
2024年第54回 天文・天体物理若手夏の学校
素粒子・重力・宇宙論 分科会 集録集

■ 謝辞

2024年度天文・天体物理若手夏の学校は、基礎物理学研究所を始め、国立天文台、公益社団法人 伊勢志摩観光コンベンション機構、光学赤外線天文連絡会、理論天文学宇宙物理学懇談会、宇宙線研究者会議(CRC)、天文教育普及研究会、及び複数名の方々*からのご支援により成り立っております。

事務局一同厚く御礼申し上げます。

*協賛(個人、敬称略):青山 尚平、長峯 健太郎、西村 淳、牧島 一夫、三浦 均、水村 好貴、その他匿名希望6名

素粒子・重力・宇宙論 分科会

■ index

重宇 a01	草壁 克典	NANOGrav による重力波測定とブラックホール連星系観測の整合性
重宇 a02	加藤 杏実	PTA(Pulsar Timing Array) による背景重力波の検出
重宇 a03	伊藤 勘太	Chern-Simons 重力におけるアクシオンの役割と重力波観測によるダークマター探査の可能性
重宇 a04	堀井 優希	Kalb-Ramond 場と重力パリティの破れ
重宇 a05	鈴木 幹基	Ringdown 重力波の解析における overtone の重要性
重宇 a06	高田 和輝	バースト重力波の検出・解析の方法について
重宇 a07	村上 靖洋	重力波を用いた原始ブラックホールの探索手法の開発
重宇 a08	宮園 隼人	重力波観測による中性子星の状態方程式の制限
重宇 a09	前田 新也	メモリー効果と量子性の解析
重宇 a10	山本 聡一	カーブラックホール周りの回転する天体の可積分性について
重宇 a11	吉田 壮希	ブラックホールの影と光子軌道の安定性
重宇 a12	関根 肅稀	Schwarzschild 時空における測地線の再検討
重宇 a13	大西 悠稀	古典的な double copy について
重宇 a14	林 知哉	複素スカラー場を用いたワームホール解と安定性解析
重宇 a15	田中 孝輔	エネルギー条件を破る物質を要求しない通過可能ワームホール
重宇 a16	西村 俊太	シフト対称 GLPV 理論における hairy な静的球対称ブラックホール解
重宇 a17	佐藤 龍政	繰り込み可能な $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ ゲージボソンとマヨロンによるハップルテンションの解決
重宇 a18	西原 翼	重力レンズ効果の実体化：光学レンズ設計と 3D プリンターの活用
重宇 a19	由良 海翔	WMAP 7-year データを用いた初期ベクトル型揺らぎと原始磁場生成に関する制限
重宇 a20	Jhun Jinyoung	超伝導宇宙ひもの安定性
重宇 a21	辻 天太	Axion inflation による共鳴的再加熱
重宇 a22	川口 遼大	経路積分形式での曲率ゆらぎの計算
重宇 a23	竹内 智貴	ローレンツ対称性を破る重力理論とウンルー効果
重宇 a24	片山 友貴	Generalized Cubic Covariant Galileon における非線形パワースペクトルと予測
重宇 a25	上永 裕大	相対論的量子オットー熱機関における因果律の効果
重宇 a26	廣谷 知也	qutrit を用いた相対論的量子オットー熱機関の正仕事条件の導出
重宇 a27	福澄 諒太郎	量子論的枠組みにおける重力波と光学機械振動子系との結合
重宇 a28	畠山 広聖	オプトメカ系で探る重力の量子性の理論的研究
重宇 a29	吉本 吏貢	QH 系における analog de Sitter での Gravitational anomaly と Hawking 放射の関係
重宇 a30	小野田 康平	天体活動が宇宙大規模構造に及ぼす影響の数値シミュレーション
重宇 a31	吉岡 隼	擬スカラー場の赤方偏移依存性が宇宙複屈折へ及ぼす効果
重宇 a32	堀之内 杏水	暗黒エネルギーと暗黒物質の相互作用による宇宙の加速膨張
重宇 a33	鵜飼 祥	星形成銀河と活動銀河核の宇宙再電離への影響
重宇 a34	瀬尾 明莉	宇宙再電離期における電離バブル構造の高精度モデル化に向けた高精度輻射輸送計算コードの開発
重宇 a35	門田 龍正	原始ブラックホールの質量分布とクラスタリング
重宇 a36	八木 大地	原始ブラックホールからのバースト的な陽電子放射
重宇 a37	富田 涼也	Starobinsky's piecewise linear モデルにおける原始ブラックホールの形成について
重宇 a38	川口 健三郎	複数場インフレーションによる特定のスケールでの原始ブラックホール生成の促進

重宇 b01	島田 正顕	インフレーション中に生成される非ガウス性揺らぎとその原始ブラックホール形成
重宇 b02	鈴鹿 悠太	Lensing ring による M87*および Sagittarius A*の電荷への制限
重宇 b03	渡邊 秀長	Thermal Wash-in Leptogenesis via Heavy Higgs Decay
重宇 b04	佐藤 圭悟	中性子星の潮汐変形率
重宇 b05	手良脇 大誠	最尤法に基づく銀河・銀河レンズパワースペクトルの推定法開発
重宇 b06	柏木 海翔	量子重力理論解明に向けた包括的なアプローチの実現
重宇 b07	佐野 大志	The ways to quantum gravity
重宇 b09	中野 新太郎	銀河赤方偏移サーベイ BOSS の銀河パワースペクトルを用いた複数場インフレーションモデルの制限
重宇 b10	谷口 彰	リユードベリ原子を用いた高周波重力波の観測方法の構築
重宇 b11	中馬 史博	重力波波源の自己相関角度パワースペクトルとレンズ収束場の関係とその観測可能性
重宇 c01	山本 峻	PTA (Pulsar timing array) による SGWB (Stochastic Gravitational Wave Background) の検出と SMBHB (Supermassive Black Hole Binary) の影響
重宇 c02	牧田 悠輔	静的ワームホール解の定常一般化
重宇 c03	今福 隼斗	非反射対称性を持つブラックホールの観測的特徴
重宇 c04	谷口 喜太郎	extended Einstein-Maxwell-scalar 理論における磁荷と微分結合の存在下でのヘアリーブラックホール解
重宇 c05	千葉 航	TeV ガンマ線バーストにおける円偏光を用いたアクシオンの検証可能性について
重宇 c06	松尾 賢汰	ブラックホール磁気圏と帯電について
重宇 c07	田中 亜花音	2次元量子ブラックホールにおける量子収束仮説
重宇 c08	埜 正之	Analogue Gravity を用いた裸の特異点を持つ時空のモデル化
重宇 c09	鬼澤 宥人	宇宙項を持つ (1+1)次元ブラックホールの準固有振動について
重宇 c10	小林 弘太郎	非整数階微積分のフラクタル図形との関係および物理現象へのその応用
重宇 c11	富塚 祥伍	ベクトルテンソル理論の低エネルギー有効理論におけるブラックホール摂動
重宇 c12	山崎 幹太	帯電した球対称シェルのライスナーノルドシュトロム時空上での運動
重宇 c13	當銘 優斗	ハッブル宇宙望遠鏡による近赤外撮像データから探る宇宙背景放射の起源
重宇 c14	末藤 健介	蒸発しきらない正則ブラックホールの時空構造について
重宇 c15	大西 翔太	一様磁場中のシュバルツシルトブラックホールにおける帯電有質量スカラー場の Quasi-normal mode 不安定性について
重宇 c16	上道 恵也	回転ワームホールとブラックホールの関係

[indexへ戻る](#)

重宇 a01

NANOGravによる重力波測定とブラックホール連星 系観測の整合性

草壁 克典

活動銀河核の宇宙論的進化から探る nHz 背景重力波への超巨大ブラックホール連星の寄与

草壁 克典 (大阪大学大学院 理学研究科)

Abstract

Pulsar Timing Array Collaboration から、nHz 帯域における背景重力波 (Stochastic Gravitational Wave Background; SGWB) の存在が報告されている。nHz 帯域の重力波の主な発生源は超巨大ブラックホール連星系 (SMBHB) であると考えられてきた。nHz 背景重力波への SMBHB の寄与の見積もりには、銀河合体の頻度分布や銀河-超巨大ブラックホール間の質量相関を用い、銀河合体を SMBHB 合体に変換するモデル (e.g., Sesana 2008 など) が一般に用いられてきたが、これは超巨大ブラックホールが直接駆動する活動銀河核 (AGN) ではなく、銀河の観測量に基づく間接的な推定であるという問題があった。

可視光・X 線観測の進展に伴い、AGN の宇宙論的進化は $z \sim 5$ に至るまで精密に理解されている。さらに、近年では 2 つの AGN が対をなす、ペア活動銀河核の観測も大きく進展している。Chandra (Koss et al. 2012) や JWST (Perna et al. 2023) の観測結果によると、比較的低光度の AGN サーベイにおいては $\geq 10\%$ のペア AGN 割合が報告されている。一方で、Subaru/HSC や Gaia による高光度 AGN サーベイでは、 $\sim 0.01 - 0.1\%$ と低いペア割合が報告されている (e.g., Silverman et al. 2020, Shen et al. 2023)。本研究では、これら最新の AGN 宇宙論的進化モデルおよびペア割合の観測結果を考慮し、超巨大ブラックホール連星の nHz 背景重力波への寄与を見積もった。nHz SGWB と一致するためには、JWST や Chandra で報告されている高いペア割合が必要となることが分かってきた。本講演では、我々のモデルを紹介するとともに、nHz SGWB との比較や AGN ペア割合について議論する。

1 導入

超巨大質量ブラックホール連星系 (SMBHB) はブラックホールの主要な進化経路の一つである合体の元になる天体である。SMBHB は、合体の過程間にその質量に応じて $10^{-10} - 10^{-1}\text{Hz}$ と幅広い周波数帯域において重力波を放出すると考えられている。特に低周波数帯域 ($10^{-10} - 10^{-6}\text{Hz}$) の重力波は中性子星の周期的なパルスを利用して、地球とミリ秒パルサー間のタイミング残差を捉えることで確率的重力波背景放射 (SGWB) を推定する Pulsar Timing Array (PTA) プロジェクトによる観測が行われている。

SGWB の理論モデルは通常、銀河の質量関数や銀河-超巨大ブラックホールの質量相関を用いて、SMBHB の質量スペクトルを間接的に推定している (e.g. Sesana et al. (2008))。しかし、銀河合体に基づくモデルでは銀河とブラックホールの高赤方偏移における質量関係の推定などの面で不定性を含んでいることが問題があった。一方、活動銀河核 (AGN) の

宇宙論的進化は、光学/X 線観測の進展により、 $z \sim 5$ まで精密に明らかにされてきており、また近年は 2 つの AGN が対をなすペア AGN の観測も進んでいる。このような観測の進歩に基づき、AGN の X 線光度関数やペア割合の測定結果を考慮することで、SGWB の評価をより直接的な方法で評価することが可能となった。本研究では、AGN の X 線光度関数とペア割合の測定を考慮することにより、SGWB の評価を再検討した。予測されたペア AGN 毎のスペクトルと PTA プロジェクトの一環である NANOGrav により報告された重力波シグナル (Agazie et al. 2023) との比較により、重力波のシグナルと電磁波観測で得られている SMBHB のデータが整合的であるかについて以下で述べる。

2 方法

我々は X 線観測を基にしたブラックホール質量関数 (Ueda et al. 2014) 及びペア AGN の割合から SMBHB からの重力波背景放射を推定し、

NANOGrav の重力波シグナルとの比較を行った。ここではその過程の概要について述べる。

周波数 f (Hz) における SGWB のエネルギー密度 $\Omega_{GW}(f)$ は、各質量及び赤方偏移における SMBHB から放出された重力波を積分することで推定できる (Phinney. 2001)。

$$\Omega_{GW}(f) = \frac{8\pi G f}{3H_0^2 c^2} \int dz dM \frac{d^2 n}{dz dM} \frac{dE_{GW}}{df_r}$$

ここで、 M は chirp mass と呼ばれ、連星系の内、重い方のブラックホールの質量 M 及び質量比 q を用いて $M = Mq^{\frac{3}{5}}/(1+q)^{\frac{1}{5}}$ と定義される。また、 $d^2 n/dz dM$ は SMBHB の合体率、 dE_{GW}/df_r ($f_r = (1+z)f$: 重力波源から見た時の周波数) は各周波数において重力波として放出されるエネルギー (エネルギースペクトル) を表す。ここで、エネルギースペクトルについては (Chen et al. 2017; Bi et al. 2023) に従い重力波放出を始めるインスパイラルと呼ばれる段階において離心率の高い場合の放射過程を記述するモデルを採用した。但し、重力波を放出し始める軌道における離心率 e_0 については円盤内縁の角振動数と遠日点の軌道振動数を等しくしておくことにより、 $e_0 = 0.57$ の値を用いた (Hayasaki et al. 2010)。

エネルギー密度の被積分関数については、 Mpc^3 の体積中におけるブラックホールの個数を与えるブラックホール質量関数 (BHMF) Φ_{BH} 、ペアの AGN の割合を与える dual AGN pair fraction f_{pair} 及び理論的に予測される SMBHB の合体時間 τ を用いて変数に対する依存性をあらわに書き下すと以下のようになる。

$$\frac{d^2 n}{dz dM} \frac{dE_{GW}}{df_r} = \int \frac{\Phi_{BH}(M, z) f_{pair}(M)}{M \ln 10 \tau(M, q)} \times \frac{dE_{GW}(M, z, q, f)}{df_r} \frac{dM}{dM} \frac{dt}{dz} dq$$

ブラックホール質量関数については (Small & Blandford. 1992) により導入された質量関数の continuity equation を解くことにより得られる。

$$\frac{\partial \Phi_{BH}}{\partial z} \frac{dz}{dt} = - \frac{\partial}{\partial M} \left[\frac{1 - \eta}{\eta} \frac{\bar{\lambda} L_{Edd} \Phi_{AGN}}{c^2} \right]$$

ここで、 η はブラックホールの放射効率、 Φ_{AGN} は AGN についての質量関数、 $\bar{\lambda}$ はエディントン光度との比を表すエディントン比の平均値を表す。AGN の質量関数については、特定の光度を持つ

AGN の数密度を与えるボロメトリック光度関数 $d\Phi_{bol}(L_{bol}, z)/d\log L_{bol}$ 及びエディントン光度との比を表すエディントン比を対数正規分布の形で与える分配関数 $P(\lambda|L, z)$ を用いて以下のように与えることができる。

$$\Phi_{AGN}(z, M) = \frac{d \log M}{dM} \int \frac{d\Phi_{bol}(L, z)}{d \log L} P(\lambda|L, z) d \log \lambda,$$

本研究ではエディントン比の分配関数について、分布の標準偏差 $\sigma_{\log \lambda} = 0.3$ 及び平均のエディントン比 $\log(\bar{\lambda}) = 0.07$ を採用して計算を行った。

合体時間に関しては、Zhao et al. (2024) にまとめられている 4 つのステージに分けて推定した。具体的には、大きいスケールから順に

1. 重力相互作用によるドラッグで減速する力学的摩擦により角運動量を損失することに伴う軌道収縮
2. 周囲の恒星が連星系の重力に取り込まれ、ロス・コーン散乱を起こすことによる軌道収縮
3. ガス降着により角運動量を失うことによる軌道収縮
4. $< 10^{-2}$ pc 程度まで軌道が縮むと重力波放出による軌道収縮

という過程を経るものとした。これら 4 つのメカニズムにおけるタイムスケールの総和として合体時間をブラックホール質量及び質量比の関数として見積もった。なお、力学的摩擦に伴う軌道の収縮が始まる地点として、天の川銀河程度の中質量クラスの銀河の有効半径に相当する 10 kpc の値を採用した。

AGN のペア割合 f_{pair} について、本研究ではペア AGN の光度及び質量に注目し、計算に取り入れることを試みた。図 1 に各観測により報告されている値をまとめた。ここで、図 1 の上部横軸のブラックホール質量についてはエディントン比を 0.1 に固定した上でボロメトリック光度をブラックホール質量に変換している。データポイントについて、Chandra や JWST、SDSS、COSMOS で報告されているようなペア AGN は、主に中程度の光度 ($L_{bol} \sim 10^{43} - 10^{45}$ [erg/s]) であり、ペア割合は $\sim 1 - 20\%$ 程度という値である。一方で Subaru HSC や Gaia のような比較的高光度のクエーサーを対象とした場合では、 $\sim 0.01 - 0.1\%$ 程度と 1 桁から 2 桁程度低い値が報告されている。

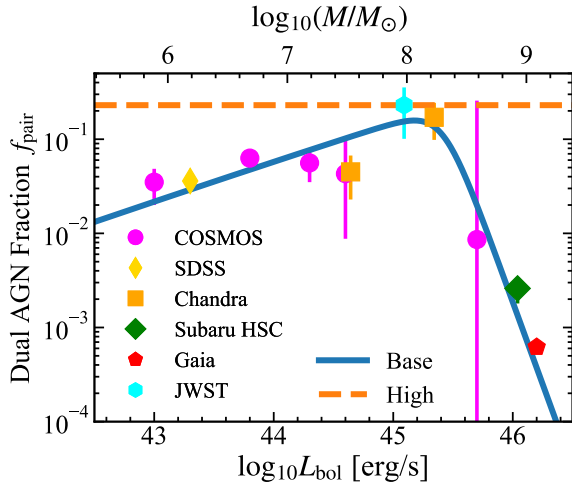


図 1: ボロメトリック光度及びブラックホール質量に対する AGN のペア割合。Circle、Thin Diamond、Square、Diamond、Pentagon、及び Hexagon はそれぞれ COSMOS (Li et al. 2024)、SDSS(Liu et al. 2011)、Chandra (Liu et al. 2011)、Subaru HSC (Silverman et al. 2020)、Gaia (Shen et al. 2023) 及び JWST (Perna et al. 2023) による観測結果を表す。各線は本研究で考えている異なるシナリオを示す。

本研究では、SGWB のスペクトル算出にあたり以下の 2 つのモデルの場合を検討することにより重力波シグナルとの比較検討を行った。

1. 6 つの観測により見積もられた全てのペア割合の値に対してフィットを行い、光度依存性を持ったケース (“Base model”)。
2. 近年の JWST の観測結果に基づく高い AGN ペア割合に基づくケース (“High model”)。

3 結果と議論

2 つの AGN のペア割合についてのシナリオ毎に現在の SGWB のエネルギー密度を計算した場合のスペクトルを図 2 に示す。ここで、図 2 中において比較として銀河進化を基にした先行研究の結果 (Bi et al. 2023) を黒線、NANOGrav による重力波シグナル (Agazie et al. 2023) を水色のプロットで示した。Base model のペア割合を用い、全ての観測結果を考慮した場合については、NANOGrav による重力波シ

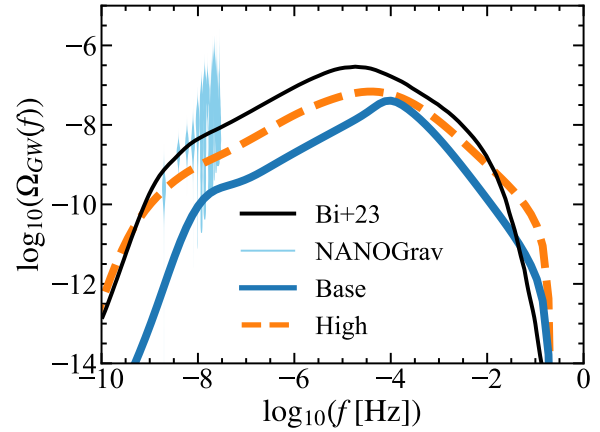


図 2: 各ペア割合のモデルにおける SGWB のエネルギー密度スペクトル。青、オレンジ線はそれぞれ Base model, High model の AGN のペア割合に基づき算出した。黒線は NANOGrav の観測結果に合うように MCMC サンプリングされた銀河合体モデル (Bi et al. 2023) による事後分布の中央値。水色で示されているヴァイオリンプロットは NANOGrav による重力波シグナルの観測結果 (Agazie et al. 2023) を表す。

グナルを 1–2 桁下回るという結果が得られた。この結果は、SMBHB の合体頻度が電磁波観測で予測されているよりも重力波観測の方が大きいということを意味する。一方、JWST による観測結果に基づく High model のケースでは NANOGrav の観測結果に対して $3\text{-}\sigma$ の範囲において一致し、ここでの計算においてはペア割合が高い方が重力波シグナルと整合的であるという結果となった。

図 3 には、Base model について、NANOGrav の感度がある周波数帯に対して各ブラックホールの質量範囲からどの程度の寄与があるかを評価するプロットを示した。この図から、NANOGrav は $10^7 - 10^9 M_\odot$ 程度の比較的重い部類のブラックホールに対して感度があることが分かる。従って、Base model のシナリオのように今まで報告されているペア割合を基にした場合は $\geq 10^7 M_\odot$ のブラックホールの数密度を過小評価している可能性があるという示唆が得られた。

本研究における解析から、重力波のシグナルと一致するためには広い質量範囲において高いペア割合 ($\sim 20\%$)、もしくは高光度側でペア割合が 1% 以下と低い場合には現在見積もられているよりもブラックホー

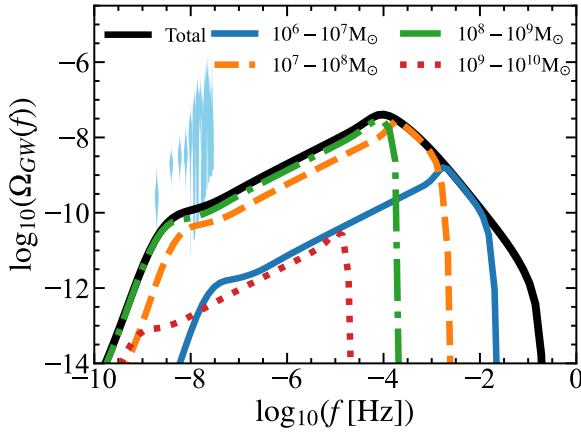


図 3: Base model における SGWB のエネルギー密度について、各質量範囲からの寄与を表した評価したプロット。Total と記された黒線は全ての質量範囲からの寄与を表し、図 2 の青線部分に相当する。

ルの個数を増加させる必要があることが分かった。

ペア割合に関しては、サーベイされている光度範囲や赤方偏移の範囲は未だ限定的であり、正確にペア割合を見積もるには更なるペア AGN の観測が要請される。

ブラックホールの数密度に関しては、例えば低光度 AGN などが電磁波観測により捉えきれていなかったブラックホールの存在として考えられる。これらは通常の AGN に比べて低いエディントン比を持ち、その質量に比して光度が極端に低い天体である。こうした天体が現在の質量関数のモデルで捉えきれていない隠れたブラックホールの存在である可能性がある。

これらを踏まえ、より正確に SMBHB の合体率を見積もり重力波背景放射を再評価をすることが今後の課題である。

4 まとめ

AGN の光度関数及びペア割合から SGWB のエネルギー密度スペクトルを評価した。その結果、NANOGrav の重力波観測のシグナルと整合的であるためには、JWST や Chandra で報告されているような高いペア割合が、広い光度帯域において必要であることが分かった。あるいは、高光度でのペア割合において Subaru HSC や Gaia で報告されている

ような低いペア割合であるとした場合、X 線観測により予測されていたよりも大きいブラックホール数密度が要請されることが分かった。

Reference

- Sesana, A., Vecchio, A., & Volonteri, M. 2009, MNRAS, 394, 2255
- Agazie, G., Anumalapudi, A., Archibald, A. M., et al. 2023b, ApJL, 951, L8
- Phinney, E. S. 2001, arXiv e-prints, astro
- Hayasaki, K., Ueda, Y., & Isobe, N. 2010, PASJ, 62, 1351
- Ueda, Y., Akiyama, M., Hasinger, G., Miyaji, T., & Watson, M. G. 2014, ApJ, 786, 104
- Small, T. A., & Blandford, R. D. 1992, MNRAS, 259, 725
- Chen, S., Sesana, A., & Del Pozzo, W. 2017, MNRAS, 470, 1738
- Bi, Y.-C., Wu, Y.-M., Chen, Z.-C., & Huang, Q.-G. 2023, Science China Physics, Mechanics, and Astronomy, 66, 12040
- Zhao, S.-S., Jiang, W., Lu, R.-S., Huang, L., & Shen, Z. 2024, ApJ, 961, 20
- Li, J., Zhuang, M.-Y., Shen, Y., et al. 2024, arXiv e-prints, arXiv:2405.14980
- Liu, X., Shen, Y., Strauss, M. A., & Hao, L. 2011, ApJ, 737, 101
- Koss, M., Mushotzky, R., Treister, E., et al. 2012, ApJL, 746, L22
- Silverman, J. D., Tang, S., Lee, K.-G., et al. 2020, ApJ, 899, 154
- Shen, Y., Hwang, H.-C., Oguri, M., et al. 2023, ApJ, 943, 38
- Perna, M., Arribas, S., Lamperti, I., et al. 2023, arXiv e-prints, arXiv:2310.03067

[indexへ戻る](#)

重宇 a02

PTA(Pulsar Timing Array)による背景重力波の検出

加藤 杏実

未提出

重宇 a03

Chern-Simons 重力におけるアクシオンの役割と重力波 観測によるダークマター探査の可能性

伊藤 勘太

Chern-Simons 重力における Axion の役割と重力波観測による DM 探査の可能性

伊藤 勘太 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

現在、宇宙のエネルギーのおよそ 4 分の 1 を占める暗黒物質の正体を突き止めることは、現代宇宙論における大きなテーマの一つである。その有力な候補の一つである素粒子 Axion は Chern-Simons coupling (CS 結合) を通じて重力と coupling することが知られている。CS 結合をモデルに組み込むことで、Axion の振動に伴うパラメータ共鳴により、重力波は増幅されることが示される。本発表ではこの増幅を受けた重力波が、 $10^{-9} \sim 10^{-2}$ Hz で観測可能性があり Axion の質量を制限できることを示した [1] をレビューする。

1 Introduction

暗黒物質の存在は、1970 年代後半の銀河の回転速度曲線の観測や、重力レンズ効果の発見などにより観測的に支持されている。しかし一方で、暗黒物質の正体については今だに明らかになっておらず、様々な候補が考えられている。その中でも特に有力だと考えられているのが、Axion という素粒子である。本発表では "Axion" として QCD Axion と Axion Like Particles (ALPs) を扱う。QCD Axion は、量子色力学 (Quantum Color Dynamics, QCD) における strong CP problem の解決策として提案された Peccei-Quinn 機構において、カイラル対称性 $U(1)_{PQ}$ の自発的破れにより出現する南部-Goldstone boson であり、 $U(1)_{PQ}$ 対称性の破れるスケール f_a と Axion の質量 m_a との間には

$$m_a \sim 5.7 \times 10^{-6} \mu\text{eV} \left(\frac{10^{12} \text{ GeV}}{f_a} \right) \quad (1)$$

