下のように書ける。

$$r^2(\lambda) = \frac{1}{2}\left[\alpha^2 + \gamma \sin\left(2\left(\lambda - \lambda_0\right)\right)\right] \tag{6}$$

ただし、$\gamma = \sqrt{4\beta + \alpha^2}$ である。

3 Jusufi's Black Hole

次に、(2+1) 次元におけるレギュラーブラックホールを考える。Jusufi は、長さの次元を持つパラメータ l_0 を導入して時空に最小長さを考え、(2+1) 次元の重力ポテンシャルを以下のように変更した。

$$\Phi(r) = M \ln \sqrt{r^2 + {l_0}^2} \tag{7}$$

式 (7) の下でアインシュタイン方程式を解くと、この時空の線素が以下のように得られる [3]。

$$\begin{aligned} ds^2 =& -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\phi^2 \\ f(r) =& -\frac{Mr^2}{r^2 + {l_0}^2} + \frac{r^2}{l^2} \end{aligned} \tag{8}$$

この線素は $l_0 \to 0$ とすることで BTZ ブラックホールの線素と一致する。時空の曲率を表す量のひとつであるクレッチマン不変量は $r \to 0$ の極限で

$$\lim_{r\to 0} R_{\mu\nu\sigma\rho}R^{\mu\nu\sigma\rho} = \frac{12M^2}{{l_0}^4} - \frac{24M}{{l_0}^2 l^2} + \frac{12}{l^4} \tag{9}$$

であり、この値が発散しないことから、確かに曲率特異点を持たないことが分かる。

4 Analytical Solution of Geodesic Equations

式 (8) の線素で表される時空における測地線方程式は、以下のようになる。

$$\begin{aligned} &\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = E^2 - V_{\text{eff}}^2(r), \quad \frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{L}{r^2}, \quad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{f(r)} \\ &V_{\text{eff}}^2(r) = \left(-\frac{r^2}{r^2 + {l_0}^2} + r^2\right)\left(\varepsilon + \frac{L^2}{r^2}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

ただし、無次元化として (2) に加えて $\hat{l}_0 = l_0/l\sqrt{M}$ を導入し、hat 付きを改めて hat 無しで定義した。ここで $V_{\text{eff}}^2(r)$ は有効ポテンシャルであり、このポテンシャルを用いることで光や星の運動の定性的な振る舞いを考えることができる。

4.1 null case

図 1 に示した有効ポテンシャルの概形から分かるように、光は $E^2 \geq L^2$ のとき無限遠方に飛び去ることができ (escapable)、$E^2 < L^2$ のとき必ずブラックホールに入るようになる (inescapable)。ここで、ちょうど $E^2 = L^2$ を critical と呼ぶことにする。この三つの場合それぞれで測地線方程式は解析的に解け、解は以下のようになる。

$\cdot\, \alpha^2 = 0$ (critical) のとき

$$\lambda(r) = \pm\frac{1}{2L}\left(r\sqrt{r^2 + {l_0}^2} + {l_0}^2 \ln\left|\sqrt{r^2 + {l_0}^2} + r\right|\right) + \text{const.} \tag{11}$$

$$\phi(r) = -\frac{\sqrt{r^2 + {l_0}^2}}{r} + \ln\left|\sqrt{r^2 + {l_0}^2} + r\right| + \text{const.} \tag{12}$$

$\cdot\, \alpha^2 > 0$ (escapable) / $\alpha^2 < 0$ (inescapable) のとき

$$\lambda(r) = \pm\frac{l_0}{\alpha}\left(F(\arcsin y, k^2) - E(\arcsin y, k^2) + \frac{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}{y}\right) + \text{const.} \tag{13}$$

$$\phi(r) = \pm\frac{bL}{\alpha}\, E\left(i\log\left(\sqrt{1-z} - i\sqrt{z}\right), b^2{l_0}^2\right) + \text{const.} \tag{14}$$

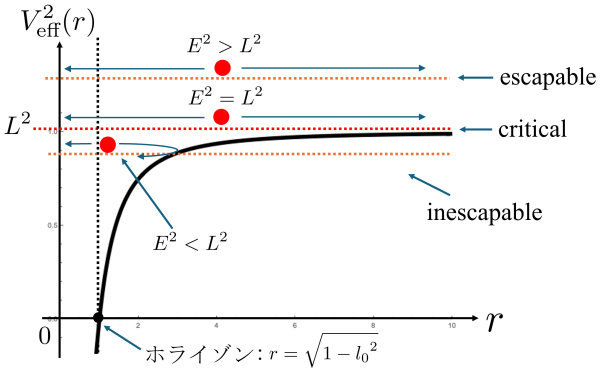


図 1: 光の有効ポテンシャル

ただし、

$$\alpha^2 = E^2 - L^2, \quad y = \sqrt{\frac{{l_0}^2}{r^2 + {l_0}^2}}, \quad k^2 = -\frac{L^2}{{l_0}^2\alpha^2}$$
$$z = -\frac{1}{b^2 r^2}, \quad b = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 {l_0}^2 + L^2}} \tag{15}$$

であり、$F(\phi, k^2)$、$E(\phi, k^2)$ はそれぞれ以下に示す第 1 種、第 2 種の不完全楕円積分である。

$$F(\phi, k^2) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}} \tag{16}$$
$$E(\phi, k^2) = \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}\, d\theta \tag{17}$$

l_0 の値を変化させたときの軌跡のプロットを図 2〜4 に示す.

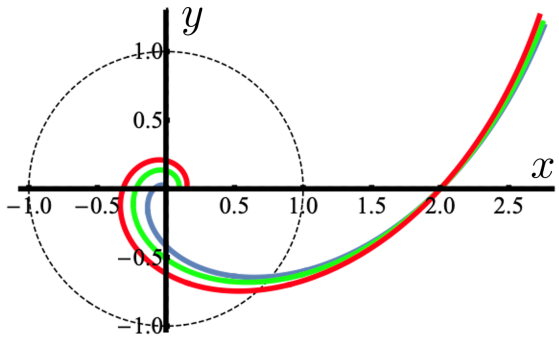


図 2: $\alpha^2 = 0$ の場合 $(L = 1, E = 1)$ の光の軌跡. BTZ(青), $l_0 = 0.5$(緑), $l_0 = 0.9$(赤), 破線は BTZ ブラックホールのホライゾンを表す.

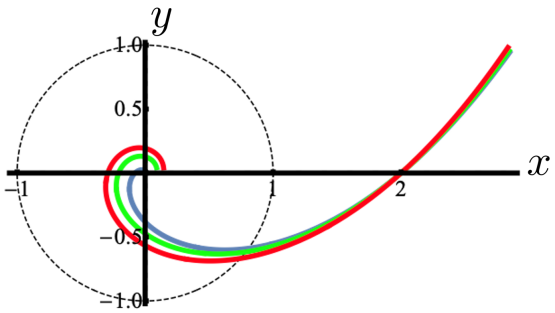


図 3: $\alpha^2 > 0$ の場合 $(E = \sqrt{1.1}, L = 1)$ の光の軌跡. BTZ(青), $l_0 = 0.5$(緑), $l_0 = 0.9$(赤), 破線は BTZ ブラックホールのホライゾンを表す.

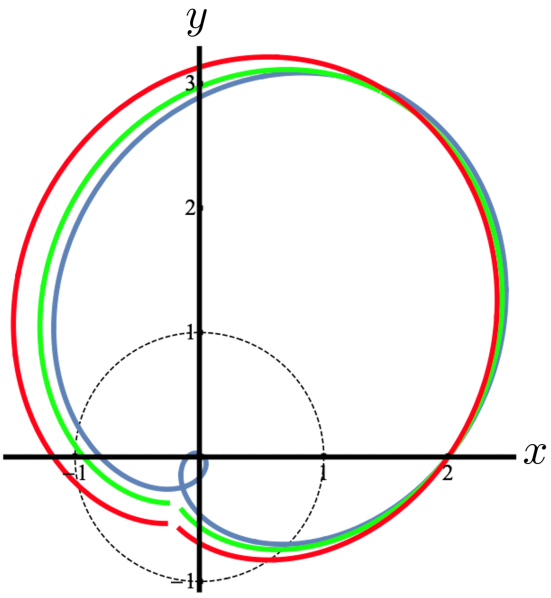


図 4: $\alpha^2 < 0$ の場合 $(E = 1, L = \sqrt{1.1})$ の光の軌跡. BTZ(青), $l_0 = 0.5$(緑), $l_0 = 0.9$(赤), 破線は BTZ ブラックホールのホライゾンを表す.

いずれの場合も、l_0 が 0 に近づくほど BTZ ブラックホールの解析解に近づいていることが確認できる。

解析解の数値解との比較を図 5、図 6 に示す。いずれの場合も、数値解と解析解の大まかな振る舞いが一致していることが分かる。しかし、数値解はホライゾン近傍や無限遠において解析解からのずれが大きくなることが知られている。そのため、ホライゾン近傍や無限遠での光の運動の様子を調べるには解析解がより適切である。

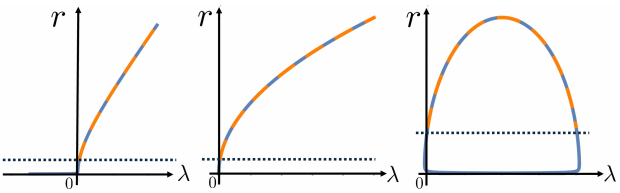


図 5: 解析解 (青) と数値解 (橙) を比較した図。$\alpha^2 > 0$ (左)、$\alpha^2 = 0$ (中央)、$\alpha^2 < 0$ (右)。破線はホライゾンを表す。

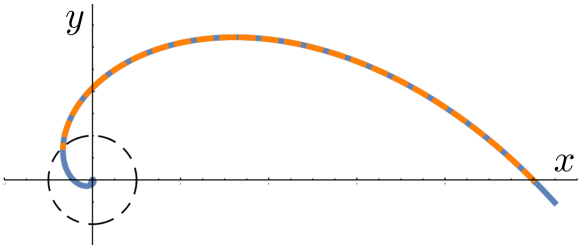


図 6: $\alpha^2 = 0$ の場合の光の軌跡。解析解 (青)、数値解 (橙)、破線はホライゾンを表す。

4.2 timelike case

図 7 に示した有効ポテンシャルの概形より、いかなるエネルギーの値でも粒子はブラックホールから脱出することが出来ない。粒子の場合も測地線方程式は解析的に解け、解は以下のように表せる。

$$\lambda(r) = \pm \frac{{l_0}^2}{\sqrt{\beta^2\left(r_1^2 + {l_0}^2\right)}} \Pi\left(\frac{r_1^2}{r_1^2 + {l_0}^2}, \arcsin\sqrt{\frac{\left(r_1^2 + {l_0}^2\right) r^2}{r_1^2\left(r^2 + {l_0}^2\right)}}; \frac{r_1^2\left(\beta^2 - {l_0}^2\right)}{\beta^2\left(r_1^2 + {l_0}^2\right)}\right) + \text{const.} \tag{18}$$

ただし、

$$r_1^2 = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4d}}{2}, \quad \beta^2 = \frac{-k + \sqrt{k^2 + 4d}}{2}$$
$$k = E^2 - L^2 + r_h^2, \quad d = E^2 {l_0}^2 + L^2 r_h^2 \tag{19}$$

であり、$\Pi(n, \phi; m)$ は以下に示す第 3 種の不完全楕円積分である。

$$\Pi(n, \phi; m) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\left(1 - n\sin^2\theta\right)\sqrt{1 - m\sin^2\theta}} \tag{20}$$

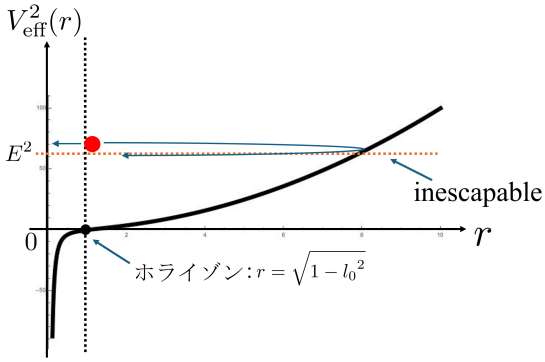


図 7: 粒子の有効ポテンシャル

5 Conclusion

本研究では、長さの最小値を導入した (2+1) 次元レギュラーブラックホール時空における光と粒子の測地線方程式を解析的に解き、それらは不完全楕円積分を用いて表せることが分かった。

Acknowledgement

今回発表の場として、天文・天体物理若手夏の学校を設営・運営して下さったスタッフの方々、そして支援して下さった方々に心より感謝申し上げます。またこの研究を進めるにあたり、手厚いご指導をしてくださった東京学芸大学小林晋平教授、納得がいくまで議論に付き合ってださった研究室の先輩方・同期の皆様に深く感謝申し上げます。

参考文献

[1] Bañados *et al.*, "The black hole in three dimentional spacetime", Phys. Rev. Lett. **69** (1992) 1849.

[2] Cruz *et al.*, "Geodesic structure of the 2+1 black hole", Class. Quantum Grav. **11** (1992) 2731.

[3] Jusufi, "Regular black holes in three dimentions and the zero point length", arXiv:2209.04433, (2022)

——index へ戻る

SP-28

Schwarzschild 時空における測地線方程式の可積分性を保持した差分化

東京学芸大学
真崎　琉維

Schwarzschild 時空における測地線方程式の可積分性を保持した差分化

真崎 琉維 (東京学芸大学 大学院 教育学研究科 物理学教室)
共著者　小林 晋平 (東京学芸大学 教育学部 自然科学系 基礎自然科学講座)

Abstract

本研究では、Schwarzschild ブラックホール時空における測地線方程式に対して双線形化法という方程式の可積分性を保つことのできる方法を用いて差分化を行い、離散的な時空構造における粒子および光の運動について解析を行うことによってこの差分化の方法の有用性を調査した。双線形化法によって得られた差分方程式は、差分間隔が比較的大きい場合でも元の連続の微分方程式の結果を再現し、相対性理論から導かれる結果と整合性があることが確かめられた。

1 Introduction

初期宇宙やブラックホールの内部など高エネルギーな領域では、量子力学と相対性理論を合わせた量子重力理論を考え、時空を量子化する必要がある。量子重力理論の候補として、弦理論やループ重力理論、因果的動的単体分割など数多くの理論が提案されているが、現在のところ、決定的なものは存在していない [1]。時空を量子化すると、量子力学におけるエネルギー準位などと同様に、時空自体が離散的になる可能性があるが、その離散化の方法についてはまだ分かっていない。本研究では、こうした時空量子化の足掛かりとして静的球対称なブラックホールである Schwarzschild ブラックホールの周りで、自由粒子の運動の軌跡を表す測地線方程式を離散化した。離散化の方法はいくつも存在するが、今回は、可積分性という対称性を保った差分化を行うことによって方程式を離散化し、連続極限で元の微分方程式に一致するようにした。以下、本稿では $c = G = 1$ の単位系を用いる。

2 Bilinear difference operator

微分方程式の微分 df/dt を差分に置き換えることを差分化といい、これによって得られる方程式を差分方程式という。差分の一つに、以下で定義される中心差分がある。

$$\begin{aligned}\Delta_t f(t) &= \delta^{-1}\left\{\exp\left(\frac{\delta}{2}\frac{d}{dt}\right) - \exp\left(-\frac{\delta}{2}\frac{d}{dt}\right)\right\} f(t) \\ &= \delta^{-1}\left\{f\left(t+\frac{\delta}{2}\right) - f\left(t-\frac{\delta}{2}\right)\right\} \qquad (1)\end{aligned}$$

また、測地線方程式のような非線形微分方程式の差分化には、以下で表される双線形微分演算子 D_t^m が有用である。

$$D_t^m a(t)\cdot b(t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}\right)^m a(t)b(t')\bigg|_{t'=t} \qquad (2)$$

ここで、m は整数で、微分の階数に対応する。さらに、新たに指数型双線形演算子を以下で定義する。

$$\begin{aligned}\exp(\delta D_t)a(t)\cdot b(t) &= \exp\left(\delta\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}\right)\right) a(t)\cdot b(t')\bigg|_{t'=t} \\ &= a(t+\delta)b(t-\delta) \qquad (3)\end{aligned}$$

これにより、式 (1) の中心差分の定義の d/dt を指数型双線形演算子に置き換えることができ、D_t^m で $m = 1$ とした双線形微分演算子 D_t の差分化、すなわち双線形差分演算子 Δ_t が以下のように求められる。

$$\begin{aligned}&\Delta_t a(t)\cdot b(t) \\ &= \delta^{-1}\left\{\exp\left(\frac{\delta}{2}D_t\right) - \exp\left(-\frac{\delta}{2}D_t\right)\right\} a(t)\cdot b(t) \\ &= \delta^{-1}\left\{a\left(t+\frac{\delta}{2}\right)b\left(t-\frac{\delta}{2}\right) - a\left(t-\frac{\delta}{2}\right)b\left(t+\frac{\delta}{2}\right)\right\} \qquad (4)\end{aligned}$$

3 Geodesic equations in the Schwarzschild BH spacetime

Schwarzschild ブラックホールは (3+1) 次元時空における静的球対称なブラックホールであり、その時空の曲がりを表す線素は極座標上では $\Omega_{(2)}^2$ を立体角

として

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_{(2)}^2, \quad (5)$$

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} \quad (6)$$

と表される。ここで、M はブラックホールの質量である。この時空が持つ対称性に由来する保存量を用いて測地線方程式を求め、微分して整理すると、式 (7) が得られる。

$$\frac{d^2r}{d\phi^2} = \alpha r^3 + \beta r^2 + \gamma r + \xi \quad (7)$$

ここで、$\gamma = -1$、$\xi = M$ であり、また、α、β は光、粒子の場合でそれぞれ以下で与えられる。

$$\begin{cases} \alpha = (\mathcal{E}^2 - 1)/\mathcal{L}^2,\ \beta = 2M/\mathcal{L}^2 & (\text{粒子}) \\ \alpha = \mathcal{E}^2/\mathcal{L}^2, \qquad \beta = 0 & (\text{光}) \end{cases} \quad (8)$$

ここで、$\mathcal{E}$ はエネルギー、$\mathcal{L}$ は角運動量を表している。本研究では、この測地線方程式の差分化を行った。

4 Discretization of the geodesic equations

非線形微分方程式の可積分性を保った差分化の方法として、双線形化法という方法が知られている [2]。本研究ではこの方法を用いて測地線方程式の差分化を行った。

双線形化法は次の三つの手順で行われる。

1. 変数変換 $r(\phi) = g(\phi)/f(\phi)$ により g と f の同次方程式（双線形微分方程式）を得る双線形化
2. 双線形微分方程式の差分化
3. 変数変換 $g(\phi) = r(\phi)f(\phi)$ による逆変換

このとき、双線形微分方程式は任意関数 $h(\phi)$ を用いた変換 $g \to gh$、$f \to fh$（この変換をゲージ変換という）の下に不変である必要があり、そのゲージ不変性を保った差分化を選ばなくてはならない。

まず、手順 1 の双線形化を行う。式 (7) において $r = g/f$ と変数変換し、双線形微分演算子 D_ϕ^2 を用いて表すと以下のようになる。

$$f(D_\phi^2 g \cdot f - \beta_1 g^2 - \gamma_1 gf - \xi f^2) = g(D_\phi^2 f \cdot f + \alpha g^2 + \beta_2 gf + \gamma_2 f^2) \quad (9)$$

ここで、β_1、β_2、γ_1、γ_2 はそれぞれ $\beta_1 + \beta_2 = \beta$、$\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$ を満たす任意の定数である。したがって、任意関数 $\rho(\phi)$ を用いることで次の双線形微分方程式が得られる。

$$\begin{cases} D_\phi^2 g \cdot f - \beta_1 g^2 - \gamma_1 gf - \xi f^2 = \rho gf \\ D_\phi^2 f \cdot f + \alpha g^2 + \beta_2 gf + \gamma_2 f^2 = \rho f^2 \end{cases} \quad (10)$$

ここで、適当なゲージ h を選ぶことで、式 (10) の右辺を 0 にできる。以下ではそのようなゲージを選ぶことにする。

次に、手順 2 の式 (10) の差分化を行う。D_ϕ^2 を Δ_ϕ^2 に置き換えただけではゲージ不変性が保持されない。そこで、引数を調整して次のゲージ不変な差分方程式を得る。

$$\begin{cases} \Delta_\phi^2 g(\phi) \cdot f(\phi) - \beta_1 g(\phi+\delta)g(\phi-\delta) \\ \quad -\frac{\gamma_1}{2}\{g(\phi+\delta)f(\phi-\delta) + g(\phi-\delta)f(\phi+\delta)\} \\ \quad\quad -\xi f(\phi+\delta)f(\phi-\delta) = 0 \\ \Delta_\phi^2 f(\phi) \cdot f(\phi) + \alpha g(\phi+\delta)g(\phi-\delta) \\ \quad +\frac{\beta_2}{2}\{g(\phi+\delta)f(\phi-\delta) + g(\phi-\delta)f(\phi+\delta)\} \\ \quad\quad +\gamma_2 f(\phi+\delta)f(\phi-\delta) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

さらに、手順 3 の逆変換を行う。式 (11) において $g = rf$ と逆変換して整理すると、次の差分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \Delta_\phi^2 r(\phi) =& \alpha r(\phi+\delta)r(\phi)r(\phi-\delta) + \beta_1 r(\phi+\delta)r(\phi-\delta) \\ &+ \frac{\beta_2}{2}\{r(\phi+\delta) + r(\phi-\delta)\}r(\phi) \\ &+ \frac{\gamma_1}{2}\{r(\phi+\delta) + r(\phi-\delta)\} + \gamma_2 r(\phi) + \xi \end{aligned} \quad (12)$$

最後に、$\phi = \delta \cdot n$、$r(\phi) = r_n$ として整理すると式 (12) は

$$r_{n+1} = \frac{(2 + \gamma_2\delta^2)r_n + \xi\delta^2 + r_{n-1}\left(\frac{\beta_2}{2}\delta^2 r_n + \frac{\gamma_1}{2}\delta^2 - 1\right)}{1 - \frac{\beta_2}{2}\delta^2 r_n - \frac{\gamma_1}{2}\delta^2 - r_{n-1}(\alpha r_n + \beta_1)\delta^2} \quad (13)$$

と書ける。この差分方程式は Quispel-Robert-Tompson 系とよばれ、これは可積分な 2 階差分方程式の一般的な形式である [3]。このことから、Schwarzschild ブラックホール時空における測地線方程式の可積分性を保った差分化を得ることができたと言える。

$\beta_1 = \beta_2 = \beta/2$、$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma/2$、$\mathcal{L} = 2$ としたときの粒子の運動の軌跡を図 1、2 に、光の運動の軌跡を図 3 に示した。これらの図から、差分方程式の解が元の微分方程式の解をほとんど再現していることが分かる。ここで、図の原点にブラックホールが存在し、半径 1 の円形の破線はホライゾンを表している。

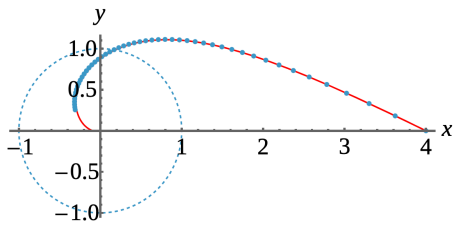


図 1: ブラックホールに吸い込まれる粒子の軌跡。連続（赤）、$\delta = 0.05$ rad（青）。($L = 2$、$E = \sqrt{2}$)

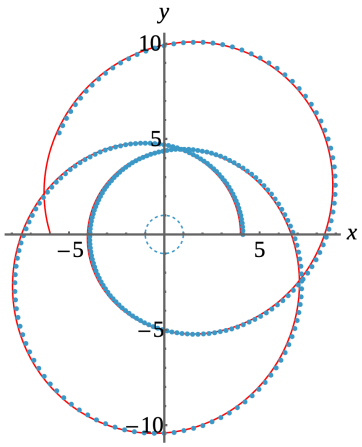


図 2: ブラックホールを周回する粒子の軌跡。連続（赤）、$\delta = 0.05$ rad（青）。($L = 2$、$E = \sqrt{0.9375}$)

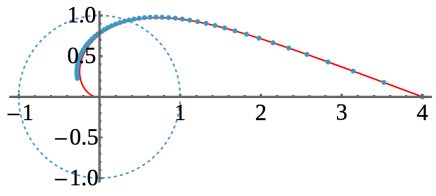


図 3: ブラックホールを周回する光の軌跡。連続（赤）、$\delta = 0.05$ rad（青）。($L = 2$、$E = \sqrt{0.9375}$)

5 Conclusion

今回は Schwarzschild ブラックホールの測地線方程式を可積分性を保って差分化し、元の微分方程式の解をほとんど再現するような差分方程式を得ることができた。しかし、双線形化法でのパラメータの決定方法については分からず、完全な再現にはならなかった。今後の展望としては、パラメータの決定方法を調べることに加え、時空の構造を表すアインシュタイン方程式の段階で差分化を行い、ブラックホール時空そのものの差分化や量子化を考えたい。

Acknowledgement

今回発表の場として、天文・天体物理若手夏の学校を設営・運営して下さったスタッフの方々、そして支援して下さった方々に心より感謝申し上げます。またこの研究を進めるにあたり、手厚いご指導をしてくださった東京学芸大学小林晋平教授、納得がいくまで議論に付き合ってださった研究室の先輩方・同期の皆様に深く感謝申し上げます。

Reference

[1] Carlip, “Dimension and dimensional reduction in quantum gravity”, Classical and Quantum Gravity **34** (2017) 193001.

[2] 広田良吾 and 高橋大輔, 『差分と超離散』共立出版 (2003)

[3] Quispel *et al.* , “Integrable mappings and soliton equations II”, Physica D: Nonlinear Phenomena **34** (1989) 183.