の関係がある。一方 ALPs は、QCD Axion と多くの性質を共通して持つが、質量の獲得機構が異なるため QCD Axion のような m_a と f_a との間関係は要請されず、パラメータ空間における制限が弱くなっている。ALPs は Strong CP problem の解決策にはならないものの、標準模型を超えた新物理の探究において motivated である。

本稿では、第 2 章で Axion 場の振る舞いを、第 3 章で重力波の振幅 h の進化を扱い、第 4 章にて h がパラメータ共鳴によって増幅されることを示す。そして最後第 5 章で増幅された重力波の観測可能性について述べる。

2 Axion field

作用 S が以下のように与えられるモデルを考える。

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{16\pi G} + \frac{\alpha}{4} R\tilde{R} \right) + S_\phi \quad (2)$$

$$S_\phi = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right\} \quad (3)$$

$$V(\phi) = m_a^2 f_a^2 \left(1 - \cos \frac{\phi}{f_a} \right) \quad (4)$$

m_a 、 α 、 f_a はそれぞれ Axion の質量、結合定数、崩壊定数である。(3) 第 2 項は Chern-Simons 項 (CS 項) であり重力と Axion の coupling を表す。ここから ϕ の運動方程式

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + m_a^2 f_a \sin \frac{\phi}{f_a} = 0 \quad (5)$$

を得る。(5) を解くことで ϕ の振る舞いは図 1 のようになる。ここでは $H \simeq m_a$ となる時刻 t を $tm_a = 1$ とした。

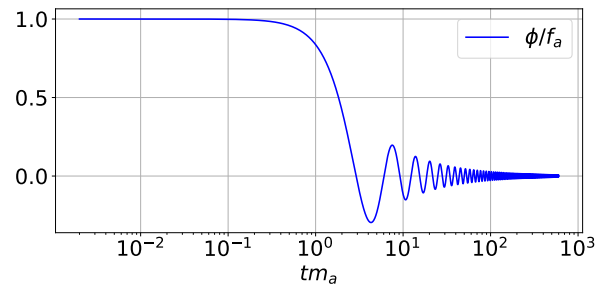


図 1: ϕ の時間変化

$H \gg m_a$ では Axion field は Hubble friction の効果で停留しており、温度が下がり $H \simeq m_a$ になると

ϕ は動き出す。 $H \ll m_a$ になると振動をはじめ、宇宙膨張により $a^{-3/2}$ で減衰していく。この時エネルギー密度 ρ は $\rho \propto a^{-3}$ で減衰し、Axion が matter-like な振る舞いを見せることがわかる。

3 EOM of GWs

3.1 Metric Perturbation

ここでは CS 項を考えた場合の重力波の方程式を導出する。FLRW 計量における空間摂動成分 h_{ij} は

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(\delta_{ij} + h_{ij}(t, \mathbf{x}))dx^i dx^j \quad (6)$$

で与えられる。これをフーリエ展開し、右巻き成分 (R) と左巻き成分 (L) で展開する。

$$h_{ij}(t, \mathbf{x}) = \sum_{A=R,L} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} h_A(t, k) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e_{ij}^A \quad (7)$$

$$e_{ij}^A = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{ij}^{(+)} + i\lambda_A e_{ij}^{(\times)}) \quad (8)$$

ただし (8) 内において $\lambda_R = 1$ 、 $\lambda_L = -1$ である。ここから重力波の 2 次の作用 S_h が得られる。

$$S_h = \frac{1}{32\pi G} \sum_{A=R,L} \int dt \frac{d^3k}{(2\pi)^3} a^3 D_A \left(\dot{h}_A^2 - \frac{k^2}{a^2} h_A^2 \right) \quad (9)$$

$$D_A \equiv 1 - \frac{\lambda_A k}{am_{cs}} \quad (10)$$

$m_{cs} \equiv (16\pi G\alpha\dot{\phi})^{-1}$ は Chern-Simons 質量であり、CS 項の影響を受けうるスケール k を決定している。 m_{cs} は $\dot{\phi} = 0$ において無限大に発散し、 $D_A \rightarrow 1$ 、つまり一般相対性理論 (GR) に帰着する。この点で Chern-Simons 重力は GR の自然な拡張になっている。先に述べた Axion field の振る舞いを考えると、 $H \gg m_a$ では GR が支配し、 $H \simeq m_a$ となる時刻付近で CS 項が現れる事が分かる。この作用から運動方程式 (11) が導かれる。

$$\ddot{h}_A + \left(3H + \frac{\dot{D}_A}{D_A} \right) \dot{h}_A + \frac{k^2}{a^2} h_A = 0 \quad (11)$$

3.2 Parametric Resonance

(11) に変数変換 $\psi_A = h_A \{D_A(t)a^3(t)\}^{1/2}$ を施すと、

$$\ddot{\psi}_A + \left(\frac{k^2}{a^2} - \frac{\lambda_A k m_a \delta}{2a} \cos m_a t \right) \psi_A = 0 \quad (12)$$

を得る。ただし $\dot{\phi} \simeq \phi_0 m_a f_a a^{-3/2} \sin m_a t$ を用いた。また $\delta \equiv m_a / \min |m_{cs}| \propto a^{-3/2}$ であり、十分時間が経過し $\delta \ll 1$ となる時 (12) は成立する。ここから

$$\frac{d^2 \psi_A}{dx^2} + (A_k - 2q \cos 2x) \psi_A = 0 \quad (13)$$

$$x = tm_a/2, A_k = \frac{4k^2}{a^2 m_a^2}, q = \frac{\lambda_A k \delta}{m_a a}$$

と変形できる。これは Mathieu 方程式と呼ばれ、 $A_k \simeq 1$ 周辺の k に対してパラメータ共鳴が起こり ψ_A が増幅される。

3.3 Ghost mode

(9) において $D_A < 0$ となる場合、 \dot{h}_A^2 の係数が負になってしまう。するとエネルギーの下限を無限に低くとる事ができ、安定な真空状態を作ることができなくなってしまう。これを ghost mode と呼ぶ。 $D_A < 0 \Leftrightarrow k < a|m_{cs}|$ であるから、 $k < a\Lambda < a|m_{cs}|$ となる Λ を導入し、ghost が生じるスケールに対しては CS 項の効果を切って計算を進める。図 2 は横軸に tm_a 、縦軸に k/m_a を取った。ghost 領域は青、 Λ が扱う領域は赤で示されている。明らかに、ghost

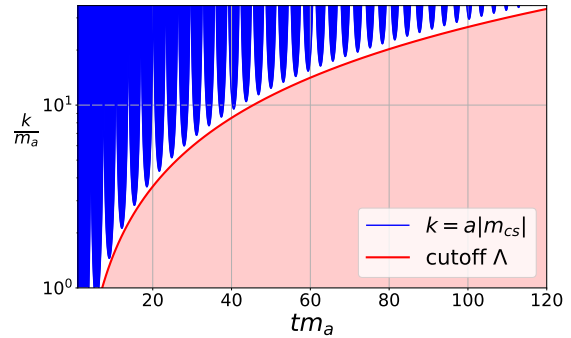


図 2: $a\Lambda$ と $a|m_{cs}|$ の比較

領域は今回考慮に入れる領域よりも k が大きい領域に存在している。したがって、ghost mode は今回の計算には影響を与えない。

4 Result

以下の図 3,4 はスケールが $k = 10m_a$ の重力波の振幅の時間進化を表している (BP については表 1)。

図 3 では右巻きと左巻きで振る舞いが大きく異なっており、右巻き (赤) は時間経過しても振幅がほと

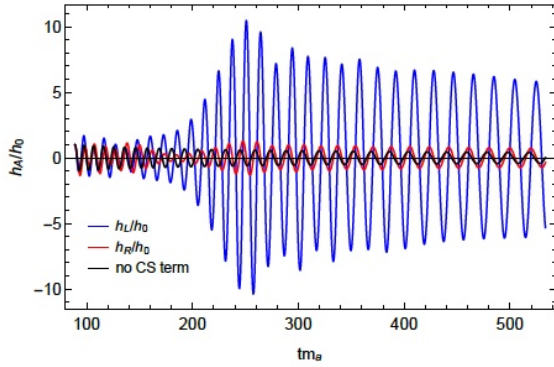


図 3: 重力波の振幅の時間進化 (BP1)

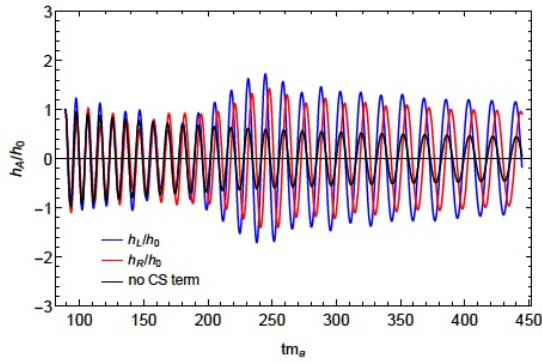


図 4: 重力波の振幅の時間進化 (BP5)

んど成長しない一方、左巻き（青）は最大で振幅が約 10 倍にまで成長している。一方図 4 では右巻き左巻き両方で同程度の増幅が起こっている。増幅の始まる時刻は $tm_a \simeq 200$ であり、これは $A_k \simeq 1 \Leftrightarrow tm_a \simeq 2(k/m_a)^2$ となる時刻と一致している。また共鳴が起こった後の振幅は、宇宙膨張の影響で時間と共に減衰している。

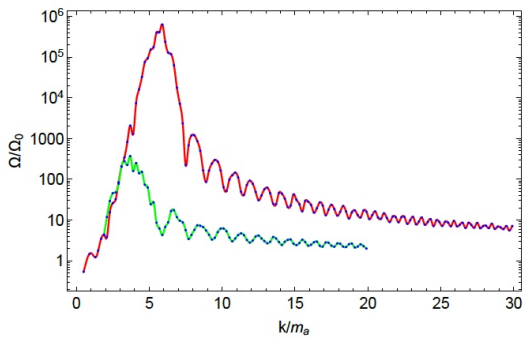


図 5: 重力波のスケールに対するエネルギー密度増幅率の比較

このようにして増幅された重力波のエネルギー密度の増幅率 Ω/Ω_0 を表したのが図 5 である。スケールが $k = 6m_a$ 付近で増幅率は最大となっている。インフレーションによる重力波がこの増幅を受けると考えて、増幅後のエネルギー密度と様々な検出器の感度曲線を比較したのが図 6 である。

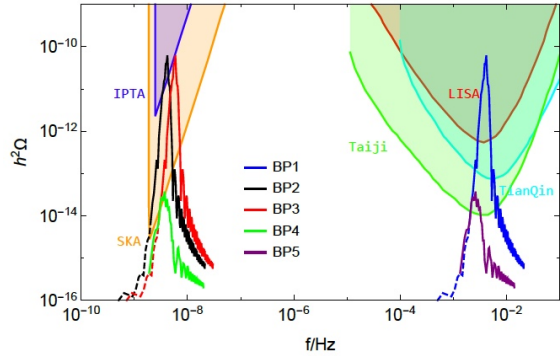


図 6: 増幅後の重力波と感度曲線の比較

この図より、 $m_a = 10^{-3} \sim \text{eV}$ の Axion が存在する場合、Taiji や LISA などの感度を持つ検出器で観測可能であることがわかる。また $m_a = 10^{-12} \text{eV}$ の Axion が存在する場合、SKA や IPTA において観測可能である事がわかる。

表 1: 各 BP に対するパラメータ

	m_a (eV)	f_a (GeV)	α (GeV $^{-1}$)
BP1	1	10^{17}	5×10^{38}
BP2	10^{-12}	10^{17}	5×10^{62}
BP3	2×10^{-12}	3×10^{18}	4.2×10^{60}
BP4	2×10^{-12}	3×10^{18}	2.1×10^{60}
BP5	1	10^{16}	2.5×10^{39}

5 conclusion

本発表では、Chern-Simons 重力における Axion の振動に伴うパラメータ共鳴により、重力波が増幅されることを示した。増幅された重力波は $10^{-9} \sim 10^{-2}$ Hz で観測可能性があり、Axion の質量を制限できることを示した。今後はこの増幅された重力波の観測を通じて、Axion の存在を確認することが期待される。

Acknowledgement

今回の発表に際して、熱心な指導とご助言を頂いた研究室のスタッフ、先輩方に感謝いたします。並びに、今回このような発表の場を用意して下さった、夏の学校運営の皆様にも感謝申し上げます。

Reference

- [1]Mingqiu Li et al.”Gravitational waves from Axion wave production” arXiv:2309.08407
- [2]C.B Adams et al.”Axion Dark Matter” arXiv:2203.14923
- [3]David J. E. Marsh”Axion Cosmology” arXiv:1510.07633

[indexへ戻る](#)

重宇 a04

Kalb-Ramond 場と重力パリティの破れ

堀井 優希

Kalb-Ramond 場と重力パリティの破れ

堀井 優希 (立教大学大学院 理学研究科)

Abstract

本稿では論文 [1] をレビューする。重力波物理学により一般相対性理論 (GR) を超える理論を調べることができる。Kalb-Ramond 場 (KR 場) という 2 形式場をダークマター候補とする最近の研究 [2] をもとに、双対リーマン曲率テンソルと 2 つの KR 場の結合を考える。この項は重力波のパリティ対称性を破り、質量次元が 4 であるという特徴を持つ。Conformal FLRW 計量をバックグラウンドとしたテンソル摂動時空上で作用に対して計量で変分をとることで、左巻き、右巻き重力波の振幅の運動方程式を得る。この運動方程式を論文 [3] で紹介される運動方程式に対応させることで運動方程式の解を得る。そして得られた解を観測と比較する。中性子星-中性子星合体によって重力波とガンマ線が同時に放出される。この重力波は LIGO, Virgo によって検出され (GW170817), ほぼ同時にガンマ線 (GRB170817A) が観測された。この観測により重力波の伝搬速度に制限が課せられる [4]。そして Adv-LIGO, Adv-Virgo による重力波観測データセットである GWTC-3 から、重力波の振幅に制限がかけられる [5]。

1 Introduction

GR は近日点移動等の太陽系スケールにおける観測結果を精度良く説明する。しかし、強重力場中での検証は十分ではない。2015 年にブラックホール連星からの重力波が直接観測され、GR を強重力場で検証することができるようになった。更なる重力波の観測計画 (LISA 計画等) も進行しており、GR を超える物理の発見が期待されている。これらの観測が行われた際に GR の比較対象として GR を超える理論を用意しておく必要がある。

時空計量を conformal FLRW バックグラウンドとテンソル摂動に分解する。

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (1)$$

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = a(\eta)^2 (-d\eta^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (2)$$

テンソル摂動である重力波は 2 つの自由度を持つ。 z 軸方向に伝搬する重力波を円偏光の基底で展開すると、 z 方向に対してそれぞれ右巻きと左巻きに回転する独立な 2 つの振動モードに分解できる。

$$h_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(h_L + h_R) & i(h_L - h_R) & 0 \\ 0 & i(h_L - h_R) & (h_L + h_R) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

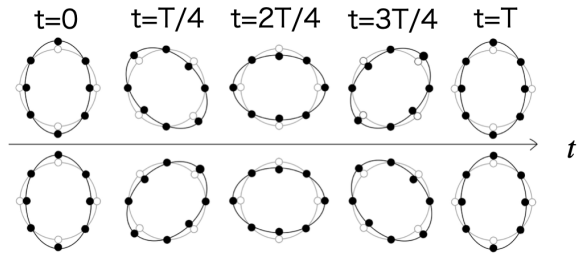


図 1: 左巻き重力波と右巻き重力波が伝搬する様子。 T は重力波の周期を表す。

GR のように重力セクターにパリティ対称性がある場合、左巻きモード h_L は鏡像反転 (パリティ変換) で右巻きモード h_R に変換される。一方、リーマン曲率テンソルとレヴィ・チヴィタ記号の縮約 (双対リーマンテンソル)

$$\tilde{R}_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\alpha\beta\rho\sigma} \quad (4)$$

が物質場と結合するような相互作用項を理論に含む場合、左巻き右巻き重力波の運動方程式のソース項は異符号になる。

$$\square h_L = +\Xi, \quad (5)$$

$$\square h_R = -\Xi. \quad (6)$$

ここで Ξ はソース項であり、物質場あるいは物質場の微分からなる。これらの方程式の解から、2 つのモー

ドの振幅や伝播速度は異なることが示される。したがって GR は右巻き左巻き重力波の伝播速度や振幅の差により検証可能である。

重力パリティを破る代表的な理論として dynamical Chern-Simons 理論 (dCS 理論) があげられる。GR の重力波 2 自由度に加え, dCS 理論は擬スカラー場 ϕ と Pontryagin 密度 $\tilde{R}_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}$ の結合を含む。他にも重力パリティを破る理論が存在するが, それらの多くに共通することは重力パリティを破る相互作用項が 5 以上の質量次元を持つことである。例えば dCS 理論では質量次元について擬スカラー場 ϕ が 1, リーマンテンソル $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ が 2 なのでそれらの結合 $\phi \tilde{R}_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}$ の質量次元は 5 である。ラグランジアン密度の質量次元は 4 であるので, これらの結合には質量次元 1 をもつ結合定数 m_{CS} を要する。したがって dCS 理論におけるラグランジアン密度の相互作用項は

$$\mathcal{L}_{\text{dCS}} = \frac{\phi}{m_{\text{CS}}} \tilde{R}_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (7)$$

である。これは重力パリティの破れに対するポテンシャルの効果が抑制されることを示唆する。

重力パリティを破る効果は一般に物質との非最小結合を要請する。それらの物質はダークマターと関係する可能性がある。弦理論において, Kalb-Ramond 場 (KR 場) $B_{\mu\nu}$ という場が提唱されている。KR 場は論文 [2] でダークマターの候補として研究された。KR 場が質量をもたない場合, KR 場の強さを双対化して KR アクシオンと呼ばれる擬スカラー場を作ることができる [6]。KR 場と双対リーマンテンソルが結合したモデル, すなわち重力と物質の相互作用項が

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{\xi}{2} \tilde{R}_{\mu\nu\rho\sigma} B^{\mu\nu} B^{\rho\sigma} \quad (8)$$

で表されるモデルを考える。KR 場の質量次元は 1 なので, (8) の結合定数 ξ の質量次元は 0 である。これは dCS 理論の相互作用項 (7) の結合定数 m_{CS} の質量次元が 1 であることやその他多くの重力パリティを破る理論に質量次元が 1 以上の結合定数が現れることと決定的に異なる。本稿では KR 場と重力の相互作用が (8) で与えられるようなモデルから生じる左巻き右巻き重力波の伝播速度や振幅の違いについて調べる。結果を中性子星-中性子星合体によって放出された重力波とガンマ線バーストの同時観測による重力波伝播速度への制限 [4], Adv-LIGO, Adv-Virgo による重力波観測データセットである GWTC-3 による重力波振幅への制限 [5] と比較する。

2 KR 場の運動項

KR 場の運動項は次のように表される。

$$\mathcal{L}_{\text{B}} = \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} - V(B). \quad (9)$$

ここで,

$$H_{\mu\nu\rho} = \partial_{[\mu} B_{\nu\rho]} = \partial_{\mu} B_{\nu\rho} + \partial_{\nu} B_{\rho\mu} + \partial_{\rho} B_{\mu\nu} \quad (10)$$

は KR 場の強さ, V はポテンシャルである。 $V = 0$ のとき, 理論にはゲージ対称性がある。 $V \neq 0$ で相互作用項 (8) が存在するとき, 明らかにゲージ対称性が破れる。KR 場の強さが一定で 0 でない場合 ($B^2 = B_{(0)}^2$) についてはこれから示すように重力波のパリティが破れる。このような場合はポテンシャルの形を

$$V(B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - v^2) \quad (11)$$

とすることで表現できる。KR 場が最小値を取るとき, (1) で定義した $\bar{g}_{\mu\nu}$ を用いて

$$v^2 = \bar{g}^{\mu\alpha} \bar{g}^{\nu\beta} B_{\mu\nu}^{(0)} B_{\alpha\beta}^{(0)} \quad (12)$$

とすることができる。論文 [1] より, KR 場のバックグラウンドを

$$B_{\mu\nu}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{V}_e a^2 & 0 & 0 \\ \mathcal{V}_e a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{V}_m a^2 \\ 0 & 0 & -\mathcal{V}_m a^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

にとる。これは (9) から導かれる運動方程式を満たす。 $\mathcal{V}_e, \mathcal{V}_m$ は実定数で, それぞれ KR 場の「電場的」「磁場的」成分と考えることができる。ポテンシャルの最小値は (12), (13) より $\mathcal{V}_e, \mathcal{V}_m$ を用いて,

$$v = \sqrt{\mathcal{V}_m^2 - \mathcal{V}_e^2} \quad (14)$$

と表せる。これは時空のバックグラウンドの発展 $a(\eta)$ に依存しない。

3 全ラグランジアン密度

ラグランジアン密度が以下の式で与えられる理論を考える。

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{EH}} + \mathcal{L}_{\text{B}} + \mathcal{L}_{\text{int}} + \mathcal{L}_{\text{m}}. \quad (15)$$

ただし, \mathcal{L}_{EH} はアインシュタイン・ヒルベルト項

$$\mathcal{L}_{\text{EH}} = -\frac{R}{16\pi G}, \quad (16)$$

\mathcal{L}_{B} は (9) で定義した KR 場の運動項, \mathcal{L}_{int} は (8) で定義した KR 場と重力場の相互作用項, \mathcal{L}_{m} は KR 場以外の物質項である. なお, KR 場と重力場の相互作用項は重力パリティ破れに関係するもののみを取り入れた.

4 重力波の解

物質項 \mathcal{L}_{m} を無視し (15) による作用を計量で変分すると, 左巻き右巻き重力波の方程式はそれぞれ以下のようになる.

$$\begin{aligned} h''_R + 2\mathcal{H}h'_R - \partial_z^2 h_R - \frac{\xi}{8\pi G} \{2\mathcal{V}_m \mathcal{V}_e h_R (3\mathcal{H}^2 - a''/a) \\ - i\mathcal{H}((5\mathcal{V}_m^2 + 3\mathcal{V}_e^2)\partial_z h_R + 2i\mathcal{V}_m \mathcal{V}_e h'_R) \\ + i(\mathcal{V}_m^2 + \mathcal{V}_e^2)\partial_z h'_R\} = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} h''_L + 2\mathcal{H}h'_L - \partial_z^2 h_L - \frac{\xi}{8\pi G} \{2\mathcal{V}_m \mathcal{V}_e h_L (3\mathcal{H}^2 - a''/a) \\ + i\mathcal{H}((5\mathcal{V}_m^2 + 3\mathcal{V}_e^2)\partial_z h_L - 2i\mathcal{V}_m \mathcal{V}_e h'_L) \\ - i(\mathcal{V}_m^2 + \mathcal{V}_e^2)\partial_z h'_L\} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

論文 [3] 式 (4) では重力パリティを破る理論における重力波の方程式を統一的に扱う方法を紹介している. $\mathcal{V}_e = 0$ とすることで, (17), (18) を論文 [3] 式 (4) の形に合わせることができる. これにより重力波の方程式の解は論文 [3] 式 (29) で与えられる. (17), (18) にこのことを適用すると, 解は

$$h_{R,L} = h_{R,L}^{\text{GR}} \exp \left\{ \mp \frac{\xi \mathcal{V}_m^2}{16\pi G} (k(1+z)D_A + 5iz_0) \right\} \quad (19)$$

で与えられる. ただし, $h_{R,L}^{\text{GR}}$ は KR 場が存在しない場合の GR における重力波の解, z は赤方偏移, D_A は角径距離, $z_0 = \ln(1+z)$ である. Section 1 でも述べたように, KR 場と重力場の結合定数は他のパリティを破る理論と異なり質量次元が 0 であるため, dCS 理論と異なり (19) には質量スケールによる UV カットオフが現れない.

重力パリティを破る理論の分散関係は [3] 式 (30) で与えられる. この理論の場合は

$$\omega_{R,L}^2 = k^2(1 + \tilde{\lambda}_{R,L}k^{-1}), \quad (20)$$

$$\tilde{\lambda}_{R,L} = \mp \frac{5\xi \mathcal{V}_m^2 \mathcal{H}}{8\pi G}, \quad (21)$$

となる. 位相速度 v_p と群速度 v_g の定義は

$$v_p = \omega/k, \quad (22)$$

$$v_g = d\omega/dk, \quad (23)$$

であるから, (20) より

$$v_p = 1 + \frac{1}{2}\tilde{\lambda}_{R,L}k^{-1} + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}_{R,L}^2k^{-2}), \quad (24)$$

$$v_g = 1 + \frac{1}{8}\tilde{\lambda}_{R,L}^2k^{-2} + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}_{R,L}^3k^{-3}), \quad (25)$$

である. したがって, 群速度は光速よりわずかに大きくなり, 位相速度は右巻き左巻き重力波でわずかに異なる.

5 観測との比較

Section 4 で得られた結果を観測データと比較する. まず, 中性子星-中性子星合体によって発生した重力波とガンマ線バーストの同時観測 [4] から重力波の伝搬速度 c_{gw} に以下の制限が与えられる.

$$-3 \times 10^{-15} < c_{\text{gw}} - 1 < 7 \times 10^{-16}. \quad (26)$$

(24) と比較して,

$$\mathcal{V}_m \sqrt{\frac{H_0}{k}} < 9 \times 10^{-5} m_p. \quad (27)$$

ただし, $m_p = 1/\sqrt{8\pi G}$ はプランク質量である.

次に, Adv-LIGO, Adv-Virgo による重力波観測データセットである GWTC-3 における, ブラックホール連星の合体から生じた重力波振幅の観測 [5] より, 以下の制限が与えられる [1].

$$\mathcal{V}_m < 1.9 \times 10^{-11} m_p. \quad (28)$$

6 Conclusion

本稿では Kalb-Ramond 場 (KR 場) というダークマターの候補である 2 形式場 2 つと双対リーマン曲

率テンソルの結合を含む理論において, 重力波のパリティが破れることを示した. そして左巻き, 右巻き重力波の振幅や伝搬速度を観測することで GR を超える物理を検証することができることを示した.

今後の研究として, KR 場を用いた初期宇宙モデルの構築を試みる.

Acknowledgement

研究発表の場を設けていただいた夏の学校スタッフの皆様, ご支援いただいた全ての関係者の皆様, お忙しい中発表練習にお付き合いいただいた小林努教授と平松尚志助教, 本発表についてゼミで議論・助言していただいた立教大学理論物理学研究室の先輩方に心より感謝申し上げます.

Reference

- [1] Tucker Manton & Stephon Alexander, 2024, arXiv:2401.14452
- [2] Christian Capanelli, Leah Jenks, Edward W. Kolb, & Evan McDonough, 2023, arXiv:2309.02485
- [3] Leah Jenks, Lyla Choi, Macarena Lagos, & Nicolás Yunes, 2023, Phys. Rev. D 108 no. 4, (2023)044023
- [4] B. P. Abbott et al., 2017, Astrophys. J. Lett. 848 no. 2, (2017)L13
- [5] Thomas C. K. Ng, Maximiliano Isi, Kaze W. K. Wong, and Will M. Farr, 2023, Phys. Rev. D 108, 084068
- [6] P. Svrcek & E. Witten, 2006, JHEP 06(2006)051

[indexへ戻る](#)

重宇 a05

Ringdown 重力波の解析における overtone の重要性

鈴木 幹基

Ringdown 重力波の解析における overtone の重要性

鈴木 幹基 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

コンパクト連星合体 (Compact Binary Coalescence, CBC) は, inspiral, merger, ringdown という 3 つの過程に分類される. Ringdown 重力波の解析は, Inspiral-Merger-Ringdown (IMR) の解析と独立して CBC の解析を行えるという点で有用である. [1] では, overtone と呼ばれる ringdown の振動モードを考慮することによって, ringdown の解析時刻をピークと一致させても IMR の解析結果と矛盾のない結果が得られることを示している. また, ringdown 解析から一般相対論の検証を行うことができ, 弱い制約ながら一般相対論から予測される値と矛盾のない結果が得られることを示している. 本発表では, [1] で示されている結果と自分自身で計算した結果を比較することによって [1] のレビューを行う.

1 Introduction

重力波 (Gravitational Wave, GW) とは一般相対性理論から帰結される, 時空の歪みが波として伝播する現象である. 現在, 重力波望遠鏡で観測されているものはほとんどがコンパクト連星合体 (Compact Binary Coalescence, CBC) で, この CBC は 3 つの過程に分類される. まず, 連星となったコンパクト天体は, 互いの周りを回転しながら徐々に軌道半径を小さくしていく. この過程を inspiral 過程という. 連星がさらに近づくと非常に高速で回転し, 後に合体する. この過程を merger 過程という. 合体してできた天体は, 合体の直後は歪んだ形をしているが, 振動して GW を放出し, 定常状態になる. この過程を ringdown 過程という.

CBC でできた天体がブラックホール (BH) であったとすると, ringdown の振動は定常な BH に摂動を加えたときの準固有振動 (Quasi-Normal Mode, QNM) になると考えられている. 従って, ringdown 重力波は, 合体後の BH の QNM に対応する減衰正弦波の重ね合わせになる. この波の振動数と減衰率は合体後の BH の質量と無次元スピンの大きさによって一意に定まるので, 観測された ringdown 重力波とマッチする波形を見つけることで, 合体後の BH の質量とスピンを推定することができる. このような ringdown 重力波の解析は, Inspiral-Merger-Ringdown (IMR) の解析と独立に合体後の BH の質量とスピンを推定することができるという点で有用である.

これまでの ringdown 解析は, 合体直後は非線形な効果が大きく, GW が QNM で記述できない可能性

があることを考慮して, 合体から少し時間をずらして ringdown 解析を行っていた. しかし, ringdown 重力波はすぐに減衰してしまうので, 時間をずらすと信号が弱くなってしまいう問題点があった. ところが, 合体直後でも非線形性の証拠は見られず, [1] では overtone と呼ばれる QNM を考慮することが重要であることが示された [2].

2 Methods

2.1 Overtone の検証

重力摂動論から, ringdown 重力波の strain, $h \equiv h_+ - ih_\times$ のテンプレートとして, 最も一般的なものは,

$$h = \sum_{p=\pm 1} \sum_{l \geq 2} \sum_{-l \leq m \leq l} \sum_{n \geq 0} A_{[p]lmn} \times e^{-t/\tau_{[p]lmn}} e^{-i\omega_{[p]lmn}t} {}_{-2}S_{[p]lmn}(t, \varphi), \quad (1)$$

で書かれる. ここで, $p = +1$ は prograde モード, $p = -1$ は retrograde モード, l, m はそれぞれ方位量子数と磁気量子数に対応し, ${}_{-2}S_{[p]lmn}(t, \varphi)$ は spin-weighted spheroidal harmonics で, ι, φ はそれぞれ BH のスピンの向きに対する方位角と極角である. また, $\tau_{[p]lmn}$ と $\omega_{[p]lmn}$ はそれぞれ減衰時間と振動数を表し, これらは BH の質量とスピンによって一意に定まる. n は overtone のモードで, $\tau_{[p]lmn} > \tau_{[p]lm(n+1)}$ を満たすように定義される. 即ち, overtone のモードが大きくなるほど減衰時間が短くなる.

今回解析を行うイベントは世界初の重力波観測イベント GW150914 である。このイベントは $l = m = 2$ のモードが支配的であることが知られているため、最も簡単なテンプレートとして、

$$h_{22}^N = \sum_{n=0}^N \left[A_n^{(c)} e^{-t/\tau_n} \cos \omega_n t + A_n^{(s)} e^{-t/\tau_n} \sin \omega_n t \right], \quad (2)$$

を採用する。ここで、 N はテンプレートに含まれる最も高い overtone のモードである。 ω_n, τ_n は前述の通り、振動数と減衰時間で、BH の質量 M_f とスピン χ_f で決まる。具体的には、

$$M_f \omega_{lmn} = 2\pi M_f f_{lmn} = f_1 + f_2(1 - \chi_f)^{f_3}, \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \omega_{lmn} \tau_{lmn} = q_1 + q_2(1 - \chi_f)^{q_3}, \quad (4)$$

という関係にある。パラメター f_i, q_i は数値的に計算されていて、今回は [3] の表の結果を用いた。

このテンプレートを使って、観測された strain のピーク時刻から解析を始め、 $N = 0, 1, 2$ の場合について M_f と χ_f の posterior を計算した。また、 $N = 0$ の場合について、観測された strain のピークから 1, 3, 5 ms 後に解析開始時間を設定して、 M_f と χ_f の posterior を計算した。

2.2 一般相対論の検証

上で見た、一般相対論の枠組みの中で計算された ringdown の振動数と減衰時間からのずれを認め、そのずれの大きさを評価することで、一般相対論を検証することができる。 $N = 1$ のモデルに対して、 $n = 1$ の振動数と減衰時間を

$$f_{221}(M_f, \chi_f) = f_{221}^{(\text{GR})}(M_f, \chi_f)(1 + \delta f_{221}), \quad (5)$$

$$\tau_{221}(M_f, \chi_f) = \tau_{221}^{(\text{GR})}(M_f, \chi_f)(1 + \delta \tau_{221}), \quad (6)$$

とし、ずれ $\delta f_{221}, \delta \tau_{221}$ の posterior を計算した。ここで、 $f_{221}^{(\text{GR})}, \tau_{221}^{(\text{GR})}$ は一般相対論から計算される値で、(3), (4) 式の振動数、減衰時間に一致する。 $\delta f_{221} = \delta \tau_{221} = 0$ は一般相対論から予想される値に一致することを示唆する。

2.3 時間領域での likelihood

観測されたデータを d 、重力波信号を s 、ノイズを n と表すと、重力波信号がデータの中に含まれる

とき、

$$d = s + n, \quad (7)$$

と書ける。ノイズが Gaussian だとすると、信号 s の log-likelihood は、

$$\ln P(\tilde{d} | \tilde{s}) = -2\Delta f \sum_{i=0}^{N-1} \frac{|\tilde{d}_i - \tilde{s}_i|^2}{S(f_i)} + \text{const.}, \quad (8)$$

で与えられる。ここで、 \tilde{d}, \tilde{s} はそれぞれデータと信号の Fourier 成分で、 \tilde{d}_i, \tilde{s}_i はそれぞれ周波数 f_i のデータと信号の Fourier 成分である。また、 $\Delta f = f_{i+1} - f_i$ で、 $S(f_i)$ は one-sided power spectral density (PSD) と呼ばれる量で、ノイズの大きさに関連する量である。

IMR の解析では通常、上で述べたような周波数領域で likelihood を計算する。一方、ringdown ではピークから解析を開始するので、時間領域で見ると急激に立ち上がった信号になり、周波数領域で計算を行うと情報を失ってしまう。そこで、ringdown の解析では時間領域で likelihood を計算するという方法をとることがある。時間領域での信号 s の log-likelihood は、

$$\ln P(d | s) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^{N-1} (d_i - s_i) C_{ij}^{-1} (d_j - s_j), \quad (9)$$

で計算される。ここで、 C_{ij} は共分散行列で、

$$C_{ij} = \rho(|i - j|), \quad (10)$$

で与えられる。 $\rho(k)$ は autocovariance function (ACF) である。

(2) 式のテンプレートを採用して、(9) 式の時間領域の log-likelihood を最大化することを考える。まず、時間領域の noise-weighted inner product

$$(a|b) \equiv \sum_{i,j=0}^{N-1} a_i C_{ij}^{-1} b_j, \quad (11)$$

を定義する。(9) 式の s を (2) 式のテンプレートで置き換えて、

$$s = h_{22}^N = \mathbf{a}^T \mathbf{h} = a_j h_j \\ = \begin{pmatrix} A_0^{(c)} \\ A_0^{(s)} \\ A_1^{(c)} \\ \vdots \\ A_N^{(s)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} e^{-t/\tau_0} \cos \omega_0 t \\ e^{-t/\tau_0} \sin \omega_0 t \\ e^{-t/\tau_1} \cos \omega_1 t \\ \vdots \\ e^{-t/\tau_N} \sin \omega_N t \end{pmatrix}, \quad (12)$$

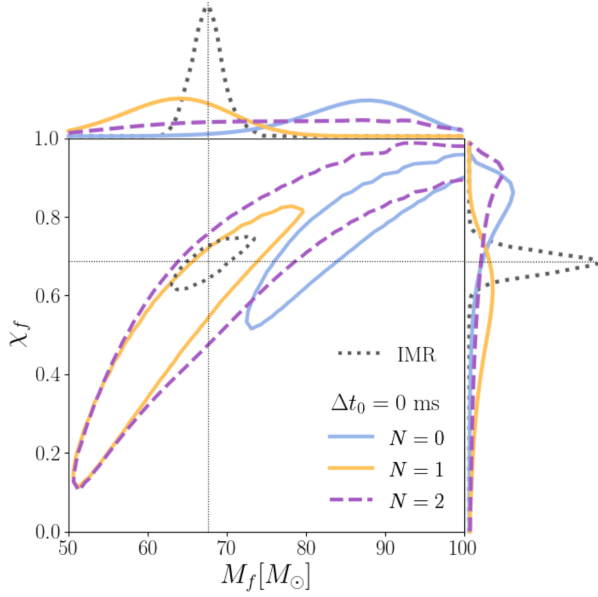


図 1: $\Delta t_0 = 0$ ms として, $N = 0$ (青色の実線), $N = 1$ (黄色の実線), $N = 2$ (紫色の波線) の場合について BH の質量 M_f とスピン χ_f の posterior を計算した結果. また, 黒の点線は IMR の結果を示し, そのピークの質量とスピン ($M_f = 67.6 M_\odot$, $\chi_f = 0.69$) を表す線を引いた. 等高線は 90% の信頼範囲を表し, 枠外のグラフはそれぞれ M_f , χ_f についての posterior である.

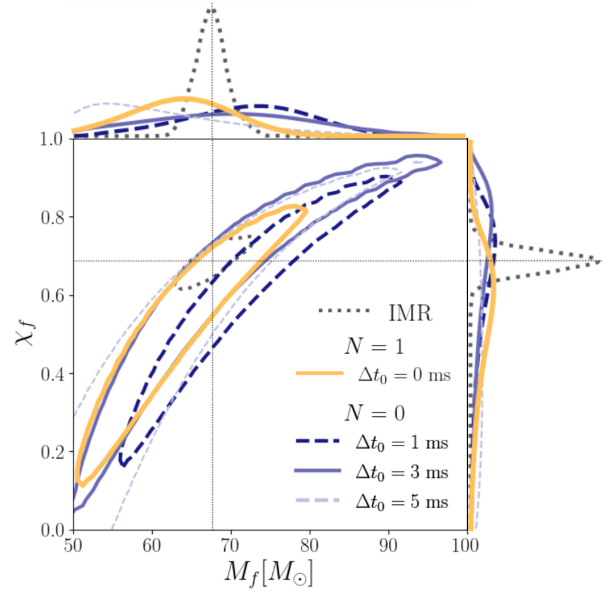


図 2: $N = 0$ の場合について, ピーク後の解析開始時刻を $\Delta t_0 = 1$ ms (青の破線), $\Delta t_0 = 3$ ms (青の実線), $\Delta t_0 = 5$ ms (薄い青の破線) として BH の質量 M_f とスピン χ_f の posterior を計算した結果. 参考のため, $\Delta t_0 = 0$ ms で $N = 1$ の場合を黄色の実線で表した. IMR の結果については図 1 と同様. 等高線は 90% の信頼範囲を表し, 枠外のグラフはそれぞれ M_f , χ_f についての posterior である.

と書いておく. すると, (9) 式は,

$$\begin{aligned} \ln P(d|s) &= -\frac{1}{2}(d-s|d-s) \\ &= (d|s) - \frac{1}{2}(s|s) + \text{const.} \\ &= (d|\mathbf{a}^T \mathbf{h}) - \frac{1}{2}(\mathbf{a}^T \mathbf{h}|\mathbf{a}^T \mathbf{h}) + \text{const.}, \end{aligned}$$

となり, ここで, 新たに \mathbf{N} , \mathbf{M} を

$$N_i \equiv (d|h_i), \quad (13)$$

$$M_{ij} \equiv (h_i|h_j), \quad (14)$$

で導入すると,

$$\ln P(d|s) = \mathbf{a}^T \mathbf{N} - \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{a} + \text{const.},$$

と書ける. これを \mathbf{a} を変数として最大化すると,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \ln P(d|s)}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_{\text{ML}}} &= 0 \implies \mathbf{a}_{\text{ML}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{N} \\ \therefore \ln P(d|s) &= \frac{1}{2} \mathbf{N}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{N}, \quad (15) \end{aligned}$$

を得る. これが時間領域での maximum log-likelihood である [4].

2.4 解析の詳細

解析についてはいずれも GW150914 について行った. 観測された strain のピークの時刻を t_{peak} , 解析開始時間を t_{start} として, $\Delta t_0 \equiv t_{\text{start}} - t_{\text{peak}}$ でピークから解析開始時間までのずれを表す. ここで, $t_{\text{peak}} = 1126259462.423$ GPS とした. データは LIGO Hanford と Livingston のデータを用い, サンプリングレートは 2048 Hz とした. Hanford と Livingston の重力波到達の時間のずれは 7 ms とした. 20 Hz のハイパスフィルターを掛け, ピークの 69 秒前から 64 秒間の off-source data を用いて, Welch の方法で PSD を計算し, 逆 Fourier 変換をして ACF を求めた. Prior については, M_f は $[50, 100] M_\odot$, χ_f は $[0, 0.99]$, δf_{221} は $[-0.5, 0.5]$, $\delta \tau_{221}$ は $[-1, 1]$ の範囲で一様とした. ACF の推定などについては [5] で議論されている.

3 Results and discussion

t_{peak} から解析を開始し, $N = 0, 1, 2$ の場合について, M_f, χ_f の posterior を計算し, 90% の信頼範囲を描いたものが図 1 である. 比較として, IMR の解析から得られた結果を灰色の点線で描画してある. $N = 0$ の場合は t_{peak} から解析を開始すると, IMR の結果と一致しないことが分かる. 一方で, $N = 1$ の場合は IMR の結果と一致する. $N = 2$ では, IMR の結果と矛盾しないが, $N = 1$ の場合よりも信頼範囲が広がってしまっていることが分かる. 従って, 今回のイベントについては, $n = 0$ のモードに加えて $n = 1$ のモードを考慮することが重要であると言える.

続いて, $N = 0$ の場合に解析開始時刻を $\Delta t_0 = 1, 3, 5$ ms と変化させて M_f, χ_f の posterior を計算し, 90% の信頼範囲を描いたものが図 2 である. 期待された通り, overtone を考慮しないと, $\Delta t_0 = 1$ ms の場合は IMR の結果とは一致せず, overtone のモードが減衰した後の $\Delta t_0 = 3$ ms の場合は IMR の結果と一致することが分かる. 一方で, $\Delta t_0 = 5$ ms の場合は信頼区間が広がってしまっていることが分かる. これは, $n = 0$ のモードも減衰して, SNR が小さくなってしまっているためだと考えられる.

最後に, $n = 1$ のモードの振動数と減衰時間について, 一般相対論から予想される値からのずれを考慮して posterior を計算した結果が図 3 である. δf_{221} については, 68% の信頼度で $\delta f_{221} = -0.026 \pm 0.26$ という結果を得た. 一方, $\delta \tau_{221}$ については信頼区間が -0.8 あたりから 1 まで広がっていることが分かる. 以上から, 今回の検証では高い信頼度ではないが, 一般相対論の値 ($\delta f_{221} = \delta \tau_{221} = 0$) と矛盾しない結果が得られた.

4 Conclusion

以上から, GW150914 については, ringdown 重力波の解析には overtone を考慮することが重要であると言える. また, overtone を考慮しない場合はピークから解析を開始すると, IMR の結果と一致しないが, $n = 1$ のモードを考慮することでピークから解析を開始しても IMR の結果と一致することが分かった. 更に, ringdown の解析から一般相対論の検証を

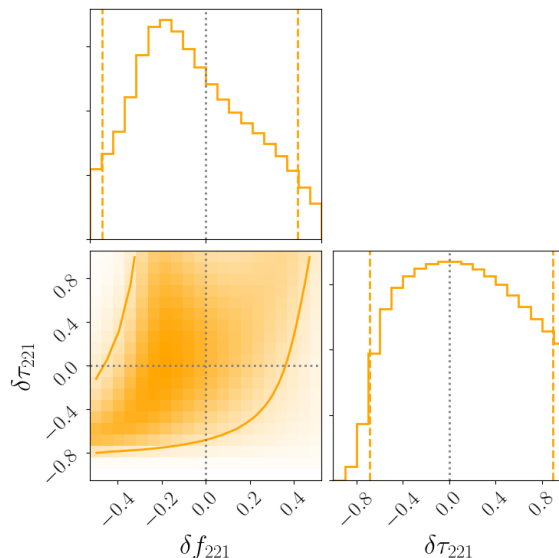


図 3: (5) と (6) 式のように $n = 1$ のモードの振動数と減衰時間について, 一般相対論から予想される値からのずれ $\delta f_{221}, \delta \tau_{221}$ を考慮して, posterior を計算した結果. 黄色の等高線と黄色の点線は 90% の信頼範囲である. M_f, χ_f については周辺化した.

行うことができ, 高い信頼度ではないものの, 一般相対論から帰結される値と矛盾しない結果を得た.

今後は, ACF の適切な推定方法や, $l = m = 2$ 以外のモードが支配的となるようなイベントについての解析等を試みる.

Reference

- [1] Maximiliano Isi, Matthew Giesler, Will M. Farr, Mark A. Scheel, and Saul A. Teukolsky. Testing the no-hair theorem with GW150914. *Phys. Rev. Lett.*, 123:111102, Sep 2019. arXiv:1905.00869.
- [2] Matthew Giesler, Maximiliano Isi, Mark A. Scheel, and Saul Teukolsky. Black Hole Ringdown: The Importance of Overtones. *Phys. Rev. X*, 9(4):041060, 2019.
- [3] Emanuele Berti, Vitor Cardoso, and Clifford M. Will. Gravitational-wave spectroscopy of massive black holes with the space interferometer lisa. *Phys. Rev. D*, 73:064030, Mar 2006. arXiv:gr-qc/0512160.
- [4] Piotr Jaranowski and Andrzej Krolak. Gravitational-Wave Data Analysis. Formalism and Sample Applications: The Gaussian Case. *Living Rev. Rel.*, 8:3, 2005. arXiv:0711.1115.
- [5] Maximiliano Isi and Will M. Farr. Analyzing black-hole ringdowns. 2021. arXiv:2107.05609.

[indexへ戻る](#)

重宇 a06

バースト重力波の検出・解析の方法について

高田 和輝

バースト重力波の検出・解析方法

高田 和輝 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

本発表では coherent WaveBurst(cWB) と呼ばれるバースト重力波の検出・解析方法を紹介する。これは複数台の検出器のデータを組み合わせて尤度関数を構成し、波形や波源の位置を最尤法で推定する方法である。この方法は超新星爆発やガンマ線バーストなどが放出する、モデル波形が存在しない重力波の解析に有効である。

1 Introduction

2015 年 5 月 19 日、ブラックホール連星合体の重力波イベントを初観測し、シミュレーションではない、宇宙からの重力波を観測できるようになった。重力波天文学の始まりである。そこから 2024 年 7 月 20 日現在に至るまで、延べ 208 個もの重力波イベントを検出している。重力波は天体・宇宙の強力な観測手段として確立した。

重力波はモデル波形が存在するものとししないものに大別できる。前者の例としてコンパクト連星合体が、後者の例として超新星爆発やガンマ線バーストが挙げられる。特に後者は数ミリ秒から 1 秒程度の短時間で重力波を一気に放出することからバースト重力波と呼ばれる。

現在までに検出された重力波イベントは、その全てがコンパクト連星合体によるものである。バースト重力波はそれよりもエネルギーが小さく、現行の検出器で観測可能なのは 10kpc 程度の太陽系の近傍で起きるイベントに限られる。そのようなイベントの発生頻度は 100 年に数回程度と身積もられており、近い将来観測が期待される。バースト重力波はコンパクト連星合体に次ぐ観測候補である。

コンパクト連星合体の重力波は、二つの星の質量やスピンを決めれば求められ、これとデータを比べて相関が最も高くなるように波形を決定する (Matched filter 法)。しかしバースト重力波に関しては、発生機構に流体不安定性が関わっていたり、そもそも発生機構が正確に分かっていないことなどから、モデル波形が存在しない。したがってバースト重力波を検出するには、波形モデルを使わずに観測データから波形を検出する新しい方法が必要になる。それが

coherent WaveBurst(cWB) である。

2 Methods

2.1 重力波の検出：excess power 法

cWB では excess power 法を用いて、データから重力波候補信号を見つけ出す。「候補」というのは、データには時々グリッチと呼ばれる大きなノイズが発生し、これも有意な信号としてカタログに含まれるからである。グリッチと重力波信号を区別する方法は 2.3 節で後述する。

excess power 法は時系列データを時間・周波数領域の信号に直し、そこで信号とノイズとのエネルギーの比を計算して、閾値を越えれば重力波信号候補とみなす検出方法である。cWB の場合、時間・周波数領域への変換はウェーブレット変換によって行われる。

$\psi_{i,j}(t)$ をウェーブレットとする。 (i,j) はそれぞれ離散時間、離散周波数である。観測した時系列データをウェーブレット変換したときの振幅を μ_{ij} とする。時系列データ $d(t)$ は

$$d(t) = \sum_{i,j} \mu_{i,j} \psi_{i,j}(t) \quad (1)$$

と分解表示できる。この信号データのエネルギーは

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} d(t)^2 dt = \sum_{i,j} \mu_{i,j}^2 \quad (2)$$

となる。最後はウェーブレットの正規直交関係を使っている。この式から時系列データ $d(t)$ の時間・周波数領域でのエネルギー密度は $\mu_{i,j}^2$ が該当することが分かる。他方で定常ノイズのエネルギースペクトル

を S_j とする。このとき各時刻、各周波数でのデータとノイズとのエネルギー密度の比 ϵ は

$$\epsilon = \frac{\mu_{i,j}}{S_j} \quad (3)$$

となる。

これを計算して時間・周波数領域にプロットし、あらかじめ設けておいた閾値を越える信号が無いかチェックすることで、重力波候補信号を見つけ出すことができる。この方法で検出した信号の中には、重力波ではない突発的な雑音が含まれている。これらを選別する方法は 2.3 節で説明する。

2.2 バースト波形の再構成

重力波は二つの偏極モード $h_+[i]$ 、 $h_\times[i]$ を持つ。これを並べてベクトル $\mathbf{h} = (h_+[i], h_\times[i])$ とする。 i は時間・周波数領域 (TF) のパラメータである。また、 j 番目の重力波検出器のアンテナパターンを $F_j = (F_{j+}(\theta, \phi), F_{j\times}(\theta, \phi))$ と書く。すると j 番目の重力波検出器が記録する重力波信号は $F_j \mathbf{h}$ である。実際のデータはこれにノイズ \mathbf{n} が加わる。

重力波のデータベクトルを

$\mathbf{x} = (x_1[i], x_2[i], \dots, x_K[i])$ とする。ここで添字の数 $1, 2, \dots, K$ は、検出器の番号である。

全部で K 個の検出器があり、それらに同一の重力波 \mathbf{h} が入射し、それぞれのアンテナパターンと掛け合い、そこにノイズが加わる。このような描像から、データベクトルは

$$\mathbf{x}[i] = F \mathbf{h}[i] + \mathbf{n}[i] \quad (4)$$

と表せる。ただし F は全部の検出器のアンテナパターンを並べた $2 \times K$ 行列であり、具体的な表式は

$$F = \begin{pmatrix} F_{1+}(\theta, \phi) & F_{1\times}(\theta, \phi) \\ F_{2+}(\theta, \phi) & F_{2\times}(\theta, \phi) \\ \vdots & \vdots \\ F_{K+}(\theta, \phi) & F_{K\times}(\theta, \phi) \end{pmatrix} \quad (5)$$

である。

1、2、...、 K 番目の検出器のノイズのパワースペクトル密度をそれぞれ $S_1[i], S_2[i], \dots, S_K[i]$ とする。これらはノイズの二乗から構成されており、したがって $\sqrt{S_j[i]}$ がノイズの大きさの指標となる。この値で各検出器の出力データ $x_j[i]$ を規格化する (ホワイト

ニングという)。そのようなホワイトニングしたデータベクトルを

$$\mathbf{w}[i] = \left(\frac{x_1[i, \tau_1(\theta, \phi)]}{\sqrt{S_1[i]}}, \dots, \frac{x_K[i, \tau_K(\theta, \phi)]}{\sqrt{S_K[i]}} \right) \quad (6)$$

と表す。ここで各検出器のデータに含まれるパラメータは TF 領域の座標 i の他に重力波の到達時間 $\tau_i(\theta, \phi)$ も含まれているということを露わに書いた。