——index へ戻る

SP-29

強重力場下における量子波動関数の振る舞い

北里大学
井関　日奈子

強重力場下における量子波動関数の振る舞い

井関 日奈子 (北里大学大学院 理学研究科)
共著者　佐々木 伸 (北里大学)、塩沢 健太 (北里大学)

Abstract

これまでの量子論の発展は主に非相対論的な力学系や特殊相対性理論の枠組みに限定されており、重力の非線形な性質を取り込んだ量子論の定式化は依然として大きな課題として残されている。本研究では、DeWitt (1957) による量子論を一般相対性理論に拡張するための理論的枠組み [1] に基づき、Schwarzschild 計量から量子ハミルトニアンを構成し、曲がった空間の Schrödinger 方程式を導出した。また、この方程式を 3 次元自由粒子と水素原子模型に適用し、事象の地平面近傍での波動関数の振る舞いを評価することで、よく知られた量子力学系における強重力場が量子状態に及ぼす影響の解明を目指す。

1 Introduction

1.1 曲がった空間における運動量演算子

曲がった空間の量子力学の定式化において、運動量演算子 p_i は、空間の幾何構造を反映する形で与えられる必要がある。ここで座標演算子 q^i と運動量演算子 p_j の間に以下の正準交換関係が成り立つと仮定する。

$$[q^i, q^j] = 0, \quad [q^i, p_j] = i\hbar\delta^i_j, \quad [p_i, p_j] = 0.$$

座標固有状態 $|q', t\rangle$ は $q^i|q', t\rangle = q'^i|q', t\rangle$ を満たし、内積は計量の行列式 $g(q,t)$[1] により正規化される。このときデルタ関数は以下のように修正される。

$$\langle q'', t|q', t\rangle = g^{-\frac{1}{4}}(q'', t)\,\delta(q'' - q')\,g^{-\frac{1}{4}}(q', t).$$

このデルタ関数を用いて、交換関係 $[q^i, p_j] = i\hbar\delta^i_j$ の座標表示行列要素を計算し、エルミート性の条件を課すことで、p_j の座標表示は以下のように定まる。

$$\langle q'', t|p_j|q', t\rangle = -i\hbar\left[\frac{\partial}{\partial q''^j} + \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial q''^j}\ln g(q'', t)\right]\delta(q'' - q').$$

この表現は、波動関数 $\psi(q', t) = \langle q', t|\psi\rangle$ に作用する微分演算子として、以下の形で書き換えられる。

$$p_j = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial q'^j} + \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial q'^j}\ln g(q', t)\right). \tag{1}$$

[1] ここでは計量が時間 t の関数として扱われることを前提とする。

1.2 量子ハミルトニアンと幾何学的補正項

n 次元の曲がった空間を運動する非相対論的粒子のラグランジアンが以下のように表されるとする。

$$L = \frac{1}{2}g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j + a_i\dot{q}^i - V, \tag{2}$$

ここで g_{ij} は計量テンソルの空間成分、α_i, V はそれぞれベクトルポテンシャル、スカラーポテンシャルを表す。古典的ハミルトニアンはこれに対応するルジャンドル変換により

$$H = \frac{1}{2}g^{ij}(p_i - \alpha_i)(p_j - \alpha_j) + V, \tag{3}$$

として与えられる。これが g を含んでいるため、(3) 式を量子力学に拡張するためには非可換な演算子 $\hat{q}$ と $\hat{p}$ の順序付け問題を考慮する必要が出てくる。これを踏まえると波動関数に作用する微分演算子として量子ハミルトニアンは以下のように定義される。

$$\hat{H} \equiv \frac{1}{2}g^{-\frac{1}{4}}\,(p_i - \alpha_i)\,g^{\frac{1}{2}}g^{ij}\,(p_j - \alpha_j)\,g^{-\frac{1}{4}} + V. \tag{4}$$

このとき、ファインマンの量子化手法により古典的な作用 $S(q'', t''|q', t')$ と Van Vleck 行列式 $D(q'', t''|q', t')$ を用いて構成された変換関数が満たす Schrödinger 方程式を調べると、量子ハミルトニアンに追加補正項としてリッチスカラー $\mathcal{R}$ に比例する項が現れる。以上のような手続きにより最終的に量子ハミルトニアンは以下のように修正される[2]。

$$\hat{H}_\pm = \hat{H} \pm \frac{1}{12}\hbar^2\mathcal{R}. \tag{5}$$

[2] 量子ハミルトニアンには符号の取り方 $\pm$ に不定性が現れる。どちらも古典極限 $\hbar \to 0$ と矛盾しないことがわかっている。ここでは H_+ を採用する。

この補正項の存在は、曲がった空間における量子化において、幾何学的情報が量子的性質に影響を与えることを示唆する。

2 曲がった空間の Schrödinger 方程式

2.1 ハミルトニアンの計算

まず (1) 式の運動量演算子 $\hat{p}_i$ を以下のように書き換える。

$$\hat{p}_i = -i\hbar\left(\hat{A}_i + \frac{1}{4}B_i\right),\quad \hat{A}_i = \frac{\partial}{\partial x^i},\quad B_i = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^i}.$$

これを用いて (4) 式のハミルトニアンを展開していく。ここでは簡単のためにベクトルポテンシャル $\alpha_i = 0$ とする。

$$\begin{aligned}\hat{H}\psi &= \frac{1}{2}g^{-\frac{1}{4}}\hat{p}_i g^{\frac{1}{2}} g^{ij}\hat{p}_j g^{-\frac{1}{4}}\psi + V\psi \\ &= -\frac{\hbar^2}{2}g^{-\frac{1}{4}}\Big\{\hat{A}_i g^{\frac{1}{2}} g^{ij}\hat{A}_j g^{-\frac{1}{4}}\psi \\ &\qquad + \frac{1}{4}B_i g^{\frac{1}{2}} g^{ij}\hat{A}_j g^{-\frac{1}{4}}\psi \\ &\qquad + \frac{1}{4}\hat{A}_i g^{\frac{1}{2}} g^{ij} B_j g^{-\frac{1}{4}}\psi \\ &\qquad + \frac{1}{16}B_i g^{\frac{1}{2}} g^{ij} B_j g^{-\frac{1}{4}}\psi\Big\} + V\psi.\end{aligned}$$

ここで、$\hat{A}_i$ は演算子として右側の全ての部分に作用することに注意して計算を進めていくと、最終的に以下のようにまとめることができる。

$$\begin{aligned}\hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2}\Bigg\{&\frac{1}{2}g^{ij}\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial \psi}{\partial q^j} + \frac{\partial g^{ij}}{\partial q^i}\frac{\partial \psi}{\partial q^j} \\ &+ g^{ij}\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial q^j}\psi\right)\Bigg\} + V\psi. \quad (6)\end{aligned}$$

2.2 Schwarzschild 計量の導入

BH 近傍での量子力学を考えるために、量子ハミルトニアンに含まれる曲率成分 g、g^{ij}、R に Schwarzschild 計量 $g_{ij}(i,j = 1,2,3)$ の空間成分を導入する。

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1+\dfrac{ax^2}{r^2(r-a)} & \dfrac{axy}{r^2(r-a)} & \dfrac{axz}{r^2(r-a)} \\ \dfrac{ayx}{r^2(r-a)} & 1+\dfrac{ay^2}{r^2(r-a)} & \dfrac{ayz}{r^2(r-a)} \\ \dfrac{azx}{r^2(r-a)} & \dfrac{azy}{r^2(r-a)} & 1+\dfrac{az^2}{r^2(r-a)} \end{pmatrix}.$$

ここでは Schwarzschild 計量もデカルト座標のものを用いる。これを用いると曲率成分は以下のように求められる。

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1-\dfrac{ax^2}{r^3} & -\dfrac{axy}{r^3} & -\dfrac{axz}{r^3} \\ -\dfrac{axy}{r^3} & 1-\dfrac{ay^2}{r^3} & -\dfrac{ayz}{r^3} \\ -\dfrac{axz}{r^3} & -\dfrac{ayz}{r^3} & 1-\dfrac{az^2}{r^3} \end{pmatrix},$$

$$g = \frac{r}{r-a},\qquad \mathcal{R} = 0.$$

a は事象の地平面である。Schwarzschild 計量の場合リッチスカラー $\mathcal{R}$ は 0 になり、量子ハミルトニアン (5) 式の量子補正項 $\frac{1}{12}\hbar^2\mathcal{R}$ は消える[3]。

2.3 Schrödinger 方程式

Schwarzschild 背景は静的であるため、静的な状態に対応する Schrödinger 方程式として以下を解く[4]。

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

左辺は (6) 式に g^{ij}、g を代入することで計算することができる。この時、正準量子化はデカルト座標で行うべきである[5]ことに注意し、のちの計算のために最終的に球座標で表す形に変換することで以下の式が得られる。

$$\begin{aligned}\hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2}\Bigg\{&\left(1-\frac{a}{r}\right)\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\frac{2}{r}-\frac{3a}{2r^2}\right)\frac{\partial}{\partial r} \\ &+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Bigg\}\psi + V\psi.\end{aligned} \quad (7)$$

これをさらに $\psi = R_l(r)Y_l^m(\theta,\phi)$ と変数分離すると、動径方向 $R_l(r)$ と角度方向 $Y_l^m(\theta,\phi)$ の二つの方程式として以下が得られる。

・動径方向

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{a}{r}\right)\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \left(\frac{2}{r}-\frac{3a}{2r^2}\right)\frac{\partial R}{\partial r} \\ &\qquad + \left\{\frac{2}{\hbar^2}(E-V) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right\}R = 0,\end{aligned} \quad (8)$$

[3]標準的な量子論の枠組みに収まることになる。

[4]波動関数が $\Psi = \psi(r)e^{-iEt/\hbar}$ の形に分離できるとして時間に依存しない Schrödinger 方程式を設定する。

[5]Schwarzschild 計量をデカルト座標で導入したのはこの理由である。

・角度方向

$$\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+l(l+1)Y=0. \tag{9}$$

ここでは分離定数を $l(l+1)$ とした。上式からわかるように、BH の影響による非自明な部分は動径方向のみであり、角度方向の波動関数 Y_l^m は球面調和関数となる[6]。

$$Y_l^m(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi}.$$

3　3 次元自由粒子

まず、最も簡単な例としてポテンシャル $V=0$ の自由粒子の場合を考える。動径方向波動関数 $R_l(r)$ の方程式は次のようになる。$\left(k^2=\frac{2E}{\hbar^2},\ \text{波数 } k\right)$

・平坦空間 (BH なし $a=0$)

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}+\left(k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)R=0, \tag{10}$$

・Schwarzschild 背景 (BH あり $a=1$)

$$\left(1-\frac{a}{r}\right)\frac{d^2R}{dr^2}+\left(\frac{2}{r}-\frac{3a}{2r^2}\right)\frac{dR}{dr}+\left(k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)R=0. \tag{11}$$

(10) 式は球 Bessel の微分方程式であるため、解は解析的に得られる。一方 (11) 式は、境界条件 $R(100)=0$, $R'(100)=1$ のもと、Mathematica により数値的に解を求めることができる。それぞれの動径方向の波動関数の 2 乗の振る舞いは図 1 に示す。

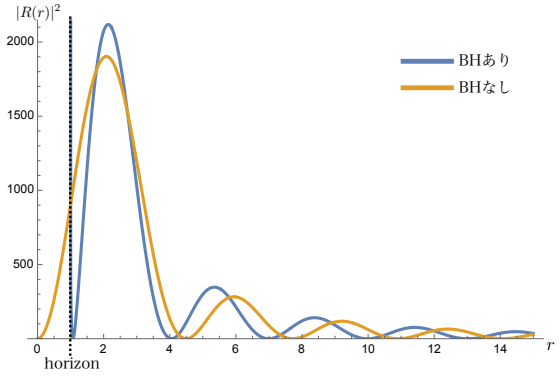


図 1: 自由粒子の動径方向波動関数確率密度

[6] m は磁気量子数、l は方位量子数である。

また、球面調和関数を含む全波動関数の 2 乗の分布 3 次元プロットを図 2 に示す。球面調和関数に含まれる磁気量子数は $m=0$ と設定した。BH の内部領域は時空が反転することから、今回の系では事象の地平面の内側 $r\le a$ は ill-defined であり評価できないものとする[7]。

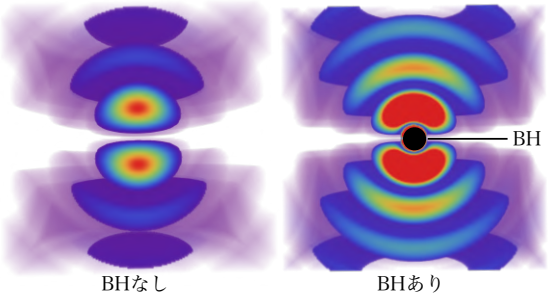


図 2: 自由粒子の波動関数確率密度 3 次元プロット

4　水素原子模型

クーロンポテンシャル $V(r)=-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ の下での波動関数の振る舞いを考える[8]。動径方向の波動関数は

・平坦空間 (BH なし $a=0$)

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}+\left\{\frac{2}{\hbar^2}\left(E+\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right\}R=0, \tag{12}$$

・Schwarzschild 背景 (BH あり $a=1$)

$$\left(1-\frac{a}{r}\right)\frac{d^2R}{dr^2}+\left(\frac{2}{r}-\frac{3a}{2r^2}\right)\frac{dR}{dr}+\left\{\frac{2}{\hbar^2}\left(E+\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right\}R=0. \tag{13}$$

適切な変数変換を行うことで (12) 式の解は Laguerre 陪多項式となる。この時、エネルギー E は主量子数 n の関数として $E_n=-\frac{e^4}{8n^2\varepsilon_0^2\hbar^2}$ で与えられる。エネルギーが r に依存しないことと、Schwarzschild 背景では $r\to\infty$ で漸近平坦であることから、(13) 式も

[7] この理由により波動関数の確率密度 3 次元プロットの BH ありの図の $r\le a$ の領域は黒で塗りつぶした。

[8] 原点 $r=0$ に静止する陽子を置いた通常の水素原子モデルを、曲がった時空へ拡張する。ここでは理想化された系として、原点に Schwarzschild BH が存在し、そこからクーロンポテンシャルが発生すると仮定する。ただし、Schwarzschild 解は中性 BH のものであり、電荷をもつ場合には Reissner-Nordström 解が適切である。したがって、より整合的なモデルとしては、Reissner-Nordström 計量に基づく波動方程式の構築が必要となる。

同じエネルギー E_n をとると仮定して Mathematica で計算する。各軌道の動径方向確率密度関数を図 3、図 5 に示す。また、球面調和関数を含む全波動関数の 2 乗の分布 3 次元プロットを図 4、図 6 に示す。このとき、磁気量子数は $m = 0$ と設定した。

・3p 軌道 $(n = 3, l = 1)$

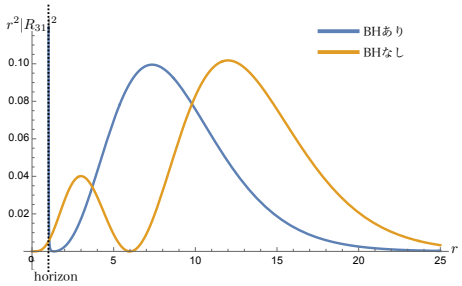


図 3: 水素原子電子雲の動径方向確率密度 (3p)

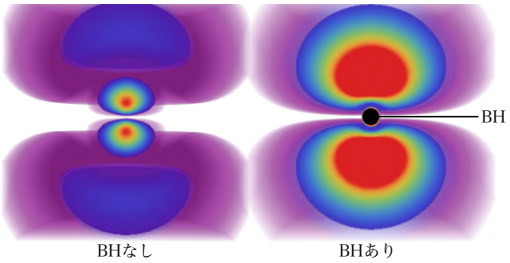


図 4: 水素原子電子雲の波動関数確率密度 (3p)

・3d 軌道 $(n = 3, l = 2)$

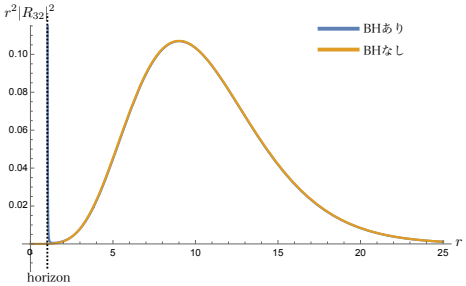


図 5: 水素原子電子雲の動径方向確率密度 (3d)

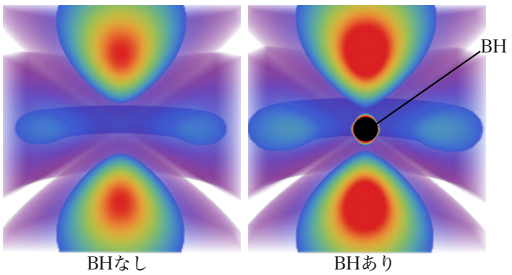


図 6: 水素原子電子雲の波動関数確率密度 (3d)

5 Discussion

自由粒子の結果から、BH がある場合の波動関数の確率密度は地平面上で発散するかのような振る舞いが確認できる。また図 1 から、地平面の外部領域では BH なしの場合と類似した分布になっていることもわかる。さらに、波状のグラフのピーク位置を BH あり・なしで比較すると、BH ありの方が地平面方向へ引き寄せられていることが確認できる。水素原子模型における結果からも、同様の特徴が見られる。一方で、図 5 が示すように、3d 軌道における外部領域の動径方向確率密度関数は、BH の有無にかかわらずほぼ重なっており、ブラックホールによる引き寄せ効果は確認されなかった。この点については、系の粒子のエネルギーとの関係も踏まえたさらなる検討が必要である。

6 Conclusion

本研究では、DeWitt の形式に基づき、曲がった時空における Schrödinger 方程式を Schwarzschild 背景上で定式化した。曲率に起因する幾何学的補正項が波動関数の振る舞いに与える理論的影響を明示的に解析するために、平坦空間における基礎的な系と比較することで、重力場の存在による量子波動関数の振る舞いの変化を可視化した。数値解析の結果、ブラックホール近傍では確率密度が事象の地平面付近に集中する傾向が明らかとなった。一方、外部領域においては平坦空間と類似した分布が見られ、重力場による引き寄せ効果も確認された。現在は、電荷を持つブラックホール背景への拡張として、Reissner-Nordström 計量に基づく解析を進めている。また、これらの曲がった空間における水素原子模型の化学的性質の理解を深める研究、およびブラックホール近傍に存在し得る 1 Å 程度の中間スケールの量子物質が重力から受ける影響の解明は、今後の重要な研究課題であると考えている。

Reference

[1] Bryce S. DeWitt“Dynamical Theory in Curved Spaces.I.A Review of the Classical and Quantum Action Principles” Rev. Mod. Phys. **29** (1957), 377-397

——index へ戻る

SP-30

アクシオン場を伝播する光の軌道方程式

立教大学
竹内　智貴

アクシオン場を伝播する光の軌道方程式

竹内　智貴 (立教大学大学院 理学研究科)

Abstract

ダークマターの候補粒子として知られるアクシオンは光子との相互作用により、光子の偏光面を回転させることが知られている [?]。一方で、回転している天体の周辺を通過する電磁波についても偏光面の回転を引き起こすことが知られている。相対論では、光子の軌道は測地線方程式で記述され、波動的性質を考慮する必要はないことが多いが、無限遠方まで伝播するような軌道については、波動的性質を取り込む必要があることが古くから指摘されている。このような波動的な効果がどのように現れるかを明らかにし、さらに、光線の軌道も変化させることを示す。

1　導入

本研究の目的は、物質場が分布する時空において光子の偏光が光線の軌道に対する影響を調べることである。

ほとんどの場合、曲がった時空における電磁波の伝播は幾何光学近似が有効である。この近似は、系の典型的な長さのスケールに対して、波長が十分大きい場合に有効である。したがって、天体の周りを伝播する電磁波にとって波動的性質は考慮する必要はなく、幾何学的な量によってのみ電磁波の伝播経路は決定される。しかし、無限遠方にまで伝播する電磁波について、同様の近似は一般に破綻する。幾何光学近似は、局所的な系に対する近似であり、典型的な系の長さ以上の積分曲線を計算する際には、より高次の項を取り込み、波動的性質を考慮する必要がある。こうした研究 [?] は数多く存在し、特徴的な結果として、偏光面の回転である重力ファラデー効果とヘリシティーの差異で伝播経路が異なる重力スピンホール効果が得られた。特に、重力ファラデー効果は天体が回転する時空を考える場合にのみ起こる現象であり、静的な時空ではこの現象は見られないことが知られている。　一方で、アクシオンと光子の相互作用により、光子の偏光面を回転させることが示された [?]。しかし、アクシオンが電磁波の伝播経路に影響を与えるかは非自明なものである。今回はこの問題についての結果を示す。

2　アクシオン-マクスウェル理論

アクシオン-マクスウェル理論のラグランジアン

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\mathrm{g}_{a\gamma}a\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu a\partial^\mu a \quad (1)$$

$\tilde{F}_{\mu\nu}$ は $F_{\mu\nu}$ のデュアルテンソルであり、a はアクシオン場である。このラグランジアンをベクトルポテンシャル $\mathcal{A}_\mu$ で変分することにより、ローレンツ条件の上での波動方程式を導くことができる。

$$\Box\mathcal{A}^\mu - R^\mu{}_\nu\mathcal{A}^\nu - \mathrm{g}_{a\gamma}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu\mathcal{A}_\rho\partial_\sigma a = 0 \quad (2)$$

$$\nabla_\mu\mathcal{A}^\mu = 0 \quad (3)$$

振幅や偏光、波長が変化する典型的な長さのスケールを $\mathcal{L}$、局所的な慣性系で定義される曲率のスカラー量を $\mathcal{R}$、そして電磁波の波長を $\lambda \sim \varepsilon$ とする。

$$\lambda \ll \mathcal{L},\ \lambda \ll \mathcal{R} \quad (4)$$

この二つの近似が成立するとき、幾何光学近似が有効以下のような単色平面波解をアンザッツとして、ベクトルポテンシャルを複素振幅ベクトルと位相の自由度で分離し、展開パラメータ ε で展開する。

$$\mathcal{A}^\mu \approx \mathrm{Re}\Big[A^\mu e^{iS/\varepsilon}\Big],\ A_\mu = A^{(0)}_\mu + \varepsilon A^{(1)}_\mu + \cdots \quad (5)$$

波動方程式は以下のようになる。

$$\mathcal{O}(\varepsilon^{-2}) = -\nabla_\alpha S\nabla^\alpha S A^\mu e^{iS/\varepsilon} \quad (6)$$

$$\mathcal{O}(\varepsilon^{-1}) = (2i\nabla_\alpha S\nabla^\alpha A^\mu + i\nabla_\alpha\nabla^\alpha S A^\mu - i\mathrm{g}_{a\gamma}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_\nu S A_\rho\nabla_\sigma a)e^{iS/\varepsilon} \quad (7)$$

$k_\alpha = \nabla_\alpha S$ は光的条件 $k^\alpha k_\alpha = 0$ を満たし、これは光的測地線方程式の接ベクトルである。$\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ は、

振幅ベクトルの輸送方程式である。幾何光学近似が有効であれば $\nabla_\alpha A^\mu$ は、$\nabla_\alpha S$ に対して非常に小さいため主要項のみを取り出すことになる。

3　重力ファラデー効果

無限遠方まで伝播するような電磁波の描像を理解する際、一般に幾何光学近似は有効ではないため、高次項を計算に取り入れ、波動的効果を考慮することする必要がある。ここでは、 波動方程式を $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ のオーダーまで評価することで波動的な効果を見ていく。

$A^\mu = Am^\mu,\ m^\mu m^*_\mu = 1$ とするとき、$m^\mu = f^\mu e^{i\varphi}$ と表されるが、$f^\mu \to f^\mu e^{i\phi}$ のゲージ変換性がある。m^μ を偏光ベクトルといい、φ のことを偏光の位相という。また、局所的な正規直交基底を $\{u, n, f, f^*\}$ とする ($k^\mu = \omega(u^\mu + n^\mu)$)。この局所的な正規直交基底が無限遠方まで伝播する光線軌道上で常に保たれることで、偏光の位相について正確に測定することができる。(7) より

$$
\begin{aligned}
k^\alpha \nabla_\alpha \varphi &= i f^*_\mu k^\alpha \nabla_\alpha f^\mu - \frac{\sigma}{2} \mathrm{g}_{a\gamma} k^\alpha \nabla_\alpha a \qquad (8)\\
&= \sigma k^\alpha \left(\omega_\alpha - \frac{1}{2} \mathrm{g}_{a\gamma} \nabla_\alpha a \right)\\
\omega_\alpha &= \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} u^\beta \nabla^\gamma u^\delta .
\end{aligned}
$$

$\sigma = \pm 1$ はヘリシティーであり、ω_α は渦度ベクトルと言われる。(8) 式を k^μ を接ベクトルとする積分曲線 $\Gamma : x^\mu$ は以下のように表される。第一項は光子と重力的な相互作用として偏光面の回転を引き起こす。これは重力ファラデー効果と言われる。第二項は、アクシオンとフォトンの相互作用により得られる偏光面の回転である。[**?**]

$$
\varphi = \sigma \int_\Gamma \left(\omega_\alpha - \frac{1}{2} \mathrm{g}_{a\gamma} \nabla_\alpha a \right) \mathrm{d}x^\alpha \qquad (9)
$$

4　重力スピンホール効果

軌道の方程式は [**?**] の方法を用いるとハミルトニアンは以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} Q_\mu Q_\nu \qquad (10)\\
Q_\mu &= k_\mu - \varepsilon(\omega_\mu - \nabla_\mu \varphi) - \varepsilon \mathrm{g}_{a\gamma} \Omega^a_\mu, \qquad (11)\\
\Omega^a_\mu &= \frac{1}{2} i \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} f^\nu \nabla^\rho a f^{*\lambda}
\end{aligned}
$$

(11) がアクシオン場中を伝播する光線軌道の接ベクトルである。軌道の方程式は、

$$
\begin{aligned}
Q^\nu \nabla_\nu Q_\mu &= \sigma\varepsilon Q^\nu (\Phi_{\mu\nu} - \mathrm{g}_{a\gamma} \Psi_{\mu\nu}) \qquad (12)\\
\Phi_{\mu\nu} &= \nabla_\mu \omega_\nu - \nabla_\nu \omega_\mu\\
\Psi_{\mu\nu} &= \nabla_\mu \Omega^a_\nu - \nabla_\nu \Omega^a_\mu
\end{aligned}
$$

のようになり測地線方程式に加速度項が加わるような形になる。このような項が加わることで、光子はヘリシティーの違いにより異なる経路を辿ることになる。これを重力スピンホール効果という。第二項は、アクシオン場の存在による項であり、既存の結果を修正するものとなる。