(4) をホワイトニングしているので、アンテナパターンも規格化される。この行列を

$$F = \begin{pmatrix} \frac{F_{1+}(\theta, \phi)}{\sqrt{S_1[i]}} & \frac{F_{1\times}(\theta, \phi)}{\sqrt{S_1[i]}} \\ \frac{F_{2+}(\theta, \phi)}{\sqrt{S_2[i]}} & \frac{F_{2\times}(\theta, \phi)}{\sqrt{S_2[i]}} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{F_{K+}(\theta, \phi)}{\sqrt{S_K[i]}} & \frac{F_{K\times}(\theta, \phi)}{\sqrt{S_K[i]}} \end{pmatrix} \quad (7)$$

と書く。そして

$$\boldsymbol{\xi}[i] = F \mathbf{h}[i] \quad (8)$$

とおく。

尤度関数は

$$\mathcal{L}[\mathbf{h}] = \sum_i [2(\mathbf{w}[i] \cdot \boldsymbol{\xi}[i]) - (\boldsymbol{\xi}[i] \cdot \boldsymbol{\xi}[i])] \quad (9)$$

と書ける。

重力波形 h_+ 、 h_\times そのものを尤度関数のパラメータとみなし、これについて式 (9) が最大になるようにする。この条件は

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_+} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_\times} = 0 \quad (10)$$

であり、これを解いて

$$h_+[i] = \frac{(\mathbf{w}[i] \cdot \mathbf{f}_+[i])}{|\mathbf{f}_+[i]|^2} \quad (11)$$

$$h_\times[i] = \frac{(\mathbf{w}[i] \cdot \mathbf{f}_\times[i])}{|\mathbf{f}_\times[i]|^2} \quad (12)$$

重力波形が最尤法により求められた。上では見やすさのために、パラメータは時間・周波数領域の座標 (i) のみ書いているが、重力波の到来方向 (θ, ϕ) もパラメータとして含まれていることに注意する。

式 (11)、(12) を式 (9) に代入して

$$L_{\max}(\theta, \phi) = \sum_i \mathbf{w}[i] P[i] \mathbf{w}^T[i] \quad (13)$$

を得る。ここで P は、規格化したアンテナパターンベクトル $\mathbf{e}_+ = \mathbf{f}_+ [i] / |\mathbf{f}_+ [i]|$ 、 $\mathbf{e}_\times = \mathbf{f}_\times [i] / |\mathbf{f}_\times [i]|$ より構成される平面への射影行列であって、次式より定義される。

$$P_{nm} [i] = e_{+n} [i] e_{+m} [i] + e_{\times n} [i] e_{\times m} [i] \quad (14)$$

式 (13) は空の座標 (θ, ϕ) の関数であり、これが最大値をとるときの座標が、データから再構成した重力波の到来方向である。

2.3 重力波信号か偽信号かの区別

重力波検出器ではグリッチと呼ばれる大きなノイズが時折発生する。これらは機器そのものや周囲の環境に起因し、図 1 のように重力波信号と見間違ふ可能性がある。

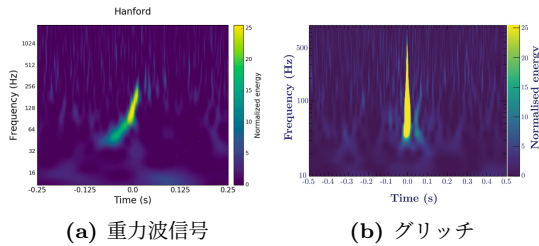


図 1: 重力波とグリッチの時間・周波数マップ
左は GravitySpy2.0Wiki、右は M.Cabero et al. (2019) の図を借りた。

突発ノイズか真の重力波信号かを区別する方法として、cWB では次で定義されるネットワーク相関係数を用いて判定する。

$$C_{net} = \frac{E_{coh}}{|E_{coh}| + E_n} \quad (15)$$

ここで E_n はデータに重力波やグリッチなどの信号が含まれていない状態の (定常ノイズのみの) 信号のエネルギーである。また E_{coh} は、

$$E_{coh} = \sum_i \sum_{n \neq m} w_n [i] P_{nm} [i] w_m [i] \quad (16)$$

で定義される。

式 (16) を見ると分かるように E_{coh} は、異なる検出器間のデータの相関係数を計算している。したがってもし候補信号が重力波なら、異なる検出器のデータには相関があり E_{coh} は 0 ではない値をもち、 $|C_{coh}| \sim 1$ となる。反対に候補信号がグリッチなら、それは一

部の検出器のみで記録されていて、他の検出器との相関は全く無い。この場合 E_{coh} はほとんど 0 となり $|C_{coh}| \sim 0$ を示す。以上のようにネットワーク相関係数を用いて候補信号が重力波かグリッチかを区別することができる。

3 Results

3.1 波形の再構成

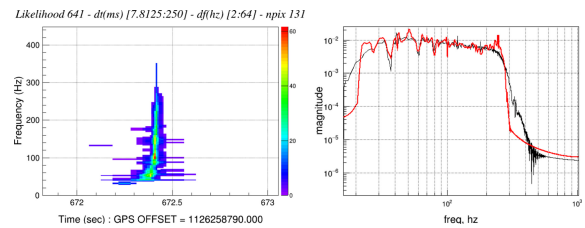


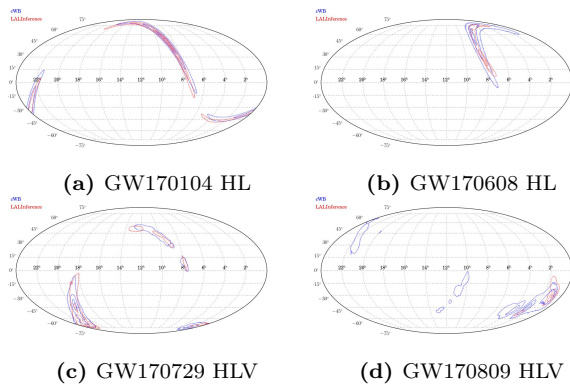
図 2: cWB で波形を再構成 (S.Klimenko et al.(2021))
左は時間・周波数領域の尤度関数を、右は周波数領域での再構成波形を表す。

2.2 節で波形の再構成方法について説明した。上図 2 はこれを最初の重力波イベント GW150914 のデータに適用したものである。本当はバースト重力波で確認したいが、まだ検出されていないので、コンパクト連星合体の実データに適用した。左の方を見ると連星合体重力波の特徴であるチャープ信号が再現できていることが分かる。また右の図は同イベントの重力波のスペクトル分布を表している。赤線が cWB によるもの、黒線が連星合体のモデル波形によるものを表す。こちらも概ね一致することが分かる。

3.2 重力波の到来方向の推定

2.2 節の最後に cWB による重力波の到来方向 (θ, ϕ) を推定する方法を説明した。この方法を実際の観測データに適用してみる。O1、O2 と呼ばれる観測期間に検出された 11 個の連星合体イベントについて推定した。そのうち 4 つのイベントについて到来方向を 10%、50%、90% の信頼区間幅でプロットしたものが図 3 である。

図 3 を見ると、cWB による 90% 推定領域とモデル波形を用いた 90% 推定領域は、共通領域が存在することが分かる。この共通領域に本当の到来方向が存在する可能性が高いと言える。



M.Drago et al. 2021, arXiv:2006.12604

M.Cabero et al. 2019, Class. Quantum Grav. 36 155010

Gravitaty Spy 2.0 Wiki, <https://gswiki.ischool.syr.edu/>

図 3: 到来方向のスカイマップ (F.Salemi et al.(2019))
 上段は Hanford+Livingston、下段はそれらに Virgo が加わった推定である。青線が cWB、赤線は連星合体のモデル波形を用いた LALInference という推定による。

また上段は 2 台の検出器、下段は 3 台の検出器によるもので、検出器の数が多いほど cWB による推定領域が狭まることが分かる。

4 Conclusion

cWB による波形の再構成やパラメータ推定は、モデル波形を必要としないため、理論的にはどのような種類の短期型重力波の検出・解析にも対応できる、非常に一般性のある方法である。

そして検出器の数が多ければ多いほど、波形や到来方向の特定精度が向上する。アンテナパターンは方向依存性があり、到来方向によってはその重力波への感度が悪くなることが知られている。検出器を増やすことでこの感度が悪い領域を大幅に減らすことができる。今のところ LIGO と Virgo の合計 3 台による検出器のみが重力波を観測しているが、将来 KAGRA が観測可能になったり、LIGO India が完成して検出器ネットワークに加われば、cWB はますます強力な重力波解析方法になると考えられる。

Reference

- S.Klimenko et al. 2005, Phys.Rev. D72, 122002
- S.Klimenko et al. 2008, arXiv:0802.3232v2
- S.Klimenko et al. 2016, Phys.Rev. D93, 042004
- F.Salemi et al. 2019, Phys.Rev. D100, 042003

[indexへ戻る](#)

重宇 a07

重力波を用いた原始ブラックホールの探索手法の開発

村上 靖洋

重力波を用いた原始ブラックホールの探索手法の開発

村上 靖洋 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

本研究では、太陽質量未満のコンパクト連星合体 (SSM CBC: Sub-Solar Mass Compact Binary Coalescence) からの重力波信号の性質や、それを探索する上での手法を提案する。世界最高感度の重力波望遠鏡を有する LIGO - Virgo - KAGRA collaboration (LVK) では、太陽よりも重いブラックホール (BH: Black Hole)・中性子星がなす連星の探索に加えて、恒星進化の標準理論では形成されないような太陽質量未満の BH を含む連星の探索も行われている。このような天体の有力な候補として、宇宙初期に作られた原始ブラックホール (PBH: Primordial Black Hole) がある。しかし、このような太陽質量未満の質量領域の信号の継続時間は非常に長く、その探索感度は解析の計算コストや要求メモリーによって制限されている。また、波形が長くなることによって地球の自転の効果が無視できなくなったり、検出器のノイズの変化を追えなくなってしまう、両者とも信号の長さ按比例してその影響は増加していく。このような問題を解決するために、長い信号を時間で分割しその分割されたそれぞれの波形で観測データと相関をとっていく手法を紹介する。

1 Introduction

重力波とは、時空の歪みが光速で伝播する現象のことで、電磁波に比べて物質透過性が非常に高いという特異な性質を有することから、従来の電磁波観測とは異なる新たな観測手法を提供する。2015年9月にアメリカの重力波観測施設 LIGO によって初観測 (Abbott et al. 2016) されて以降¹、これまでに発見されていなかった質量のブラックホール (BH) を含む多くの連星 BH による重力波イベントが次々と発見されており、発見された総イベント数は 207 個にも及ぶ。このような重力波観測の台頭は、これまで知られていなかった宇宙の側面が明らかになるとともに、従来の常識にとらわれない新しい探索の重要性が浮き彫りになってきた。

近年恒星の進化の過程では説明できない太陽質量未満のコンパクト天体の探索に注目が集まってきた。特に、宇宙誕生直後に生成された原始ブラックホール (PBH) は、そのような天体の有力な候補である。PBH は、初期宇宙や暗黒物質の謎に迫る重要な天体だ。LVK は、0.2~1.0 太陽質量の質量帯を探索し、PBH の存在量に世界最高の制限を与えている (R. Abbott et al. 2022)。これは電磁波観測では見つけられないが、重力波なら PBH を発見できる可能性を示唆している。

¹これまでに 3 度の長期重力波観測が行われており、現在は 4 回目の観測 O4 が進行中である。

2 重力波 (Gravitational Waves)

代表的な重力に関する作用は $S = S_E + S_M$ のように書け、 S_E は

$$S_E = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (1)$$

であり、これはアインシュタイン・ヒルベルト作用と呼ばれる²。 R はリッチテンソル、 g はメトリック $g_{\mu\nu}$ の行列式である。 S_M はメトリックの変分の下でエネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ となる。よって S をメトリック $g_{\mu\nu}$ で変分をとると、以下のようなアインシュタイン方程式を得る。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2)$$

2.1 線形近似

式 (2) で時空の性質が決まる。ここでは一番簡単に重力波の標識にたどり着くために背景時空をミンコフスキー時空 $\eta_{\mu\nu}$ と考え、その背景に対する摂動 $h_{\mu\nu}$ として重力波を導く。この時メトリックは、

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (3)$$

² c は光速、 G は万有引力定数を表す。また添字はギリシャ文字 (μ, ν など) は 0 から 3 を走り、ラテン文字 (i, j など) は 1 から 3 を走るものとする。これを用いて 4 次元時空の世界点 (事象) を x^μ と書く。

のようになる。これを用いて式 (2) を線形化し、 $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$ を定義すると ($h_{\mu\nu}$ のトレースを h とする)、次のようになる。

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\partial^\rho\partial^\sigma\bar{h}_{\rho\sigma} - \partial^\rho\partial_\nu\bar{h}_{\mu\rho} - \partial^\rho\partial_\mu\bar{h}_{\nu\rho} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (4)$$

ここで TT(Transverse-Traceless) ゲージ条件を課すと、(4) 式は

$$\square h_{\mu\nu} = 0 \quad (5)$$

となり、背景時空に対する摂動 $h_{\mu\nu}$ は光速で伝播する波動方程式に従う。この時 $h_{\mu\nu}$ の自由度は 2 である。z 方向に進む重力波をここで考えると、 $h_{+,\times} = A_{+,\times}\exp(i\omega(t - z/c))$ のように記述でき、それぞれ 2 つの自由度をプラス (+) モード、クロス (×) モードの重力波と呼ぶ。振幅成分を行列表示で書くと次の通り。

$$\{A_{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_+ & A_\times & 0 \\ 0 & A_\times & -A_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

これを見ると、TT(Transverse-Traceless) である。

2.2 インスパイラルにおける重力波

ここでは 2 つのコンパクト天体からなる連星系を考え、それぞれの質量を m_1, m_2 をする。この連星系はニュートン力学で記述するものとし、連星の各振動数を ω_s の円軌道を考え、観測地点から距離 r に位置するとする。この時実際に受け取る重力波の角振動数は $\omega_{\text{gw}} = 2\omega_s$ という関係が成り立ち、振動数になおすと $f_{\text{gw}} = 2f_s$ となる。この時、重力波のプラスモードとクロスモードは次のようにかける。

$$h_+ = \frac{4}{r} \left(\frac{GM}{c^2}\right)^{5/3} \left(\frac{\pi f_{\text{gw}}}{c}\right)^{2/3} \cos(\Phi(t_{\text{ret}})), \quad (7)$$

$$h_\times = \frac{4}{r} \left(\frac{GM}{c^2}\right)^{5/3} \left(\frac{\pi f_{\text{gw}}}{c}\right)^{2/3} \sin(\Phi(t_{\text{ret}})), \quad (8)$$

ここで $t_{\text{ret}} = t - r/c$ 、チャープ質量を

$$\mathcal{M} = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}} \quad (9)$$

と定義している。そして位相の部分は、合体時間 t_{coal} を用いて $\tau = t_{\text{coal}} - t$ というある時刻 t から合体ま

での時間を定義して

$$\Phi(\tau) = -2 \left(\frac{5GM}{c^3}\right)^{-5/8} \tau^{-5/8} + \Phi_0 \quad (10)$$

のようにかける³。 $\Phi_0 = \Phi(\tau = 0)$ は合体時の位相である。時間領域での式 (7),(8) は、解析の際には扱いにくいので、通常解析の際は、以下のような周波数空間の波形の式が用いられる。

$$\tilde{h}_+(f) = A e^{i\Psi_+(f)} \frac{c}{r} \left(\frac{GM}{c^3}\right)^{5/6} \frac{1}{f^{7/6}}, \quad (11)$$

$$\tilde{h}_\times(f) = A e^{i\Psi_\times(f)} \frac{c}{r} \left(\frac{GM}{c^3}\right)^{5/6} \frac{1}{f^{7/6}}, \quad (12)$$

ここで、 A は定数であり、位相は各モード間に $\Psi_\times(f) = \Psi_+(f) + (\pi/2)$ という関係があり、 $\Psi_+(f)$ については

$$\Psi_+(f) = 2\pi f (t_* + r/c) - \Phi_0 - \frac{\pi}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{GM}{c^3} 8\pi f\right)^{-5/3} \quad (13)$$

と書ける。ここで、 t_* は (11),(12) 式を導出する際に用いた停留位相法という手法のなかの $2\pi f = \dot{\Phi}(t_*)$ で定義されている。これらは t_* の周りで展開される最低次の近似である⁴。また、この振動数には連星系が持つ運動エネルギーと位置エネルギーが重力波によって放出されるという仮定の下で、以下のような関係を得ることができる

$$f_{\text{gw}} = \frac{96}{5} \pi^{8/3} \left(\frac{GM}{c^3}\right)^{5/3} f_{\text{gw}}^{11/3}. \quad (14)$$

(14) 式を見ると、重力波の振動数 f_{gw} は時間の増加関数であることが分かる。つまり連星が合体するまで振動数は単調に増加していく。これは合体までにかかる時間 τ を用いて次のように書き直すこともできる。

$$f_{\text{gw}}(\tau) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{5}{256} \frac{1}{\tau}\right)^{3/8} \left(\frac{GM}{c^3}\right)^{-5/8}. \quad (15)$$

(15) 式より $\tau(f_{\text{gw}})$ の形で書くと、

$$\tau(f_{\text{gw}}) = \frac{5}{256} \left(\frac{GM}{c^3}\right)^{-5/3} (\pi f_{\text{gw}})^{-8/3} \quad (16)$$

と書ける。

³式 (7),(8),(10) を見ると、重力波は連星のチャープ質量 (9) 式のみで特徴付けられることがわかる。よって、チャープ質量は重量量量となってくる

⁴実際の解析には、ポストニュートン近似 (PN 近似) というニュートンオーダー (0PN) からのずれとして表現される波形の式を用いている。(11),(12) 式は、0PN に相当する。現在までの解析で天体のスピンの効果まで取り入れた近似は 3.5PN まで計算されている。

3 マッチドフィルター

観測データを眺めただけで重力波があることがわかるなら、一般相対性理論の誕生から重力波の直接観測まで 100 年もの歳月がかかることもない。つまり、重力波信号はノイズの海に埋もれてしまっているので、その中から重力波信号の情報を取り出す必要がある。

ここでは観測データを

$$x(t) = n(t) + h(t) \quad (17)$$

のようにノイズ $n(t)$ と重力波波形 $h(t)$ で書くものとする。ノイズについては 2 次のオーダーまでの定常性を仮定し、この時のノイズパワースペクトル密度 $S_n(f)$ は

$$\langle \tilde{n}^*(f') \tilde{n}(f) \rangle = \frac{1}{2} \delta(f - f') S_n(f) \quad (18)$$

のように定義できる。ここで $\tilde{n}(f)$ はノイズ $n(t)$ のフーリエ変換である。また $\langle W \rangle$ は W が $n(t)$ の関数の時、 $n(t)$ のアンサンブル平均と定義する。

観測データ $x(t)$ のノイズ $n(t)$ の中から波形 $h(t)$ を取り出すために、信号対雑音比 (SNR) を定義していく。ここでテンプレート波形 $h(t)$ を用いて観測データから信号を取り出す optimal filter $z(t_0)$ ⁵ は次のようにかける。

$$z(t_0) = 4 \int_0^\infty \frac{\tilde{x}(f) \tilde{h}^*(f; t_0 = 0)}{S_n(f)} e^{2\pi i f t_0} df \quad (19)$$

$\tilde{h}^*(f; t_0 = 0)$ は波形の基準時刻 t_0 で書けるが、その基準時刻を $t_0 = 0$ に合わせたテンプレート波形である。SNR を構成するために各テンプレートで規格化し、位相について最大化する操作が必要である。この時の規格化定数 σ^2 は

$$\sigma^2 = 4 \int_0^\infty \frac{|\tilde{h}(f; t_0 = 0)|^2}{S_n(f)} df \quad (20)$$

のようにすればよく、よって SNR は次のように定義される。

$$\rho(t_0) = \frac{|z(t_0)|}{\sigma} \quad (21)$$

⁵ $z(t_0)$ は複素数である。

4 太陽質量未満のコンパクト天体の探索

現在の重力波探索において主な観測対象となっているソースは、BH や中性子星などが連星をなすコンパクト連星合体 (CBC: Compact Binary Coalescence) である。現在までに 207 個の重力波イベントが報告されているが、太陽質量未満のコンパクト連星合体 (SSM CBC: Sub-Solar Mass Compact Binary Coalescence) のイベントは未だ報告されていない。この質量範囲の天体は恒星の進化では生成されない (Yudai Suwa et al. 2018) ため、PBH の存在を検証する重要なターゲットとなる。SSM CBC の探索はこれまでも LVK など、0.2~1.0 太陽質量の質量帯で PBH の存在量に制限を与えており (R. Abbott et al. 2022)、さらに軽い質量帯での探索も行われている (Andrew L. Miller et al. 2024)。

SSM CBC の探索は太陽質量以上の CBC の探索に比べて、以下のような問題点がある。

- 計算コストの増加
- 検出器のノイズ変動への対応の必要性
- 地球の自転の影響

これらの問題は、SSM CBC による重力波信号の継続時間が非常に長くなるという点に集約される。(16) 式により波形の合体までの時間は

$$\tau \propto \mathcal{M}^{-5/3} f_{\text{gw}}^{-8/3}, \quad (22)$$

のようにチャープ質量と観測する重力波の振動数によって決まる。そのため SSM CBC の信号は同じ振動数から観測を始めても、太陽質量以上による CBC の重力波に比べて信号が長くなる。これは必要なメモリが多くなり、漏れなく観測データから重力波を探索するためには、数ペタバイトの容量を要求する。このため LVK での探索ではこれらの問題を回避するために探索する振動数カットオフを 45Hz からに設定している。しかし LIGO の探索感度は 10Hz からあるため、この振動数カットオフは SNR を失うことにつながる。これを表した図が図 1 である。この計算は (20) 式の積分区間を $[f_{\text{min}}, f_{\text{high}}]$ で計算した。45Hz からの探索だと、約 1 割の SNR を失っていることに相当する。

また、45 Hz までの探索でのテンプレート波形の継続時間は数百秒で収まるようになっている。この場合

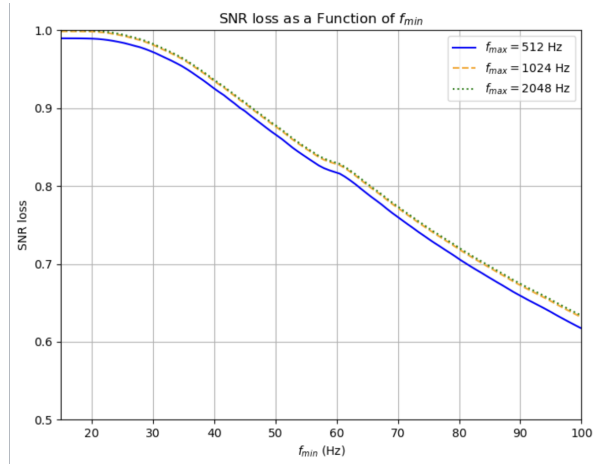


図 1: 振動数カットオフ $f_{\min}, f_{\text{high}}$ によって snr のロスがどれほど変化するかを示した図。縦軸の SNR loss は (20) 式において積分区間を [15, 2048] とした値で企画化した値である。PSD としては O3 での典型的な値を用いている。

は地球の自転の影響は効いてこない。しかし SNR の精度を上げるために振動数カットオフ f_{\min} を下げていくと地球の自転の効果が現れてくる。地球の自転の効果によって SNR がどれほど失うかを表したのが図 2 である。これは図 1 で SNR を 1% 失う $f_{\min} = 27\text{Hz}$ に設定した場合に地球の自転の効果を取り入れた波形とそうでない波形をそれぞれ $\tilde{h}_1(t), \tilde{h}_2(t)$ とかき、

$$\text{SNR}_{\text{loss}} = \max_{\Delta t} \left| \int_{f_{\min}}^{f_{\max}} \frac{\tilde{h}_1(f)e^{-2\pi if\Delta t}\tilde{h}_2^*(f)}{S_n(f)} \right|^{0.5} \quad (23)$$

のように相関をとったものである。これより約 10 時間ほど続く波形になると自転の効果により約 10% の SNR を失うことが分かる。

5 SSM CBC の探索手法の提案とその展望

4章で述べた SSM CBC の問題点を解決するために、波形を分割してマッチドフィルターをし、最後に合算する手法を提案した。これによって 1 日ほど続く波形に対しても SSM CBC の問題点を回避して探索することが可能となる。必要なメモリに関しては分割した分だけ減らすことができ、分割した波形に地球の自転の効果を導入することができる。また

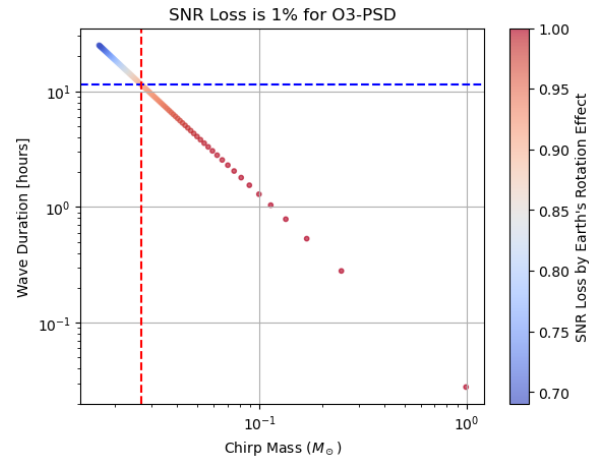


図 2: 横軸をチャープ質量、縦軸を波形の継続時間としたグラフ。図 1 で SNR の損失が 1% となる場合の $f_{\min} = 27\text{Hz}$ で (23) 式を計算した値をカラーマップで表した。PSD は O3 の典型的な値を用いている。

ノイズに関しても波形を分割したことでその都度ノイズの PSD を更新することができる。

さらに要求メモリを減らすために、探索するパラメータで作られたテンプレート波形のうち、大雑把に探索してのちに似ている波形との比とマッチドフィルターの結果の相関をとることの導入を考えている (Barak Zackay et al. 2018)。基準となる波形を $h_0(t)$ と書いて、 $r(t) = h(t)/h_0(t)$ のような比を考え、 $h_0(t)$ でマッチドフィルターした結果を $\rho_0(t)$ と書くと、

$$\rho(t) = \int \rho_0(t')r(t-t')dt' \quad (24)$$

のような畳み込みを計算することで $h(t)$ での SNR を算出する。これにより基準となる波形 $h_0(t)$ で探索した結果を用いて他のパラメータの波形の SNR を計算することができる。これにより実際に観測データを用いて探索する波形の数を大きく減らすことができる。最終的にこれらを実装し、観測データに適応することを目指す。

Reference

- Abbott et al. 2016, Phys. Rev. D, 93 (2016), 12:122003
- R. Abbott et al. 2022, Phys. Rev. Lett., 129 (2022), 6:061104.
- Andrew L. Miller et al. 2024, arXiv:2402.19468
- Yudai Suwa et al. 2018, Mon.Not.Roy.Astron.Soc. 481 (2018) 3, 3305-3312
- Barak Zackay, Liang Dai and Tejaswi Venumadhav 2018, arXiv:1806.08792

重宇 a08

重力波観測による中性子星の状態方程式の制限

宮園 隼人

重力波観測による中性子星の状態方程式の制限

宮園 隼人 (京都大学大学院 理学研究科)

Abstract

物理学の基本法則である強い相互作用の理解のために、中性子星の状態方程式 $P = P(\rho)$ の制限が重要となる。そのために連星中性子星からの重力波の観測から状態方程式の関係を得ようとする研究が進められてきた。本発表でレビューする (E. E. Flanagan & T. Hinderer 2008) では、初めて地上の重力波検出器 LIGO・Virgo で観測可能であり、かつ系を簡単な力学で記述できる合体初期の低周波数重力波に着目した。まず潮汐力と潮汐変形率を用いて作用を記述し、質量四重極モーメント Q^{ij} 、軌道半径 r 、系のエネルギー E 、重力波によるエネルギー放射率 \dot{E} を求めた。次にそれらを用いて重力波の位相 Ψ を計算すると、 Ψ が連星中性子星のチャープ質量 M_{ch} と潮汐変形率 $\bar{\Lambda}$ の 2 つのみで記述されることを示した。2017 年にはこの手法を用い、連星中性子星合体由来の重力波 (GW170817) 波形から潮汐変形率の制限がされ、それによりいくつかの「硬い」状態方程式が棄却された (B.P.Abbott et al. 2017)。更に中性子星半径にも $R \leq 13.5\text{km}$ (E. Annala et al. 2018) という上限が与えられた。

1 動機と導入

1.1 動機

物理学の基本法則である強い相互作用の理解のためには、核物質の QCD 相図全体を明らかにすることが必要である。特に、相図の低温高密度側は地上実験や格子 QCD シミュレーションによる検証が難しく、同様の環境を持つ中性子星が良い実験場となる。中性子星の状態方程式 $P = P(\rho)$ には現在様々な候補が挙げられているが (図 1) (K. Chatziioannou 2020)、これを一本または数本に絞ることは QCD 図の解明に役立つ。連星中性子星合体由来の重力波はその有力なプローブである。

1.2 本レビュー研究の特徴

先行研究では中性子星の内部構造の影響が顕著な、合体終期の高周波数 ($>1000\text{Hz}$) 重力波が注目されてきた。しかし、周波数が重力波干渉計 LIGO の観測帯域から外れる、重力波波形が一般相対論や流体力学など複雑な非線形偏微分方程式に依存する、など課題も多かった。対して (E. E. Flanagan & T. Hinderer 2008) は、LIGO で観測可能な、連星合体初期に放射される低周波数 ($<400\text{Hz}$) 重力波に着目した。これにより、重力波波形の振幅は相対的に小さくなるも

の、周波数が LIGO の観測帯域に入っており、かつ簡単な力学で物理を記述できる。

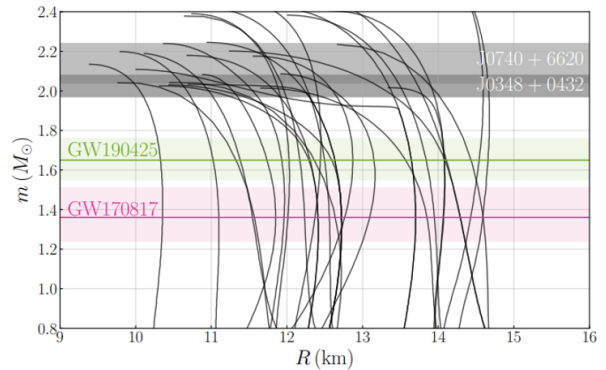


図 1: 種々の状態方程式に対する中性子星の半径 R と質量 m との関係

1.3 潮汐変形率

潮汐変形率 λ および無次元化された Λ は、

$$Q_{ij} = -\lambda \mathcal{E}_{ij} = -\Lambda m^5 \mathcal{E}_{ij} \quad (1)$$

で定義される (なお、本レビューを通して $c = G = 1$ とする単位系を用いる)。ここで、 Q_{ij} は星の質量四重極モーメントテンソル、 \mathcal{E}_{ij} は潮汐テンソルである。連星系を考える場合は相手の星の質量を m_2 として、 $\mathcal{E}_{ij} := -m_2 \partial_i \partial_j (1/r)$ である。 Λ が小さい (大きい)

と、状態方程式は軟らかい(硬い)と分かる。これは、状態方程式が軟らかいと密度分布が中心に集中し四重極変形が小さくなるから、逆に硬いと密度分布は一樣に近づき四重極変形は大きくなるからだと説明できる。

つまり、重力波の位相 Ψ から Λ が求まれば、状態方程式に制限をかけることができる。

2 重力波の位相 Ψ とパラメータ M_{ch}, Λ との関係

2.1 力学系のセットアップとエネルギー E , 放射率 \dot{E} の計算

2つの中性子星を 1, 2(質量はそれぞれ m_1, m_2) とし、相対座標系 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ で考える。重力波放射による軌道進化の時間スケールに比べ公転周期が十分短いという仮定のもと、円運動 $\mathbf{x} = r(\cos \Phi, \sin \Phi, 0)$ を考える。個々の星に対して、変形を節の数が n 個のモードごとに展開し、各モードごとに変形の周波数 $\omega_n, \lambda_{1,n}, Q_n^{ij}$ を定義する。すなわち、 $Q_{ij} = \sum_n Q_n^{ij}$ である。なお添字の上下は区別しない。ケプラー運動、潮汐力(2星間の重力をルジャンドル展開した際の $l=2$ の項)、星自身の変形を考えると、系の作用は

$$S = \int dt \left[\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\Phi}^2 + \frac{M\mu}{r} \right] - \frac{1}{2} \int dt Q^{ij} \mathcal{E}_{ij} + \sum_n \int dt \frac{1}{4\lambda_{1,n}\omega_n^2} \left[\dot{Q}_{ij}^n \dot{Q}_{ij}^n - \omega_n^2 Q_{ij}^n Q_{ij}^n \right] \quad (2)$$

と表される。なお、この式および以下では断らない限り星 1 の変形のみを考えるが、星 2 の変形も同様に加算される。ただし、 $M = m_1 + m_2$ は全質量、 $\mu = m_1 m_2 / M$ は換算質量、 $\dot{\Phi} = \omega$ は公転角振動数(これ以外にも物理量の上のドットは時間微分を表す)である。

作用 (2) に対し Q_n^{ij} についての Euler-Lagrange 方程式を、 λ の一次まで解くことで、 $Q_{11}^T = Q' + Q \cos(2\Phi)$, $Q_{22}^T = Q' - Q \cos(2\Phi)$, $Q_{12}^T = Q \sin(2\Phi)$, $Q_{33}^T = -2Q'$ と求まる。ただし、 Q_{ij}^T は系全体の四重極モーメント $Q_{ij}^T = Q_{ij} + \mu x_i x_j - \mu r^2 \delta_{ij} / 3$ で、

$$Q = \frac{1}{2} \mu r^2 + \sum_n \frac{3m_2 \lambda_{1,n}}{2(1-4x_n^2) r^3}, \quad (3)$$

$$Q' = \frac{1}{6} \mu r^2 + \sum_n \frac{m_2 \lambda_{1,n}}{2r^3}$$

である。また x^i についての Euler-Lagrange 方程式を同様に解くことで

$$r(\omega) = M^{1/3} \omega^{-2/3} \left[1 + \frac{3}{4} \sum_n \chi_n g_1(x_n) \right] \quad (4)$$

と求まる。

ここで $\chi_n = (m_2 \lambda_{1,n} \omega^{10/3}) / (m_1 M^{5/3})$, $x_n = \omega / \omega_n$, $g_1(x) = 1 + 3 / (1 - 4x^2)$ である。また、 $r(\omega)$ を求める際に先に求めた Q_n^{ij} を利用した。

系の力学的エネルギーは、運動エネルギー、重力エネルギー、内部エネルギーの和で表せる。各々を計算すると ((E. Poisson & C. Will 2014))

$$E(\omega) = -\frac{\mu}{2} (M\omega)^{2/3} \left[1 - \frac{9}{4} \sum_n \chi_n g_2(x_n) \right], \quad (5)$$

と表せる。

また、系が重力波放射によって失う単位時間当たりのエネルギーは $\dot{E}(\omega) = -\langle \ddot{Q}_{ij}^T \ddot{Q}_{ij}^T \rangle / 5$ と表されることが知られている。ここに (3),(4), を代入して、

$$\dot{E}(\omega) = -\frac{32}{5} M^{4/3} \mu^2 \omega^{10/3} \left[1 + 6 \sum_n \chi_n g_3(x_n) \right] \quad (6)$$

と表せる。

ただし、 $g_2(x) = 1 + (3 - 4x^2) (1 - 4x^2)^{-2}$
 $g_3(x) = (M/m_2 + 2 - 2x^2) / (1 - 4x^2)$ である。

2.2 重力波の位相 Ψ の計算

$\omega = \pi f$ で表される重力波の振動数 f を用いる。重力波波形 $h(t) = A(t) \cos[\phi^{\text{GW}}(t)]$ を Fourier 変換したものを振幅と位相部分に分ける ($\tilde{h}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t) \cos[\phi^{\text{GW}}(t)] e^{-i\omega t} dt =: \tilde{B}(f) e^{i\Psi(f)}$)。この時、位相部分の指数 $\Psi(f)$ は

$$\Psi(f) = 2 \frac{t_c}{M} v^3 - 2\phi_c - \frac{\pi}{4} + \frac{2}{M} \int_{v_i}^v dv' (v^3 - v'^3) \frac{E'(v)}{\dot{E}(v)} \quad (7)$$

と書けることが、鞍点法と関係 $dt/dv = (dE/dv)(dE/dt) = E'(v)/\dot{E}(v)$ から導かれる (W. Ticky et al. 2000)。ここで添え字 c は定数を表し、 $v = (M\pi f)^{1/3}$ は post-Newton パラメータと呼ばれる無次元量である。

式 (7) の積分で表される第 4 項にのみ注目し、(5)、(6) を代入する。断熱近似 ($\omega/\omega_n \rightarrow 0$) を仮定し、星 1,2 両方の寄与を足し、最低次と次の次数までを残すことで、

$$\Psi(f) = -\frac{3}{16M_{\text{ch}}^{5/3}(\pi f)^{5/3}} \left(1 - \frac{8}{5}\tilde{\Lambda}(M\pi f)^{10/3} + \dots \right) \quad (8)$$

を得る。ここに、チャープ質量

$$M_{\text{ch}} = \mu^{3/5} M^{2/5} \quad (9)$$

と、連星潮汐変形率

$$\tilde{\Lambda} = \frac{16(m_1 + 12m_2)m_1^4\Lambda_1 + (m_2 + 12m_1)m_2^4\Lambda_2}{13M^5} \quad (10)$$

とを導入した。

3 GW170817 の観測と状態方程式の制限

2017 年 8 月 17 日、連星中性子星からのものと考えられる重力波が Advanced LIGO と Advanced Virgo によって検出された。2 で示した方法により、連星のチャープ質量は $M_{\text{ch}} = 1.1977_{-0.0003}^{+0.0008} M_{\odot}$ と求まった。また、ベイズ統計を用いて連星潮汐変形率が $\tilde{\Lambda} \leq 800$ と制限された。後者の制限方法について具体的に説明する。式 (8) の... で示した高次の項には中性子星のスピン $\chi = J/M^2$ (J は角運動量) と質量比 $q = m_2/m_1$ が縮退している。 χ, q の値に推測 (prior) を課したうえでデータ解析をし、改めて得られた χ, q (posterior) を用いて $1.36M_{\odot} \leq m_1 \leq 2.26M_{\odot}$, $0.86M_{\odot} \leq m_2 \leq 1.36M_{\odot}$ を得て、同様の解析で $\tilde{\Lambda} \leq 800$ を得た (なお、本発表では low-spin prior $\chi \leq 0.05$ を用いた解析についてのみ述べるが、high-spin prior $\chi \leq 0.89$ についても同様に考えられる)。さらに単体の星の潮汐変形率についても、 $\Lambda(m)$ を m について展開す

ることで、典型的な中性子星質量 $1.4M_{\odot}$ に対して $\Lambda(1.4M_{\odot}) \leq 800$ という制限が課された。

図 2 に観測された重力波から得られた、個々の星の潮汐変形率 Λ_1, Λ_2 の確率分布 (事後分布) を示す。2 つの破線はそれぞれ 90%, 50% の信頼区間の境界を表し、灰色の線は各状態方程式から Tolman-Oppenheimer-Volkoff 方程式を解くことで求められる Λ の取り得る範囲を示す。図の左下 (右上) にある状態方程式ほど軟らかい (硬い) ものである (More compact であるということは、より軟らかいということを表す)。90% 信頼区間から外れているいくつかの状態方程式が棄却され、より軟らかい状態方程式が確からしいという事が考えられる。

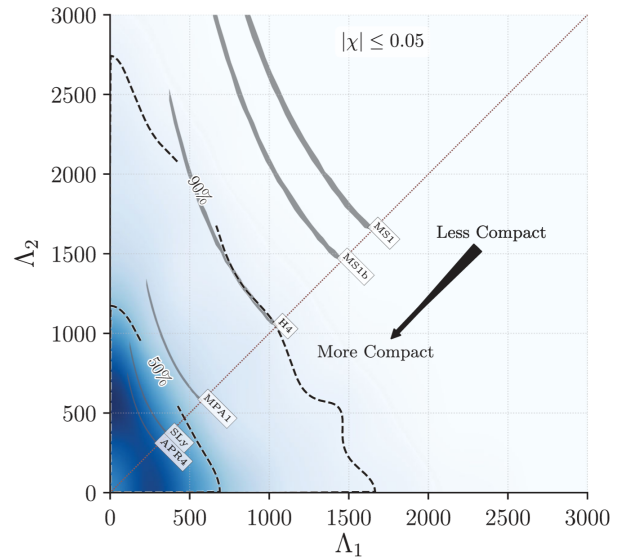
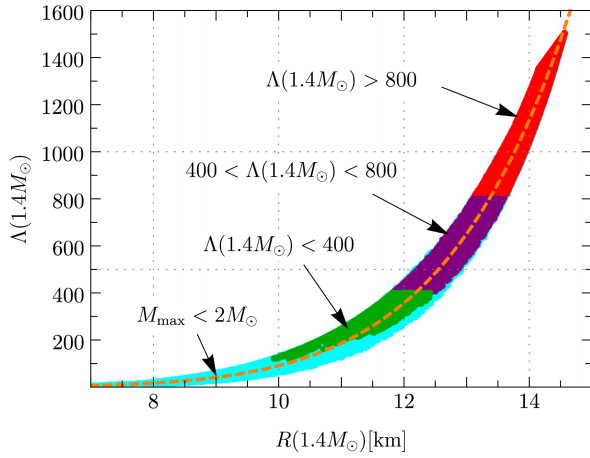


図 2: 潮汐変形率 Λ の事後分布

また、図 3 に各種状態方程式を基に描かれる、中性子星の半径 $R(1.4M_{\odot})$ と $\Lambda(1.4M_{\odot})$ との関係を示す。 $\Lambda(1.4M_{\odot}) \leq 800$ という上限から、半径に対しても $R(1.4M_{\odot}) \leq 13.6\text{km}$ という上限が課された。より厳しく、50% 信頼区間の値を用いると $R(1.4M_{\odot}) \leq 12.5\text{km}$ という上限が課される。なお、半径の下限については、質量が $2M_{\odot}$ 中性子星が観測されているという別の観測事実から、 $R(1.4M_{\odot}) \geq 9.8\text{km}$ という制限がある。

4 Conclusion

今回レビューした (E. E. Flanagan & T. Hinderer 2008) の計算により、重力波の位相 $\Psi(f)$ からチャー



W. Ticky, E.E.Flanagan, and E. Poisson, Phys. Rev. D 61, 104015 (2000)

図 3: 中性子星の半径 $R(1.4M_{\odot})$ と $\Lambda(1.4M_{\odot})$ との関係

ブ質量 M_{ch} , 連星潮汐変形率 $\tilde{\Lambda}$ の 2 つのパラメータが得られることが明らかになった。またこの手法が (B.P.Abbott et al. 2017) で重力波 GW170817 からのパラメータ取得に用いられ, その結果軟らかい状態方程式がより確からしいことと, $R(1.4M_{\odot}) \leq 13.6\text{km}$ という上限が与えられることが分かった。

Acknowledgement

本レビュー作成にあたり, 京都大学理学研究科天体核研究室の先輩方から数多くの議論の機会やアドバイスを頂きました。お陰様で自分で考える機会が失われることなく, かつスムーズに理解を進めることができました。この場を借りてお礼申し上げます。ありがとうございました。

Reference

- E. E. Flanagan and T. Hinderer, Phys. Rev. D 77, 021502 (2008)
- B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration) Phys. Rev. Lett. 119, 161101 (2017)
- E. Annala, T. Gorda, A. Kurkela, and A. Vuorinen, Phys. Rev. Lett. 120, 172703 (2018)
- K. Chatziioannou General Relativity and Gravitation 52 (2020), 10.1007/s10714-020-02754-3
- E. Poisson and C. Will "Gravity", Cambridge University Press (2014)

[indexへ戻る](#)

重宇 a09

メモリー効果と量子性の解析

前田 新也

重力の量子性とメモリー効果

前田 新也 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

重力理論と量子論を整合させた量子重力理論はいまだ謎が多く未解明な部分が多い。昨今の量子制御技術の著しい発展に伴い、この思考実験が実現される期待が高まってきた。そこで Bose らが、量子もつれという量子力学に特有な非局所的な相関によって重力の量子的性質を評価する実験 (Sougato Bose et al. 2017)(C. Marletto, & V. Vedral 2017) を提案した。しかし、ここではニュートン重力モデルが採用されており、重力の幾何学的性質や動的な自由度による効果は反映されていないため、十分な検証ではないとの批判が挙がっている。

我々は単純かつ効果的な BMV 実験をもとにして、場の量子論を用いた動的なモデルによる検証 (Yuuki Sugiyama et al. 2017) を発展させることを考えた。まずは BMV 実験 (Sougato Bose et al. 2017)(C. Marletto, & V. Vedral 2017) のレビューを行い、続けて (Yuuki Sugiyama et al. 2017) のレビューを行う。最後に、そこからメモリー効果に注目した我々の研究について概要を発表する。

1 Introduction

重力理論と量子論を整合させた量子重力理論はいまだ謎が多く未解明な部分が多い。この問題について Feynman は、量子系が作る重力場について次のような思考実験を提案した。“質量を持った粒子が重ね合わせの状態にあるとき、その粒子の作る重力場は重ね合わせの状態になるだろうか。”

昨今の量子制御技術の著しい発展に伴い、この思考実験が実現される期待が高まってきた。そこで Bose らが、量子もつれという量子力学に特有な非局所的な相関によって重力の量子的性質を評価する実験 (Sougato Bose et al. 2017)(C. Marletto, & V. Vedral 2017) を提案した。位置の重ね合わせ状態にした粒子同士を重力相互作用させ、それらの量子もつれから重力の量子的性質を測る実験であり、BMV 実験と呼ばれている。しかし、ここではニュートン重力モデルが採用されており、重力の幾何学的性質や動的な自由度による効果は反映されていないため、重力の量子性ではなく粒子の位置の量子性を測っているだけで十分な検証にはなっていないとの批判が挙がっている。この提案の後、内部エネルギーと重力の相互作用を組み込んだ量子時計による実験 (Kaku Youka et al. 2017) や、重力子のノイズによるデコヒーレンスの実験 (Kanno Sugumi et al. 2017) などの研究が行われた。

この単純かつ効果的な BMV 実験をもとにして、

場の量子論を用いた動的なモデルによる検証 (Yuuki Sugiyama et al. 2017) が考案された。我々はこの結果を踏まえ、メモリー効果による変化を測定することで検証を発展させることを考えた。まずは BMV 実験 (Sougato Bose et al. 2017)(C. Marletto, & V. Vedral 2017) のレビューを行い、続けて (Yuuki Sugiyama et al. 2017) のレビューを行う。最後に、そこからメモリー効果に注目した我々の研究について概要を発表する。

2 BMV 実験

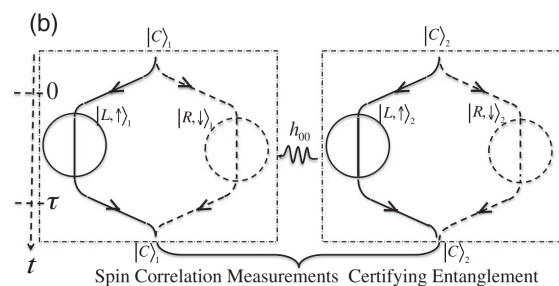


図 1: Sougato Bose et al. 2017 より引用

Stern-Gerlach 干渉計を用いて 2 つの粒子をそれぞれ右の位置と左の位置の重ね合わせの状態にし、重力相互作用による量子もつれを評価する (図 1)。重

力が量子的 (quantum) なモデルの場合は, \mathbf{x}_1 と \mathbf{x}_2 の両方について量子化する. つまりポテンシャルは

$$\hat{V} = -\frac{Gm_1m_2}{|\hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{x}}_2|} \quad (1)$$

と書かれる. 量子的なモデルでは重力源の位置に応じて重力場が変化するため, 重力場が重ね合わせの状態になっており, ソース粒子とプローブ粒子に位置の非局所的な相関が生じる. この相関は量子もつれと呼ばれており, 量子力学に特有の現象となっている. 一方で, 半古典的 (semi-classical) なモデルの場合は, 重力源の位置について期待値を取ったポテンシャルをもう片方が感じる. つまり例えば粒子 1 のシュレーディンガー方程式に現れるポテンシャルは

$$\hat{V}_1 = \left\langle -\frac{Gm_1m_2}{|\hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{x}}_2|} \right\rangle_2 \quad (2)$$

と書かれる. 半古典的なモデルでは重力源の位置について期待値を取るため重力場はソース粒子の位置に依らず, 非局所的な相関, つまり量子もつれは発生しない. 以上のことから, 粒子間の量子もつれを測定することによって重力の量子的な性質を調査しようとするのが BMV 実験の概要である.

3 動的なモデルによる検証

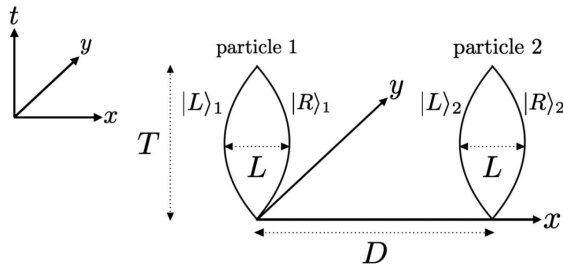


図 2: Yuuki Sugiyama et al. 2017 より引用

BMV 実験のセットアップを用いて, 量子場による相互作用で動的な寄与を含めた量子もつれについて評価する (図 2). 単純のため, ここでは場が電磁気かつ量子的なモデルの場合のみを扱う. カレント \hat{J}^μ と U(1) ゲージ場 \hat{A}_μ を用いて相互作用は

$$\hat{V} = \int d^3x (\hat{J}_1^\mu(\mathbf{x}) + \hat{J}_2^\mu(\mathbf{x})) \hat{A}_\mu(\mathbf{x}) \quad (3)$$

と書かれる. それぞれの粒子は局所的に軌道の上を動くとして, カレント \hat{J}^μ は

$$\hat{J}_I^\mu(x) |P\rangle \approx J_P^\mu(x) |P\rangle \quad (4)$$

$$J_P^\mu(x) = q \int d\tau \frac{dX_P^\mu}{d\tau} \delta^{(4)}(x - X_P(\tau)) \quad (5)$$

と近似する. $P = L, R$, q は電荷で, $X_P^\mu(\tau)$ はカレントの軌道である. このもとで Wightmann 関数と呼ばれる 2 点相関関数

$$W_{\mu\nu}(x, x') = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{\eta_{\mu\nu}}{-(t - t' - i\epsilon)^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \quad (6)$$

を計算することによって量子もつれを評価する. この計算ではクーロンポテンシャルの縦波成分のみならず動的な横波成分も含まれており, より正確で場の量子性を反映した検証となっている.