5　結論と今後の展望

幾何光学近似を拡張することで、重力的な効果として、光子の偏光面の回転や伝播経路の変化は知られていたが、それらの効果は物質場の影響を受けるかは明らかではなかった。アクシオン場が存在する場合には、今回のような結果が得られた。この結果は、アクシオンを検出する観測理論を支えるものとして重要なものになると考えられる。今後の展望として、プラズマ中を伝播する電磁波と比較することで、こうした効果は、どのようなふるまいを見せるかを議論する。また、カー時空などの具体的な計量を用いてブラックホールシャドウの計算も行いたい。

これらの結果は、重力波の解析にも応用が可能とされているため、重力波への応用も検討していきたい。

謝辞

立教大学理論物理学研究室の皆様にこの場を借りて心より感謝を申し上げます。

Reference

[1] V. P. Frolov and A. A. Shoom, “Spinoptics in a stationary spacetime,” Phys. Rev. D **84**, 044026 (2011)

[2] V. P. Frolov, “Spinoptics in a curved spacetime,” Phys. Rev. D **110**, no.6, 064020 (2024)

[3] D. J. Schwarz, J. Goswami and A. Basu, “Geometric optics in the presence of axionlike particles in curved spacetime,” Phys. Rev. D **103**, no.8, L081306 (2021)

——index へ戻る

SP-31

観測領域形状の影響を受けない銀河・銀河レンズの統計量推定と銀河-物質相関の測定法

東京大学
手良脇　大誠

観測領域形状の影響を受けない銀河・銀河レンズの統計量推定と銀河-物質相関の測定法

手良脇 大誠 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

観測者から見て遠方にある銀河像の形状は、近傍にある銀河分布の周りに位置する物質の弱重力レンズ効果の影響を受けて歪められている。この銀河像の形状と銀河分布の相関は「銀河・銀河レンズ (galaxy-galaxy lensing)」と呼ばれ、現行の弱重力レンズ宇宙論の根幹を成している。また現在、銀河・銀河レンズを用いた解析は実空間での扱いが主流である。そこで本研究では、未だ十分に開拓されていないフーリエ空間での解析に着目する。しかし、 実データに単純なフーリエ解析を行うと、明るい星の影響でデータが無い領域 (マスク領域) や、観測領域の形状自体の複雑さの影響が畳み込まれ、得られるパワースペクトル (二点相関のフーリエ成分) の理論的解釈が困難になってしまう。本研究では、CMB や銀河クラスタリングの解析で知られている手法を利用し、こうした観測効果の影響を受けない銀河・銀河レンズパワースペクトルの推定法を開発した。また、銀河・銀河レンズが近傍銀河周りの物質分布の情報を保持していることに着目し、近傍銀河分布とその周囲の物質分布との相互相関パワースペクトルの復元を、上述の推定法を駆使することによって初めて試みる。

1 Introduction

1.1 銀河・銀河レンズ効果

我々が観測する銀河の形状は、光路上にある暗黒物質分布の弱重力レンズ効果によって歪められている。この歪みの大きさは暗黒物質の存在量である Ω_m や構造形成の進行度を表す S_8 などといった宇宙論パラメタに対して感度を持つため、大規模構造を用いた宇宙論解析において重要な役割を持つ。また、現在標準的な宇宙の構造形成シナリオは、暗黒物質が密集した領域に銀河が形成されることを予言する。そのため、図 1 に示すように、「前景銀河の分布」と「背景銀河の形状」は、共に前景銀河周辺の暗黒物質分布を反映しており、銀河・銀河レンズと呼ばれる相関を持つ。

これまでにも、銀河・銀河レンズの二点相関関数を用いて宇宙論を制限する研究が多く行われてきた。その一方で、二点相関関数のフーリエ変換であるパワースペクトルや、より高次のバイスペクトルを用いた解析は殆ど為されていない。こうした統計量による解析を可能にすることができれば、更なる宇宙論的情報が引き出せるようになるだろう。そこで本研究では、銀河・銀河レンズのフーリエ統計量に着目した。

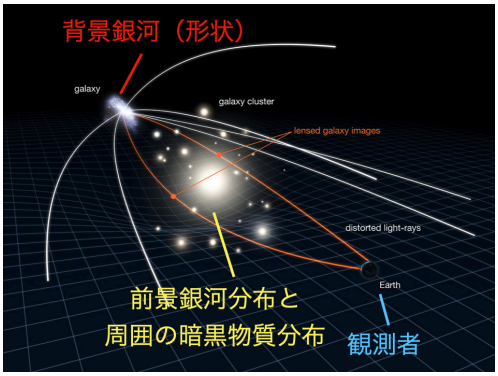


図 1: 銀河・銀河レンズの模式図。背景銀河の光は前景銀河周辺の暗黒物質に曲げられるため、前景銀河分布と背景銀河形状の間に相関が生まれる。(Credit:NASA, ESA & L. Calçada)

1.2 Window 効果

実際の観測領域は、その形状自体が複雑である上、明るい星によるマスクなどといった観測的な事情でデータが無い領域を含んでいる (window 効果、図 2)。FFT を使ったフーリエ解析を行うためには長方形のデータマップが必要であるから、こうしたデータの欠損領域にはゼロ埋めを行うことになる。そのため、観測されるデータは $\mathbf{d}_w(\mathbf{x}) = W(\mathbf{x})\mathbf{d}_{\rm true}(\mathbf{x})$ と書け

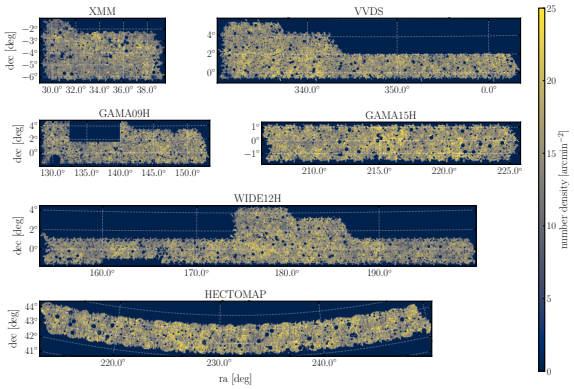


図 2: すばる HSC の 3 年分の観測領域。黄色がデータの存在する領域、青色がデータの欠落した領域である。[1]

る。ここで $W(\mathbf{x})$ は、データがある座標では 1 を、無い座標では 0 を返す window 関数である。よって、例えば（スピン 0 の）データ $\mathbf{d}$ に対する 3 次元パワースペクトルは、

$$P^{w}_{\rm dd}(k) \equiv \langle \mathbf{d}_w(\mathbf{k})\mathbf{d}^*_w(\mathbf{k})\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}|\tilde{W}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')|^2 P^{\rm true}_{\rm dd}(k') \qquad (1)$$

となる。すなわち、積のフーリエ変換を行うために、波数空間においては、window 効果がパワースペクトルに対して畳み込みとして効くのである。この時、ある k に対して任意の k' が積分を通して影響を及ぼすことになるため、異なる波数がカップリングを起こしてしまう。特に重力レンズのようなスピン 2 場の場合には、その 2 自由度に相当する E モードと B モードもお互いに混ざり合ってしまい、その理論的解釈が困難になる。理論から計算されるパワースペクトルは当然 $P^{\rm true}_{\rm dd}(k)$ であるから、(1) 式のままでは理論と観測結果を比較することができない。そのため、観測データ d_w から window 効果のないパワースペクトルを推定する手法の開発が必要である。そこで本研究では、銀河・銀河レンズ効果のパワースペクトルに対してこの window 効果を取り除く手法の開発に取り組んだ。

2 Methods

本研究では、銀河クラスタリングや CMB の分野で使用されている Quadratic estimator[2] という手法を重力レンズの文脈に初めて適用することで、銀河・銀河レンズパワースペクトルの推定式を導いた。この手法は、「与えられた（window 付きの）データベクトルに対して、尤度関数を最大化するようなパワースペクトルを探す」という最尤法に基づいて導かれる。この尤度関数は以下で与えられる。

$$L[\mathbf{d}](\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{\rm n}\sqrt{\det[\mathrm{C}(\mathbf{p})]}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{d}^{\mathbf{T}}_{\rm w}\mathrm{C}^{-1}(\mathbf{p})\mathbf{d}_{\rm w}\right) \qquad (2)$$

詳細な説明や計算は (煩雑になるために) 省略するが、この尤度関数を最大化するパワースペクトルを計算すると、求める推定式が得られる。

この手法に則り、本研究で最終的に導いた表式は以下の通りである。

$$\begin{pmatrix} \hat{p}_{{\rm g}E,\alpha} \\ \hat{p}_{{\rm g}B,\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (F^{-1}_{EE})_{\alpha\beta} & (F^{-1}_{EB})_{\alpha\beta} \\ (F^{-1}_{BE})_{\alpha\beta} & (F^{-1}_{BB})_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{q}_{{\rm g}E,\beta} \\ \hat{q}_{{\rm g}B,\beta} \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

左辺は求める”window 効果のない”パワースペクトルであり、前景銀河の分布 (”g”) と重力レンズ場 (スピン 2、”E/B”) の相互相関を表している。また、α, β は考えている波数のビンである。右辺の各成分の一部を示すと、以下のようになっている。

$$\begin{aligned} \hat{q}_{{\rm g}E,\alpha} &= (H^{-1}_{\gamma}\boldsymbol{\gamma}_1)^T C^{c}_{{\rm g}\gamma,\alpha}(H^{-1}_{\rm g}\boldsymbol{\Delta}_{\rm g}) \\ &\quad + (H^{-1}_{\gamma}\boldsymbol{\gamma}_2)^T C^{s}_{{\rm g}\gamma,\alpha}(H^{-1}_{\rm g}\boldsymbol{\Delta}_{\rm g}) \\ F^{EE}_{\alpha\beta} &= {\rm Tr}\left[H^{-1}_{\gamma}C^{c}_{{\rm g}\gamma,\alpha}\, H^{-1}_{\rm g}C^{c}_{{\rm g}\gamma,\beta}\right] \\ &\quad + {\rm Tr}\left[H^{-1}_{\gamma}C^{s}_{{\rm g}\gamma,\alpha}\, H^{-1}_{\rm g}C^{s}_{{\rm g}\gamma,\beta}\right], \end{aligned} \qquad (4)$$

まず $\hat{q}$ は (1) 式の左辺に登場した”window 効果を畳み込んだ”パワースペクトルに対応している。実際、この量は実際の観測データである前景銀河分布 $\boldsymbol{\Delta_g}$ と背景銀河形状 $\boldsymbol{\gamma_1}, \boldsymbol{\gamma_2}$ から計算することができる量になっている。(H_γ, H_g は各データに対する（人為的に導入可能な）weight になっている。また、$C^{c/s}_{\gamma g,\alpha}$ は window 形状によって決まる関数である。) 言い換えると、window 効果の畳み込みは、”window 効果を畳み込んだ”パワースペクトル $\hat{q}$ に対して行列 F^{-1} を作用させることで解消しているのである。この F は Fisher 行列と呼ばれており、(4) 式からもわかるように、観測されたデータには依存せず、window 形状の幾何学的情報だけから決定される量である。すなわち、この Fisher 行列こそが、window 効果の除去に本質的な役割を担っている。

3 Validation

前章で記した銀河・銀河レンズ効果の quadratic estimator の正当性を検証する。今回は、ray-tracing simulation[3] と呼ばれる、N 体シミュレーションに加えて重力レンズ効果のシミュレーションを行ったデータを使用した。図 3（左, 中央）に、今回の検証で

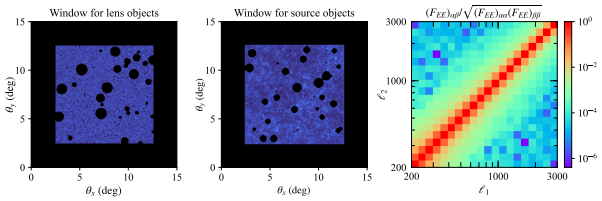


図 3: 手法の検証のために用いた window 形状。左図が前景天体、中央図が背景天体に対して適用した window 形状である。右図はこれらの window 形状に対応する今回の Fisher 行列 F_{EE} である。詳細な説明については本文参照。

用いた window 形状を示した。特に、実際の観測データにおいては前景/背景天体は一般に異なる window 形状を持つため、両者で異なる mask 領域を設定した。また、右図に示しているのが今回の window 形状に対応する Fisher 行列 F_{EE}（を適当に規格化したもの）である。このプロットが示すように、Fisher 行列は一般に対角項が卓越しており、そこから非対角項に染み出すような分布になっている。この事実は以下のように解釈できる。まず、window 効果がないような理想的な状況においては、”window を畳み込んだ”パワースペクトルは真なるパワースペクトルに一致する。すなわち、(3) 式において F は対角であることになる。言い換えると、非対角への染み出しこそが、window 効果の影響を反映していると言える。よって、この Fisher 行列の非対角項によって、window 効果の除去が可能となるのである。これらのセットアップのもとで本手法を適用した結果を図 4 に示した。上の図が C_{gE} に対する測定結果であり、赤が本研究の結果、青が真の値である。また、緑で”window を畳み込んだ”パワースペクトルも示している。”window を畳み込んだ”パワースペクトルが window 効果の影響によって真の値から外れる一方で、本手法による測定は数%の精度を達成 (中央段参照) している。また、標準的な宇宙模型ではゼロとされる C_{gB} に対しても、誤差の範囲でゼロと無矛盾な

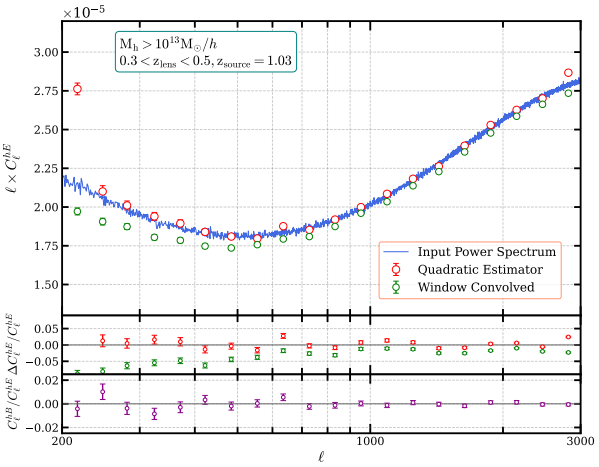


図 4: シミュレーションを用いた手法の検証結果。詳細は本文参照。

結果となっており、本手法の正当性が確かめられた。

尚、C_{gE} の端のビンが真の値から大きく乖離しているが、これは次のように説明される。すなわち、図 3 に示したように、端のビンに関しては本来隣に存在する「非対角項」が存在しないため、window 効果を適切に考慮することができず、不正確な値となるのである。

4 Application

本研究では、上記の推定法の応用例として、3 次元の銀河・物質の相互相関パワースペクトル $P_{gm}(k)$ の測定法の開発も行った。本節ではこれについて記す。

まず、従来の重力レンズの測定データは、二次元の天球面上で与えられる。これらを記述する座標は角度座標 (θ, ϕ) であり、共動座標ではない。そのため、得られるパワースペクトルは「角度」パワースペクトル $C_{gE}(\ell)$ であった。しかし、実際に宇宙論の理論から第一に計算される量は共動座標に基づいた量 $P(k)$ である。そのため、この $P(k)$ という量を推定できるようになると、その物理的解釈が容易になると考えられる。ここで、角度パワースペクトル $C_{gE}(\ell)$ は $P_{gm}(k)$ と以下のように関係付けられる。

$$C_{\mathrm{g}E}(\ell) = \frac{3}{2}\Omega_{\mathrm{m}}H_0^2 \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\chi}{\chi} p(\chi)\frac{g(\chi)}{a(\chi)} P_{\mathrm{gm}}\left(k = \frac{\ell}{\chi}\,; z(\chi)\right) \tag{5}$$

本式を詳細に解説することはしないが、注目すべき点は、$P_{gm}(k)$ の積分で角度パワースペクトルが得られる、という点である。すなわち、ある角度成分 ℓ を計算するためには、共動スケールに対応する様々な波数成分 k を足しあげる必要があるのである。

こうした異なるスケールの重ね合わせの解消を試みよう。ここで、(5) 式の $p(\chi)$ はレンズ天体の赤方偏移分布に相当している。そのため、レンズ天体を十分に薄く取れば、(5) 式の積分範囲が狭くなり、スケールの混合が抑えられると考えられる。実際、十分にスライスが薄ければ、(5) 式は以下のように変形できる。

$$P_{\rm gm}(k;\bar{\chi}_L) \simeq \frac{\Sigma_{\rm crit}(\bar{\chi}_L)}{\rho_{\rm crit}\Omega_m}\bar{\chi}_L^2 C_{\rm gE}(\ell=\bar{\chi}_L k), \qquad (6)$$

すなわち、C_{gE} の測定を通じて $P_{gm}(k)$ を測定することが可能になるのである。そこで本研究では、3 章で用いたシミュレーションを再び使用し、赤方偏移 $0.15 < z < 0.35$ の前景銀河天体に対して図 5 のような 5 枚のスライス分割を行った。こうして各スライスに対して前章で開発した window 効果を取り除く手法を適用すれば、window のない正確な $P_{gm}(k)$ を測定できるようになるだろう。

図 6 に、実際に各スライスに対して quadratic estimator を使用し、(6) 式を用いることで $P_{gm}(k)$ を測定した結果を示した。尚、異なるスライスでの測定は適切な weight を課して平均している（赤のプロット参照)。また、青のプロットでスライス分割を行わなかった場合の結果も示した。両者はエラーバーの範囲で大きな違いはないが、エラーバー自体はスライス分割を行った方が小さいことが確認できる。

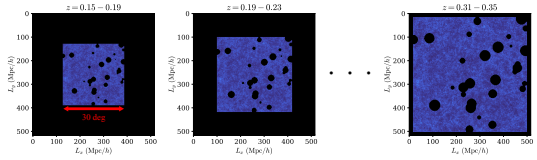


図 5: 赤方偏移 $0.15 < z < 0.35$ に対するスライス分割。データ自体は角度カットを行って取得しているおり、window 効果は角度ベースで与えられるため、同一の模様がフラクタル的に見られる。

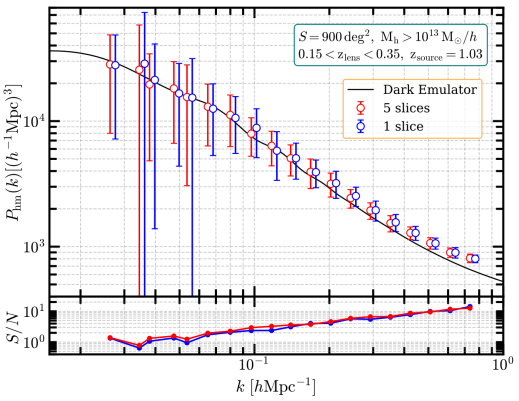


図 6: 図 5 の各スライスに対して quadratic estimator を使用することで計算した $P_{gm}(k)$ の測定結果。詳細は本文参照。

5 Conclusion

本研究では、quadratic estimator を用いて window 効果を取り除く手法の開発を銀河・銀河レンズパワースペクトルに対して行った。3 章で示したように、この推定法は数%の精度で正確なパワースペクトルを復元することが可能である。そのため、すばる HSC や LSST など、今後の重力レンズの実データに対する適応が期待できる。また、Quadratic estimator の重力レンズの業界での適用は本研究が初であり、他の重力レンズ統計量（銀河形状の自己相関パワースペクトルやバイスペクトルなど）への適用も今後の研究課題となる。更に、本研究で行った $P_{gm}(k)$ の測定も業界初の試みであり、従来の $C_{gE}(\ell)$ でなく $P_{gm}(k)$ を用いた解析が可能となる。特に、銀河クラスタリングで測定される $P_{gg}(k)$ と $P_{gm}(k)$ を組み合わせることで、物質に対する銀河のバイアス関係に対して頑健な宇宙論解析が可能となるだろう。

Reference

1.Xiangchong Li et al (2023). “Hyper Suprime-Cam Year 3 Results: Cosmology from Cosmic Shear Two-point Correlation Functions”, American Physical Society
2.Oliver H.E. Philcox (2021). “Cosmology without window functions: Quadratic estimators for the galaxy power spectrum”, American Physical Society
3.R. Takahashi et al., Full-sky Gravitational Lensing Simulation for Large-area Galaxy Surveys and Cosmic Microwave Background Experiments, The Astrophysical Journal 850 (2017) 24.

——index へ戻る

SP-32

宇宙初期において空間非可換性が時空とインフラトンに及ぼす影響

東京学芸大学
波多野　広修

宇宙初期において空間非可換性が時空とインフラトンに及ぼす影響

波多野 広修 (東京学芸大学大学院 教育学研究科 物理学教室)
共著者 小林 晋平 (東京学芸大学 教育学部 自然科学系 基礎自然科学講座)

Abstract

本研究では、空間非可換性により量子効果を取り入れた $(2+1)$ 次元時空におけるインフレーション理論を検討した。その空間非可換性は $[x,y]=i\theta$ という交換関係により導入した。また、非可換積を用いてインフラトンとして実スカラー場 ϕ を考えた場合の作用を構築し、非可換性が十分大きい極限において、インフラトンと多脚場の運動方程式を導出した。その運動方程式について、多脚場とインフラトンをそれぞれクリフォード代数で表現すれば解となることを発見した。特に今回は、パウリ行列を用いて表現した解について考察を深めた。その解について、QHO のコヒーレント状態を用いて演算子を関数に写像し、時空およびインフラトンの期待値の分布を調べた。その結果、発見した解の 1 つは、時空とインフラトンの存在する領域が一致し、そこでインフレーションが発生する可能性が高いことがわかった。

1 Introduction

現在の宇宙は観測により膨張していることがわかっている。これは、過去に遡れば宇宙は小さくなっていくことを意味する。宇宙の大きさが 10^{-35} m 程度であるプランクスケールと呼ばれるほどになると、時空自体を量子力学的に考える必要があるため、初期宇宙の現象は古典的な物理学で説明出来ない可能性が高い。その代わりに、一般相対性理論に量子効果を取り入れた量子重力理論が必要になると考えられているものの、弦理論やループ重力理論など、その候補は多く提唱されているが、それぞれが困難を抱えており、未完成である。

これに対し、量子効果を近似的に取り入れる方法として時空に非可換性を取り入れるものがある [1]。そこで本研究では、非可換性を取り入れた時空において、宇宙初期に発生したインフレーションについて考察した。インフレーションはインフラトンと呼ばれるスカラー場により引き起こされたと考えられている。

我々は、空間非可換性により量子効果を取り入れた $(2+1)$ 次元宇宙を考え、そこでのインフラトンと時空の配位への影響を調べた。特に、非可換性が十分大きな極限において、インフラトンと時空の配位それぞれについて、非自明な解を見つけることができた。

以下、本稿では $G=c=1$ の単位系を用いる。

2 Introduction of Noncommutativity into Space

本研究では、空間非可換性を空間座標 x,y における以下の交換関係で定義した。

$$[x,y]=xy-yx=i\theta \tag{1}$$

ここで θ は非可換性を表す定数である。

式 (1) が定義された 2 次元非可換空間は、量子力学の正準交換関係 $[\hat{x},\hat{p}]=i\hbar\hat{I}$ と正準量子化からの類推より、空間座標の x,y を演算子 $\hat{x},\hat{y}$ と置き換え、量子力学の調和振動子 (以下 QHO) の手法を援用することで演算子を用いて表現することが可能となる。

具体的には、“ 生成消滅演算子” を以下のように定義する。

$$\hat{a}\coloneqq\frac{\hat{x}+i\hat{y}}{\sqrt{2\theta}}\qquad \hat{a}^{\dagger}\coloneqq\frac{\hat{x}-i\hat{y}}{\sqrt{2\theta}} \tag{2}$$

このように定義すると、QHO の個数演算子に対応する演算子 $\hat{N}=\hat{a}^{\dagger}\hat{a}$ も定義することができる。すると QHO と同様に $\hat{N}\left|n\right\rangle=n\left|n\right\rangle\,(n=0,1,2\dots)$ で定義されるような $\hat{N}$ の固有状態 $\left|n\right\rangle$ を基底とするヒルベルト空間を考えることができる。ここで n は $\hat{N}$ の固有値である。これらにより 2 次元非可換空間の状態は、そのヒルベルト空間の固有状態 $\left|n\right\rangle$ を用いることで表現できる。

また、式 (1) の交換関係が導入された 2 次元非可換空間を実現する方法には、ここまでの演算子を用い

る方法に加えて、通常の積を非可換積に置き換える方法がある [2]。非可換積の定義一つに以下の Moyal 積がある。

$$f(x)\star g(y) \coloneqq \exp\left(\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\theta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial y^\nu}\right)f(x)g(y) \quad (3)$$

ここで、$\mu,\nu = 0,1,2$であり、$\theta^{\mu\nu}$は $\theta^{12} = -\theta^{21} \coloneqq \theta$ で定義される反対称定数行列である。この可換積を非可換積に取り替える方法と、先ほどの物理量を演算子に置き換える方法の 2 つは、等価であることが示されている [2]。

3 Inflation Theory on Noncommutative Spacetime

非可換性を取り入れていない $(2+1)$ 次元時空の宇宙では、インフラトンとして実スカラー場 ϕ を考えた場合の作用は以下のように与えられる。

$$S = \int dx^3\sqrt{-g}\left(R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)\right) \quad (4)$$

ここで、$V(\phi)$ はインフラトンのポテンシャルを表している。また、$g =\det(g_{\mu\nu})$ であり、$\sqrt{-g}$ は多重積分のヤコビアンに相当する。さらに $\sqrt{-g}$ は $g^{\mu\nu} = \eta^{ab}E^\mu{}_a E^\nu{}_b$ の関係がある多脚場 $E^\mu{}_a$ を用いることで以下のように表すことができる。

$$\sqrt{-g} = \frac{1}{3!}\epsilon^{\mu\nu\rho}\epsilon_{abc}E^a{}_\mu \cdot E^b{}_\nu \cdot E^c{}_\rho \quad (5)$$

ここで、$a,b = 0,1,2$ である。また、$\epsilon^{\mu\nu\rho},\epsilon_{abc}$ は 3 階完全反対称テンソルであり、$\epsilon^{012} = -1, \epsilon_{012} = 1$ と定義した。