4 メモリー効果による検証

重力メモリー効果について (Akihiro Ishibashi 2022) のレビューを行う. 漸近平坦時空において, 計量の線形摂動 $h_{ab} = g_{ab} - \eta_{ab}$ のトレース反転テンソル

$$\bar{h}_{ab} = h_{ab} - \frac{1}{2} \eta_{ab} h \quad (7)$$

は, ソース項 T_{ab} を含む波動方程式

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla \right) \bar{h}_{ab} = -16\pi G T_{ab} \quad (8)$$

を満たす. この方程式の T_{ab} に基づく解はグリーン関数を用いて

$$\bar{h}_{ab} = -16\pi G \int d^4x' G(x - x') T_{ab}(x') \quad (9)$$

と書かれる. この時空のもとで測地線偏差方程式は

$$\frac{d^2}{dt^2} x^a = R^a{}_{tbt} x^b \quad (10)$$

と書かれる. 方程式を 2 回積分すると, 重力波バーストを受けた粒子の位置の変化は h_{ab} のトランスバース・トレースレス成分 h_{ab}^{TT} を用いて

$$\Delta x^a = \frac{1}{2} \Delta h_{ab}^{TT} x^b \quad (11)$$

と書かれる. ここで十分遠方において, グリーン関数の振舞い

$$G(x - x') \approx \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(t - r)}{r} \quad (12)$$

より、位置の変化はステップ関数として振る舞うため、重力波バーストの通過後に戻ることなく残り続ける。なおこの効果は重力波のみならず、電磁波や massless スカラー場の場合でも発生する。

BMV 実験のセットアップにおいて、このメモリー効果による量子性の検証を行う。先ほどの動的なモデルと同様の相互作用のもとで、マグナス展開を用いると $|P\rangle_1 |Q\rangle_2$ の状態に対する時間発展演算子は

$$\hat{U}_{PQ} = \exp \left[-i \int d^4x J_{PQ}^\mu(x) \hat{A}_\mu^I(x) - \frac{i}{2} \int d^4x \int d^4x' J_{PQ}^\mu(x) J_{PQ}^\nu(x') G_{ret}^{\mu\nu}(x, x') \right] \quad (13)$$

と書かれる。 $P, Q = L, R$, $J_{PQ}^\mu(x) = J_{1P}^\mu(x) + J_{2Q}^\mu(x)$ である。第 2 項のソース項 $J^\mu(x)$ と遅延グリーン関数 $G_{ret}^{\mu\nu}$ の積分からメモリー効果が現れることが分かる。我々は、この永続的に寄与が残るメモリー効果を用いた量子性の検証実験を提案する。

共同研究者

南部保貞（名古屋大学）、郭優佳（名古屋大学）、大澤悠生（名古屋大学）

Reference

- Sougato Bose, & Anupam Mazumdar, & Gavin W. Morley, & Hendrik Ulbricht, & Marko Toroš, & Mauro Paternostro, & Andrew A. Geraci, & Peter F. Barker, & M. S. Kim, & Gerard Milburn 2017, Phys. Rev. Lett., 119, 240401
- C. Marletto, & V. Vedral 2017, Phys. Rev. Lett., 119, 240402
- Kaku Youka, & Maeda Shin'ya, & Nambu Yasusada, & Osawa Yuki 2022, Phys. Rev. D, 106, 126005
- Kanno Sugumi, & Soda Jiro, & Tokuda Junsei 2022, Phys. Rev. D, 103, 044017
- Yuuki Sugiyamae, & Akira Matsumura, & Kazuhiro Yamamoto 2012, Phys. Rev. D, 106, 045009
- Akihiro Ishibashi 2022, Annu. Rep. RIST, No. 33, 31-37

[indexへ戻る](#)

重宇 a10

カーブブラックホール周りの回転する天体の可積分性について

山本 聡一

未提出

[indexへ戻る](#)

重宇 a11

ブラックホールの影と光子軌道の安定性

吉田 壮希

閉じた光子軌道の影によるブラックホールの決定

吉田 壮希 (京都大学大学院 理学研究科 M1)

Abstract

近年、ブラックホールの影が直接観測されるようになったため、ブラックホールの影からより多くの情報を引き出すための理論整備が重要になってくると考えられる。今回は [1] に基づき、軸対称のブラックホールにおいて、時空の特性によってその影がどのように決定されるかを考察する。これによって影を決定すると Kerr を変形した計量である Konoplya-Zhidenko 計量の例では尖った形になりうることを [2] に基づいて議論する。

1 Introduction

一般相対論によれば、光は重力によって曲げられるため、ブラックホールの十分近くを通る光はブラックホールに落ちてしまい、観測者に届かない。逆に、観測者に届く光を時間的に遡ると、ブラックホールの十分近くから来る方向は影として観測され、そうでない部分は背景の宇宙からの光が観測される。この光を遡ったときに影となるか否かの境界は、ブラックホール周りの不安定な閉じた光子軌道によって決定される。例えば、Schwarzschild ブラックホールは平面上に円形の光子軌道 (light ring, LR) を持つ。この LR は光子軌道の摂動に対して不安定であるため、この LR の集まりが、光がブラックホールに落ちるか無限遠に飛んでいくかの境界を形成し、ブラックホールの影を決定する。これと同様に、Kerr や Kerr を変形した時空などの軸対称時空においても、不安定な閉じた光子軌道を使ってブラックホールの影が決定される。

2 光子軌道の保存量

ブラックホール周りの閉じた軌道を解析する上で、軌道上の保存量を用いて軌道をパラメータ付けることが有用である。光の軌道をアフィンパラメータ λ を使って $x^\mu(\lambda)$ と書き、その四元運動量を p^μ と書くと、これらは測地線方程式

$$p^\mu \nabla_\mu p^\nu = 0 \quad (1)$$

を満たす。ここで軸対称・定常な計量を仮定し、Boyer-Lindquist 座標を取ると、計量の各成分は t, ϕ

によらず、その基底ベクトル $\partial_t, \partial_\phi$ は Killing ベクトルとなる。¹Killing ベクトルと運動量の内積は

$$\begin{aligned} \frac{d(g_{\mu\nu} k^\mu p^\nu)}{d\lambda} &= p^\alpha \nabla_\alpha (g_{\mu\nu} k^\mu p^\nu) \\ &= \frac{1}{2} p^\alpha p^\nu \nabla_{(\alpha} k_{\nu)} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

より軌道上で一定となるから、

$$E = -p_t, \quad L = p_\phi \quad (3)$$

は軌道上の定数となり、それぞれエネルギー、角運動量と呼ばれる。これらはアフィンパラメータの取り方による定数であるが、 $\eta = L/E$ はパラメータの取り方によらず各軌道に固有の量となり、インパクトパラメータと呼ばれる。

さらに、今回扱う Kerr、Konoplya-Zhidenko などの計量は隠れた対称性を持ち、(2 階の) Killing テンソルを持つ。Killing テンソルは

$$\nabla_{(\mu} K_{\nu\rho)} = 0 \quad (4)$$

を満たす自明でないテンソルと定義され、Killing ベクトルと同様に軌道上の定数

$$K = K_{\mu\nu} p^\mu p^\nu \quad (5)$$

を誘導する。

今回扱う Konoplya-Zhidenko 計量において、これらの 3 つの定数で測地線方程式が簡略化されるのを見える。Konoplya-Zhidenko 計量は Kerr に変形パラメータ ξ を追加して変形したもので、Boyer-Lindquist 座

¹Killing ベクトルとは、 $\nabla_{(\mu} k_{\nu)} = 0$ を満たす k のことである。

標で次のように表される。[2]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr^2 + \xi}{r\rho^2} \right) dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \sin^2 \theta \left[r^2 + a^2 + \frac{(2Mr^2 + \xi)a^2 \sin^2 \theta}{r\rho^2} \right] d\phi^2. \quad (6)$$

ただし、 M は質量、 a は回転パラメータであり

$$\Delta = a^2 + r^2 - 2Mr - \frac{\xi}{r}, \quad (7)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (8)$$

である。なお、変形パラメータを $\xi = 0$ としたものは Kerr 計量である。Killing テンソルは

$$K^{\mu\nu} = \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} \delta_t^\mu \delta_t^\nu - \Delta \delta_r^\mu \delta_r^\nu + \frac{(r^2 + a^2)a}{\Delta} \delta_t^\mu \delta_\phi^\nu + \frac{a^2}{\Delta} \delta_\phi^\mu \delta_\phi^\nu + r^2 g^{\mu\nu} \quad (9)$$

である。測地線方程式の t, ϕ 成分は保存量の定義式を解くことで

$$\dot{t} = E + \frac{(a^2 E - aL + Er^2)(2Mr^2 + \xi)}{\Delta \rho^2 r}, \quad (10)$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{\Delta \rho^2 r \sin^2 \theta} \left[aE \sin^2 \theta (2Mr^2 + \xi) + a^2 L r \cos^2 \theta - L(2Mr^2 - r^3 + \xi) \right] \quad (11)$$

と得られ、 r, θ 成分の式はハミルトニアン拘束条件

$$H(x, p) = g^{\mu\nu}(x) p_\mu p_\nu = 0 \quad (12)$$

から

$$\begin{aligned} \rho^4 \dot{r}^2 &= R(r) \\ &= -\Delta [Q + (aE - L)^2] + [aL - (r^2 + a^2)E]^2, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\rho^4 \dot{\theta}^2 = p_\theta^2 = Q - \cos^2 \theta \left(\frac{L^2}{\sin^2 \theta} - a^2 E^2 \right) \quad (14)$$

とかける。ここで Q は

$$Q = K^{\mu\nu} p_\mu p_\nu - (aE - L)^2 \quad (15)$$

と定義され、Carter constant と呼ばれる。空間的に閉じた軌道を考えて、軌道上で θ が最大または最小となる点が存在して、その点では $\dot{\theta} = 0$ が満たされる。計量は赤道面に関して対称であることに注意して、それぞれの閉じた軌道に対して

$$\Delta\theta = \left| \theta_{\max} - \frac{\pi}{2} \right| = \left| \theta_{\min} - \frac{\pi}{2} \right| \quad (16)$$

と定義すると、式 (15) から

$$Q = \sin^2 \Delta\theta \left(\frac{L}{\cos^2 \Delta\theta} - a^2 E^2 \right) \quad (17)$$

となり、Carter constant は $\Delta\theta$ に対して単調増加となることがわかる。なお、 Q は E や L と同様、軌道のパラメータ付けによる量であるため、パラメータによらない量に変換したものを

$$\sigma = \frac{Q}{E^2} \quad (18)$$

と定義し、これも Carter constant と略称する。

3 観測者からの見え方と保存量

次にブラックホールの影の形を議論するためには、ブラックホール周りの閉じた不安定軌道と、その周辺の光が観測者から見てどの方向からやってくるかとの対応関係を得ることが不可欠である。一般にはこの対応関係は数値的に得られるが、上述の Carter constant が存在する場合には、この対応関係は保存量を介して解析的に得ることができることを見る。

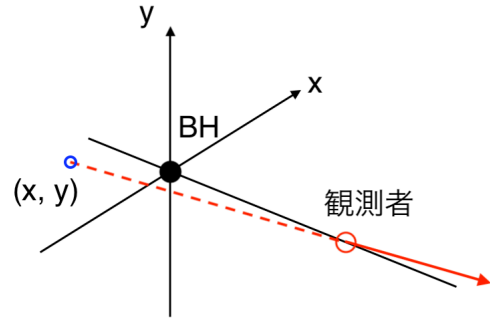


図 1: 観測者から見た光の天球面上の座標

まず簡単のために観測者は赤道面上に在るとし、図 1 のように、観測者に届く光を計量が平坦と仮定して遡り、観測者からブラックホールの中心にひいた直線と垂直な、ブラックホールを通る平面との交点の位置 (x, y) を光の軌道の座標とする。観測者とブラックホールの距離を r_0 とおくと、観測地点での四

元運動量を使って、 (x, y) は次のように書ける。[2]

$$x = -r_0 \frac{\sqrt{g_{rr} p_\phi}}{\sqrt{g_{\phi\phi} p_r}}, \quad (19)$$

$$y = r_0 \frac{\sqrt{g_{rr} p_\theta}}{\sqrt{g_{\theta\theta} p_r}}. \quad (20)$$

これを保存量を使って表し、 $r \rightarrow +\infty$ の極限を取ると、

$$x = -\eta, y = \pm\sqrt{\sigma} \quad (21)$$

となる。こうしてそれぞれの閉じた軌道から少しずれた軌道が観測者の天球面のどの位置に見えるかという対応関係が保存量を介して得られる。

4 Kerr ブラックホールの影

ここまでのことを使って Kerr ブラックホールの影の形を説明する。Kerr 計量の閉じた軌道はすべて r が軌道にそって一定であり、その半径および $\Delta\theta$ と η の解析的な関係、そして、それらの軌道がすべて不安定であることが知られている。その分布は図 2, 図 3 の通りである。なお、 r_{peri} はこれらの閉じた軌道

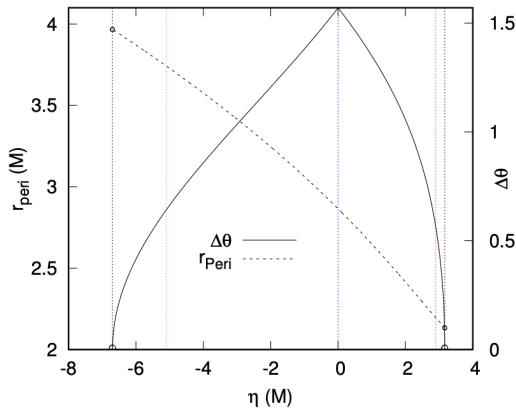


図 2: Kerr 計量 ($a = 0.820M$) における、各 η での閉じた軌道の分布とその r_{peri} , $\Delta\theta$.[1]

と赤道面との交点がなす赤道面上の円の半径に対応する量で、この円上での積分によって

$$2\pi r_{\text{peri}} = \oint d\phi \sqrt{g_{\phi\phi}} \quad (22)$$

と定義される。Kerr 計量の場合は 1 つの η に対応する r_{peri} , $\Delta\theta$ は 1 つだけであり、すなわち Carter constant $\sigma(\eta)$ も各 η に対して 1 つだけ対応する。観測

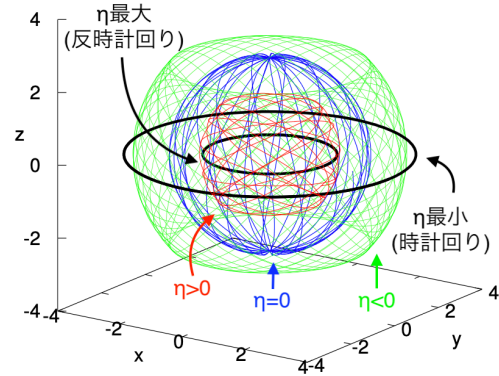


図 3: Kerr 計量における閉じた軌道の概形図

者から見た軌道の (x, y) 座標を考えると、各 $x (= -\eta)$ での影の境界の位置は

$$y = \pm\sqrt{\sigma(\eta(x))} \quad (23)$$

と関係づけられ、影が決定される。これを図示したものが図 4 である。

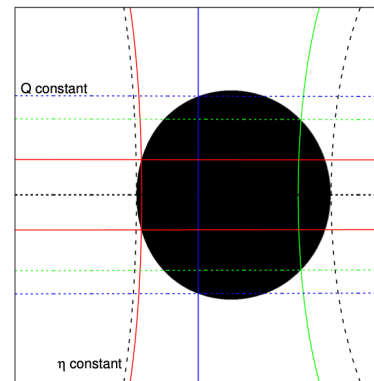


図 4: Kerr ブラックホール ($a = 0.820M$) の影

5 Konoplya-Zhidenko 回転ブラックホールの影

次に、Konoplya-Zhidenko 回転ブラックホールの影が尖った形になることを見る。この場合、閉じた軌道上での r は一定とは限らないが、軌道と赤道面の交点の集まりは単一の円となるため、Kerr の時と同様に r_{peri} が定義できて、 $\Delta\theta$, r_{peri} と η の関係はそれぞれ図 5, 図 6 のようになる [2]。

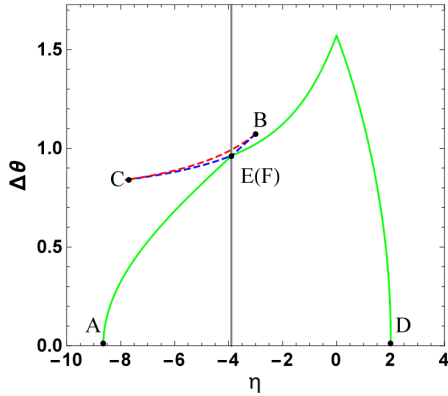


図 5: Konoplya-Zhidenko 計量 ($a = 2M, \xi = 0.5$) における, 各 η での閉じた軌道の分布とその $\Delta\theta$. [2] 赤の破線は安定な軌道を、青の破線および緑の実線は不安定なものを表す。

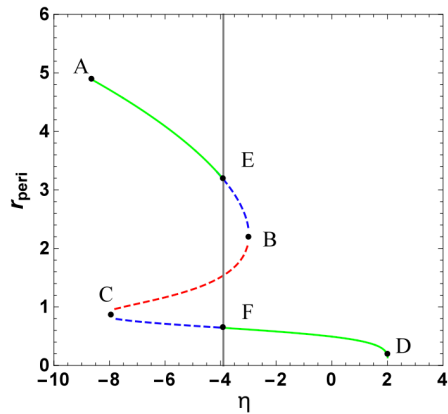


図 6: Konoplya-Zhidenko 計量 ($a = 2M, \xi = 0.5$) における, 各 η での閉じた軌道の分布とその r_{peri} . [2] 凡例は図 5 と同様。

ここで不安定な閉じた軌道に着目すると、1つの η に対応する $r, \Delta\theta$ が 2 つ存在する場合があります、そのような η には Carter constant $\sigma(\eta)$ が 2 つ対応するため、1つの $x (= -\eta)$ での境界 $y (= \sqrt{\sigma})$ の候補が 2 つ存在することになる。しかし、2つの境界候補の間には、内側に対応する閉じた軌道から少しだけ離れた光などが届くことができるため、この部分は影とならず、実際に影の境界となるのは内側、すなわち $|y|$ が小さい方の候補となる。Carter constant は $\Delta\theta$ に対して単調増加であったため、影の境界を決める不安定軌道は $\Delta\theta$ が小さい方の軌道となり、これは図 5, 図 6 の緑の実線に対応する。その結果、影の

境界を決定する不安定軌道は η が増加するとともに A-E の系列から F-D の系列に不連続に切り替わり、その不連続性が尖った影として現れる。これを図示したものが図 7 である。

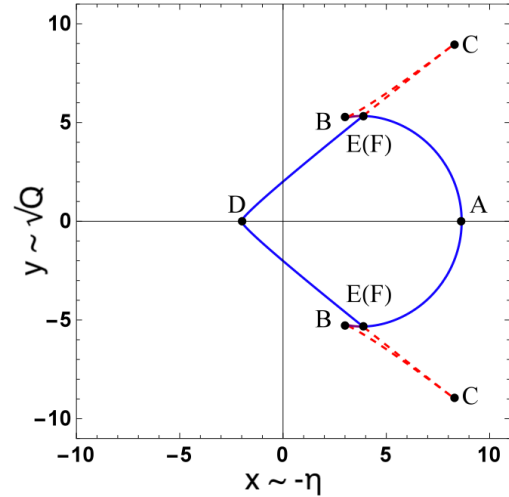


図 7: Konoplya-Zhidenko 回転ブラックホール ($a = 2M, \xi = 0.5$) の影 [2]. 実線が影の境界であり, A-F の頂点は図 5, 図 6 でのものに対応する。

6 まとめ

今回は、[1] に基づいて軸対称計量で保存量を介してブラックホールの影を決定する方法を考察し、尖った影になる場合があることを [2] の具体例を通して確認した。

Acknowledgement

本発表にあたり、ご指導いただいた天体核研究室・基礎物理学研究所の皆様、講演の機会を与您てくださった夏の学校の運営の皆様へ深く御礼申し上げます。

Reference

- [1] Pedro V.P. Cunha, Carlos A.R. Herdeiro, & Eugen Radu, Phys. Rev. D 96, 024039 (2017)
- [2] Mingzhi Wang, Songbai Chen, & Jiliang Jing, JCAP 10 (2017) 051

[indexへ戻る](#)

重宇 a12

Schwarzschild時空における測地線の再検討

関根 肅稀

Schwarzschild 時空における測地線の再検討

関根 肅稀 (立教大学大学院 理学研究科)

Abstract

ブラックホールは現代における最も標準的な重力理論である一般相対論によって予言される時空構造である。ブラックホールは強い重力場によって光さえも脱出できないなどの興味深い性質を持ち、近年では、Event Horizon Telescope が銀河中心ブラックホールの撮影に成功した。一般相対論が発表された直後、Schwarzschild によって一般相対論の基礎方程式である Einstein 方程式を球対称かつ静的であるという条件の下に解いた厳密解が導出された。これは Schwarzschild 解と呼ばれ、ブラックホール時空構造を持っている Einstein 方程式の最も単純な解である。以降、この解によって記述される Schwarzschild 時空での運動する物体や光の軌道を理解するための研究が現在まで続いている。

本発表では論文 [1] のレビューを行う。Schwarzschild 測地線方程式の解の表し方は様々であるが、今回用いているのは Biermann-Weierstrass の定理に基づいた Weierstrass 楕円関数である。これを用いて測地線方程式の解を表し、Schwarzschild 時空における物体の軌道を記述する timelike 測地線と光の軌道を記述する null 測地線についての議論を行う。

1 Introduction

今回、ブラックホールへの物体や光の軌道を探る上で、最も単純なブラックホールのモデル (Einstein 方程式の球対称静的時空の真空解) である Schwarzschild ブラックホールを取り扱う。Schwarzschild ブラックホールの計量は

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (1)$$

と書ける。

本研究で Schwarzschild 時空での測地線を再検討する動機は、Schwarzschild ブラックホールへの相対論的無衝突運動ガスの降着に関する研究と強く結びついている。この研究は、ガスのモンテカルロ型シミュレーションを構築することを目的としているため、Schwarzschild 計量における全ての timelike および null の軌道を簡潔に記述できるものを探していた。本研究ではその具体的な手法についての紹介と導出を行う。

2 計量

新たな座標時間を以下のように導入する。

$$t = \bar{t} + \int^r \left[\left(1 - \frac{2M}{s}\right)^{-1} - 1 \right] ds \quad (2)$$

これにより (1) の計量は

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{4M}{r} dt dr + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (3)$$

と書き換えることができる。この座標を Eddington-Finkelstein 座標といい、ホライズン ($r = 2M$) で正則となっていることがわかる。

3 測地線運動

測地線に沿って動く単一の粒子のハミルトニアン H について

$$H = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (x^\alpha) p_\mu p_\nu \quad (4)$$

を考える。ここで、 (x^μ, p_μ) は正準変数として扱う。ここでハミルトン方程式

$$\frac{dx^\mu}{d\bar{s}} = \frac{\partial H}{\partial p_\mu}, \quad \frac{dp_\mu}{d\bar{s}} = - \frac{\partial H}{\partial x^\mu} \quad (5)$$

は測地線方程式

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0 \quad (6)$$

を導く。

timelike 測地線では、アフィンパラメータ \tilde{s} を再スケールされた固有時間として以下のように選択する。

$$\tilde{s} = \frac{\tilde{\tau}}{m} \quad (7)$$

ここで m は静止質量とする。

null 測地線の場合

$$m = 0, H = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = 0 \quad (8)$$

となる。

ハミルトニアン H は計量 (3) を使うと

$$H = \frac{1}{2} \left[g^{tt}(r) p_t^2 + 2g^{tr}(r) p_t p_r + g^{rr}(r) p_r^2 + \frac{1}{r^2} \left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right) \right] \quad (9)$$

と書き換えられる。これと (5) の左側の式を使うと粒子の運動方程式を導ける。

導出にあたって無次元に再スケールされた変数を定義することにする。

timelike 測地線の場合

$$t = M\tau, r = M\xi, p_r = m\pi_\xi, p_\theta = Mm\pi_\theta, \\ E = m\varepsilon, l = Mm\lambda, l_z = Mm\lambda_z \quad (10)$$

新しいアフィンパラメータ s についても

$$\tilde{s} = \frac{M}{m} s \quad (11)$$

と定義する。

null 測地線の場合、(10),(11) について任意の質量パラメータ $\tilde{m} > 0$ を導入する。

以上のことを踏まえると運動方程式は以下のよう
に書ける。

$$\frac{d\xi}{ds} = \epsilon_r \sqrt{\varepsilon^2 - U_\lambda(\xi)} \quad (12)$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\lambda_z}{\xi^2 \sin^2 \theta} \quad (13)$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \epsilon_\theta \frac{1}{\xi^2} \sqrt{\lambda^2 - \frac{\lambda_z^2}{\sin^2 \theta}} \quad (14)$$

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{\varepsilon}{1 - \frac{2}{\xi}} - \epsilon_r \frac{2\sqrt{\varepsilon^2 - U_\lambda(\xi)}}{\xi(1 - \frac{2}{\xi})} \quad (15)$$

ここで、 $\epsilon_r, \epsilon_\theta$ は運動方向に対応する符号であり

$$\epsilon_r = \pm 1, \epsilon_\theta = \pm 1$$

有効ポテンシャル $U_\lambda(\xi)$ は

timelike の場合

$$U_\lambda(\xi) = \left(1 - \frac{2}{\xi}\right) \left(1 + \frac{\lambda^2}{\xi^2}\right) \quad (16)$$

null の場合

$$U_\lambda(\xi) = \left(1 - \frac{2}{\xi}\right) \frac{\lambda^2}{\xi^2} \quad (17)$$

となる。

球対称な空間では軌道面が変化せずどの面も等価であるため、運動を赤道面に限定して考える ($\theta = \frac{\pi}{2}$, $\frac{d\theta}{ds} = 0$) と運動方程式は

$$\frac{d\xi}{ds} = \epsilon_r \sqrt{\varepsilon^2 - U_\lambda(\xi)} \quad (18)$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\lambda}{\xi^2} \quad (19)$$

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{\varepsilon}{1 - \frac{2}{\xi}} - \epsilon_r \frac{2\sqrt{\varepsilon^2 - U_\lambda(\xi)}}{\xi(1 - \frac{2}{\xi})} \quad (20)$$

(18) と (19) から

timelike の場合

$$\frac{d\xi}{d\varphi} = \epsilon_r \sqrt{\frac{\varepsilon^2 - 1}{\lambda^2} \xi^4 + \frac{2}{\lambda^2} \xi^3 - \xi^2 + 2\xi} \quad (21)$$

null の場合

$$\frac{d\xi}{d\varphi} = \epsilon_r \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{\lambda^2} \xi^4 - \xi^2 + 2\xi} \quad (22)$$

が得られる。

4 Biermann-Weierstrass の定理

g_2, g_3 というパラメータに依存している Weierstrass の楕円関数 $\wp(z; g_2, g_3)$ は以下の積分方程式を満たす。

$$z = \int_{\wp(0)}^{\wp(z)} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} \quad (23)$$

ここで Biermann-Weierstrass の定理 (Biermann-Weierstrass 1860) を導入する。

4 次の多項式

$$f(x) = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 \quad (24)$$

を定義する。この式が

$$z(x) = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{f(x')}} \quad (25)$$

のように楕円積分の形をとるとき

$$g_2 = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2 \quad (26)$$

$$g_3 = a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 \quad (27)$$

となり

$$x = x_0 + \frac{-\sqrt{f(x_0)}\wp'(z) + \frac{1}{2}f'(x_0)\left(\wp(z) - \frac{1}{24}f''(x_0)\right) + \frac{1}{24}f(x_0)f'''(x_0)}{2\left(\wp(z) - \frac{1}{24}f''(x_0)\right)^2 - \frac{1}{48}f(x_0)f^{(4)}(x_0)} \quad (28)$$

と書ける。

5 定理の適用

(21) と (22) について $\sqrt{\quad}$ の中身を (24) と係数比較を

timelike(21) の場合

$$a_0 = \frac{\varepsilon^2 - 1}{\lambda^2}, \quad a_1 = \frac{1}{2\lambda^2}, \\ a_2 = -\frac{1}{6}, \quad a_3 = \frac{1}{2}, \quad a_4 = 0 \quad (29)$$

null(22) の場合

$$a_0 = \frac{\varepsilon^2}{\lambda^2}, \quad a_1 = 0, \\ a_2 = -\frac{1}{6}, \quad a_3 = \frac{1}{2}, \quad a_4 = 0 \quad (30)$$

となる。

また、どちらの場合でも

$$\frac{d\xi}{d\varphi} = \varepsilon_r \sqrt{f(\xi)} \quad (31)$$

より

$$\varphi = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi'}{\sqrt{f(\xi')}} \quad (32)$$

(ξ_0 は角度 $\varphi = 0$ に対応する任意の半径) を得る。

よって Biermann-Weierstrass の定理を使って

$$\xi(\varphi) = \xi_0 + \frac{-\varepsilon_r \sqrt{f(\xi_0)}\wp'(\varphi) + \frac{1}{2}f'(\xi_0)\left(\wp(\varphi) - \frac{1}{24}f''(\xi_0)\right) + \frac{1}{24}f(\xi_0)f'''(\xi_0)}{2\left(\wp(\varphi) - \frac{1}{24}f''(\xi_0)\right)^2 - \frac{1}{48}f(\xi_0)f^{(4)}(\xi_0)} \quad (33)$$