本研究では、式 (4) の作用について非可換性を取り入れるため、通常の積を非可換積に置き換え、さらに [3] に基づいて非可換性の大きな極限 $(\theta \to \infty)$ を考えた。インフラトンのポテンシャルの最も単純な形として、$V(\phi) = m\phi^2/2$ を採用し、この極限を取ると (4) の作用は次のようになる。

$$S = \int dx^3 \left(\frac{1}{3!}\epsilon^{\mu\nu\rho}\epsilon_{abc}E^a{}_\mu \star E^b{}_\nu \star E^c{}_\rho\right) \star \left(-\frac{1}{2}m\phi^{2\star}\right) \quad (6)$$

ただし、$\phi^{2\star} = \phi\star\phi$ とした。ここで、上式の作用の ϕ と $E^c{}_\rho$ ついてそれぞれ変分をとると、以下の二つの運動方程式が導かれる。

$$\phi \star \epsilon^{\mu\nu\rho}\epsilon_{abc}E^a{}_\mu \star E^b{}_\nu \star E^c{}_\rho + \epsilon^{\mu\nu\rho}\epsilon_{abc}E^a{}_\mu \star E^b{}_\nu \star E^c{}_\rho \star \phi = 0 \quad (7)$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho}\epsilon_{abc}(\phi^{2\star} \star E^a{}_\mu \star E^b{}_\nu + E^b{}_\nu \star \phi^{2\star} \star E^a{}_\mu + E^b{}_\nu \star E^a{}_\mu \star \phi^{2\star}) = 0 \quad (8)$$

式 (8) について、c,ρ はそれぞれ 0,1,2 のいずれかである。

4 Solutions of the Equations of Motion and Clifford Algebra

我々は最も単純な場合として、多脚場は対角成分のみとした。そのとき、式 (7) および式 (8) の運動方程式は

$$0 = \{\phi, E^a{}_\mu \star \epsilon^{\mu\nu\rho}\epsilon_{abc}\{E^b{}_\nu, E^c{}_\rho\}_\star\}_\star \quad (9)$$

$$0 = -(\phi^{2\star}\{E^1{}_1, E^2{}_2\}_\star + E^2{}_2 \star \phi^{2\star} \star E^1{}_1 + E^1{}_1 \star \phi^{2\star} \star E^2{}_2 + \phi^{2\star}\{E^2{}_2, E^1{}_1\}_\star) \quad (10)$$

となる。ここで $\{E^b{}_\nu, E^c{}_\rho\}_\star = E^b{}_\nu\star E^c{}_\rho + E^c{}_\rho\star E^b{}_\nu$ であり、式 (10) では、$c = 0, \rho = 0$ である。

ここで、式 (9) の $E^a{}_\mu \star \epsilon^{\mu\nu\rho}\epsilon_{abc}\{E^b{}_\nu, E^c{}_\rho\}_\star$ の部分に注目すると、この部分が 0 であれば式 (9) は成り立つことがわかる。ここで、先行研究より、$\epsilon^{\mu\nu\rho}\epsilon_{abc}\{E^b{}_\nu, E^c{}_\rho\}_\star = 0$ を満たす多脚場の解のひとつはクリフォード代数の表現になっていることが示されている [1]。

クリフォード代数とは、ベクトル空間の基底 $\mathbf{e}_\mu$ について、反交換関係 $\{\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$ が定義できる代数のことである。ここで、$\delta_{\mu\nu}$ はクロネッカーのデルタである。この定義より、クリフォード代数の表現になっている多脚場であれば、式 (9) の右辺は $\{\phi, E^a{}_\mu \star 0\}_\star = \{\phi, 0\}_\star = 0$ となり、方程式を満たすため、式 (9) の一つの解となる。このとき、ϕ はいかなる関数でも式 (9) を満たす解となる。

次に、式 (10) について多脚場と同様にインフラトンもクリフォード代数の表現である場合を考える。

第 1 項と第 4 項は $\epsilon^{\mu\nu\rho}\epsilon_{abc}\{E^b{}_\nu, E^c{}_\rho\}_\star$ と同様の式を含むので、0 になる。第 2 項と第 3 項については $\phi^{2\star} = 1$ となることを用いて式を展開し、計算すると 0 になる。よって多脚場と同様にインフラトンもクリフォード代数の表現であるならば運動方程式 (10) を満たす解となる。以上より、多脚場とインフラトンがともにクリフォード代数で表現されるならば、それらは運動方程式 (7) および (8) の解となる。

その解を関数で表すために、2 節での議論を応用し、積の置き換えから演算子を使用する方法に移る。クリフォード代数の表現であるパウリ行列を用いると、多脚場とインフラトンは以下のように表せる。

$$E^a{}_\mu = \begin{pmatrix} \gamma^0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^2 \end{pmatrix} \begin{cases} \gamma^0 = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \\ \gamma^1 = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| \\ \gamma^2 = i\,|1\rangle\langle 0| - i\,|0\rangle\langle 1| \end{cases} \tag{11}$$

$$\phi = \gamma^0 = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \tag{12}$$

文献 [1] よりメトリックは、$g_{\mu\nu} = \{E^a{}_\mu, E^b{}_\nu\}_\star \eta_{ab}/2$ で求めることができるので、今の場合、メトリックは以下のようになる。

$$g_{\mu\nu} = (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)\eta_{\mu\nu} \tag{13}$$

ここで、η_{ab} はミンコフスキー計量であり、$\eta_{ab} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1)$ である。

この解を波動関数で表すために、QHO のコヒーレント状態 $|z\rangle$ を用いて、以下のように演算子を関数へ写像する。

$$f(z) = \langle z|n\rangle\langle n|z\rangle \tag{14}$$

ここで、$|n\rangle\langle n|$ はヒルベルト空間に作用する射影演算子である。ただし、本研究では非可換時空上での現象を扱っているため、コヒーレント状態も非可換時空で考えたものを用いる必要があり、それは以下のような式で表される。

$$|z\rangle = \exp\left(-\frac{|z|^2}{4\theta}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{(2\theta)^n\, n!}}\,|n\rangle \tag{15}$$

これらを踏まえ、式 (14) を用いて、$g_{\mu\nu}$ と ϕ を関数で表現すると以下のようになる。

$$g_{\mu\nu} = \left(1 + \frac{r^2}{2\theta}\right)\exp\left(-\frac{r^2}{2\theta}\right)\eta_{\mu\nu} \tag{16}$$

$$\phi = \left(1 - \frac{r^2}{2\theta}\right)\exp\left(-\frac{r^2}{2\theta}\right) \tag{17}$$

また、式 (16) の空間成分および (17) をプロットすると図 1、図 2 のようになる。

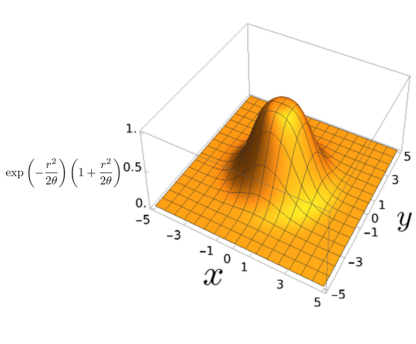


図 1: 時空の配位

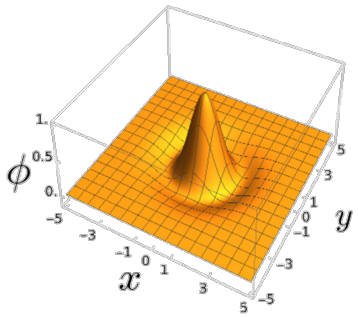


図 2: ϕ の配位

このとき、$\theta = 1$ とした。これらの図は時空とインフラトンの期待値を表しており、盛り上がっている領域に時空とインフラトンが存在することを意味する。これらの図の考察を深めるために、その $y = 0$ での断面図を見ると図 3 のようになる。

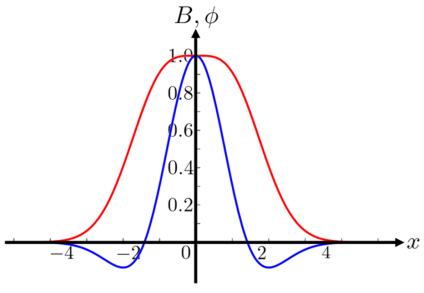


図 3: 時空と ϕ の配位の断面図

ここで 図 3 の B は式 (16) の空間成分であり、

$$B = \left(1 + \frac{r^2}{2\theta}\right)\exp\left(-\frac{r^2}{2\theta}\right) \tag{18}$$

である。また、赤色のグラフが時空の配位、青色がインフラトンの配位を表している。
この図を見ると、時空とインフラトンはともに $x = 0, y = 0$ で期待値が最も高いことがわかる。これは、非可換空間上の $x = 0, y = 0$ において、時空とインフラトンが存在するため、そこでインフレーションが発生する可能性が高いことを意味する。

5 Conclusion

本研究では、非可換性を取り入れた $(2 + 1)$ 次元時空の宇宙において、非可換性が強い極限では、多脚場とインフラトンがクリフォード代数を満たせば、運動方程式の解となることがわかった。また、その代数表現のひとつとして、パウリ行列で表現した解であれば、時空とインフラトンの存在する場所が一致し、そこでインフレーションが発生する可能性があることがわかった。これは先行研究 [4] における、インフラトンと時空それぞれの存在する領域が重ならないという問題点を解決できたことになる。

6 Future work

本研究で発見した解について、なぜパウリ行列で表現した解であれば、時空とインフラトンの存在する場所が一致するのかについての物理的な意味はわかっておらず、今後の議論が必要な点である。また、本研究ではインフラトンの時間依存性を無視しているため、現在の宇宙との関わりは考えられていない。時間依存性を取り入れる方法の 1 つとして LR 法 (Lewis − Riesenfeld 不変量法) というものがある。LR 法とは、時間に依存するハミルトニアンを持つ量子力学的系において、解析的に解を得るために導入された手法である。今後は、LR 法を用いて時間依存性を取り入れたとき、インフラトンや時空がどのように時間発展していくのかを調べていきたい。

Acknowledgement

今回発表の場として、天文・天体物理若手夏の学校を設営・運営して下さったスタッフの方々、そして支援して下さった方々に心より感謝申し上げます。またこの研究を進めるにあたり、手厚いご指導をしてくださった東京学芸大学小林晋平教授、納得がいくまで議論に付き合ってださった研究室の先輩方・同期の皆様に深く感謝申し上げます。

Reference

[1] Asakawa and Kobayashi, “Noncommutative Solitons of Gravity”, Classical and Quantum **27** (2010) 105014.

[2] Kobayashi and Asakawa, “Angles in fuzzy disc and angular noncommutative solitons”, Journal of High Energy Physics **04** (2013) 145.

[3] Gopakumar *et al.*, “Noncommutative Solitons”, Journal of High Energy Physics **05** (2000) 020.

[4] Terashima, “空間非可換性が初期宇宙の構造とインフラトンに与える影響について”, 東京学芸大学 卒業論文 (2024) .

——index へ戻る

SP-33

ワームホールを運動する粒子と時間的閉曲線の実現可能性

慶應義塾大学
水野　湧真

ワームホールを運動する粒子と時間的閉曲線の実現可能性

水野 湧真 (慶應義塾大学大学院 理工学研究科)

Abstract

アインシュタイン方程式の解の一つとして、通過可能なワームホールが理論的に存在しうることが知られている。中でも、Morris と Thorne によって提案された静的かつ球対称なワームホール解は、実際に人間が通過することが可能かという観点から詳細に検討された [1]。そこで重要な関数として、赤方偏移関数と形状関数というものがある。これらは文字通り、重力赤方偏移の強さとワームホールの形状を決める関数である。本発表では、ワームホール時空における粒子の測地線運動に関して、赤方偏移関数および形状関数を具体的に定め、粒子のエネルギーや角運動量に応じた運動の特徴を整理する。特に、運動の変化をワームホールの埋め込み図に描く手法を紹介し、その振る舞いを直感的に理解するための視覚的アプローチについても概観する。 また、ワームホールは時間的閉曲線 (CTC) としても有名であり、それは理論的に過去への時間移動の可能性を意味する。このような CTC の存在は因果律の破れに直結する重大な問題であり、一般相対論の枠組み内での時間の性質を考える上でも重要な意義を持つ。これらのメカニズムを説明し、今後の研究にどのように応用していくかを紹介する。なお、本発表では主に [2] のレビューを行う。

1　イントロダクション

本発表は主に [2] のレビューである。一般相対性理論の解の一つとして、通過可能なワームホールがある。ワームホールとは二つの遠く離れた地点を結ぶ橋のようなもので、通常よりもはるかに速く移動することや別の宇宙へ行けることができるものである。一般に通過可能なワームホールを構成するためには、ヌルエネルギー条件を破るエキゾチック物質の存在が不可欠であることも知られている。粒子がワームホール内を運動する様子を知るためには、与えられた計量から測地線方程式を解き、保存量であるエネルギーや角運動量を決定する必要がある。しかし、各保存量を与えても、測地線の運動を解析的に解くことはできない。そこで数値計算により、3 次元ユークリッド空間に埋め込んだワームホール図に対して、粒子の運動の軌跡を描く。このとき、エネルギーや角運動量の値によって、粒子がワームホールを通過せずに元の宇宙に留まり続ける”bound orbit”と、ワームホールを通過して別の宇宙に移動する”escape orbit”に分かれることを説明する。最後に時間的閉曲線の可能性について説明する。なお、単位系は $G = c = 1$ とする。

2　ワームホール解の数学的モデル

静的球対称時空のワームホール解として、Morris と Thorne が、

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)}dt^2 + \frac{dr^2}{1 - b(r)/r} + r^2 d\Omega^2 \quad (1)$$

を発見した。ここで、$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ である。また、$\Phi(r)$ は重力赤方偏移を決める赤方偏移関数であり、$b(r)$ はワームホールの形を決定する形状関数である。θ と ϕ の範囲は、それぞれ 0 から π と 0 から 2π の間を動く。ここで、赤方偏移関数と形状関数に関する制約を述べておく。

- $b(b_0) = b_0$ となる点 b_0 を r 座標の最小値として、$r = b_0$ の部分をワームホールの喉と呼ぶことにする。したがって、r 座標の範囲は b_0 から ∞ まで動く。
- $r > b_0$ に対して $\frac{b(r)}{r} \leq 1$ とする。これより、$g_{rr} < 0$ となる。
- 漸近平坦性を課すために、$r \to \infty$ のときに $\frac{b(r)}{r} \to 0$ と $\Phi(r) \to 0$ を仮定する。
- ワームホールの形が喉において膨らんでいることを仮定するために、$r > b_0$ で $\frac{b(r) - rb'(r)}{b(r)^2} > 0$ とする (flaring-out condition)。

- 上の条件で $r = b_0$ のとき、$b'(r) \leq 1$。

エネルギー運動量テンソルについては、$T^{\nu}_{\mu} = diag(-\rho, p_r, p_t, p_t)$ のように、完全流体を仮定する。これと計量よりアインシュタイン方程式を計算すると、

$$\rho = -\frac{b'}{8\pi r^2} \tag{2}$$

$$p_r = -\frac{b}{8\pi r^3} + \left(1 - \frac{b}{r}\right)\frac{\Phi'}{4\pi r} \tag{3}$$

$$p_t = \frac{1}{8\pi}\left(1 - \frac{b}{r}\right)\left(\Phi'' + (\Phi')^2 - \frac{rb' - b}{2r(r-b)}\Phi' + \frac{\Phi'}{r} - \frac{rb' - b}{2r^2(r-b)}\right) \tag{4}$$

となる。

次に、形状関数を具体的に指定する。その際、先に述べた制約の上で関数を決定する。ここでは、形状関数を指数関数型のものとして、

$$b(r) = re^{-(r-b_0)} \tag{5}$$

と置くことにする。赤方偏移関数に関しては、

$$\Phi(r) = \frac{\gamma}{2r} \tag{6}$$

と置く。ここで、γ は定数であり、$\gamma = 0, 1$ のどちらかを取るとする。特に $\gamma = 0$ のとき、$\Phi(r) = 0$ となるが、このときを超静的なワームホールと呼ぶことにする。

時間一定で赤道面におけるワームホール時空を表すために、3 次元ユークリッド空間への埋め込みがよく行われる。円柱座標計量、

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 \tag{7}$$

に対して埋め込みを行うと、

$$\frac{dr}{dz} = \left(\frac{r}{b(r)} - 1\right)^{-1/2} \tag{8}$$

となる (図 1 を参照)。

一方、元の計量では $r = b_0$ で座標特異点となるため、$dl^2 = (1 - b(r)/r)^{-1} dr^2$ という座標変換を行なっておく。このとき、l は固有距離と呼ばれ、$l = 0$ で喉となり、$l \to \pm\infty$ で上部の宇宙と下部の宇宙の無限遠となる。

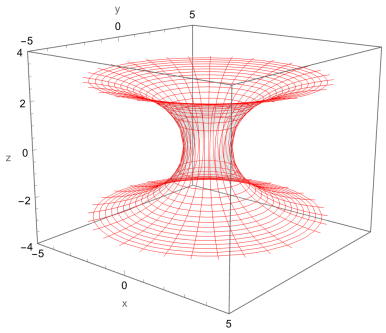


図 1: ワームホールの埋め込み図

3 時間的測地線

計量より、ラグランジアンを $\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}$ で定義する。ただし、λ はアフィンパラメータである。$\theta = \frac{\pi}{2}$ の赤道面で測地線を考えると、オイラーラグランジュ方程式より、

$$\dot{t} = Ee^{-2\Phi(r)} \tag{9}$$

$$\dot{\phi} = \frac{L}{r^2} \tag{10}$$

$$\dot{r}^2 = \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)\left(E^2 e^{-2\Phi(r)} - \frac{L^2}{r^2} + \epsilon\right) \tag{11}$$

となる。ここで、E と L は粒子または光子のエネルギーと角運動量であり、$\epsilon = 1, 0, -1$ はそれぞれ空間的、ヌル、時間的な測地線を表している。以下では、時間的な測地線のみを考える。

式 (9)、(10)、(11) より、r 方向の加速度を求めると、

$$\ddot{r} = (1 - e^{-(r-b_0)})\frac{L^2}{r^3} + \frac{1}{2}\left(E^2 e^{-2\Phi(r)} - \frac{L^2}{r^2} - 1\right)e^{-(r-b_0)} \tag{12}$$

となる。この式から、時間的曲線が円軌道 ($\ddot{r} = 0$、$\dot{r} = 0$) を描くのは、$r = b_0$ の喉の部分だけであることがわかる。

次に、固有距離を用いて測地線が喉を通過するときとしないときの条件を調べていく。固有距離を固有時間で微分した結果として、以下が得られる。

$$\left(\frac{dl}{d\tau}\right)^2 = E^2 e^{-2\Phi(r)} - V(L.l) \tag{13}$$

ただし、$V(L, l) = \frac{L^2}{r^2} - 1$ であり、これはポテンシャルを表す。このポテンシャルの概形を調べるために、喉における一階微分と二階微分の値を考える。すると、

$$\left.\frac{dV}{dl}\right|_{l=0} = 0 \tag{14}$$

$$\left.\frac{d^2V}{dl^2}\right|_{l=0} = -\frac{L^2}{r^4}\left(\frac{b(r)}{r} - b'(r)\right)\Bigg|_{l=0} < 0 \qquad (15)$$

となる。ただし、最後の不等式は flaring out condition を用いた。これらの式から分かるように、ポテンシャルの形は喉において極大点となり、不安定な点となることがわかる。そこで、粒子のエネルギーとポテンシャルの大小を比較することによって、粒子が喉を通過できるか否かを判定する。もし粒子が喉を通過しない軌道 (bound orbit) をとるとすると、

$$E^2 e^{-2\Phi(r)} - V(L.l) \leq 0 \qquad (16)$$

すなわち、

$$\frac{L}{\sqrt{E^2 e^{-\gamma/b_0} - 1}} \geq b_0 \qquad (17)$$

となる。逆に、粒子が喉を通過する escape orbit をとるときの条件式は、

$$\frac{L}{\sqrt{E^2 e^{-\gamma/b_0} - 1}} < b_0 \qquad (18)$$

となる。これで、粒子が bound orbit と escape orbit をとるときのエネルギーと角運動量の条件式が求まった。

4 埋め込み図に対する粒子の測地線軌道と時間的閉曲線

ここでは、ワームホールの埋め込み図に対して、実際に粒子がどのような測地線を辿るのかを図的に解釈する。式 (10)、(11) より、

$$\left(\frac{dl}{d\phi}\right)^2 = \left(1 - e^{-(r-b_0)}\right)\left[\left(\frac{E^2 e^{-\gamma/r} - 1}{L^2}\right)r^4 - r^2\right] \qquad (19)$$

が得られる。これを、先ほど求めたワームホールの埋め込み図に対して数値解析によりプロットを行うと、各図のようになる。ただし、各図は前節で求めた喉の通過条件の式である式 (17)、(18) により場合分けをしている。このようにして、実際の時間的測地線を数値解析により可視化することができた。

最後に、通過可能なワームホールを用いると空間的な移動だけでなく、過去への時間移動も理論上可能になることを説明する。いま、我々の宇宙を 1 枚のシートで表し、そのシート状にワームホールが存在すると仮定する。このとき、当然入口と出口の時

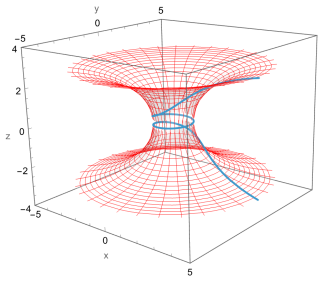


図 2: escape orbit ($E = 15.64$、$L = 15.6$、$b_0 = 1$、$\gamma = 0$)

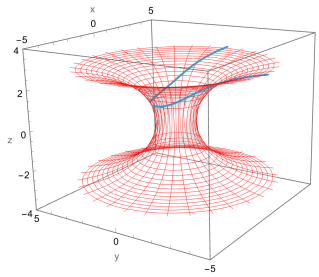


図 3: bound orbit ($E = 12.5$、$L = 15.6$、$b_0 = 1$、$\gamma = 0$)

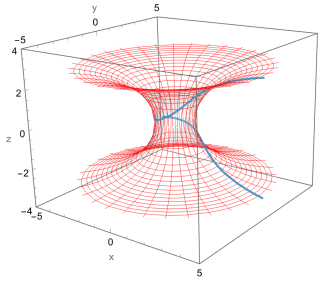


図 4: escape orbit ($E = 26.5$、$L = 15.6$、$b_0 = 1$、$\gamma = 1$)

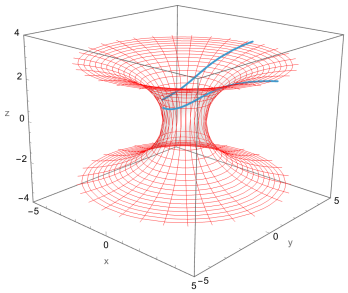


図 5: bound orbit ($E = 20.5$、$L = 15.6$、$b_0 = 1$、$\gamma = 1$)

間は同一であり、例えば 2100 年であるとする。そこで、出口付近を光速に近い速度で移動させた場合を考える。すると入口側で 10 年経過したときには、出口側ではたったの 1 年しか経過していないなどといった現象が起こる。これは特殊相対性理論によるものである。したがって、2110 年であるワームホールの入口から 2101 年である出口まで移動すれば。旅行者にとっては過去へ時間移動したことになる。これが、通過可能なワームホールを用いた過去への時間移動である。

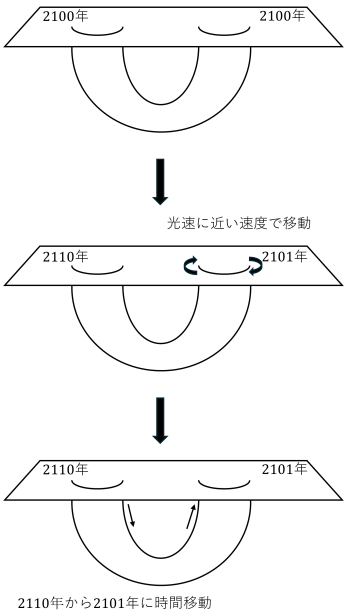


図 6: ワームホールを用いた時間移動の方法

5　まとめと今後の展望

ラグランジアンから得られる粒子の測地線方程式から、ワームホールの喉を通過するときとしないときの、エネルギーと角運動量の条件式が求まった。その結果をもとに、３次元ユークリッド空間へのワームホールの埋め込み図に対して、粒子の測地線の様子を数値解析により図示した。また、ワームホールを用いて過去への時間移動も可能になる。今後は、エネルギーや角運動量、さらには形状関数や赤方偏移関数によって具体的にどの程度の時間移動が可能であるかを調べ、それらの特徴について調べていくことにする。

Reference

[1]M.S. Morris & K.S. Thorne 1988, Am. J. Phys. 56, 395

[2]A. Dutta, D. Roy & S. Chakraborty 2024, New Astron. 111, 102236

——index へ戻る

SP-34

宇宙論における対称テンソル場

弘前大学
阿部　瑞樹

宇宙論における対称テンソル場

阿部 瑞樹 (弘前大学大学院 理工学研究科)
共著者　仙洞田 雄一 (弘前大学)

Abstract

長年の実験的、理論的な探求の努力にも関わらずインフラトンとなるスカラー場の正体は明らかになっていない。そのため近年ではベクトル場や反対称テンソル場のような異なる性質の場によってインフレーションを実現するモデルの研究も行なわれている。我々はインフレーション宇宙の研究の文脈で計量以外の対称テンソル場が存在する場合についての探究がし尽くされていないことに着目している。本研究では、対称テンソル場が宇宙膨張を実現させることができるのか、また、他の場によって実現されている宇宙膨張に対してどのような影響を与え得るかについて議論する。

1 Introduction

一般的にインフレーションの研究ではスカラー場が考察されることが多い。スカラー場は加速膨張を起こすことができ、さらにその摂動から現れる曲率ゆらぎのパワースペクトルは CMB 観測の結果とよく一致し、そのゆらぎの成長から現在の大規模宇宙構造が形成されることがよく知られている。

しかし、スカラー場によるインフレーションモデルは一定の成功を収めているものの、そういったスカラー場の起源は明らかでない。スカラー場以外での場を用いたインフレーションモデルにおける研究も発展途上と言える。これには、例えば vector inflation の研究 [1] が含まれる。

そこで我々は質量を持つ対称テンソル場に注目し、その場が宇宙膨張を起こす可能性があるか、また膨張する宇宙の中で何かと相互作用を起こすかについて興味を持った。今回の発表では、FLRW 時空で対称テンソル場が重力と non-minimal coupling した項を持つモデルを考え、膨張宇宙でどのように振る舞うかを議論したい。

我々の研究はまだ初期の段階にあるため、本発表ではテンソルの成分の自由度数を減らすための簡単化をしたモデルを考察することに留める。後述するように、時空は de Sitter インフレーションに限定して考えることになる。

本発表では単位系を $c = 8\pi G = \hbar = 1$ とする。計量は $(-,+,+,+)$ の符号を持ち、曲率テンソルは $R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma} - \cdots$ という符号である。

2 運動方程式

重力と non-minimal coupling した対称テンソル場 $s_{\mu\nu}$ の action

$$
\begin{aligned}
S &= \int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} R + L_s \right) , \\
L_s &= -\frac{1}{2} \nabla_\rho s_{\mu\nu} \nabla^\rho s^{\mu\nu} + \nabla_\rho s_{\mu\nu} \nabla^\mu s^{\nu\rho} \\
&\quad - \nabla_\mu s^{\mu\nu} \nabla_\nu s + \frac{1}{2} \nabla_\mu s \nabla^\mu s \\
&\quad - \frac{1}{2} m^2 \left(s_{\mu\nu} s^{\mu\nu} - s^2 \right) \\
&\quad + \frac{1}{8} R \left(2 s_{\mu\nu} s^{\mu\nu} - s^2 \right)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

を考える。ここで $s \equiv g^{\mu\nu} s_{\mu\nu}$、$R$ はリッチスカラーである。

最後の項の non-minimal coupling により、時空が Einstein space である場合、すなわち

$$
\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= \frac{R}{4} g_{\mu\nu} , \\
R_{\mu\nu\rho\sigma} &= C_{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{R}{12} \left(g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} \right)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

が成立する場合において、重力摂動の TT ゲージ条件と同じ

$$
s = \nabla_\nu s^{\mu\nu} = 0 \tag{3}
$$

が成り立つことが知られている [2]。まずそのことを確認しておく。

(1) を $s_{\mu\nu}$ で変分すると、運動方程式

$$\begin{aligned}&\Box s_{\mu\nu} - 2\nabla_\rho \nabla_{(\mu} s_{\nu)}{}^\rho + \nabla_\mu \nabla_\nu s \\ &- g_{\mu\nu}\left(\Box s - \nabla_\rho \nabla_\sigma s^{\rho\sigma}\right) - m^2\left(s_{\mu\nu} - s\, g_{\mu\nu}\right) \\ &+ \frac{1}{2} R\, s_{\mu\nu} - \frac{1}{4} R\, s\, g_{\mu\nu} = 0\end{aligned} \tag{4}$$

が得られる。これの発散とトレースは

$$\begin{aligned}&m^2\left(\nabla^\nu s_{\mu\nu} - \nabla_\mu s\right) = 0\,, \\ &2\Box s - 2\nabla_\rho \nabla_\sigma s^{\rho\sigma} - 3m^2 s + \frac{1}{2} R\, s = 0\end{aligned} \tag{5}$$

である。発散を計算する際には (2) を用いて簡単化している。前者を後者に代入すると、$R \neq 6m^2$ である時 $s = 0$ が課されることが分かり、以下、$R \neq 6m^2$ を仮定する。その時、$s = 0$ を前者に代入し直して $\nabla^\nu s_{\mu\nu} = 0$ を得る。従って、TT 条件 (3) が得られた。(3) を用いて、(4) から簡単化された運動方程式

$$\Box s_{\mu\nu} + 2C_{\mu\rho\nu\sigma}\, s^{\rho\sigma} - \frac{R}{6}\, s_{\mu\nu} - m^2\, s_{\mu\nu} = 0 \tag{6}$$

を得る。

一方、(1) の $g_{\mu\nu}$ での変分から、エネルギー運動量テンソル

$$\begin{aligned}T^{\mu\nu} = &\nabla^\mu s_{\rho\sigma}\, \nabla^\nu s^{\rho\sigma} + 2\nabla_\rho s^\mu{}_\sigma\, \nabla^\rho s^{\nu\sigma} \\ &- 4\nabla^{(\mu} s_{\rho\sigma}\, \nabla^{|\rho|} s^{\nu)\sigma} + 2\nabla_\sigma s^{\mu\rho}\, \nabla_\rho s^{\nu\sigma} \\ &+ 4C^{(\mu}{}_{\alpha\beta\rho}\, s^{\nu)\rho}\, s^{\alpha\beta} + \frac{R}{3}\, s^\mu{}_\rho\, s^{\nu\rho} \\ &- 2s^{\rho\sigma}\, \nabla_\sigma \nabla_\rho s^{\mu\nu} + 2m^2\, s^\mu{}_\rho\, s^{\nu\rho} \\ &+ \frac{1}{2}\left(\nabla^\mu \nabla^\nu - g^{\mu\nu}\,\Box - \frac{R}{4}\, g^{\mu\nu}\right) s_{\rho\sigma}\, s^{\rho\sigma} \\ &+ g^{\mu\nu}\left[-\frac{1}{2}\nabla_\rho s_{\sigma\lambda}\, \nabla^\rho s^{\sigma\lambda} + \nabla_\rho s_{\sigma\lambda}\, \nabla^\sigma s^{\lambda\rho}\right. \\ &\left. - \frac{1}{2} m^2\, s_{\sigma\lambda}\, s^{\sigma\lambda} + \frac{1}{4} R\, s_{\sigma\lambda}\, s^{\sigma\lambda}\right]\end{aligned} \tag{7}$$

が得られる。ここで、既に (2) と (3) を用いている。Einstein 方程式は

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \tag{8}$$

である。

3 de Sitter 時空上での振る舞い

計量を空間的に平坦な FLRW 時空

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\delta_{ij} dx^i dx^j \tag{9}$$

とする。以下、ドットを t での微分とし、$H = \dot{a}/a$ と書く。Einstein space であるとすると $\dot{H} = 0$ でなければならないので、H は定数である。したがって、時空としてスケール因子 $a \propto e^{Ht}$ の de Sitter インフレーションを考えることになる。

対称テンソル $s_{\mu\nu}$ が時間 t のみに依存した関数 $\sigma(t)$ を用いて、

$$s_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \sigma & & \\ & \frac{a^2\sigma}{3}\,\delta_{ij} & \end{pmatrix} \tag{10}$$

と書ける場合について考える。こうすることで TT 条件 (3) のうちトレース条件 $s = 0$ は自明に満たされる。一方、発散条件 $\nabla^\mu s_{\mu\nu} = 0$ は

$$\dot{\sigma} = -4H\sigma \tag{11}$$

と書き直される。

運動方程式 (6) に de Sitter 計量と $s_{\mu\nu}$ の ansatz (10)、および発散条件 (11) を代入すると、σ が恒等的に 0 でない解を持つことが許されるための条件として、

$$m^2 = 2H^2 \tag{12}$$

が得られる。ところが、de Sitter では $R = 12H^2$ であるから、これは前節でおいた $R \neq 6m^2 \Leftrightarrow 2H^2 \neq m^2$ という仮定と矛盾してしまう。故に以上の場合では $\sigma = 0$ しか許されないことがわかる。さらに、この時は (7) の $T_{\mu\nu}$ は 0 になるので、$s_{\mu\nu}$ が de Sitter インフレーションを実現することもできず、本研究では省いているが、宇宙定数などの導入が必要となる。

4 Results & Conclusion

今回の研究では、de Sitter 時空上で有質量の対称テンソル場が重力と non-minimal coupling しているモデル (1) を考えた。条件 $2H^2 \neq m^2$ の下で、対称テンソル場が対角成分のみを持つ場合、運動方程式の解は $s_{\mu\nu} = 0$ となった。

今回とは異なる結論を探求するために、等号 (12) が成立する場合を考察することに興味が持たれる。なお、(12) は “partially massless 条件” として知られている。

今後、一般的な膨張宇宙で 0 でない解を持つことができる対称テンソル場の理論を探求するとともに、それが宇宙膨張を駆動する可能性についても検討を進めていきたい。

Reference

[1] A. Golovnev, V. Mukhanov and V. Vanchurin, JCAP **06**, 009 (2008) [arXiv:0802.2068 [astro-ph]].

[2] I. L. Buchbinder, V. A. Krykhtin and V. D. Pershin, Phys. Lett. B **466**, 216-226 (1999) [arXiv:hep-th/9908028 [hep-th]].

——index へ戻る

SP-35

重力波観測によるハッブル・ルメートル定数の測定誤差推定

広島大学
大富　有歩子

重力波観測によるハッブル・ルメートル定数の測定誤差推定

大富 有歩子 (広島大学大学院 先進理工系科学研究科)

Abstract

現在、宇宙論的観測 と近傍宇宙の観測から求めた H_0 は一致しない、という問題がある。そこで、重力波観測を用いた H_0 の新たな測定方法が注目されている。2017 年に発生した重力波イベント GW170817 において、重力波の観測から光度距離が、銀河のスペクトルの観測から赤方偏移がそれぞれ測定され、H_0 の観測値が得られた。H_0 の決定精度を改善するためには、それぞれの誤差を小さくする必要があり、光度距離の誤差は重力波検出器の雑音の影響を受け、赤方偏移は固有速度の影響を受ける。そこで、本研究では、まず、GW170817 の光度距離と固有速度の誤差をガウス分布と仮定して H_0 の分布を求め、そこから H_0 を決定し、LIGO-Virgo コラボレーション他による先行研究の結果を再現した。この先新たに近傍宇宙で重力波イベントが発生した際、光度距離と固有速度の誤差がどの程度 H_0 の決定に影響を及ぼすのかを知りたい。今回の研究では疑似カタログを用いて、固有速度や光度距離の 誤差の推定分布を作成し、この誤差が H_0 にどの程度影響するのかを議論する。

1 導入

ハッブル定数観測[1]は主に宇宙論的観測 (Planck) と近傍宇宙での観測 (SHoES) の二つの方法を用いて行われている。宇宙論的観測では CMB のパワースペクトルを観測し、Λ CDM モデルにおける宇宙論パラメータを CMB の場合に最も一致するように決定し、ハッブル定数を決定する。これは間接的観測で、初期宇宙を観測する。一方、近傍宇宙での観測では、セファイド変光星や Ia 型超新星を用いて近傍銀河の距離を測定、そこからさらに遠方の超新星の距離を測定することで赤方偏移と距離の関係からハッブル定数を計算する方法である。これは直接的観測で、現在の宇宙を観測する。それぞれの観測で決定されたハッブル定数は宇宙論的観測では 67.74 ± 0.46[km/s/Mpc] で、近傍宇宙での観測では 73.24 ± 1.74[km/s/Mpc] となっており、両者の間にはそれぞれの測定誤差を超える範囲で食い違いが生じている。 [Abbott, B. P. *et al.* (2017)]

この問題を解決する手段として、重力波の観測からハッブル定数を決定する方法が注目されている。重力波による観測では、標準音源 [Schutz, B. F. (1986); Holz, D. E. and Hughes, S. A. (2005)] と呼ばれる方法で、直接光度距離 d_L を決定することができるため、今までとは独立した手段でハッブル定数を決定することができる。 まず、重力波の観測データから、振幅 h、周波数 f、周波数の時間変化 $\dot{f}$ を得る。重力波のエネルギーが放出されることにより、エネルギー損失を補うために軌道半径が減少することで、周波数が加速度的に変化することから、重力波の放射エネルギーと連星系の軌道エネルギーの関係から周波数と周波数の時間変化の関係を得ることができる。 [Maggiore, M. (2007)] 周波数の時間変化の式からチャープ質量を計算することができるので、得られた振幅のデータと求めたチャープ質量を用いて光度距離 d_L を計算することができる。ただし、求められるチャープ質量は赤方偏移の影響を受けるため、実際のチャープ質量 M_c を計算するには赤方偏移を考慮して補正する必要があるが、この赤方偏移は重力波の観測から得ることはできないため、連星合体が発生した母銀河を特定し、電磁波観測から赤方偏移 z を求める必要がある。

重力波の観測は、LIGO [Aasi, J. *et al.* (2015)], Virgo [Acernese, F. *et al.* (2015)], KAGRA [Akutsu, T. *et al.* (2021)] などの検出器によって行われている。LIGO は Hanford と Livingston にそれぞれ干渉計が設置されている。

[1]以下、ハッブル・ルメートル定数をハッブル定数と表記する。

2 方法

将来別の連星合体が発生した場合に、光度距離や固有速度の誤差がハッブル定数 H_0 を決定するうえで、どの程度影響するのかを知るために、疑似カタログを用いてシミュレーションした。すでに発生した重力波イベントとして、GW170817 のデータを用いた。

GW170817 は、2017 年に発生した重力波イベントで、中性子星の連星合体により発生した。また、同領域内でガンマ線バーストが発生し、重力波と電磁波の両方で観測された。重力波と電磁波の両方で観測されたのははじめてのことかつ唯一で、初のマルチメッセンジャー天文観測となった。このイベントでは、中性子星の連星合体によって重力波と電磁波 (ガンマ線バースト) が発生し、その後中性子星の残骸が拡散されることによりキロノヴァが発生した。

観測では、まず重力波検出器 (LIGO,Virgo) が GW170817 を観測。ある程度の発生領域が絞られ、その後光学望遠鏡によりキロノヴァの可視光が観測され、ホスト銀河が NGC4993 と特定され、ホスト銀河の速度がそれにより赤方偏移が決定された。

ホスト銀河の CMB 静止系に対する速度 v は、$v = v_H \pm \sigma_v = 3017 \pm 166\,\mathrm{km/s}$ と決定された。また、$v = cz$ より対応する赤方偏移が決定され、$z_{\mathrm{obs}} = z_{\mathrm{true}} \pm \sigma_z = v_H/c + \sigma_v/c = 0.01006 \pm 0.00055$ と求まった。

また、重力波のデータから、標準音源の方法でホスト銀河 (NGC4993) の光学距離 d_L が、

$$d_L = 43.8^{+2.9}_{-6.9}\,\mathrm{Mpc} \tag{1}$$

と計算された。

今 z が 1 よりも十分に小さい近傍宇宙で考えているので、ハッブルの法則 $v = H_0 d_L$ を用いることができる。以上より、ハッブル定数は、

$$H_0 = \frac{cz}{d_L} \tag{2}$$

となる。

以上より、最終的に、ハッブル定数 H_0 は 信頼度 68.3% で $H_0 = 70.0^{+12.0}_{-8.0}\,\mathrm{km/s/Mpc}$ と決定された。まず、GW170817 の光度距離の誤差の観測結果と固有速度の標準偏差のガウス分布を用いて GW170817 の再現を行い、先行研究と同様の確率分布を得た。また、得られたハッブル定数は、$H_0 = 70.0^{+14.0}_{-9.0}\,\mathrm{km/s/Mpc}$ となった。将来別の連星合体が発生した場合に、光度距離や固有速度の誤差がハッブル定数 H_0 を決定するうえで、どの程度影響するのかを知るために、疑似カタログを用いてシミュレーションした。疑似カタログは、$H_0 = 68\mathrm{km/s/Mpc}$ で設定し、重力波検出器 3 台 (LIGO,Virgo) がデザイン感度を持っていると仮定して作られている。

まず、疑似カタログから光度距離 d_L の標準偏差を取得する。また、固有速度の標準偏差 σ_v は 100 ∼ 700km/s の範囲で仮定した。それぞれの誤差についてガウス分布を仮定し、光度距離と固有速度の誤差分布を作成した。

次に、すでに発生し、ハッブル定数 H_0 が決定されているイベントである GW170817 の再現データと先ほど作成した疑似カタログのデータから、赤方偏移 z と光度距離 d_L をサンプルした。この GW170817 と疑似カタログのイベントを 1 ∼ 4 点用い、これらについて最小二乗法を用いてハッブル定数を決定する。この作業を繰り返すことで、ハッブル定数の分布を作成し、分布の最頻値とその誤差を信頼区間 68% として求めた。ここで、先行研究の結果が最頻値を用いていたため、本研究結果を先行研究の結果と比較するため、最頻値を用いている。最小二乗法でフィットするデータ点は GW170817 の再現データと疑似カタログから作成したイベントを合わせた 2 ∼ 5 点を用いた。原点を通り、サンプル点 (GW170817 の再現とサンプル) を最もフィットする直線の傾きがハッブル定数 H_0 の逆数、H_0^{-1} に相当する。

$$\chi^2 = \sum_i \frac{[d_L^{(i)} - cH_0^{-1} z_i]^2}{\sigma^2_{d_L(i)}} \tag{3}$$

この χ^2 を最小化することで、二点 (GW170817 とサンプル) を最もフィットする H_0 を決定できる。つまり、χ^2 が最小になるには、$\mathrm{d}\chi^2/\mathrm{d}H_0 = 0$ になればよい。よって、ハッブル定数は、

$$H_0 = \left(c \sum_i \frac{z^2_{(i)}}{\sigma^2_{d_L(i)}} \right) \Bigg/ \left(\sum_i \frac{d_L^{(i)} z_{(i)}}{\sigma^2_{d_L(i)}} \right) , \tag{4}$$

で求めることができる。

今回は、赤方偏移、固有速度を固定して、サンプル数を変化させた場合と、サンプル数、固有速度を固定し赤方偏移を変化させた場合、さらに、赤方偏移、サンプル数を固定し固有速度を変化させた場合についてそれぞれハッブル定数を計算した。

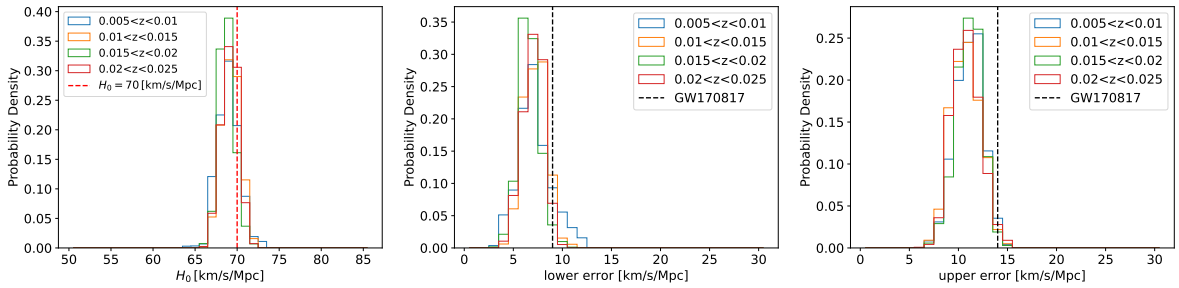


図 1: 赤方偏移を変化させた場合の最頻値 (左)、下側誤差 (中)、上側誤差 (右).

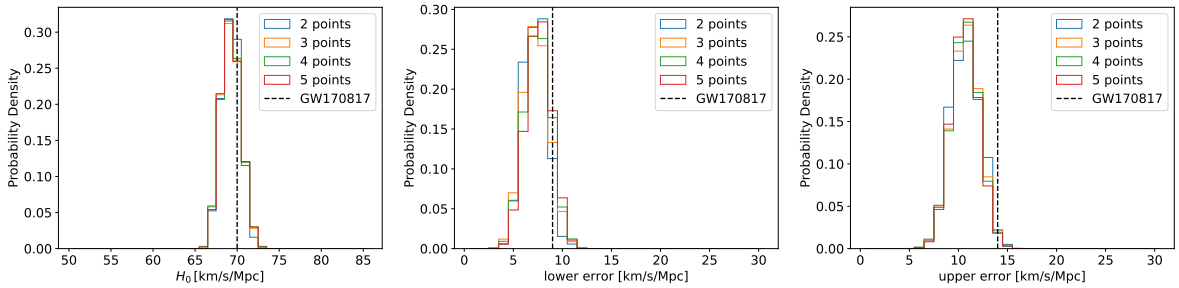


図 2: イベント数を変化させた場合の最頻値 (左)、下側誤差 (中)、上側誤差 (右).

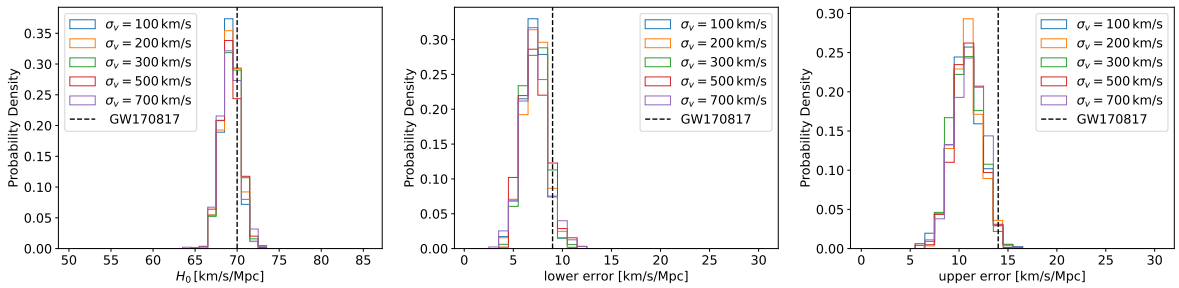


図 3: 固有速度の標準偏差を変化させた場合の最頻値 (左)、下側誤差 (中)、上側誤差 (右).

3　結果

赤方偏移を変化させた場合の最頻値、上側誤差、下側誤差は図 1 のようになった。最頻値、誤差ともに大きな影響は見られなかった。これは、光度距離の誤差で重みづけをしてハッブル定数を求めているため、光度距離の誤差が大きいイベントはハッブル定数の決定にあまり寄与しないことによるものだと考えられる。

イベント数を変えた場合は図 2 のようになった。最頻値に大きな影響は見られなかったが、イベント数を増やした場合、誤差は小さくなった。これは、イベント数を増やしたことでその中に光度距離の誤差が小さいものが含まれる可能性が高くなったため、より精度よくハッブル定数が決まった、と考えられる。

固有速度の標準偏差を変化させた場合は図 3 のようになった。最頻値、誤差ともに大きさはほとんど変わらなかったが、精度が少し悪くなり、その様子が特に見て取れたのが 500 km/s 以上のものであった。これは固有速度の標準偏差については重みづけをせずに計算を行っているため、固有速度の標準偏差が大きいものを用いてしまうとハッブル定数のの誤差も大きくなってしまうためだと考えられる。

4　結論

本論文では、GW170817 と疑似カタログのイベントを用いて赤方偏移、固有速度、イベント数をそれぞれ変えた場合のハッブル定数を計算し、赤方偏移を変えた場合には影響はあまり見られず、イベント数を増やした場合には誤差が小さくなり、固有速度の標準偏差を大きくした場合には誤差が大きくなる、という結果を得た。その結果、将来、別のイベントが発生した際に、ハッブル定数を精度良く計算するためには、少なくとも新たに 1 イベントあると測定誤差は大きく改善し、また固有速度が 500 km/s 以下のイベントを用いる必要があるということがわかった。また、固有速度の標準偏差について誤差を抑制するために、イベント数を増やした場合でどのようになるかを調べる必要がある。

謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP23H04893 の助成を受けたものです。また、本研究は西澤篤志氏との共同研究に基づくものです。

Reference

Abbott, B. P. *et al.* 2017, Nature, 551(7678):85–88.

Schutz, B. F. 1986, Nature, 323:310.

Holz, D. E. and Hughes, S. A. 2005, Astrophys. J., 629:15–22.

Maggiore, M. 2007, Gravitational Waves. Vol. 1: Theory and Experiments. Oxford University Press.

Aasi, J. *et al.* (LIGO Scientific Collaboration), 2015, Class. Quant. Grav., 32:074001.

Acernese, F. *et al.* 2015, Class. Quant. Grav., 32:024001.

Akutsu, T. *et al.* (KAGRA Collaboration) 2021, PTEP, 2021, 05A101

——index へ戻る

SP-36

非摂動的な手法を用いたエンタングルメント・ハーベスティングの解析

九州大学
上永　裕大

非摂動的な手法を用いたエンタングルメント・ハーベスティングの解析

上永 裕大　　(九州大学 大学院理学府 物理学専攻)
共著者 ギャロック芳村 建佑 (東京大学 情報理工学系研究科)
平良 敬乃 (九州大学 大学院理学研究院 物理学部門)

Abstract

場の量子論においては, 時空的に分離された異なる領域の真空状態の間にも, エンタングルメント（量子もつれ）が存在することが知られている. このエンタングルメントは, 量子系をプローブとして用い, 量子場との相互作用を通じて抽出することが可能であり, この現象は“ Entanglement harvesting ”と呼ばれている. これまでに, Minkowski 時空をはじめ , BTZ ブラックホール時空など多様な背景時空において, その解析が行われてきた. 一方で,“ Entanglement harvesting ”を理論的に解析する際には, 量子系の時間発展を精密に追う必要があるが, 従来の研究の多くは摂動近似に依存している. 本研究ではまず, 量子場と相互作用する量子系の時間発展を非摂動的に記述する手法として, 量子ランジュバン方程式を相対論的枠組みに拡張する. その上で, この枠組みを応用し,“ Entanglement harvesting ”における非摂動論の影響を明らかにする.

1 Introduction

場の量子論において異なる領域の真空状態には, たとえ時空的に分離していても, エンタングルメント (量子もつれ) が存在することが知られている. 二つの局所プローブが真空状態の量子場と短時間相互作用するだけでもつれを「収穫」できることは [1] によって示され, その後このプロセスは,”Entanglement harvesting”と呼ばれ量子情報処理のリソースとして注目を集め, 量子場理論（QFT）や重力理論においても関心を集めつつある.

従来のこの分野において時間発展を追う際は, 摂動論を用いた解析が主流であった. しかし近年, ガウス状態やを用いた非摂動的な手法が提案されつつある.[2, 3]

また非摂動的に”Entanglement harvesting”を解析する際は, 場とデルタ結合するモデルが考えられ, このときでは真空からの収穫はできないことが判明している [4].