と求めることができた。

6 粒子軌道

(33) を実際にプロットしてみる。ここで、半径 ξ と角度 φ について極座標変換した座標 (x, y) での軌道をプロットする。

timelike の場合

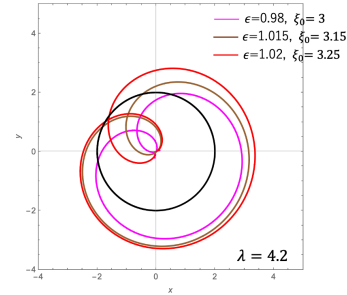


図 1: 落下軌道

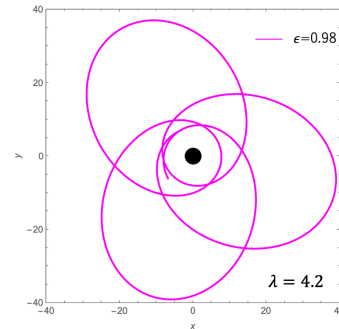


図 2: 束縛軌道

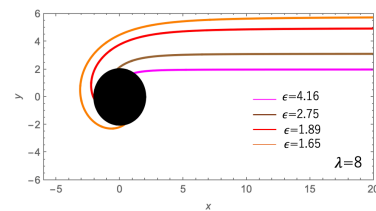


図 3: 無限遠からの落下軌道

null の場合

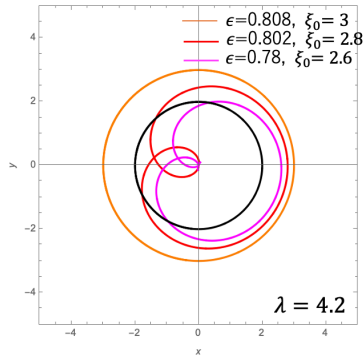


図 4: 光子円軌道とその内側の落下軌道

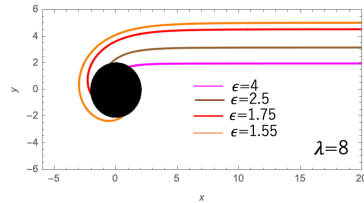


図 5: 無限遠からの落下軌道

7 Summary

まずホライズンで正則となる座標を選び、測地線の運動方程式を導出した。その後 Biermann-Weierstrass の定理を使うことで動径座標 $\xi(\varphi)$ を求めることができた。これによって timelike および null について、あらゆるタイプの軌道を 1 つの式で表すことができた。今後の展望として、今回プロットした軌道と数値積分して求めた軌道を比較し、どれくらいの精度で一致しているのかを調べていきたい。

Reference

Adam Cieslik and Patryk Mach, Class. Quantum Grav. 39 225003

重字 a13

古典的な double copy について

大西 悠稀

Black holes and the double copy

大西 悠稀 (京都大学大学院 理学研究科)

Abstract

近年、重力理論とゲージ理論の間に (重力理論)=(ゲージ理論)² のような対応 (double copy) が成立する可能性が発見された。ゲージ理論の摂動論は非常に理解が進んでいるが、重力理論は摂動論においても無限に高階微分項があり理解が進んでいない。double copy はこれらの一見異なる理論の間に単純な関係が成立することを示唆しており、重力理論の解析に大きな役割を果たすことが期待されている。この double copy の代表例として BCJ 対応と呼ばれる対応が知られている。これは (重力の散乱振幅)=(ゲージ理論の散乱振幅)² のような対応である。tree level において成立することが証明されており、all order で成立することが期待されている。本発表では、BCJ 対応から予見される古典的な double copy[1] に関してレビューをする。まず、ゲージ理論の解と定常的な Kerr-Schild タイプの計量が double copy により対応付けられることを示す。その例として、Schwarzschild 計量が Coulomb ポテンシャルと対応し、Kerr ブラックホールが自転する電荷のポテンシャルと対応することを見る。さらに、この double copy が定常 Kerr-Schild 解に限らないより広いクラスの解に対しても拡張できる可能性について議論する。この double copy についてのより深い理解は、重力理論のさらなる発展に繋がるものである。

1 Introduction

BCJ 対応：YM 理論の散乱振幅 A の colour-factor $c_i \rightarrow$ kinematic numerator n_i とすることで重力による散乱振幅 M となるという対応 $\rightarrow A^2 \sim M(\text{double copy})$

$$M_m^{(L)} = i^{L+1} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{m-2+2L} \sum_{i \in \Gamma} \int \prod_{l=1}^L \frac{d^d p_l}{(2\pi)^d} \frac{1}{S_i} \frac{n_i \tilde{n}_i}{\Pi_{\alpha_i} p_{\alpha_i}^2}$$

$$A_m^{(L)} = i^L g^{m-2+2L} \sum_{i \in \Gamma} \int \prod_{l=1}^L \frac{d^d p_l}{(2\pi)^d} \frac{1}{S_i} \frac{n_i c_i}{\Pi_{\alpha_i} p_{\alpha_i}^2}$$

YM 理論：非可換ゲージ理論。現在の素粒子標準模型のもとになっている理論

Yang-Mills 理論は比較的容易 \longleftrightarrow 重力理論: 複雑な計算

double copy は、以下のような新しい理論を構成する可能性がある。

- 重力波に対する GR 摂動を計算する新しい方法になる
- BCJ 対応と double copy によって、可能な量子重力理論を探る
- YM 理論や重力における新しい (非) 摂動解を生み出す

- string と場の理論の関係を深く探る

\rightarrow とりあえず、double copy が正しいと信じて進む double copy の tree-level では、double copy は KLT 関係 (弦理論における開弦と閉弦の散乱振幅) と等しいことがわかっているもし完璧な double copy ができることになれば、exact な解についても関係が見つかるはず BCJ double copy は、tree-level では成り立つことが証明されているが、loop ではあまり進んでいない。

\rightarrow classical な範囲で本来 loop を含むはずの計算における double copy を探ることにより、quantum の範囲における loop についての double copy を考えることができるかもしれないとりあえず今回は、Kerr-Schild 型の計量を持つものに対して、double copy 的な解釈ができるかを探求する

2 Kerr-Schild-type metric and single copy

Kerr-Schild の形でかけるときの double copy について考える。

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \phi k_{\mu} k_{\nu}$$

このときの Ricci tensor, Ricci scalar は、

$$R_{\nu}^{\mu} = \frac{1}{2}(\partial^{\mu}\partial_{\alpha}(\phi k^{\alpha}k_{\nu}) + \partial_{\nu}\partial^{\alpha}(\phi k_{\alpha}k^{\mu}) - \partial^2(\phi k^{\mu}k_{\nu}))$$

$$R = \partial_{\mu}\partial_{\nu}(\phi k^{\mu}k^{\nu})$$

定常的な解を仮定し、一般性を失わずに $k^0 = 1$ とする。今回は、Abelian な gauge 場 (後述) と Field Strength

$$A_{\mu} = \phi k_{\mu}, F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$$

を定義すると、真空の Einstein eq. $R_{\mu\nu} = 0$ は、

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = \partial_{\mu}(\partial^{\mu}(\phi k^{\nu}) - \partial^{\nu}(\phi k^{\mu})) = 0$$

と Maxwell eq. の形になる。

- ϕ は amplitude という propagator の働きをする。
- A_{μ} は、 k_{μ} に対してスカラー場 ϕ をかけて得られる (single copy)
- 自由度を数えると、gauge 理論=gravity+dilaton 場+2-form 場であるが、 $h_{\mu\nu}$ の symmetry と traceless $k^2 = 0$ により dilaton と 2-form の分の自由度は残されていない。
- こんな風に、 $A_{\mu}A_{\nu} \sim h_{\mu\nu}$ となって、かつ Einstein eq. を満たす $h_{\mu\nu}$ に対して、 A_{μ} が YM 方程式 (今回はほとんど Maxwell 方程式) を満たすようなときに、これを”double copy 的な解釈”と呼ぶことにする。

散乱を見るために、運動量空間で同様の Kerr-Schild ansatz を使う。すると、 k_{μ} は位置空間で微分演算子となり、計量は

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \hat{k}_{\mu}\hat{k}_{\nu}\phi$$

計量が symmetric になるように、 $[\hat{k}_{\mu}, \hat{k}_{\nu}] = 0$ とする。また、dilaton 場を除くように、 $h_{\mu\nu}$ を trace free を課すと、 $\hat{k}^2 = 0$ このとき、light-cone coords を用いて解を記述する。

$$u = t - z, v = t + z, w = x + iy, \bar{w} = x - iy$$

とすると Minkowski 線素は

$$ds^2 = -dudv + dwd\bar{w}$$

と書ける。self-dual 理論に対する \hat{k}_{μ} は、

$$\hat{k}_u = 0, \hat{k}_v = \frac{1}{4}\partial_w, \hat{k}_w = 0, \hat{k}_{\bar{w}} = \frac{1}{4}\partial_u$$

とかけて、 $\hat{k} \cdot \partial = 0$ である。このとき、真空の Einstein eq. は

$$R_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2} \left[-\hat{k}_{\mu}\hat{k}_{\nu}\partial^2\phi + \kappa(\hat{k}_{\mu}\hat{k}_{\nu}\partial_{\rho}\partial_{\sigma}\phi)(\hat{k}^{\rho}\hat{k}^{\sigma}\phi) - \kappa(\hat{k}_{\mu}\hat{k}_{\rho}\partial^{\sigma}\phi)(\hat{k}_{\nu}\hat{k}_{\sigma}\partial^{\rho}\phi) \right]$$

\hat{k}_{μ} に具体的な量を代入することで

$$\partial^2\phi - \frac{\kappa}{2}(\hat{k}^{\mu}\hat{k}^{\nu}\phi)(\partial_{\mu}\partial_{\nu}\phi) = 0$$

これは self-dual な重力に対する Plebanski eq. これを書き換えると、

$$\hat{k}_{\nu}(\partial^2\phi + ig[\partial_w\phi, \partial_u\phi]) = 0$$

これは self-dual YM eq. に他ならない

3 Example1:Schwarzschild metric

最も簡単な真空解として、Schwarzschild 解を考える。graviton 場は

$$h_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2}\phi k_{\mu}k_{\nu}, \phi = \frac{M}{4\pi r}, k^{\mu} = (1, x^i/r), r^2 = x^i x_i$$

となり、single copy により abelian gauge 場 $A^{\mu} = \phi k_{\mu}$ に対して、

$$\frac{\kappa}{2} \rightarrow g, M \rightarrow c_a T^a, k_{\mu}k_{\nu} \rightarrow k_{\mu}, \frac{1}{4\pi r} \rightarrow \frac{1}{4\pi r}$$

という、BCJ 対応からくる置き換えにより、

$$A^{\mu} = \frac{gc_a T^a}{4\pi r} \left(1, \frac{\mathbf{x}}{r} \right)$$

と得る。これは、Abelian Maxwell eq.

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = j^{\nu}$$

with current

$$j^{\nu} = -g(c_a T^a)v^{\nu}\delta^{(3)}(\mathbf{x}), v^{\mu} = (1, \mathbf{0})$$

であり、これは原点で静止している colour charge の満たす方程式と等しい。これはさらにゲージ変換

$$A_{\mu}^a \rightarrow A_{\mu}^a + \partial_{\mu}\chi^a(x), \chi^a = -\frac{gc_a}{4\pi} \log\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

により、

$$A_{\mu} = \left(\frac{gc_a T^a}{4\pi r}, 0, 0, 0 \right)$$

これは d次元に拡張することができる。

4 Example2: Kerr metric

Kerr(電荷がなく、自転している)ブラックホールについて考える。このとき、graviton 場は

$$h_{\mu\nu} = \phi(r)k_\mu k_\nu$$

ここで、

$$\phi(r) = \frac{2MGr^3}{r^4 + a^2 z^2}, k_\mu = \left(1, \frac{rx + ay}{r^2 + a^2}, \frac{ry - ax}{r^2 + a^2}, \frac{z}{r}\right)$$

である。ここで、 r は、以下で定義される。

$$\frac{x^2 + y^2}{r^2 + a^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1$$

ただし、 $x^2 + y^2 \leq a^2, z = 0$ を除く。BCJ 対応における置き換え”square root”

$$\frac{\kappa}{2} \rightarrow g, M \rightarrow c_a T^a, k_\mu k_\nu \rightarrow k_\mu, \frac{1}{4\pi r} \rightarrow \frac{1}{4\pi r}$$

$$A_\mu^a = \frac{g}{4\pi} \phi(r) c_a k_\mu$$

を Kerr-Schild single copy で定義するとこれはまた Maxwell eq. の解となっている。source を具体的に書くことを考える。Kerr 時空をつくる最小限の source は、ring 状特異点を示す disk である。楕円体座標

$$x = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \phi, y = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \phi, z = r \cos \theta \quad k_\mu dx^\mu = du = dz - dt, \phi = \phi(u, x^i)$$

を導入すると、energy-momentum tensor は、

$$T^{\mu\nu} = \sigma(w^\mu w^\nu + \zeta^\mu \zeta^\nu), \sigma = -\frac{M}{8\pi^2 a \cos \theta} \delta(z) \Theta(a - \rho)$$

with

$$w^\mu = \tan \theta \left(1, 0, \frac{1}{a \sin^2 \theta}, 0\right), \zeta^\mu = \left(0, \frac{1}{a \cos \theta}, 0, 0\right), \rho = a \sin \theta \quad A_\mu^a = k_\mu \phi^a(u, x^i)$$

また、 $w^\mu w^\nu$ は面密度項、 $\zeta^\mu \zeta^\nu$ は圧力項である。すると、source current

$$j^\mu = -\delta(z) \Theta(a - \rho) \frac{g(c_a T^a)}{4\pi} \frac{1}{a^2 \cos \theta} \left(\sec^2 \theta, 0, \frac{\sec^2 \theta}{a}, 0\right)$$

を得る。また、vector $\zeta^\mu = (1, 0, 1/a, 0)$ を導入すると、

$$j^\mu = q \zeta^\mu, q = -\delta(z) \Theta(a - \rho) \frac{g(c_a T^a)}{4\pi a^2} \sec^3 \theta$$

これは、 z 軸に関して回転する colour charge の分布になる。

gauge 場 $A_\mu = k_\mu \phi \xrightarrow{\text{doublecopy}}$ graviton 場 $h_{\mu\nu} = k_\mu k_\nu \phi$ と同様に、current $j^\mu \xrightarrow{\text{doublecopy}}$ energy-momentum tensor $T^{\mu\nu}$ と考えられる。

$$T^{\mu\nu} = \delta(z) \Theta(a - \rho) \left(-\frac{M \sec^3 \theta}{8\pi a^2}\right) [\xi^\mu \xi^\nu - \cos^2 \theta \tilde{\eta}^{\mu\nu}]$$

Cartesian 座標では、 $\tilde{\eta}^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 0)$

第 1 項は回転する電荷が回転する mass に置き換えられた、pure な double copy

第 2 項は disk を安定にするために必要な動径方向圧力項である。

5 Example3: plane wave

時間依存する真空解として、 d 次元の平面波解 (pp-wave) を考える。pp-wave は Kerr-Schild タイプであるので

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \phi k_\mu k_\nu$$

このとき、lightcone 座標 $x^\mu = (u = z - t, v = z + t, x^i)$ with $i = 1, \dots, d - 2$ を用いると、pp-wave sol. は

であるので、Einstein eq. は、

$$\partial_i \partial^i \phi = 0$$

これより、gauge 場は

やはり、Kerr-Schild 計量は double copy が可能である。

6 Example4: Shock wave

無限大に加速された粒子には衝撃波が生じ、そのときの場は Lorentz 収縮し、粒子の運動方向に対して垂直、横 (transverse) 方向の flat plane 上に存在する。このとき、計量は Aichelburg-Sexl 計量で記述され、4 次元においては、平面波解の形をとり、

$$\phi(u, x^i) = C \delta(u) \log |\mathbf{x}|$$

QCD と gravity における摂動的な衝撃波の関係はよく議論されている。それによると、gauge 理論側が Abelian か Non-Abelian かによらず double copy 的な関係を満たす。

7 Discussion

- なぜ Non-Abelian ではなくすべて Abelian なのか? Kerr-Schild ansatz は、coupling const. の 1 次までしかとっていない
→higher-order の non-Abelian の項を無視している
- double copy が明らかにするにはどういう gauge のとり方をすべきかという一般的理解が足りていない。
→線形化されたレベルについては、gauge symmetry について考えることで解決を図っている
- これらだけではなく量子化したときの double copy を考える取り組みも進んでいる。

8 Conclusion

- double copy は散乱振幅を通じて gauge 理論と重力理論をつなぐものである。
- Classical で Kerr-Schild タイプの計量に対しては double copy 的な関係は成り立つ
- ただ Kerr-Schild では線形的であるので、Non-abelian ではなく abelian になる

Reference

- [1] R. Monteiro, et al. arXiv: 1410.0239v2 [hep-th], 2015
- [2] W. Israel, “Source of the Kerr metric,” Phys.Rev. D2 (1970) 641–646.
- [3] A. Anastasiou, et al. “Yang-Mills origin of gravitational symmetries,” 1408.4434.
- [4] N. Bjerrum-Bohr, J. F. Donoghue, and P. Vanhove, “On-shell Techniques and Universal Results in Quantum Gravity,” JHEP 1402 (2014) 111, 1309.0804. 22

[indexへ戻る](#)

重宇 a14

複素スカラー場を用いたワームホール解と安定性解析

林 知哉

複素スカラー場を用いたワームホールとその安定性

林 知哉 (大阪公立大学大学院 理学研究科)

Abstract

一般相対性理論特有の時空構造の一つとしてワームホールがある。通過可能なワームホールが安定的に存在するためには Null エネルギー条件 (NEC) を破るようなエキゾチック物質が必要だと考えられている。エキゾチック物質を導入する方法はさまざまであるが、その一つにスカラー場のラグランジアン密度の運動項が負であるゴーストスカラー場を用いる方法がある。今まで、実ゴーストスカラー場を用いたワームホール解の解析は頻繁に行われてきたが、複素ゴーストスカラー場を用いることは少なかった。複素ゴーストスカラー場を用いることで、ボゾン・スターの構築に用いられる複素カノニカル・スカラー場の場合と同様に、調和的な時間依存性を導入することができる。そこで本論文では、4 次自己相互作用を持つ複素ゴーストスカラー場を導入することで自明でない時空トポロジーを持つ均衡方程式を導き、球対称で漸近的に平坦な平衡解を得た。そして、その解の線形半径摂動に対する不安定性を示す。解析の結果、複素ゴーストスカラー場を用いても安定解が得られないことがわかった。

1 Introduction

本発表は、[1] のレビューを行う。ワームホールとは、二つの領域を繋ぐ幾何学的構造のことである。ワームホールを用いると異星間移動やタイムトラベルができる可能性がある。しかし通過可能なワームホールは、Null エネルギー条件が破られることが知られている。[2] そのような物質を導入する方法にゴーストスカラー場を用いる方法がある。ゴーストスカラー場とは、運動項の符号が負のスカラー場である。これまでに、実ゴーストスカラー場を用いた研究は行われてきた。特に、4 次の自己相互作用項を持つような実ゴーストスカラー場は研究されている。しかし、安定なワームホール解は知られていない。本発表では、4 次の自己相互作用項を持つメキシカンハット型のポテンシャルを含んだ複素ゴーストスカラー場を用いて静的球対称ワームホール解を数値的に導出する。さらに、解の不安定性についても議論する。

2 静的球対称ワームホール

一般に球対称時空は下のような形になる。

$$ds^2 = e^\nu(dx^0)^2 - e^\mu dr^2 - e^\lambda d\Omega^2 \quad (1)$$

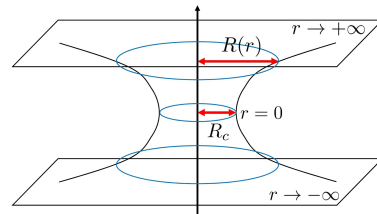


図 1: 静的球対称ワームホール模式図 ($t = \text{const}, \theta = \pi/2$ の二次元スライスの埋め込み図)

静的球対称ワームホールについて議論したい場合、以下のような座標系と計量を選ぶ。

$$ds^2 = e^{\nu(r)}(dx^0)^2 - dr^2 - R(r)^2 d\Omega^2 \quad (2)$$

x^0 が時間座標、 r が動径座標である。 ν と R は r のみ依存する。今回は、 r の範囲を $(-\infty, \infty)$ とし $r \rightarrow \pm\infty$ で漸近的平坦領域を表す。ワームホール時空は二つの漸近的平坦な領域を繋ぐ喉 (Throat) と呼ばれる構造を持ち、今回の場合は $r = 0$ でワームホールの喉であるとする。つまり、 $R(0) = \min\{R(r)\} = R_c$ とし $R_c > 0$ を喉の半径と呼ぶ。また、今回は計算を楽にするために $R(r) = R(-r), \nu(r) = \nu(-r)$ とし、 r は $[0, \infty)$ のみを考える。

3 ゴーストスカラー場

今回は下のような作用を考える。($c = \hbar = 1$)

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{-R}{16\pi G} + \mathcal{L}_M \right] \quad (3)$$

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi^* \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2} V(|\Phi|) \quad (4)$$

\mathcal{L}_M の運動項に注目すると、符号が負になっていることが分かる。このようなスカラー場をゴーストスカラー場と呼ぶ。(3) からエネルギー・運動量テンソル T^μ_ν は

$$T^\mu_\nu = -\frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (\partial_\sigma \Phi^* \partial_\nu \Phi + \partial_\sigma \Phi \partial_\nu \Phi^*) + \frac{1}{2} \delta^\mu_\nu (g^{\lambda\sigma} \partial_\lambda \Phi^* \partial_\sigma \Phi + V(|\Phi|)) \quad (5)$$

物質場の方程式は

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} \right] = \frac{dV}{d|\Phi|^2} \Phi \quad (6)$$

今回は、複素スカラー場を $\Phi(r, x^0) = \phi(r) e^{-i\omega x^0}$ ($\omega = 0$ のき実スカラー場に対応する) としポテンシャル $V(|\Phi|)$ を下のように仮定する。

$$V(|\Phi|) = -m^2 |\Phi|^2 + \frac{1}{2} \bar{\lambda} |\Phi|^4 \quad (7)$$

m は質量パラメータ、 $\bar{\lambda}$ は自己相互作用定数 (self-coupling constant) である。

4 数値解析

前節から、(2),(5),(6) からアインシュタイン方程式と場の方程式は下ようになる。(' は d/dr である。)

$$-\left[2 \frac{R''}{R} + \left(\frac{R'}{R} \right)^2 \right] + \frac{1}{R^2} = 8\pi G T^0_0 = 4\pi G [-(\phi'^2 + \omega^2 e^{-\nu} \phi^2) + V] \quad (8)$$

$$-\frac{R'}{R} \left(\frac{R'}{R} + \nu' \right) + \frac{1}{R^2} = 8\pi G T^1_1 = 4\pi G (\phi'^2 + \omega^2 e^{-\nu} \phi^2 + V) \quad (9)$$

$$-\frac{R''}{R} + \frac{1}{2} \frac{R'}{R} \nu' + \frac{1}{2} \nu'' + \frac{1}{4} \nu'^2 = -8\pi G T^2_2 = -4\pi G (-\phi'^2 + \omega^2 e^{-\nu} \phi^2 + V) \quad (10)$$

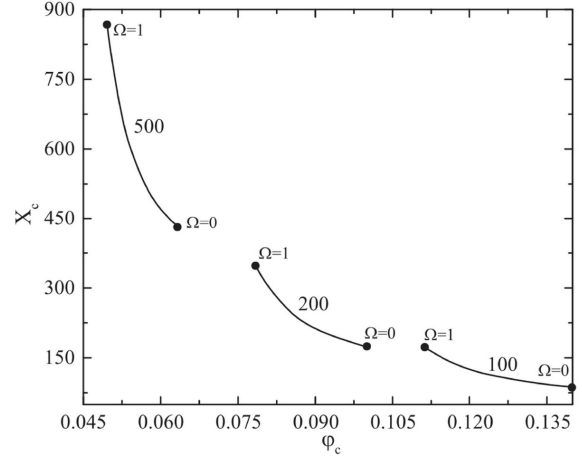


図 2: 喉の半径のグラフ $\varphi_c = \sqrt{4\pi G} \phi_c$, $X_c = mR_c$ [1]

$$\phi'' + \left(\frac{1}{2} \nu' + 2 \frac{R'}{R} \right) \phi' + \left(\omega^2 e^{-\nu} + \frac{dV}{d|\Phi|^2} \right) \phi = 0 \quad (11)$$

ここで、漸近的平坦を課しているので境界条件は $r \rightarrow \infty$ で

$$R \rightarrow r, \quad e^\nu \rightarrow 1 - \frac{2C_2}{mr}, \quad R' \rightarrow 1 - \frac{C_2}{mr} \quad (12)$$

また、スカラー場も $0 \leq \omega/m \leq 1$ の範囲で

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow C_1 \exp(-\sqrt{m^2 - \omega^2} r) (mr)^\beta \quad \text{for } 0 \leq \omega/m < 1 \\ \phi &\rightarrow C_3 \frac{\exp(-\sqrt{8|C_2|mr})}{(mr)^{3/4}} \quad \text{for } \omega/m = 1 \end{aligned} \quad (13)$$

C_1, C_2, C_3 は積分定数、 $\beta = -1 + C_2 \omega^2 / \sqrt{m^2 - \omega^2}$ である。 $r = 0$ での値は静的球対称ワームホールの条件からそれぞれ

$$\begin{aligned} R(0) &= R_c, \quad \nu(0) = \nu_c, \quad \phi(0) = \phi_c \\ R'(0) &= 0, \quad \nu'(0) = 0, \quad \phi'(0) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

とする。

図 2 では、 $\bar{\lambda}/4\pi G m^2 = 500, 200, 100$ の場合を載せている。 Ω が増大するにつれて、喉の半径 $X_c = mR_c$ も増大していることが分かる。

5 安定性解析

線形摂動を行って、前節で求めた静的球対称ワームホール解の安定性を解析する。(1) の計量関数 ν, λ, μ

に対して

$$\begin{aligned}\nu &= \nu_0(r) + \nu_p(r, x^0) \\ \mu &= \mu_p(r, x^0) \\ \lambda &= \lambda_0(r) + \lambda_p(r, x^0)\end{aligned}\quad (15)$$

と置く。また、 Φ に対しても

$$\begin{aligned}\Phi(r, x^0) &= \{\phi_0(r) + \Phi_{1p}(r, x^0) \\ &\quad + i\Phi_{2p}(r, x^0)\}e^{-i\omega x^0}\end{aligned}\quad (16)$$