本研究は、3+1 次元 Minkowski 時空上の量子スカラー場と有限時間相互作用する調和振動子型検出器が場から収穫するエンタングルメント量を非摂動的に解析し、非マルコフ性の効果など明らかにすることを目的とする.

2 相対論的量子ランジュバン方程式

曲がった時空上の量子スカラー場が 2 つの量子調和振動子と相互作用するモデルを考える. ここでは, $\hbar = k_B = c = G_{\rm N} = 1$ とする.

2.1 モデル

任意の globally hyperbolic な 3+1 次元時空 $(\mathcal{M}, g)$ を考える. ここで $\mathcal{M}$ は時空を表す多様体であり, g は計量である. 以下では簡単のため, 時空全体で定義される時間パラメータを t と表すことにする. 例えば Minkowski 時空であれば, 任意の時空点は $\mathsf{x} \equiv (t, \boldsymbol{x})$ と書く.

Heisenberg 描像における全体系のハミルトニアン

を次のように与える.

$$\hat{H}_{\rm tot}(t) = \hat{H}_{\rm HO}(t)\otimes \mathbb{1}_{\phi} + \mathbb{1}_{\rm HO}\otimes \hat{H}_{\phi}(t) + \hat{H}_{\rm int}(t) \tag{1a}$$

$$\hat{H}_{\rm HO}(t) = \sum_{j=1}^{2} \frac{{\rm d}\tau_j(t)}{{\rm d}t}\Omega_j \hat{a}_j^{\dagger}\hat{a}_j\,, \tag{1b}$$

$$\hat{H}_{\phi}(t) = \sum_{n} \omega_n \hat{b}_n^{\dagger}\hat{b}_n\,, \tag{1c}$$

$$\hat{H}_{\rm int}(t) = -\sum_{j=1}^{2} \frac{{\rm d}\tau_j(t)}{{\rm d}t}\lambda_j \chi_j(\tau_j(t)) Q_j(\tau_j(t)) \otimes \phi(t, \boldsymbol{x}_j(t)) \tag{1d}$$

ここで $\hat{H}_{\rm HO}(t), \hat{H}_{\phi}(t), \hat{H}_{\rm int}(t)$ はそれぞれ調和振動子, 量子スカラー場, そして相互作用ハミルトニアンを表す. λ_j は検出器の相互作用の強さ, $\chi_j(\tau_j(t))$ はスイッチング関数をあらわす. 添え字の j は各検出器を表す.

2.2 量子ランジュバン方程式

Heisenberg 描像における振動子のダイナミクスは、量子ランジュバン方程式により記述できる.

$$\ddot{Q}_j(t) + \Omega_j^2 Q_j(t) + \int_{\mathbb{R}} {\rm d}s'\, {M_j}^{l}(t,s) Q_l(s) = \lambda_j \chi_j(t)\varphi_{0j}(f_t) \tag{2}$$

ここで,

$$\varphi_{0j}(f_t) \coloneqq \int_{\Sigma_t} {\rm d}^3x_j\, \sqrt{h} f(\boldsymbol{x}_j(t))\phi_0(\mathsf{x}_j(t))\,. \tag{3}$$

また ${M_j}^{l}$ は, dissipation kernel の行列であり,

$$M_{jl}(t,s) = -\Theta(t-s)[\varphi_0(\mathsf{x}_j(t)), \varphi_0(\mathsf{x}_l(s))] \tag{4}$$

と表される.

2.3 デルタ関数型スイッチングの列

スイッチング関数が $t\in[0,T]$ の間で値をもつとする. スイッチング関数を次のように N 個のデルタ関数の列で定義する.

$$\chi(t) = \frac{T}{N}\sum_{k=1}^{N} \chi\left(\frac{T}{N}k\right)\delta\left(t-\frac{T}{N}k\right) \equiv \frac{T}{N}\sum_{k=1}^{N}\chi(t_k)\delta(t-t_k) \tag{5}$$

このときの量子ランジュバン方程式 (2) の解は,

$$Q_j(t) = {G_j}^{l}[f_Q](t)\, Q_l(0) + {G_j}^{l}[f_P](t)\,\dot{Q}_l(0) + \sum_{k=1}^{N} {G_j}^{l}[f_{\Phi_0}](t_k)\Phi_{0l}(t_k) \tag{6}$$

である.

ここで,

$$\Phi_{0j}(f_{t_k}) \coloneqq \left(\frac{T}{N}\right)\lambda_j\chi_j(t_k)\varphi(f_{t_k}) \tag{7}$$

である.

また, 時間発展を表す関数である $G[f](t)$ は

$$G^{jl}[f](t) \coloneqq f(t)\delta^{jl} + \sum_{d=1}^{2}\sum_{a,b=1}^{N} K_{t,a}^{jd}\mathcal{K}_{a,b}^{dl} f(t_b) \tag{8a}$$

$$f_Q(t) \coloneqq \cos(\Omega_j t) \tag{8b}$$

$$f_P(t) \coloneqq \frac{\sin(\Omega_j t)}{\Omega_j} \tag{8c}$$

$$f_{\Phi_0}(t) \coloneqq \frac{\sin[\Omega_j(t-t_k)]}{\Omega_j}\Theta(t-t_k) \tag{8d}$$

と定義した.

さらに, $K^{jl}, \mathcal{K}^{jl}$ はそれぞれ

$$K_{t,t_b}^{jl} \coloneqq \sum_{a=1}^{N}\Theta(\tau-t_a)\left(\frac{T}{N}\right)^2 \frac{\sin[\Omega_j(\tau-t_a)]}{\Omega_j} M_{jl}(t_a,t_b), \tag{9a}$$

$$\mathcal{K} \coloneqq \sum_{n=0}^{N-1}\mathbb{K}^n, \tag{9b}$$

$$\mathbb{K} \coloneqq \begin{pmatrix} \mathbb{K}^{11} & \mathbb{K}^{12} \\ \mathbb{K}^{21} & \mathbb{K}^{22} \end{pmatrix}, \tag{9c}$$

$$\mathbb{K}^{jl} \coloneqq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ K_{3,1}^{jl} & 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ K_{4,1}^{jl} & K_{4,2}^{jl} & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ K_{N,1}^{jl} & K_{N,2}^{jl} & \dots & K_{N,N-2}^{jl} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{9d}$$

である.

3 Entanglement harvesting

3.1 ガウス形式

連続変数の量子力学における量子状態はガウス状態と呼ばれ, 1 次モーメント及び共分散行列により完全に決定される [5].

1 次モーメントは,

$$\langle \boldsymbol{r} \rangle \coloneqq (\langle Q \rangle, \langle P \rangle) \tag{10}$$

と定義される. ここで $\langle \cdot \rangle$ は検出器の状態に対する期待値を表す.

また共分散行列は,

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} \sigma_{QQ}(t) & \sigma_{QP}(t) \\ \sigma_{PQ}(t) & \sigma_{PP}(t) \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$\sigma_{ab}(t) \coloneqq \langle \{a(t),\ b(t)\} \rangle - 2 \langle a(t) \rangle \langle b(t) \rangle \tag{12}$$

である.

3.2 時間発展

共分散行列の各成分の時間発展を (6), (12) より記述すると,

$$\sigma_{ij}(t) = \mathbb{T}(t) \boldsymbol{\sigma}_{ij}^{(0)} \mathbb{T}^{\intercal}(t) + \mathbb{N}(t)\,. \tag{13}$$

ここで各変数を

$$\mathbb{T}(t) = \begin{pmatrix} G_i[f_Q](t) & G_i[f_P](t) \\ \dot{G}_i[f_Q](t) & \dot{G}_i[f_P](t) \end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}^{(0)} = \begin{pmatrix} \langle \{Q_i(0), Q_j(0)\} \rangle & \langle \{Q_i(0), P_j(0)\} \rangle \\ \langle \{P_i(0), Q_j(0)\} \rangle & \langle \{P_i(0), P_j(0)\} \rangle \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$\mathbb{N}(t) = \sum_{k,k'=1}^{N} \begin{pmatrix} G_i[f_\phi](t_k) \\ \dot{G}_i[f_\phi](t_k) \end{pmatrix} \nu_{k,k'} \begin{pmatrix} G_j[f_\phi](t_{k'}) \\ \dot{G}_j[f_\phi](t_{k'}) \end{pmatrix}^{\intercal} \tag{16}$$

$$\nu_{k,k'} \coloneqq \langle \{\varphi_{0i}(t_k), \varphi_{0j}(t_{k'})\} \rangle \tag{17}$$

と定義し, 1 次モーメントは 0 とした.

3.3 対数ネガティビティ

2-モードのガウス状態に対する対数ネガティビティは

$$E_{\mathcal{N}} = \max\{0, -\log_2 \tilde{\nu}_-\} \tag{18}$$

のように定義される.

ここで, $\tilde{\nu}_-$ は固有値を表し

$$\tilde{\nu}_\pm^2 = \frac{\tilde{\Delta} \pm \sqrt{\tilde{\Delta}^2 - 4 \det \boldsymbol{\sigma}}}{2}, \tag{19}$$

$$\tilde{\Delta} = \det \boldsymbol{\sigma}_{11} + \det \boldsymbol{\sigma}_{22} - 2 \det \boldsymbol{\sigma}_{12}, \tag{20}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{11} & \boldsymbol{\sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\sigma}_{12}^{\intercal} & \boldsymbol{\sigma}_{22} \end{pmatrix} \tag{21}$$

で定義される.

エンタングルをしている基準は,

$$\tilde{\nu}_- < 1 \tag{22}$$

である.

3.4 エンタングルしているか

(19), (22) より 2 つの調和振動子型 UDW 検出器がエンタングルしているかは,

$${\nu_-}^2 \coloneqq \tilde{\Delta} - \sqrt{\tilde{\Delta}^2 - 4 \det \boldsymbol{\sigma}} < 2 \tag{23}$$

を満たせばよい.

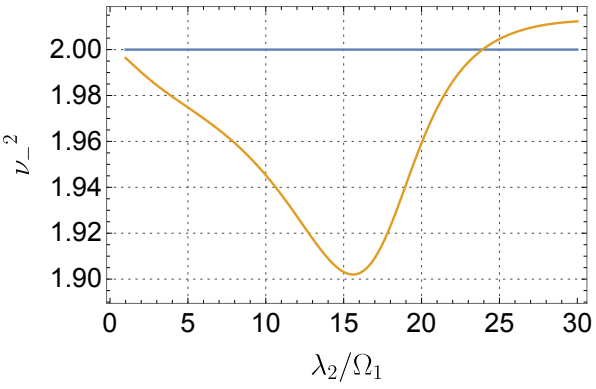


図 1: Entanglement harvesting の結果. 青線がエンタングルしているかの判定基準であり, この線より下側に値を持つとエンタングルしている. ここで検出器 1 の相互作用の強さは $\lambda_1/\Omega_1 = 1$, 検出器 2 の周波数は $\Omega_2/\Omega_1 = 2$, 検出器間の距離は $L/\Omega_1 = 2$ である.

4 結論、今後の展望

今回は, 任意の有限時間相互作用を行う 2 つの調和振動子型 UDW 検出器が量子スカラー場からどの

程度エンタングルメントを収穫できるかを解析した. 特に, デルタ関数型スイッチングの列を用いることで検出器が 2 つある際の解析解を導出することができた. また実際に, 場から収穫できるエンタングルメント量を見積もることができた.

今後の展望としては, 非マルコフ性が場のエンタングルメント収穫量に対してどういう影響を起こしうるのかを解析したいと考えている. 次に, 今回のモデルを任意の曲がった時空上で成り立つような形式に拡張し, 収穫できるエンタングルメント量の変化を見積もりたいと考えている.

Acknowledgement

天文・天体物理若手夏の学校を運営して下さったスタッフの方々、支援して下さった方々に心より感謝申し上げます。また本研究を行うにあたり議論、指導して下さった量子宇宙物理理論研究室の方々に、この場をお借りして心より感謝申し上げます。

Reference

[1] B. Reznik, Found. Phys. 33, 167 (2003)

[2] A. lapponi, et al., Phys. Rev. D 110, 025018

[3] A. B. Sánchez, et al., Phys. Rev. D 111, 105017

[4] P. Simidzija, E.Martin-Martinez, Phys. Rev. D 96, 065008

[5] Alession Serafini, CRC Press (2017)

——index へ戻る

SP-37

bootstrap と positivity bound

早稲田大学
田中　真

2025 年度 第 55 回 天文・天体物理若手夏の学校

bootstrap と positivity bound

田中 真 (早稲田大学理工学術院 先進理工学科)

Abstract

本資料では、bootstrap によって、重力理論が制限を受ける様子を概観する。bootstrap を用いれば、ラグランジアンから観測量を導き出すという困難な作業を回避できる。さらに、物理的な基本な条件を用いて、EFT 理論の候補を絞り込むことができる。ここで、物理的な基本条件とは、ポアンカレ不変性、ユニタリ性、因果律、局所性である。また、bootstrap のように観測量に注目して理論を構築するという考え方をとれば、UV 理論における情報を実験結果から得られる。さらに、物理的な基本条件の妥当性を検証できる。

1 導入

まず、既存の理論に満足せず新しい理論を考えることと、その方法として bootstrap を用いるモチベーションを説明する。今日の宇宙論には問題がある。その問題とは、一般相対性理論や素粒子論における標準理論では説明ができない観測結果が得られていることである。この問題を解決するために、様々な角度から、新しい理論が構築されている。それらの理論は常に、観測結果と比較され、妥当性が評価される。ここで、新しい理論の構築方法の 1 つに、既存の確立された理論のラグランジアンを修正し、新しい理論のラグランジアンを導き出すという方法がある。この方法では新しい理論のラグランジアンから観測量を導出し、理論の妥当性を評価する。しかし、一般にラグランジアンから観測量を導き出すことは困難である。そこで、この困難の回避方法として bootstrap という考え方がある。bootstrap とは、UV 完備な EFT 理論 (新しい理論) の候補を観測結果に頼らず絞り込むという考え方である。

次に、S-matrix bootstrap を導入する。bootstrap とは UV 完備な EFT 理論の候補を観測結果に頼らず絞り込むという考え方であった。特に、量子論における bootstrap では、UV 理論の散乱振幅に物理的な基本条件を課す時、UV 完備な EFT 理論が受ける制限を導出することで、EFT 理論の候補を絞りこむ。理論が対象とする物理的な状況に応じて、基本条件を変更する。この基本条件の選び方の違いで bootstrap には種類がある。例えば、S-matrix bootstrap や conformal bootstrap、cosomological boostrap などがある。本資料では特に、S-matrix boostrap に注目する。S-matrix bootstrap では、基本条件として、ポアンカレ不変性、ユニタリ性、因果律、局所性を UV 理論の散乱振幅に課す。この S-matrxi bootstrap によって絞り込まれる EFT 理論は散乱問題を設定できる物理的な状況を対象としている。

そして、2 章以降では S-matrix bootstrap によって重力理論が制限される過程を説明する。まず、物理的状況として散乱問題を設定し、UV 理論と EFT 理論の関係を考察する。次に、任意のエネルギーで成り立つ dispersion relation を導入し、それと整合性条件から EFT 理論の制限である positivity bound を導出する。この制限を k-essence に適用すると、スカラー場の摂動の伝播速度が光速を超えないことが示される。この結論には飛躍があるが、bootstrap により理論が制限されるという枠組み自体が重要である。

2 S-matrix Bootstrap

2.1 問題設定

想定する散乱問題を設定する。散乱問題を設定するうえで決めなければいけない要素は 3 つある。散乱に関与する粒子、粒子間の相互作用、入射散乱状態の 3 つである。まず、粒子について設定する。散乱に関与する粒子は 2 種類とする。1 種類目を粒子 ϕ とする。質量は M とし、スピンは 0 とする。2 種類目の粒子を π とする。π は massless 粒子とする。次に相互作用の形を設定する。2 つの粒子 ϕ と π は

$$gM\phi\pi^2 \tag{1}$$

という形で相互作用するとする。ただし、g は結合定数であり無次元量である。最後に、入射状態と散

乱状態を設定する。入射状態は、運動量 p_1 と p_2 をもつ 2 つの π が存在するとする。散乱状態も同様に、運動量 p_3 と p_4 をもつ 2 つの π が存在するとする。つまり、2 つの π が入射し、ϕ の伝播によって相互作用して、再び 2 つの π が散乱するという散乱問題を想定する。

2.2 UV 理論と EFT 理論

UV 理論において、2.1 で設定した散乱問題を考える。S-matrix bootstrap の仮定により、UV 理論におけ散乱振幅には、ポアンカレ不変性、ユニタリ性、因果律、局所性が課されている。
tree level において散乱振幅 $\mathcal{A}$ は次のように与えられる。

$$\mathcal{A} = \frac{g^2M^2}{M-s} + \frac{g^2M^2}{M-t} + \frac{g^2M^2}{M-u} \tag{2}$$

ただし、s、t、u は p_i で定められる Mandelstam 変数である。ここで、この散乱が低エネルギーという条件のもとで考える。つまり、

$$s,t,u << M \tag{3}$$

という状況を考える。すると、

$$\mathcal{A} = g^2\Sigma_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{s}{M^2}\right)^n + \left(\frac{t}{M^2}\right)^n + \left(\frac{u}{M^2}\right)^n\right] \tag{4}$$

$$= 3g^2 + \frac{g^2}{M^4}(s^2+t^2+u^2) + ... \tag{5}$$

となる。式 (2) では、重い粒子 ϕ の伝播によって π は相互作用している描像が見れる。一方、式 (5) では、π はファインマン図において頂点で表されるような π 同士接触相互作用をしている描像が見れる。このように UV 理論における散乱問題において、低エネルギー極限を考えると、相互作用の形が粒子の伝播という中間状態を介した形ではなく、頂点での相互作用で表されるようになる。しかし、UV 理論で考えていた粒子 ϕ についての情報は、散乱振幅が無限個の項で構成されるという部分に引き継がれている。
ここで、低エネルギーでの散乱問題に注目する。このエネルギースケールでは粒子として考えられるものは π だけとする。$\mathcal{A}$ に課されている基本条件から、$\mathcal{A}$ の解析部分は Mandelstam 変数の対称的な要素によって構成されることが要請される。対称的な要素とは、$s+t+u$、$s^2+t^2+u^2$、stu である。ここで、エネルギー運動量保存則と π が massless 粒子であることから、

$$s+t+u=0 \tag{6}$$

となる。よって、低エネルギーにおいて 2 つの π 粒子が入射して散乱する状況を表す一般的な散乱振幅 $\mathcal{A}$ は

$$\mathcal{A} = -g^2\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{t}+\frac{1}{u}\right) + \lambda + g_2(s^2+t^2+u^2) \tag{7}$$

$$+ g_3(stu) + g_4(s^2+t^2+u^2)^2 + ... \tag{8}$$

となる。この散乱振幅を与えるラグランジアン $\mathcal{A}_{EFT}$ は

$$\mathcal{A}_{EFT} = \frac{1}{2}\pi\Box\pi + \frac{g}{3!}\pi^3 + \frac{\lambda}{4!}\pi^4 + \frac{g_2}{2}((\partial\pi)^2)^2 \tag{9}$$

$$+ \frac{g_3}{3}(\partial\partial\pi)^2(\partial\pi)^2 + ... \tag{10}$$

となる。ここで、

$$(\partial\pi)^2 := \partial_\mu\pi\partial^\mu\pi \tag{11}$$

$$(\partial\partial\pi)^2 := \partial_\mu\partial_\nu\pi\partial^\mu\partial^\nu\pi \tag{12}$$

とする。また、g_i は wilson 係数という未知なパラメータである。この散乱振幅を与えるラグランジアンは、

$$\mathcal{L}_{EFT} = \frac{1}{2}\pi\Box\pi + \frac{g}{3!}\pi^3 + \frac{\lambda}{4!}\pi^4 + \frac{g_2}{2}((\partial\pi)^2)^2 \tag{13}$$

$$+ \frac{g_3}{3}(\partial\partial\pi)^2(\partial\pi)^2 + ...$$

である。この wilson 係数が制限することで、EFT は制限される。その制限を与える positivity bound を 2.4 で示す。

2.3 Dispersion Relation

本節での議論は、UV 理論または EFT 理論に限らず、いずれのエネルギースケールにおいても成立する。Dispersion Relation とは、2 つの質量 m のスカラー粒子が入射して 2 つの質量 m のスカラー粒子が散乱する状況において、散乱振幅 $\mathcal{A}_{dis}$ が $\mathcal{A}_{dis}$ の複素構造で与えられるという関係式のことである。ただし、入射粒子と散乱粒子は同種の粒子である。また、簡単のため、t を 0 で固定する。具体的な式で

Dispersion Relation を表せば、

$$\mathcal{A}(s) = \phi^{(2)}(s) + \frac{g^2}{m^2 - s} + \frac{(s' - s_1)(s' - s_2)}{2\pi i} \int_{4m^2}^{\infty} ds' \frac{Disc_s\mathcal{A}(s')}{(s' - s)(s' - s_1)(s' - s_2)} + (s \leftrightarrow u) \tag{14}$$

でとなる。ここで、$\phi^{(2)}$ とは s の 1 次多項式である。また、s_i は適当な定数である。さらに、$Disc_s\mathcal{A}(s)$ は、

$$Disc\mathcal{A} \equiv \lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{A}(s + i\epsilon) - \mathcal{A}(s - \epsilon) \tag{15}$$

である。2.1 で設定した問題では $m = 0$ より、散乱振幅 $\mathcal{A}$ は

$$\mathcal{A}(s) = \phi^{(2)} + \frac{g^2}{-s} + \frac{(s' - s_1)(s' - s_2)}{2\pi i} \int_0^{\infty} ds' \frac{Disc_s\mathcal{A}(s')}{(s' - s)(s' - s_1)(s' - s_2)} + (s \leftrightarrow u) \tag{16}$$

となる。

2.4 positivity bound

2.2 と 2.3 において得られた結果を用いて、positivity bound を導出する。改めて、S-matrix bootstrap では、UV 理論における散乱振幅 $\mathcal{A}$ にポアンカレ不変性、ユニタリ性、因果律、局所性を課している。このうち、解析性と局所性から、2.3 の結果である Dispersion Relation は示される。ここで、Dispersion Relation を再掲すると、

$$\mathcal{A}(s,t) = -g^2\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{u}\right) + C_0(t) + \frac{(s - s_1)(s - s_2)}{2\pi i} \int_0^{\infty} ds' \frac{Disc_s\mathcal{A}(s')}{(s' - s)(s' - s_1)(s' - s_2)} + \frac{(u - s_1)(u - s_2)}{2\pi i} \int_0^{\infty} du' \frac{Disc_s\mathcal{A}(u')}{(u' - s)(u' - s_1)(u' - s_2)} \tag{17}$$

となる。この散乱振幅 $\mathcal{A}(s,t)$ は EFT 理論において説明される現象による寄与と UV 理論において説明される現象による寄与 B の 2 つで構成される。よって、

$$\mathcal{A}(s,t) = B(s,t,\Lambda) - g^2\left(\frac{1}{s}\right) \tag{18}$$
$$+ \frac{(s - s_1)(s - s_2)}{2\pi i} \tag{19}$$
$$\int_0^{\Lambda^2} ds' \frac{Disc_s\mathcal{A}(s')}{(s' - s)(s' - s_1)(s' - s_2)} \tag{20}$$
$$+ \frac{(u - s_1)(u - s_2)}{2\pi i} \tag{21}$$
$$\int_0^{\Lambda^2} du' \frac{Disc_s\mathcal{A}(u')}{(u' - s)(u' - s_1)(u' - s_2)} \tag{22}$$

となる。ここで Λ は EFT のエネルギースケールである。この式を B について解き、その B の s に関する 2 次導関数の s と t が 0 の時の値を求める。すると、$\mathcal{A}(s,t)$ が式 (7) と式 (17) の場合でそれぞれ

$$\partial_s^2 B(s = 0, t = 0, \Lambda) = \frac{2}{\pi}\int_{\lambda^2}^{\infty} ds' \frac{2Im\mathcal{A}(s', t = 0)}{(s')^3} \tag{23}$$

$$\partial_s^2 B(s = 0, t = 0, \Lambda) = 2g_2 \tag{24}$$

となる。ここで、ユニタリ性から、

$$Im\mathcal{A} > 0 \tag{25}$$

であるため、

$$g_2 > 0 \tag{26}$$

となる。この式 (26) が positivity bound である。wilson 係数の取り得る値の範囲が制限されるという意味で、positivity bound により $\mathcal{L}_{EFT}$ が制限されることがわかる。

3 k-essence

2 章において、導いた positivity bound を具体的な理論に適用する。そしてその条件の物理的意味を示す。ここで具体的な理論とはラグランジアンを定めることである。この章では

$$\mathcal{L} = P(X) \tag{27}$$

で定められる k-essence を用いる。

3.1 positivity bound

k-essence における positivity bound を考える。式 (27) より 2 章での結果が使える。式 (13) と式 (26) より、positivity bound は場の 1 階微分の 4 乗の係数が正になることを意味する。$X=0$ 周りで $P(X)$ を展開すると、式 (27) は、

$$\mathcal{L} = P(0) - \frac{1}{2}P_X(0)(\partial\phi)^2 + \frac{1}{8}P_{XX}(0)(\partial\phi)^4 + ... \tag{28}$$

となる。よって、positivity bound は

$$P_{XX}(0) > 0 \tag{29}$$

となる。しかし、$X=\alpha\neq 0$ 周りで展開すると、式 (27) は、

$$\mathcal{L} = P(\alpha) + P_X(\alpha)(-\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \alpha)^2 \tag{30}$$

$$+ \frac{1}{2}P_{XX}(\alpha))(-\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \alpha)^2 + ... \tag{31}$$

となる。$(\partial\phi)^4$ の係数は $P_{XX}(\alpha)$ とならない。よって、$P_{XX}(\alpha) > 0$ とは言い切れない。しかし、ここでは、$P_{XX}(\alpha) > 0$ が成立すると仮定する。この仮定が物理的にどのような影響を与えるかを考えるという立場で考える。

物理的意味をとらえるために、場 ϕ を次のように背景場 $\bar{\phi}$ と摂動場 π に分割する。

$$\phi = \bar{\phi} + \pi \tag{32}$$

この時、X は

$$X = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\bar{\phi}\partial_\nu\bar{\phi}) - \eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\bar{\phi}\partial_\nu\pi) - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\pi\partial_\nu\pi) \tag{33}$$

$$= \bar{X} + \delta X \tag{34}$$

となる。ここで、

$$\bar{X} \coloneqq (\partial_\mu\bar{\phi}\partial_\nu\bar{\phi}) \tag{35}$$

$$\delta X \coloneqq \eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\bar{\phi}\partial_\nu\pi) + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\pi\partial_\nu\pi) \tag{36}$$

とした。ここで、$X=\bar{X}$ 周りで $P(X)$ を展開すると、

$$P(X) = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}_{eff}\partial_\mu\pi\partial_\nu\pi + (others) \tag{37}$$

となる。ただし、

$$g^{\mu\nu}_{eff} \coloneqq P_X(\bar{X})\eta^{\mu\nu} - P_{XX}C^\mu C^\nu \tag{38}$$

$$C^{mu} \coloneqq \partial^\mu\bar{\phi} \tag{39}$$

である。ここで、摂動 π の伝播速度 c_s を求めると、C^μ が timelike な場合、

$$c_s^2 = \frac{P_X}{P_X + 2XP_{XX}} \tag{40}$$

$$X = -\frac{1}{2}C^2 > 0 \tag{41}$$

となり、C^μ が spacelike な場合、

$$c_s^2 = \frac{P_X}{P_X + 2XP_{XX}} \tag{42}$$

$$X = -\frac{1}{2}C^2 < 0 \tag{43}$$

となる。postivity bound

$$P_{XX} > 0 \tag{44}$$

から、C^μ が timelike な場合と spacelike な場合のいずれの場合でも

$$c_s^2 < 1 \tag{45}$$

となる。つまり、k-essence での positivity bound は摂動の伝播速度が光速を超えないという因果律を意味することが分かる。

4 まとめと展望

上記のように、UV 完備な EFT 理論を探す手法として、bootstrap という考え方がある。UV 理論に課す物理的な基本条件を信じ、UV 理論と EFT 理論の整合性から、EFT 理論を制限することができる。ここで、物理的な基本条件を UV 理論に課すことで導出された EFT 理論における散乱振幅と、実験で得られた散乱振幅を比較すると、物理的な基本条件の妥当性を問うことができる。2 つの散乱振幅が整合的でない場合、物理的な基本条件が妥当でないと推測できる。このことから、UV 理論の情報も得ることが可能である。このように、ラグランジアンを直接修正せず、物理的観測量に注目して理論を構築するという考え方は、未知の理論を探るうえで有用なアプローチであると考えられる。

Reference

[1] K. Aoki, "Lecture note on S-matrix bootstrap and gravity (under construction)," Yukawa Institute for Theoretical Physics, Kyoto University, Jan. 2025.

——index へ戻る

SP-38

宇宙ひもによるKerrブラックホールからのエネルギー取り出し

大阪公立大学
田中　孝輔

宇宙ひもによる Kerr ブラックホールからのエネルギー取り出し

田中 孝輔 (大阪公立大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙初期の相転移において、自発的対称性の破れから「位相欠陥」という特異な構造が現れることが予言されている。位相欠陥は、対称性の破れた異なる真空の境界に形成され、その上では局所的に対称性が破られず、そしてトポロジーの性質により安定である。位相欠陥にはモノポール、宇宙ひも (cosmic string)、ドメインウォールなどの種類があり、特にその曲率半径が太さよりもはるかに大きい宇宙ひもは、$1+1$ 次元の物体である南部-後藤ストリングとみなすことができる。[1] は、定常剛体回転する南部-後藤ストリングにより、super-radiance やペンローズ過程、Blandford-Znajek 過程と同様に、Kerr ブラックホールからエネルギーを取り出せることを示した。また、[2] は Kerr 時空における剛体回転する南部-後藤ストリングの運動を解析し、ストリングがブラックホールのエネルギーを取り出すために地平面と無限遠を結びうることを示した。

1 Introduction

現在の標準的な宇宙理論では、初期宇宙に数回の「宇宙の相転移」が起きたとされている。相転移により、ポテンシャルが対称性を保つ偽真空から、真空期待値が 0 でない対称性の破れた真空へと移る、自発的対称性の破れが生じたと考えられている。その結果として、異なる真空の境界において局所的に対称性が破れずに非真空となる場合がある。これを「位相欠陥 (topological defect)」という。位相欠陥はその形状等によりいくつかの種類に分類され、特に 1 次元的に形成されたひも状の位相欠陥を「宇宙ひも (cosmic string)」という。現在までに宇宙ひもやその他の位相欠陥が観測されたことはないが、これらが宇宙初期に形成されたと考えることは自然であり、その存在と影響を議論することは有意義である。

宇宙ひもが作る重力場は円錐特異点を持ち時空に角度欠損が生じるため、宇宙ひも周辺の力学を取り扱うのも興味深いが、ここでは宇宙ひもを test body として宇宙ひも自体の運動を考える。宇宙ひもの曲率半径が太さよりもはるかに大きい場合、宇宙ひもを無限に細いとみなし、$1+1$ 次元の物体である南部-後藤ストリングとして捉えることができる。テスト南部-後藤ストリングであってもその運動は非線形波動方程式で記述され、高度な数値計算が必要となり、解析が困難である。ところが、[3] で示されるように、南部-後藤ストリングの世界面 (world sheet) が背景時空の Killing ベクトル場に接している場合、ストリングの運動が常微分方程式で記述可能である。

[1] は、剛体回転する南部-後藤ストリングにより、super-radiance やペンローズ過程、Blandford-Znajek 過程と同様に、Kerr ブラックホールからエネルギーを取り出せることを示した。この過程においてストリングはエルゴ領域内部と十分遠方を結ぶ必要がある。[2] は、上記の手法を用いることで Kerr 時空において Killing ベクトル場に接する剛体回転南部-後藤ストリングの運動を解析した。これによりストリングがブラックホールの地平面と無限遠を結びうることを示した。

本発表では、まず [4] に則って数種類の位相欠陥を例に位相欠陥について説明した後、[2] のレビューを行う。

2 位相欠陥

2.1 ϕ^4-キンク

まずはもっとも単純な、$1+1$ 次元時空で実スカラー場一つの場合に考えられる位相欠陥を例に挙げる。ϕ^4-キンク（よじれ）は、ラグランジアン密度が

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) \quad (\mu = 0, 1) \tag{1}$$

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}\left(\phi^2 - \eta^2\right)^2 \tag{2}$$

と書ける場合に考えられる 0 次元的な位相欠陥である。このラグランジアンは離散的な対称性を持っているが、二重井戸型ポテンシャルであるため、対称性

が自発的に破れる。場を静的とすると場の方程式は

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \lambda\phi\big(\phi^2 - \eta^2\big) \tag{3}$$

となり、厳密解として

$$\phi(x) = \eta\tanh\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\eta x\right) \tag{4}$$

というキンク解が得られる。これは $x \to +\infty$ で $\phi \to +\eta$ の真空、$x \to -\infty$ で $\phi \to -\eta$ の真空に対応している。またこの対応が逆になる $\phi' = -\phi$ という解を反キンクという。キンク及び反キンクのエネルギーは

$$T_{00} = -\mathcal{L} = \frac{1}{2}\lambda\eta^4\Big[\cosh\Big((\lambda/2)^{1/2}\eta x\Big)\Big]^{-4} \tag{5}$$

となり、$x = 0$ の付近に局所的に値を持つ。

ϕ^4-キンクは、キンクと反キンクの対を衝突させるか、片方の真空の領域を全てもう一方の真空へと連続的に遷移させることで取り除くことが可能である。しかし、二つの真空の間を連続的に変化させるにはポテンシャルの山を越える必要があり、片方の領域を無限遠まで遷移させるには無限のエネルギーが必要となってしまう。その結果、ϕ^4-キンクは安定である。

位相欠陥はこのような真空と空間の対応構造による安定性を持っているが、これは「トポロジカル保存則」の結果だと解釈することが可能である。

$$j^\mu \coloneqq \epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\phi \quad (\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}) \tag{6}$$

で定義されるトポロジカルカレント j^μ は、その定義から明らかに保存則

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{7}$$

を満たす。この保存則をトポロジカル保存則という。ϕ^4-キンクの場合、関連する保存量「トポロジカルチャージ」は

$$\begin{aligned} N &\coloneqq \int dx j^0 \\ &= \int dx\frac{d\phi}{dx} = \phi|_{x=+\infty} - \phi|_{x=-\infty} \end{aligned} \tag{8}$$

で、$N = \pm 2\eta, 0$ の 3 種の値しか持たない。それぞれ、キンクと反キンクの対を無視すれば、$N = +2\eta$ がキンク 1 つ、$N = -2\eta$ が反キンク 1 つ、$N = 0$ がキンクも反キンクもない真空に対応している。N は保存量であるから値は変化せず、つまりキンクは真空や反キンクになることなく安定に存在する。

2.2 ドメインウォール

ドメインウォールは ϕ^4-キンクを $3+1$ 次元に拡張した 2 次元的な位相欠陥である。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \tag{9}$$

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}\big(\phi^2 - \eta^2\big)^2 \tag{10}$$

で、x のみに依存する解

$$\phi(x) = \eta\tanh\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\eta x\right) \tag{11}$$

を考えると、キンクに相当する位相欠陥が y-z 平面上に広がる。

ドメインウォールのエネルギー運動量テンソルは

$$T_{\mu\nu} = f(x)\mathrm{diag}(1, 0, -1, -1) \tag{12}$$

$$f(x) \coloneqq \frac{1}{2}\lambda\eta^4\Big[\cosh\Big((\lambda/2)^{1/2}\eta x\Big)\Big]^{-4} \tag{13}$$

となる。y-y 成分、z-z 成分が負となることから、y 方向、z 方向に張力が働いており、曲がったドメインウォールは曲率半径が大きくなる方向に動く。

2.3 宇宙ひも

宇宙ひもは、ワインボトル型のポテンシャルをもつ複素スカラー場において考えられる 1 次元的な位相欠陥である。

Goldstone モデル

$$\mathcal{L} = -\big(\partial_\mu\bar{\phi}\big)\big(\partial^\mu\phi\big) - V(\phi) \tag{14}$$

$$V(\phi) = \frac{1}{4}\lambda\big(\bar{\phi}\phi - \eta^2\big)^2 \tag{15}$$

は大域的 U(1) 対称性をもっているが、真空期待値は $\langle 0|\phi|0\rangle = \eta$ で対称性が自発的に破れる。真空は $\phi = \eta^{i\vartheta}$ と書け、ϑ は真空を特徴づける。

空間を円筒座標系の $z =$ 一定の面でスライスする。$r \to \infty$ で真空 $\phi \to \eta e^{i\vartheta(\theta)}$ とし、空間の無限遠と真空が連続的に

$$\vartheta = 0 \qquad \text{at} \quad r \to \infty, \quad \theta = 0 \tag{16}$$

$$\vartheta = 2n\pi \qquad \text{at} \quad r \to \infty, \quad \theta = 2\pi \tag{17}$$

として対応付けられる場合を考える。ここで θ は物理空間上の角度座標で、n は任意の整数である。こ

のとき必ず、ϑ が定義できない点が平面上に存在し、その周辺は非真空となる。

この非真空領域が十分局所的であるとすると、平面上で非真空領域を囲む任意の閉環 L は真空と対応付けられ、L 上を一周すると ϑ は必ず $2n\pi$ 変化する。反対に非真空領域を囲まない任意の閉環では、その上を一周すると ϑ の変化量は 0 となる。閉環を用意し、その上を一周したときの ϑ の変化量を調べることで、その閉環の内側に位相欠陥が存在するかどうかが判別可能である。

座標の取り方により、内側に位相欠陥が存在する閉環 L を含む平面の取り方は一通りではなく、L で囲まれる曲面全てにおいて内側に位相欠陥が存在するため、位相欠陥は 1 次元的に伸びていなければならない。この 1 次元的な位相欠陥が宇宙ひもである。

3 南部-後藤ストリングの運動

宇宙ひもの曲率半径が太さよりもはるかに大きい場合、宇宙ひもを無限に細いとみなし、$1+1$ 次元の物体である南部-後藤ストリングとして捉えることができる。

南部-後藤ストリングは、粒子の世界線 (worldline) に対応する、2 次元曲面である世界面 (worldsheet) 上を運動する。世界面は 2 つのパラメーターを用いて

$$x^\mu = x^\mu(\zeta^a) \quad (a = 0, 1) \tag{18}$$

とパラメトライズされる。ここで世界面上の線素は

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial \zeta^a}\frac{\partial x^\nu}{\partial \zeta^b}d\zeta^a d\zeta^b \\ &=: \gamma_{ab}d\zeta^a d\zeta^b \end{aligned} \tag{19}$$

となる。このとき、ストリングの作用は

$$S = -\mu\int\sqrt{-\gamma}d^2\zeta \quad (\gamma = \det(\gamma_{ab})) \tag{20}$$

と書ける。この作用を南部-後藤作用という。

これより運動方程式

$$x^\mu{}_{,a}{}^{;a} + \gamma^{ab}x^\nu{}_{,a}x^\sigma{}_{,b}\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} = 0 \tag{21}$$

$$x^\mu{}_{,a}{}^{;a} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\left(\sqrt{-\gamma}\gamma^{ab}x^\mu{}_{,b}\right)_{,a} \tag{22}$$

が得られる。平坦時空であれば、ζ^a のゲージを適切にとることで単純な線形波動方程式に書き換えることが可能であるが、曲がった時空の場合には非線形波動方程式となり、ストリングの運動を解析するのは非常に困難である。

ところが、[3] によると、時空が Killing ベクトル場を持つ場合に、世界面が Killing ベクトル場の積分曲線によって葉層化されるようなストリング、つまり世界面が Killing ベクトル場に接し、時空と Killing ベクトルを共有するようなストリングは、その運動を常微分方程式で記述することが可能である。このようなストリングを Co-homogeneity one string (c-1 ストリング) という。

Killing ベクトル場の軌道 ξ に対し垂直な超曲面を Killing 軌道空間といい、その誘導計量は

$$h_{ij}dy^i dy^j = \left(g_{\mu\nu} - \frac{\xi_\mu\xi_\nu}{f}\right)dx^\mu dx^\nu \tag{23}$$

$$f = g_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu \tag{24}$$

と書ける。Killing 軌道空間は、$f > 0$ の場合は時間的超曲面、$f < 0$ の場合は空間的超曲面となる。

c-1 ストリングの世界面は Killing 軌道空間上の曲線 $\mathcal{C}$ を Killing の軌道に沿って積分したものと考えられる。よってストリングの作用は Killing 軌道空間上で一つのパラメーターで再記述可能である。世界面は時間的であるから、$\mathcal{C}$ は、$f > 0$ の場合は時間的、$f < 0$ の場合は空間的となる。そのためそのままでは f の値によって作用を書き換える必要がある。ここで

$$\tilde{h}_{ij} = -fh_{ij} \tag{25}$$

として誘導計量を再定義することで、作用を f の値に依らず一律で

$$\mathcal{S} = \mu\int d\lambda\sqrt{\tilde{h}_{ij}\frac{dy^i}{d\lambda}\frac{dy^j}{d\lambda}} \tag{26}$$

と書くことができる。

4 Kerr 時空でのストリングの運動

Kerr 時空の計量は Boyer-Lindquist 座標で

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right)dt^2 - \frac{4Mar}{\Sigma}\sin^2\theta\, dtd\bar{\phi} \\ &+ \frac{A}{\Sigma}\sin^2\theta\, d\bar{\phi}^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma\, d\theta^2 \end{aligned} \tag{27}$$

と書け、Killing ベクトル場 ξ は

$$\xi = \partial_t + \Omega\partial_{\tilde{\phi}} \tag{28}$$

と書ける。ここで、定数 Ω は角速度を表す。

Killing 軌道空間の誘導計量は

$$\begin{aligned}&\tilde{h}_{ij}dx^i dx^j\\ =&-f\left(\frac{\Sigma}{\Delta}\,dr^2+\Sigma\,d\theta^2\right)+\Delta\sin^2\theta\,d\phi^2\end{aligned} \tag{29}$$

ノンアフィンのパラメーター σ を用いて、ストリングの作用は

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}\int d\sigma\left(\frac{1}{N}\tilde{h}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j + N\right) \tag{30}$$

と書ける。ここで $\dot{}$ は σ 常微分を表し、N はラグランジュ未定乗数で値を自由にとれる。x^i の共役運動量は $p_i = \tilde{h}_{ij}\dot{x}^j/N$ である。

$N = -f\Sigma$ と設定することで、ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(\Delta {p_r}^2 + {p_\theta}^2 + fk\Sigma\right) \tag{31}$$

$$f \coloneqq 1 - \frac{q^2}{\Delta\sin^2\theta} \tag{32}$$

と書ける。ここで $q \coloneqq -p_\phi$ は運動方程式より定数である。

ハミルトン拘束条件 $\mathcal{H} \approx 0$ より $\Delta, \Sigma > 0$ であるから、ストリングの運動可能領域は

$$fk \le 0 \tag{33}$$

となる。これにより運動可能領域のパラメーターの値ごとの形状を分類することが可能である。

実際にストリングが地平面と無限遠を結び得るには、運動可能領域が地平面から無限遠まで連続的に広がっている必要がある。これは、

$$\Omega \ge \Omega_{cr}^{+} \tag{34}$$

の場合、及び

$$\Omega_{cr}^{-} < \Omega < \Omega_{cr}^{+} \tag{35}$$

$$r_S \le R_- \tag{36}$$

の場合となる。ここで $\Omega_{cr}^{\pm}$ は

$$27(M\Omega_{cr})^2(1 - a\Omega_{cr}) = (1 + a\Omega_{cr})^3 \tag{37}$$

の解、r_S は

$$r_S = \frac{M}{1+|q|\Omega} + \sqrt{\left(\frac{M}{1+|q|\Omega}\right)^2 - a^2 + |q|a} \tag{38}$$

で表される $f = 0$ と $k = 0$ の交点の動径座標、$R_\pm$ は $f(r, \frac{\pi}{2}) = 0$ の解である。

5 Conclusion

初期宇宙の相転移により現れることが予言される位相欠陥は、真空多様体のトポロジーにより安定である。無限に細い宇宙ひもは $1+1$ 次元物体である南部-後藤ストリングとみなせ、Killing ベクトル場に沿ったストリングの運動は常微分方程式で記述でき比較的簡単に解析が可能である。このことを利用して Kerr 時空中のストリングの運動を解析することで、ストリングが地平面と無限遠を結びうることが示せる。

[5] は、BZ 過程のように Kerr BH の磁気圏を考え、BH に刺さった磁力線を揺らすことで Kerr BH からエネルギーが取り出せることを示した。[1] のストリングによってエネルギーを取り出す過程と BZ 過程との対応から、Kerr BH に刺さったストリングを揺らすことでもエネルギーが取り出せることが期待できる。

References

[1] S. Kinoshita, T. Igata, and K. Tanabe, “Energy extraction from Kerr black holes by rigidly rotating strings”, Physical Review D **94**, 124039 (2016).

[2] T. Igata, H. Ishihara, M. Tsuchiya, and C.-M. Yoo, “Rigidly Rotating String Sticking in a Kerr Black Hole”, Physical Review D **98**, 064021 (2018).

[3] H. Ishihara and H. Kozaki, “Classification of Cohomogeneity One Strings”, Physical Review D **72**, 10.1103/PhysRevD.72.061701 (2005).

[4] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, Cosmic Strings and Other Topological Defects (Cambridge University Press, July 2000).

[5] S. Noda, Y. Nambu, M. Takahashi, and T. Tsukamoto, “Alfvénic superradiance for a monopole magnetosphere around a Kerr black hole”, Physical Review D **105**, 10 . 1103 / PhysRevD.105.064018 (2022).

——index へ戻る

SP-39

オプトメカ系を用いた重力量子もつれの生成の検証

九州大学
福澄　諒太郎

オプトメカ系を用いた重力量子もつれの生成の検証

福澄 諒太郎 (九州大学大学院 理学府)
畠山 広聖 (九大理)、三木 大輔（Caltech)、山本 一博（九大理）

Abstract

オプトメカ系とは光共振器と機械振動子からなる光学機械振動子系であり、巨視的スケールにおける量子状態の制御や観測を可能にする有用な物理系である。このような特性を利用することで、巨視的な質量体間における量子もつれを生成することが可能となる。さらに、特に重力相互作用により誘起される量子もつれの検証を通して、重力の量子的性質に迫る手掛かりが得られる可能性も示されている。本発表では、このオプトメカ系によって生成される量子状態について検討する。具体的には、鏡の運動量が位置よりも高い精度で推定されるような状態（運動量スクイーズド状態）が実現される領域を特定する。さらに、そのような状態が出現する条件およびその背景にある物理的メカニズムを解析的に明らかにし、測定と制御が量子状態に及ぼす効果を系統的に整理する。また、このような領域が量子もつれ生成に及ぼす影響についても理論的に評価する。

1 Introduction

ミクロな物理現象を記述する量子力学と重力を記述する一般相対性理論は、どちらも現代物理学における基礎的な理論である。しかし現在、重力が量子力学に従うのかという問題については未だ実験的な検証がなされていない。そこで 1957 年に Feynman によって重力と量子的重ね合わせに関する思考実験が提案された [1]。またこれを受け 2017 年に Bose らは、位置の重ね合わせ状態にある二つの質量体が重力を介して相互作用することにより、両者の間に量子もつれが生成されるという理論モデルを提示した [2,3]。このモデルは Feynman の思考実験の実現可能性を理論的に示したものであり、実際の実験によって検証可能な枠組みを提供するものである。量子もつれは古典的相互作用では生成できない量子相関であるため、重力により誘起された量子もつれ生成が検証されれば、重力場が量子性を持つ直接的な証拠となる。このような背景のもと、実験の実現に向けた有力な候補系として近年ではオプトメカ系（光学機械振動子系）が注目されている。オプトメカ系は光共振器と機械振動子（懸架鏡）から構成されており、光子と鏡との相互作用により鏡の量子状態を制御する模型である。特に、適切なフィードバック制御 [4] や量子最適フィルター [5] を適用することで鏡を基底状態まで冷却できることが実証されている。

本研究はオプトメカ系によって用意される量子状態、またこの状態が量子もつれに与える影響について議論する。先行研究 [6] では、限定的な条件下でのもつれ特性の解析が行われていた。これに対し本研究では、より一般的な状況下において強い量子もつれが実現されるパラメータ領域の探索と、その生成メカニズムの理解を目的とする。

2 Formulas

2.1 Langevin equation

質量 m、振動数 Ω の懸架鏡 $(\hat{Q}, \hat{P})$ と、長さ l のキャビティ内を往復する光 $(\hat{a}^\dagger, \hat{a})$ からなる系のハミルトニアンは以下のように書ける。ただし ω_c, ω_L はそれぞれキャビティの共振周波数と入射光の周波数、E は入射光の強度を表す。

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\Omega^2\hat{Q}^2 + \frac{\hbar\omega_c}{1+\hat{Q}/l}\hat{a}^\dagger\hat{a} + i\hbar E\left(e^{i\omega_L t}\hat{a}^\dagger - e^{-i\omega_L t}\hat{a}\right) \quad (1)$$

その時、各自由度に対する Langevin 方程式は鏡の機械的散逸率 Γ と光の散逸率 κ を用いて次のように表

される。

$$\begin{cases} \dot{\hat{q}} = \Omega \hat{p} \\ \dot{\hat{p}} = -\Omega \hat{q} - 2g\hat{x} - \Gamma \hat{p} + \sqrt{2\Gamma}\hat{p}^{\mathrm{in}} \\ \dot{\hat{x}} = -\Delta \hat{y} - \dfrac{\kappa}{2}\hat{x} + \sqrt{\kappa}\hat{x}^{\mathrm{in}} \\ \dot{\hat{y}} = \Delta \hat{x} - 2g\hat{q} - \dfrac{\kappa}{2}\hat{y} + \sqrt{\kappa}\hat{y}^{\mathrm{in}} \end{cases} \tag{2}$$

ただしここで $\hat{q} = \sqrt{2m\Omega/\hbar}\hat{Q}, \hat{p} = \sqrt{2/(m\hbar\Omega)}\hat{P}$ は無次元化された鏡の自由度、$\hat{x} = \hat{a}^\dagger + \hat{a}, \hat{y} = i\big(\hat{a}^\dagger - \hat{a}\big)$ は光の振幅と位相を表す quadrature、そして $\Delta \simeq \omega_L - \omega_c$ は光の共振からのずれを表す detuning である。また $g = \sqrt{\omega_c P_{\mathrm{in}}\kappa/m\Omega\ell^2(\kappa^2 + 4\Delta^2)}$ はオプトメカカップリングと呼ばれる量で、鏡と光の結合の強さを表している。さらに $\hat{p}^{\mathrm{in}}$ は鏡の熱的なノイズ、$\hat{x}^{\mathrm{in}}$ と $\hat{y}^{\mathrm{in}}$ は各 quadrature に対するノイズであり、それぞれ以下を満たすとする。

$$\left\langle (\hat{p}^{\mathrm{in}})^2 \right\rangle = 2k_B T/(\hbar\Omega) + 1 \tag{3}$$

$$\left\langle (\hat{x}^{\mathrm{in}})^2 \right\rangle = \left\langle (\hat{y}^{\mathrm{in}})^2 \right\rangle = 1 \tag{4}$$

$$\left\langle \hat{x}^{\mathrm{in}}\hat{y}^{\mathrm{in}} \right\rangle = 0 \tag{5}$$

断熱近似 ($\Omega \ll \kappa$) と in-out 関係 $\left(\hat{Y} = \hat{y}_{\mathrm{in}} - \sqrt{\kappa}\hat{y}\right)$ を用いることで、実際に我々が得ることのできる output 光 $\hat{X}, \hat{Y}$ と、それによって駆動される鏡の運動方程式が得られる。

$$\begin{cases} \dot{\hat{q}} = \omega_m \hat{p} \\ \dot{\hat{p}} = -\omega_m \hat{q} - \gamma_m \hat{p} \\ \qquad + \sqrt{2\gamma_m}\hat{p}^{\mathrm{in}\prime} - \dfrac{4g_m\kappa\sqrt{\kappa}}{\kappa^2 + 4\Delta^2}\hat{x}^{\mathrm{in}} + \dfrac{8g_m\Delta\sqrt{\kappa}}{\kappa^2 + 4\Delta^2}\hat{y}^{\mathrm{in}} \\ \hat{X} = -\dfrac{8\Delta g_m\sqrt{\kappa}}{\kappa^2 + 4\Delta^2}\hat{q} - \dfrac{\kappa^2 - 4\Delta^2}{\kappa^2 + 4\Delta^2}\hat{x}^{\mathrm{in}} + \dfrac{4\Delta\kappa}{\kappa^2 + 4\Delta^2}\hat{y}^{\mathrm{in}} \\ \hat{Y} = \dfrac{4\kappa g_m\sqrt{\kappa}}{\kappa^2 + 4\Delta^2}\hat{q} - \dfrac{4\Delta\kappa}{\kappa^2 + 4\Delta^2}\hat{x}^{\mathrm{in}} - \dfrac{\kappa^2 - 4\Delta^2}{\kappa^2 + 4\Delta^2}\hat{y}^{\mathrm{in}} \end{cases} \tag{6}$$

$\omega_m = \sqrt{\Omega^2 + 16g^2\Omega\Delta/(\kappa^2 + 4\Delta^2)}$ は光との結合による光ばね効果により補正された鏡の周波数である。ここで、output 光の quadrature$\hat{X}, \hat{Y}$ を角度 θ で混ぜたホモダイン測定量

$$\hat{I}_\theta = \hat{X}\cos\theta + \hat{Y}\sin\theta \tag{7}$$

を用いることにより、先行研究 [6] では見えなかった領域を見ることが出来るようになる。まとめると、

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\hat{q}\\ \hat{p}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \omega_m\\ -\omega_m & -\gamma_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{q}\\ \hat{p}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \hat{w}\end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\hat{I}_\theta = c_\theta \hat{q} + \hat{v}_\theta \tag{9}$$

ただし

$$\hat{w} = \sqrt{2\gamma_m}\hat{p}_{\mathrm{in}} - \frac{4g_m\kappa\sqrt{\kappa}}{\kappa^2 + 4\Delta^2}\hat{x}_{\mathrm{in}} + \frac{8g_m\Delta\sqrt{\kappa}}{\kappa^2 + 4\Delta^2}\hat{y}_{\mathrm{in}} \tag{10}$$

$$c_\theta = \frac{4g_m\kappa\sqrt{\kappa}}{\kappa^2 + 4\Delta^2}\left(\sin\theta - \frac{2\Delta}{\kappa}\cos\theta\right) \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\hat{v}_\theta = &\left(-\frac{\kappa^2 - 4\Delta^2}{\kappa^2 + 4\Delta^2}\hat{x}_{\mathrm{in}} + \frac{4\kappa\Delta}{\kappa^2 + 4\Delta^2}\hat{y}_{\mathrm{in}}\right)\cos\theta \\ &+ \left(-\frac{4\kappa\Delta}{\kappa^2 + 4\Delta^2}\hat{x}_{\mathrm{in}} - \frac{\kappa^2 - 4\Delta^2}{\kappa^2 + 4\Delta^2}\hat{y}_{\mathrm{in}}\right)\sin\theta\end{aligned} \tag{12}$$

である。

2.2 Kalman filter

知りたいのは式 (8) の解 $\hat{\boldsymbol{r}} = (\hat{q}, \hat{p})^{\mathsf{T}}$ であるが、実際に得られる量は種々のノイズに汚染された式 (9) の $\hat{I}_\theta$ であり、直接測定することが出来ない。そこで、測定量 $\hat{I}_\theta$ やノイズ $\hat{w}, \hat{v}_\theta$ の性質等から状態を推定する。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}0 & \omega_m\\ -\omega_m & -\gamma_m\end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}_\theta = (c_\theta,\ 0) \tag{13}$$

$$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \langle\hat{w}^2\rangle = \bar{n}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{L}_\theta = \begin{pmatrix}0\\ \langle\hat{w}\hat{v}_\theta\rangle\end{pmatrix} \tag{14}$$

$$M_\theta = \left\langle \hat{v}_\theta^2 \right\rangle \tag{15}$$

推定値 $\tilde{\boldsymbol{r}}$ は、推定誤差 $\hat{\boldsymbol{r}} - \tilde{\boldsymbol{r}}$ の分散 $\boldsymbol{V}$（条件付き共分散行列）が最も小さくなるように決める。すると、それぞれ以下のような時間発展方程式に従うことが知られている。

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{r}}} = \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{r}} + \big(\boldsymbol{V}\boldsymbol{C}_\theta^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{L}_\theta\big)M_\theta^{-1}\Big[\hat{I}_\theta - \boldsymbol{C}_\theta\tilde{\boldsymbol{r}}\Big] \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{V}} = &\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} + \boldsymbol{V}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{N} \\ &- \big(\boldsymbol{V}\boldsymbol{C}_\theta^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{L}_\theta\big)M_\theta^{-1}\big(\boldsymbol{V}\boldsymbol{C}_\theta^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{L}_\theta\big)^{\mathsf{T}}\end{aligned} \tag{17}$$

この操作を Kalman filtering と呼ぶ。式 (17) の定常解を各成分ごとに計算すると

$$\begin{cases} V_{qq} = \dfrac{\gamma_\theta - \gamma_m}{\lambda_\theta} \\ V_{qp} = \dfrac{\gamma_\theta - \gamma_m}{2\omega_m} V_{qq} \\ V_{pp} = \left[\left(\dfrac{\omega_\theta}{\omega_m} \right)^2 - \dfrac{\gamma_m(\gamma_\theta - \gamma_m)}{2{\omega_m}^2} \right] V_{qq} \end{cases} \tag{18}$$

ただし

$$\lambda_\theta = \frac{c_\theta^2}{M_\theta}, \quad \Lambda_\theta = \frac{c_\theta L_\theta}{M_\theta} \tag{19}$$

$$\gamma_\theta = \sqrt{\gamma_m^2 - 2\omega_m(\omega_m + \Lambda_\theta) + 2\omega_\theta^2} \tag{20}$$

$$\omega_\theta = \omega_m \sqrt[4]{1 + \frac{2\Lambda_\theta}{\omega_m} + \frac{\bar{n}\lambda_\theta}{\omega_m^2}} \tag{21}$$

λ_θ は鏡の情報をどのくらい正確に読み出せるかを表す測定率、Λ_θ は鏡の駆動雑音 $\hat{w}$ と測定雑音 $\hat{v}$ の相関、$\gamma_\theta, \omega_\theta$ はそれぞれ推定後の状態の実効的な散逸率と周波数である。

3 Results

3.1 運動量スクイーズ

条件付き共分散行列 $\boldsymbol{V}$ について、運動量スクイーズが起こる領域を議論する。式 (18) より、

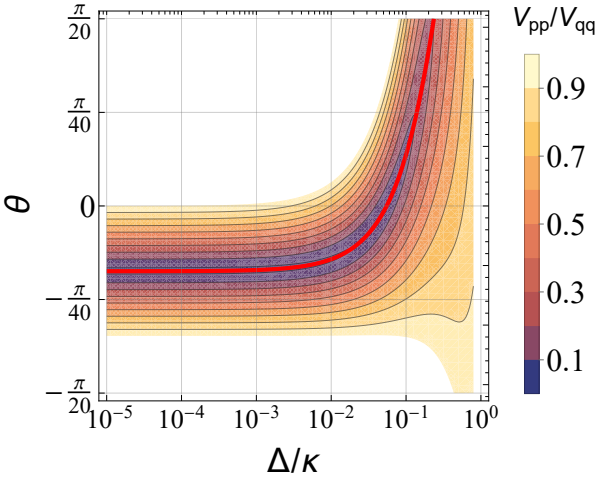
$$\frac{V_{pp}}{V_{qq}} = \left(\frac{\omega_\theta}{\omega_m} \right)^2 - \frac{\gamma_m(\gamma_\theta - \gamma_m)}{2{\omega_m}^2} \simeq \left(\frac{\omega_\theta}{\omega_m} \right)^2 < 1 \tag{22}$$

よってこの強い運動量スクイーズが起こる条件を最も満たすホモダイン角度 $\theta_{\rm opt}$ を計算すると

$$\theta_{\rm opt} = \alpha - \frac{1}{2} \arctan \left[\frac{2}{\xi} \right] \tag{23}$$

ただし $\tan\alpha = 2\Delta/\kappa$、$\xi = 16 g_m^2 \kappa / [(\kappa^2 + 4\Delta^2)\omega_m]$ となる。図 1 は運動量スクイーズが起こる領域に $\theta_{\rm opt}$ を重ねてプロットした図である。$\theta_{\rm opt}$ がちょうど最も運動量スクイーズする領域と重なっていることが読み取れる。ω_θ は推定後の状態における実効的な周波数を表す。この領域では $\omega_\theta \ll \omega_m$ が成立しているため、Kalman filtering により状態推定された鏡は、仮想的な自由質点として振る舞うとみなすことができる。量子力学において、自由粒子の運動量は系に擾乱を与えることなく測定可能であることが知られている（QND）。このアナロジーに基づき、本系においても運動量が位置よりも高い精度で推定されていると解釈することが可能である。

図 1: 運動量スクイーズと $\theta_{\rm opt}$（赤実線）



3.2 重力誘起もつれ

運動量スクイージングが有効である可能性が示唆されている状況として、以下に示す図 2 のようなセットアップを用いて重力誘起もつれを考える。($m = 10^{-1}$[g], $l = 10^{-1}$[m], $\Omega/2\pi = 10^{-3}$[Hz], $P_{\rm in} = 10^{-8}$[W], $\Gamma/2\pi = 10^{-18}$[Hz])

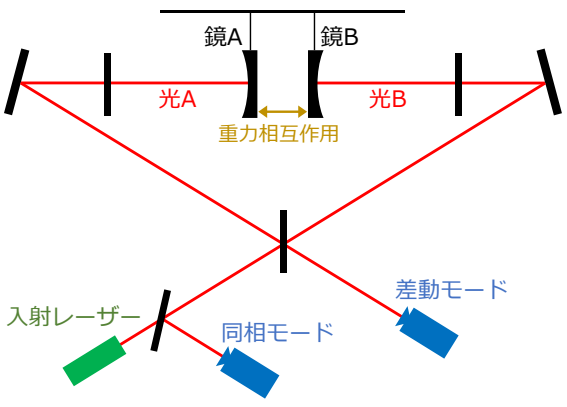


図 2: 重力誘起もつれのセットアップ

ハミルトニアンは

$$
\begin{aligned}
H =& \frac{\hat{P}_A^2}{2m} + \frac{1}{2}m\Omega^2\hat{Q}_A^2 + \frac{\hat{P}_B^2}{2m} + \frac{1}{2}m\Omega^2\hat{Q}_B^2 \\
&+ \frac{\hbar\omega_c}{1-\frac{\hat{Q}_A}{l}}\hat{a}_A^\dagger\hat{a}_A + \frac{\hbar\omega_c}{1+\frac{\hat{Q}_B}{l}}\hat{a}_B^\dagger\hat{a}_B \\
&+ \frac{i\hbar E}{\sqrt{2}}\left(e^{i\omega_L t}\hat{a}_A^\dagger - e^{-i\omega_L t}\hat{a}_A\right) \\
&+ \frac{i\hbar E}{\sqrt{2}}\left(e^{i\omega_L t}\hat{a}_B^\dagger - e^{-i\omega_L t}\hat{a}_B\right) \\
&- \frac{Gm^2}{L+(Q_A-Q_B)}
\end{aligned}
\tag{24}
$$

重力による効果は式 (24) の 9 項目のみなので、各自由度を同相 (+)、差動 (−) モードに分けて計算する。

$$
\begin{cases}
\hat{q}_\pm = \dfrac{\hat{q}_A \pm \hat{q}_B}{\sqrt{2}} \\
\hat{p}_\pm = \dfrac{\hat{p}_A \pm \hat{p}_B}{\sqrt{2}} \\
\hat{a}_\pm = \dfrac{\hat{a}_A \mp \hat{a}_B}{\sqrt{2}}
\end{cases}
\tag{25}
$$

すると各モードは独立に計算できるため、それぞれ式 (18) と同じ条件付き共分散が得られる。もつれの指標として対数ネガティビティを導入する。

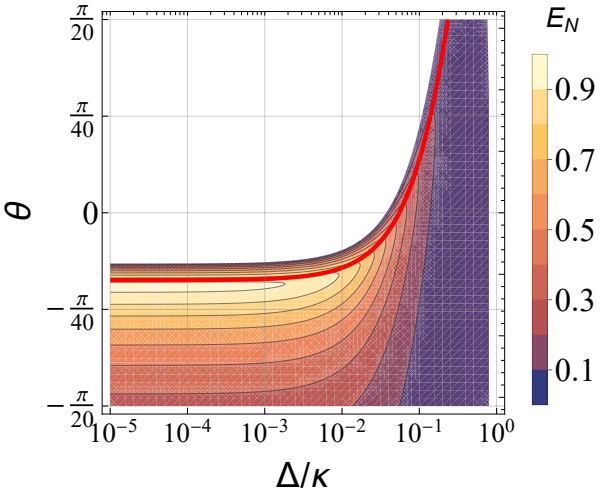
$$
E_N = -\frac{1}{2}\log_2\left[\frac{\Sigma - \sqrt{\Sigma^2 - 4\det\boldsymbol{V}}}{2}\right] \tag{26}
$$

ただし $\Sigma = \det V_A + \det V_B - 2\det V_{AB}$ で定義されており、以下のように ± の基底から各鏡の基底に戻した状態を使う。

$$
\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} V_A & V_{AB} \\ V_{AB} & V_B \end{pmatrix} = \boldsymbol{s}\begin{pmatrix} V^+ & \\ & V^- \end{pmatrix}\boldsymbol{s}^\mathsf{T} \tag{27}
$$

このとき、重力誘起もつれが生じる領域は図 3 に示されている通りであり、特にエンタングルメントが最も強く発生する領域が、運動量が最もスクイーズされる領域（赤実線）と一致していることが確認できる。

図 3: もつれと運動量スクイーズ（赤実線）



4 Conclusion

直感的には、鏡の位置を読み出していることから位置の方が高い精度で推定されると考えられる。しかし本研究において、ホモダイン検出における測定角度（ホモダイン角）を適切に選ぶことで、位置を読み出していながらも運動量の方が高い精度で推定される状況が実現可能であることが明らかとなった。さらにこのような領域が、より強い量子もつれの生成と密接に関連していることが示された。特に、ここで示された強いもつれは重力相互作用に起因するものであり、本研究の結果は量子もつれを通じた重力の量子性検証や、重力と量子情報の接続に新たな知見を与えるものである。

今後の課題としては、θ_{opt} のより詳細な解析や運動量スクイーズが量子もつれ生成を強める機構の解明等が挙げられ、これは巨視的物体の量子制御や重力と量子力学の統一的理解においても重要な意義を持つと考えられる。

Reference

[1] R. Feynman, in Chapel Hill Conference Proceedings (1957)

[2] S. Bose et al., Phys. Rev. Lett. 119, 240401 (2017)

[3] C. Marletto and V. Vedral, Phys. Rev. Lett. 119, 240402 (2017)

[4] C. Genes et al., Phys. Rev. A 79, 039903 (2009)

[5] H. Müller-Ebhardt et al., Phys. Rev. Lett. 100, 013601 (2008)

[6] D.Miki et al., Phys. Rev. D 110.2, 024057 (2024)

——index へ戻る

SP-40

シュワルツシルト時空における光線追跡と降着構造の観測的像の解析

福岡大学
阿部　麟太郎

シュワルツシルト時空における光線追跡と降着構造の観測的像の解析

阿部 麟太郎 (福岡大学大学院 理学研究科)
共著者　固武　慶、中村　航 (福岡大学)

Abstract

ブラックホール近傍では、時空の強い歪みにより光線の軌道が曲げられ、観測者に届く像が重力レンズ効果によって大きく歪む。この現象はブラックホールシャドウの形成や、その周囲に存在する降着構造の観測において重要な役割を果たす。特に、降着円盤が回転している場合、ドップラー効果や重力赤方偏移が観測される放射の強度やスペクトルに影響を及ぼし、ブラックホールの物理量（質量・スピン等）や周囲環境の理解に直結する。近年、イベント・ホライズン・テレスコープ（EHT）によるブラックホールシャドウの直接観測をきっかけに、数値的手法を用いた理論的シャドウ再構成の研究が広く進められている。多くの研究は Kerr 時空における光線追跡と降着構造を扱っているが、非回転ブラックホール（シュワルツシルト時空）を対象とし、観測者が放った光線が降着円盤と交差する点の決定や、そこからの放射がどのように観測されるかを精密に解析することも基礎的理解にとって有意義である。本研究では、シュワルツシルトブラックホールの周囲に光源と降着円盤が存在する系を仮定し、観測者が放った光線のうち、ブラックホールによって曲げられたものがどのように降着円盤と交差するかを数値的に計算した。その後、交点から放射された光が観測者に届く経路を逆に辿り、重力赤方偏移およびドップラー効果を考慮して観測されるフラックスと温度分布を評価する。時空の歪みが観測像に与える影響を可視化し、ブラックホールシャドウの数値的再構成を目指す。現在は主にコード構築と初期条件設定の段階にあり、今後、再構成されたシャドウ像と物理パラメータとの関係についての議論を行う予定である。

1　Introduction

ブラックホールは非常に大質量かつ高密度の天体であり、事象の地平面内では強い重力場のため光でさえも外部へ脱出することはできない。また、ブラックホール近傍を通過する光の軌道は、強い重力によって曲げられる。そのため、ブラックホールは背景の光源に照らされると影として観測され、これをブラックホールシャドウと呼ぶ。2019 年、イベント・ホライズン・テレスコープ（Event Horizon Telescope; EHT）によって、世界で初めてブラックホールシャドウの直接観測が報告された。定常状態のブラックホールは、質量・角運動量・電荷の 3 つのパラメータによって特徴付けられるため、これらすべてのパラメータを観測的に決定することは天体物理学における重要な課題の 1 つである。これらの物理量を決定するには、解析的手法による理論的理解が重要となる。ブラックホールシャドウの理論研究の多くは、自転するブラックホール (Kerr 時空) の場合に焦点が当てられている。本研究ではその基礎理解のため、より単純なシュワルツシルト時空を想定し、非回転ブラックホールにおける降着円盤の光学的な放射について議論する。

2　Methods

本研究では、シュワルツシルト時空における光線の軌跡と降着円盤構造を、以下の解析的手法によって明らかにする。

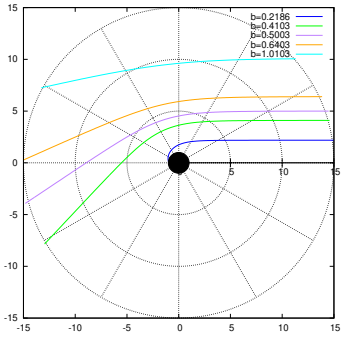


図 1:　１つ目の手順で作成した光線の図

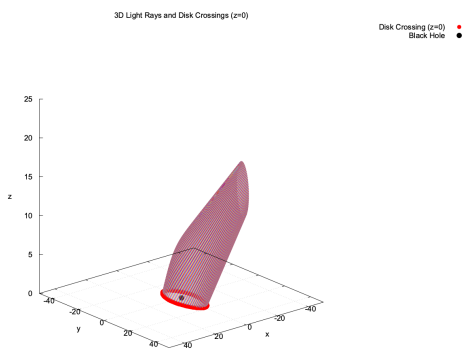


図 2:　2 つ目の手順で光線を回転させた図

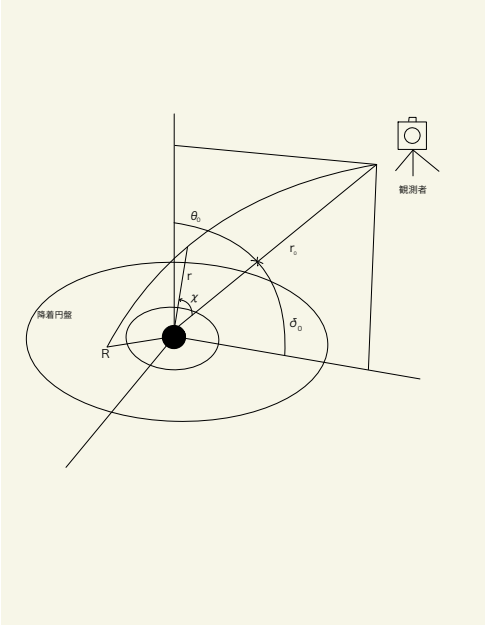


図 3:　ブラックホール周りの降着円盤

2.1　光線軌道の数値積分

本手順では、観測者が放った光線の軌道を数値的に積分する。用いるのは、よく知られた測地線方程式に基づく光線の軌道式：

$$\frac{d^2}{d\chi^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r} + \frac{3}{2r^2} \tag{1}$$

ここで r は中心からの距離、χ は観測者の画面上での座標である（Fukue and Yokoyama 1989）。この式はフェルマーの原理に基づいて導出されており、シュワルツシルト半径 $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ を単位として規格化している。

各光線にはインパクトパラメータ b を与え、ブラックホールの重力場によってどのように曲げられるかを追跡する。図??はこの結果の一例である。

2.2　光線の回転と降着円盤との交点判定

手順 1 で得られた光線の軌道を、観測者とブラックホールを結ぶ軸のまわりに回転させ、視線の傾斜角（本研究では $\theta = 70°$）を導入することで、空間的に 3 次元的な軌道に変換する。この回転処理により、観測者の視点において、光線と降着円盤（$z = 0$ 平面）との正確な交点を決定できる。

この交差判定処理は、ブラックホールシャドウの形状や像の変形を決定づける重要なステップである（図??参照）。

2.3　フラックスと温度の評価・可視化

降着円盤上の交点における放射の強度（フラックス） F は、標準的な薄い相対論的降着円盤モデル（Page and Thorne 1974）に基づいて次式で与えられる：

$$F = \frac{3GM\dot{M}}{8\pi r_g^3} \cdot \frac{1}{(R-3/2)R^{1/2}} \left[R^{1/2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \ln\left(\frac{R^{1/2} + \sqrt{3/2}}{R^{1/2} - \sqrt{3/2}} \right) \right] \tag{2}$$

ここで R はシュワルツシルト半径単位で測られた降着円盤上の半径、$\dot{M}$ は降着率である。

このフラックスをもとに、ステファン＝ボルツマンの法則を用いて有効温度 T を次式で求める：

$$T = \left(\frac{F}{\sigma} \right)^{1/4} \tag{3}$$

ここで σ はステファン＝ボルツマン定数である。

さらに、最大温度を $R \sim 4.8 r_g$ 付近で評価し、次の近似式が得られる：

$$T_{\max} = 10^7 \cdot \dot{M}^{1/4} M_0^{-1/2} \quad [\mathrm{K}] \tag{4}$$

ここで $\dot{M}$ は 10^{18}[g/s]、M_0 は太陽質量単位で与えられる。

最後に、重力赤方偏移とドップラー効果を考慮して、観測者に届く放射のフラックスと温度を以下で補正する：

$$F_{\rm obs} = \frac{F}{(1+z)^4} \quad T_{\rm obs} = \frac{T}{(1+z)} \tag{5}$$

ここで z は降着円盤の回転および重力ポテンシャルに起因する赤方偏移である（Luminet 1979 に準拠）。

以上の解析手法により、ブラックホールの降着円盤から得られる光学的放射のフラックスマップを得る。

3 Results

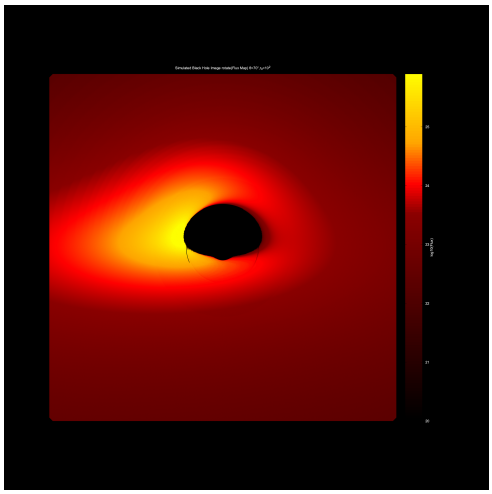


図 4: ブラックホール降着円盤の放射強度のカラーマップ。ここでは、観測者方向の傾斜角 $\theta_0 = 70°$、ブラックホール中心から観測者までの距離 $r_0 = 10^2[\mathrm{r_s}]$ を仮定している。色は輝度 ($\log_{10}$(Flux)) に対応しており、黄色が高輝度、赤〜暗赤が低輝度を示している。

図**??**は、ブラックホール降着円盤からの放射強度を示している。ここでは、観測者方向の傾斜角 $\theta_0 = 70°$、ブラックホール中心から観測者までの距離 $r_0 = 10^2[\mathrm{r_s}]$ を想定している。中心に広がる黒色の領域は、事象の地平面および降着円盤の内縁に対応しており、そこでは円盤の輝度が急激に低下する。この領域の大きさは、重力レンズ効果によって単純な幾何学的投影に基づくサイズよりも大きい。さらに、ブラックホールの左側の領域では、log で 25 とフラックスが高い。log で 23 以下と低い。この放射強度の非対称性は、降着円盤の回転に伴うドップラー効果に起因している。重力レンズ効果によって、ブラックホール背面の光も観測され、特徴的な歪みが現れている。

4 Conclusion

本研究では、シュワルツシルト時空における光線軌道を計算し、降着円盤から得られる光学的放射の強度の解析を行った。その結果、降着円盤の回転が観測される光にドップラー効果をもたらし、放射の強度に影響を与えることが示された。非回転ブラックホールであっても、ドップラー効果や重力レンズ効果により、非対称性や降着円盤像の変形は著しいことが示された。本研究で得られた結果は、観測データからブラックホールのスピンや円盤の回転方向を推定する上で重要な情報源となる。今後は、得られた観測像を用いてブラックホール質量やスピンなどの物理パラメータとの関係性を調査し、回転するブラックホールへの拡張や、偏光情報・スペクトル解析への発展も見込まれる。

Reference

J.-P. Luminet 1979, Astron. Astrophys. 75, 228-235(1979)

Jun Fukue, & Takushi Yokoyama, 1988, Publ, Astron. Soc. Japan 40, 15-24 (1988)