と置く。添え字に 0 がついている関数は 3 節で求めた静的球対称時空であり、 p が着いているのは新たに加えた摂動項である。今回は、 $\nu_p = \lambda_p - 2\mu_p$ とゲージを固定した。よって、アインシュタイン方程式と場の方程式を整理すると $\mu_p, \lambda_p, \Phi_{1p}$ のみの方程式になる。

$$\begin{aligned}\mu_p'' + \left(\frac{1}{2}\nu_0' + \mu_0'\right)\mu_p' - \left(\mu_0'' + \mu_0'^2 + \frac{1}{2}\mu_0'\nu_0'\right)\lambda_p \\ + 2e^{-\mu_0}\mu_p + e^{-\nu_0}\ddot{\mu}_p = -8\pi G V_p\end{aligned}\quad (17)$$

$$\begin{aligned}\mu_p'' + \lambda_p'' + \left(\mu_0' - \frac{1}{2}\nu_0'\right)(3\mu_p' - \lambda_p') \\ - \left[3\mu_0'' + \nu_0'' + \frac{1}{2}(4\mu_0'^2 + \nu_0'^2 + \mu_0'\nu_0')\right]\lambda_p \\ + 2e^{-\mu_0}\mu_p + e^{-\nu_0}\ddot{\mu}_p + e^{-\nu_0}\ddot{\lambda}_p \\ = -16\pi G[-\phi_0'(2\Phi_{1p}' - \phi_0'\lambda_p) + V_p]\end{aligned}\quad (18)$$

$$\begin{aligned}\Phi_{1p}'' + \left(\frac{1}{2}\nu_0' + \mu_0'\right)\Phi_{1p}' - e^{-\nu_0}(\ddot{\Phi}_{1p} + 2\omega\dot{\Phi}_{2p}) \\ - \omega^2 e^{-\nu_0}\phi_0\nu_p + \phi_0[\omega^2 e^{-\nu_0} - m^2 + \bar{\lambda}\phi_0^2]\lambda_p \\ + (\omega^2 e^{-\nu_0} - m^2 + 3\bar{\lambda}\phi_0^2)\Phi_{1p} = 0,\end{aligned}\quad (19)$$

$$\left(\text{for } \dot{\Phi}_{2p} = \omega[\Phi_{1p} - \phi_0\left(\frac{1}{2}\lambda_p - \mu_p\right)]\right. \\ \left. - \frac{1}{2\phi_0 e^{-\nu_0}\omega} \cdot \left\{ -\phi_0'(2\Phi_{1p}' - \phi_0'\lambda_p) + V_p \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4\pi G} \left[\mu_p'' + \frac{3}{2}\mu_0'\mu_p' - \frac{1}{2}\mu_0'\lambda_p' \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \lambda_p(\mu_0'' + \frac{3}{4}\mu_0'^2 + e^{-\mu_0}\mu_p) \right] \right\} \right)$$

ここで、摂動ポテンシャルは $V_p = 2\phi_0(-m^2 + \bar{\lambda}\phi_0)\Phi_{1p}$ である。そこで、

$$y_p(r, x^0) = \bar{y}(r)e^{i\chi x^0}\quad (20)$$

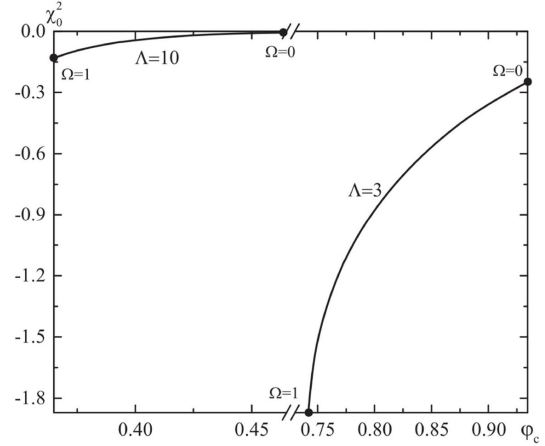


図 3: χ_0^2 のグラフ (χ_0^2 は χ^2 の最小値)[1]

上記のように摂動関数 $\mu_p, \lambda_p, \Phi_{1p}$ を仮定し、境界条件を、 $r = 0$ で

$$\begin{aligned}\lambda_p(0) = \lambda_{p0}, \mu_p(0) = \mu_{p0}, \nu_p(0) = \nu_{p0}, \\ \lambda_p'(0) = 0, \mu_p'(0) = 0, \nu_p'(0) = 0\end{aligned}\quad (21)$$

とする。よって、前節で求めた静的球対称ワームホール解の安定性解析は、摂動方程式 (17),(18),(19) の振動数 χ^2 を求める固有値問題に帰着する。もし、 χ^2 が負になってしまうと、(20) の e の肩が実数になり x^0 が増加すると指数関数的に増大してしまうため安定ではない。

図 3 では、 $\bar{\lambda}/4\pi G m^2 = 3, 10$ での結果を載せている。 χ_0^2 は χ^2 の最小値である。 $0 \leq \omega/m \leq 1$ の範囲全体で χ_0^2 が負になっており、前節で求めた静的球対称ワームホール解が不安定であることが示された。

6 結論

4 次の自己相互作用項を持つ複素ゴーストスカラー場を用いて静的球対称ワームホール解を求めることができた。しかし、摂動解析を行うと求められた解は不安定であることが分かった。特に、スカラー場の振動数 ω が増大するにつれて解の不安定性が増大してしまうことが分かった。ワームホールを構築するためには、今回とは違う方法でエキゾチック物質を導入しなければならないことが示唆される。

References

- [1] V. Dzhunushaliev, V. Folomeev, B. Kleihaus, and J. Kunz, “Wormhole solutions with a complex ghost scalar field and their instability”, *Phys. Rev. D* **97**, 024002 (2018).
- [2] M. S. Morris and K. S. Thorne, “Wormholes in space-time and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity”, *Am. J. Phys.* **56**, 395–412 (1988).

重宇 a15

エネルギー条件を破る物質を要求しない通過可能ワームホール

田中 孝輔

エネルギー条件を破る物質を要求しない通過可能ワームホール

田中 孝輔 (大坂公立大学大学院 物理学研究科)

Abstract

一様宇宙の真空解の一つに Taub-NUT 解がある。Brill は Taub-NUT 解に対応するような電場と磁場のある非真空解を導いた。Schwarzschild ブラックホールの事象の地平面の内部が Kasner 宇宙になっているように、Brill 宇宙の地平面の外側はブラックホール時空となる。

このブラックホール時空は一般に Reissner-Nordström-(Taub-)NUT (以下、RN-NUT) 解と呼ばれ、ワームホールのような構造を持つ。RN-NUT 解は RN 解と同様にパラメーターの値により、事象の地平面の数が 2 個、1 個、0 個の 3 つの場合が考えられ、地平面が 0 個の場合のものをここでは NUT ワームホールと呼ぶ。NUT ワームホールは通過可能であり、地平面がないため行き来することが可能である。

通過可能なワームホールはヌルエネルギー条件を破るような物質を要求することが知られている。RN-NUT ワームホールは通過可能なワームホールでありながらそのような物質を必要としないように見える。

しかし、RN-NUT ワームホールには極軸上に Misner 弦というヌルエネルギー条件を破るような物質が存在し、閉じた時間的曲線も存在する。

1 Introduction

この発表は G.Clément らによる論文“NUT wormholes” [1] のレビューである。

ワームホールは 2 つの漸近的な領域を結ぶ、喉のような細くなった構造のある時空である。通過可能なワームホールがあれば遠く離れた 2 地点をショートカットして移動することや、別の宇宙へ行くことが可能だとされている。しかし、通過可能なワームホールはヌルエネルギー条件を破るような物質（エキゾチック物質）を必要とすることが知られており、そのような物質は存在しないとされている。

Clément らはエキゾチック物質を必要としない通過可能ワームホールを考えるため、Brill の解 [2] に注目した。Brill の解は、一様宇宙の真空解の厳密解である Taub-NUT 解に電場と磁場を加えたものである。Schwarzschild ブラックホールは事象の地平面の内部が一様宇宙の真空解の厳密解である Kasner 宇宙になっている。この対応から Brill 解も地平面の外側はブラックホール時空だとみなすことが可能であり、このブラックホール時空を RN-NUT 解という。Clément らは、RN-NUT 解の面積半径が正になることからワームホールの喉の構造が現れると考えた。

ここでは Clément らの論文に沿って議論を進め、RN-NUT 解がワームホールのような構造を持つことを説明し、またそれが通過可能であることも示す。さ

らに、RN-NUT 解には極軸上に Misner 弦という特異点が存在し、この上ではやはりヌルエネルギー条件が破れてしまうということも示し、Clément らの主張に問題があることを提示する。

2 RN-NUT 解

Brill は 1964 年に

$$ds^2 = -F^{-1} dt'^2 + (2n)^2 F(d\psi + \cos\theta d\varphi)^2 + (t'^2 + n^2) d\Omega^2 \quad (1)$$

$$F = \frac{mt' + n^2 - t'^2 - \frac{1}{4}\phi^2}{t'^2 + n^2} \quad (2)$$

$$\phi^2 = (t'^2 + n^2)^2 (E^2 + H^2) \quad (3)$$

という解を発見した。[2] これは真空一様宇宙の厳密解である Taub-NUT 解に電場と磁場を追加した非真空解である。ここで ψ は 4π の周期性を持つ座標である。

この解は $t' = r$, $2n\psi = t$, $F = -f$ と書き換えることで

$$ds^2 = -f(dt - 2n \cos\theta d\varphi)^2 + f^{-1} dr^2 + (r^2 + n^2) d\Omega^2 \quad (4)$$

$$f = \frac{(r-m)^2 + b}{r^2 + n^2} \quad (5)$$

$$b = e^2 - m^2 - n^2, \quad e^2 = p^2 + q^2 \quad (6)$$

となる。Clément らの表記と少し異なるが今回の議論には関係のない箇所であるので、あまり気にしないでいただきたい。この解は Brill 解の $F = -f < 0$ 、つまり事象の地平面の外を考えており、Brill 解で時間座標であった t が空間座標となり、空間座標であった ψ が時間座標を担っている。このようなブラックホール解を RN-NUT 解と呼び、この解を特徴づけるパラメーターは質量 m 、電荷 q 、磁荷 p 、そして NUT チャージ n である。

ここで、もともと ψ は周期性を持っていた。時間座標 t が周期性を持っていたら、時空全体に閉じた時間的曲線 (CTC) が存在してしまい、これは物理的に許されない。そのため、少し無理やりのようであるが、 t のもつ $8n\pi$ の周期性をほどこき、 t を $-\infty$ から ∞ までの値をとる座標とする。実はこれが原因で後述の Misner 弦の問題が発生する。

RN-NUT 解は $\theta = \pi/2$ で $t = \text{一定}$ 、 $r = \text{一定}$ のとき、

$$ds^2 = (r^2 + n^2)d\varphi \quad (7)$$

となるため、円周半径が $\sqrt{r^2 + n^2}$ となる。つまり、この円周半径は $r = 0$ で 0 にならず、 n となり、ワームホールの喉に似た構造が見られる。また、RN-NUT 解は $f = 0$ が事象の地平面になるが、 $b > 0$ の場合は地平面がない。そのため $b > 0$ であればこのワームホールのようなものがもし通過可能であれば、行き来することが可能になる。

Clément らはここでの議論で、 $t = \text{一定}$ 、 $r = \text{一定}$ の 2 次元球面の面積半径が 0 にならないという旨の記述をしている。しかしこれは間違いである。 $t = \text{一定}$ 、 $r = \text{一定}$ の 2 次元曲面の線素は

$$ds^2 = (r^2 + n^2)d\theta^2 + \{r^2 + n^2(1 - 4f \cos^2 \theta)\} d\varphi^2 \quad (8)$$

となる。これは球面ではない。球面ではないため面積半径も定義することはできず、RN-NUT 解はワームホールと普通言ったときに考えられるようなものとは異なる時空になっている。

3 通過可能性

前のセクションで RN-NUT 解がワームホールではないがワームホールのような構造を持つ時空であることを示した。ここからは $b > 0$ の RN-NUT 解を NUT ワームホールと呼び、議論を進める。このセクションでは NUT ワームホールの通過可能性を確かめる。

Clément らの論文の計量に含まれている C というパラメーターを 0 とした場合、RN-NUT 解は Taub-NUT 解と同じキリングベクトルを持つ。 C が値を持つかどうかによって特に結果は変わらないため、このまま $C = 0$ で議論を続ける。

$$\kappa_{(t)} = \partial_t \quad (9)$$

$$\kappa_{(x)} = -\frac{2n \cos \varphi}{\sin \theta} \partial_t - \sin \varphi \partial_\theta - \cot \theta \cos \varphi \partial_\varphi \quad (10)$$

$$\kappa_{(y)} = -\frac{2n \sin \varphi}{\sin \theta} \partial_t + \cos \varphi \partial_\theta - \cot \theta \sin \varphi \partial_\varphi \quad (11)$$

$$\kappa_{(z)} = \partial_\varphi \quad (12)$$

これらと $u^\mu = dx^\mu/d\tau = \dot{x}^\mu$ の縮約は保存量となり、

$$E = -g_{\mu\nu} \kappa_{(t)}^\mu u^\nu \geq 0 \quad (13)$$

$$J_i = -g_{\mu\nu} \kappa_{(i)}^\mu u^\nu \quad (14)$$

としてそれぞれエネルギーと角運動量にあたる。

ここで、 $\theta = \pi/2$ 上の軌道角運動量は

$$l = (r^2 + n^2) \dot{\varphi} \quad (15)$$

と定義され、 $l = J_z - 2nE$ となるため、 l も保存量である。

$\theta = \pi/2$ の測地線方程式は

$$f(r)(\dot{t} - 2nC\dot{\varphi}) = E \quad (16)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{r^2 + n^2} \quad (17)$$

$$f(r)^{-1}(\dot{r}^2 - E^2) + (r^2 + n^2)\dot{\varphi}^2 = \epsilon \quad (18)$$

と書ける。ここで、 E, l は (17) 式を (18) 式に代入すると

$$f(r)^{-1}(\dot{r}^2 - E^2) + \frac{l^2}{r^2 + n^2} = \epsilon \quad (19)$$

となり、これは

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + U(r) = E^2 + \epsilon \quad (20)$$

$$U(r) = \epsilon \frac{2mr + n^2 - m^2 - b^2}{r^2 + n^2} + \frac{l^2 \left[(r - m)^2 + b^2 \right]}{(r^2 + n^2)^2} \quad (21)$$

と書き換えられる。つまり、 $\theta = \pi/2$ の動径方向の運動は有効ポテンシャルの問題に帰着する。そして、この有効ポテンシャルはどんな r でも発散することはない。

つまり、NUT ワームホールはどんなパラメーターであっても、その有効ポテンシャルよりも E^2 が大きくなるようなエネルギーを与えれば必ず通過可能となる。

4 Misner 弦と NEC

以上により、NUT ワームホールが通過可能であることを確認した。NUT ワームホールは電磁場のみにより支えられており、エキゾチック物質は考えていなかった。そのため、エキゾチック物質のない通過可能ワームホールが考えられたようだが、実はそうはなっていない。このセクションでは、[3] で行われている議論を基に、RN-NUT 解には Misner 弦という特異点があり、その上では NEC が破れていることを示す。

RN-NUT 解の NEC の式は

$$R_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = \frac{2e^2}{n^2 + r^2} \left((k^\theta)^2 + \sin^2 \theta (k^\varphi)^2 \right) \quad (22)$$

となる。これは一見 NEC を満たしているように見える。しかし、ここで用いている球座標は $\sin \theta = 0$ をカバーできていない。そのため、新しい座標を用いて $\sin \theta = 0$ 上の NEC を改めて考える必要がある。

そこで、 $u \equiv \sin \theta \simeq 0$ として、 $z = r$, $x = u \cos \varphi$, $y = u \sin \varphi$ という新しい座標を導入する。すると計量は

$$ds^2 = -f[dt \mp 2n\{-\partial_y(\ln u)dx + \partial_x(\ln u)dy\}]^2 + f^{-1}dz^2 + (z^2 + n^2)(x^2 + y^2) \quad (23)$$

となる。これにより、[4] を参考にして曲率を求めると

$$\tau = \pm \frac{4\pi n f}{z^2 + n^2} \delta(x)\delta(y) \quad (24)$$

$$h = dz^2 + f(z^2 + n^2)(dx^2 + dy^2) \quad (25)$$

として、

$$R^z_t = 0 \quad (26)$$

$$R^x_t = \frac{\tau_{,y}}{2(z^2 + n^2)} \quad (27)$$

$$R^y_t = -\frac{\tau_{,x}}{2(z^2 + n^2)} \quad (28)$$

$$R_{tt} = (R_{tt})_{\text{reg}} + \frac{1}{2}(\tau)^2 \quad (29)$$

$$R^{ij} = (R^{ij})_{\text{reg}} - \frac{1}{2}h^{ij}(\tau)^2 \quad (30)$$

となる。 R_{tt}, R^{ij} の $(R_{tt})_{\text{reg}}, (R^{ij})_{\text{reg}}$ はデルタ関数の寄与のない項であり、つまり (22) 式のリッチテンソルの成分に一致する部分である。曲率にデルタ関数が現れているため、 $\sin \theta = 0$ にひも状の特異点が伸びていることがわかる。これを、Misner 弦という。

さらに、この上での NEC を確認する。

$$k^t = \frac{\lambda(r, \theta)}{f} \sin \theta \quad (31)$$

$$k^r = \pm \lambda(r, \theta) \sin \theta \quad (32)$$

$$k^\theta = 0 \quad (33)$$

$$k^\varphi = \lambda(r, \theta) \frac{4n \cos \theta \sin \theta}{4n^2 f \cos^2 \theta - (r^2 + n^2) \sin^2 \theta} \quad (34)$$

のように適切にヌルベクトルを選ぶ。このヌルベクトルでは $\sin \theta = 0$ で (22) 式は 0 となる。さらに、

$$(R_{tt})_{\text{str}} (k^t)^2 = 0 \quad (35)$$

であるから、

$$\begin{aligned} & \int dx dy R_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \\ &= \int dx dy \{ (R^{ij})_{\text{str}} k_i k_j + R^i_t k_i k^t \} \\ &= - \left[8\pi n^2 (C \pm 1)^2 f(r)^2 \lambda(r, 0)^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \int dx dy \{ (k_r)^2 \right. \\ & \quad \left. + f(r^2 + n^2) ((k_x)^2 + (k_y)^2) \} (\tau_1)^2 \right] \\ & < 0 \quad (36) \end{aligned}$$

となる。

以上より、 $\sin \theta = 0$ の Misner 弦上では NEC が破れている。つまり、エキゾチック物質を必要としない通過可能ワームホールを考えていたはずであるのに、結果としてエキゾチック物質を取り除くことはできていなかったのである。

5 Conclusion

Clément らは、Brill の解に注目し、NUT チャージを含む RN-NUT 解が Misner 弦という特異点を持つものの電磁場のみに支えられる通過可能ワームホールになると考えた。

しかし、Misner 弦はエキゾチック物質そのものであり、RN-NUT 解でもエキゾチック物質を取り除くことはできなかった。またこの解は通過可能なワームホールのような特徴を持つ時空ではあるが、ワームホールと通常呼ばれるものとは異なるものであった。

さらに、 $\theta \neq \pi/2$ で $g_{\varphi\varphi}$ は負を取り得る。つまり、周期性を持つ φ が時間座標となる領域が存在し、RN-NUT 解には CTC が存在することになってしまう。Clément らは、CTC については論文内で議論しており、CTC が測地線でなければ問題ないとしているが、これは疑わしい主張である。

しかしながら、エキゾチック物質を弦に集めてしまうというアイデア自体は面白いものではあるため、今後は似たようなアプローチで CTC のないワームホールが考えることができると良いかもしれない。

References

- [1] G. Clément, D. Gal'tsov, and M. Guenouche, “NUT wormholes”, *Physical Review D* **93**, 024048 (2016).
- [2] D. R. Brill, “Electromagnetic Fields in a Homogeneous, Nonisotropic Universe”, *Physical Review* **133**, B845–B848 (1964).
- [3] G. Clément and D. Gal'tsov, “Rotating traversable wormholes in Einstein-Maxwell theory”, *Physics Letters B* **838**, 137677 (2023).
- [4] D. V. Gal'tsov, A. A. Garcia, and O. V. Kechkin, “Symmetries of the stationary Einstein–Maxwell–dilaton theory”, *Classical and Quantum Gravity* **12**, 2887–2903 (1995).

[indexへ戻る](#)

重宇 a16

シフト対称GLPV理論における hairy な静的球対称ブ
ラックホール解

西村 俊太

シフト対称 GLPV 理論における hairy な静的球対称ブラックホール解

西村 俊太 (東京理科大学大学院 理学研究科)

Abstract

スカラーテンソル理論は、一般相対論 (GR) において時空を記述する計量場に加えて、スカラー自由度を加えた理論である。この枠組みにおいて、エネルギーが下に有界になるように、運動方程式が 3 階微分以上の高階微分を含まない最も一般的な理論として Horndeski 理論がある。この理論を更に拡張した Gleyzes-Langlois-Piazza-Vernizzi 理論 (GLPV 理論) において、スカラー場が線形な時間依存性かつシフト対称性を持つ場合、静的球対称時空において、GR で一般的に成立するブラックホール (BH) 無毛定理を破る BH 厳密解が見つかった。本発表では、文献 [1] をレビューし、[1] において見つかった厳密解の解析および解の性質について議論を行う。また、本集録を執筆する上で、同研究室卒業の高橋氏の修士論文 [2] を参考にさせていただきました。紙面の都合上、こちらで謝辞を述べたいと思います。ありがとうございました。

1 Introduction

宇宙の加速膨張を説明する方法の一つとして、GR を拡張した修正重力理論が挙げられる。スカラーテンソル理論は修正重力理論の一つであり、GR における計量場にスカラー場を加えたものである。

一般的に、運動方程式が 3 階微分以上の高階微分を含む場合、余分な自由度が生まれることで、エネルギーが下に有界でなくなる。この余分な自由度を Ostrogradsky ghost と呼ぶ。この場合、系に安定な状態が存在せず、物理的ではなくなる。この問題を回避するように、運動方程式が 3 階微分以上の高階微分を含まないよう構成された最も一般的な理論が Horndeski 理論 [3] である。この理論において、BH 無毛定理 [4] を破る解が見つかった。ここで BH 無毛定理とは、「物質がなく、GR の枠組みでの重力と電磁気力のみを考慮した時、漸近的平坦かつ定常な BH 解は質量・電荷・角運動量の 3 つの物理量のみで記述される」という定理である。

一方で、3 階微分以上の高階微分を含んでいても、Ostrogradsky ghost が生まれないように Horndeski 理論を拡張した GLPV 理論 [5] があり、この理論においても、BH 無毛定理を破る解が見つかった。近年、GLPV 理論において、スカラー場がシフト対称性かつ線形な時間依存性を持つ場合で、新たな BH 厳密解が見つかった [1]。次節以降では、必要な知識の補完と、この厳密解の解析と議論を行う。

2 Shift symmetric GLPV theories

GLPV 理論の作用積分は、以下のように与えられる。

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [\mathcal{L}_H + \mathcal{L}_4^{\text{BH}} + \mathcal{L}_5^{\text{BH}}]. \quad (2.1)$$

ここで、 \mathcal{L}_H は Horndeski 理論のラグランジアンであり、 $\mathcal{L}_4^{\text{BH}}$ 、 $\mathcal{L}_5^{\text{BH}}$ は GLPV 理論で追加される項である。 \mathcal{L}_H は以下のように定義される：

$$\mathcal{L}_H = \sum_{i=2}^5 \mathcal{L}_i. \quad (2.2)$$

各 \mathcal{L}_i は任意関数 $G_i(\phi, X)$ によってそれぞれ次のように定義される：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= G_2(\phi, X), \\ \mathcal{L}_3 &= -G_3(\phi, X)\square\phi, \\ \mathcal{L}_4 &= G_4(\phi, X)R \\ &\quad + G_{4X}(\phi, X) [(\square\phi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)(\nabla^\mu\nabla^\nu\phi)], \\ \mathcal{L}_5 &= G_5(\phi, X)G_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu\phi - \frac{1}{6}G_{5X}(\phi, X) [(\square\phi)^3 \\ &\quad - 3(\square\phi)(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)(\nabla^\mu\nabla^\nu\phi) \\ &\quad + 2(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)(\nabla^\lambda\nabla^\mu\phi)(\nabla_\lambda\nabla^\nu\phi)]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

ここで、 ϕ はスカラー場、 $X = -1/2\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi$ であり、 R はリッチスカラー、 $G_{\mu\nu}$ はアインシュタイン

テンソルである。また、添字 X は X による微分を表しており、 $\mathcal{L}_4^{\text{BH}}, \mathcal{L}_5^{\text{BH}}$ は

$$\mathcal{L}_4^{\text{BH}} = F_4(\phi, X) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \times \nabla_\mu \phi \nabla_{\mu'} \phi \nabla_\nu \phi \nabla_{\nu'} \phi \nabla_\rho \phi \nabla_{\rho'} \phi, \quad (2.4)$$

$$\mathcal{L}_5^{\text{BH}} = F_5(\phi, X) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \times \nabla_\mu \phi \nabla_{\mu'} \phi \nabla_\nu \phi \nabla_{\nu'} \phi \nabla_\rho \phi \nabla_{\rho'} \phi \nabla_\sigma \phi \nabla_{\sigma'} \phi, \quad (2.5)$$

と定義される。ただし、 $F_i(\phi, X)$ は任意関数であり、 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ は完全反対称テンソルである。

ここで、 ϕ が定数シフトしても変化しないシフト対称性 $\phi \rightarrow \phi + \text{const.}$ および反射対称性 $\phi \rightarrow -\phi$ を満たすような GLPV 理論の枠組みにおける作用を考えると

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_4^{\text{BH}}]. \quad (2.6)$$

と書ける。ただし

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= G_2(X), \\ \mathcal{L}_4 &= G_4(X)R \\ &\quad + G_{4X}(X) [(\Box\phi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)(\nabla^\mu \nabla^\nu \phi)], \\ \mathcal{L}_4^{\text{BH}} &= F_4(X) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \\ &\quad \times \nabla_\mu \phi \nabla_{\mu'} \phi \nabla_\nu \phi \nabla_{\nu'} \phi \nabla_\rho \phi \nabla_{\rho'} \phi, \end{aligned} \quad (2.7)$$

であり、シフト対称性から、それぞれの任意関数は ϕ に依らないことに注意する。

3 Setup

ここからは、作用 (2.6) を元に議論を進めていく。

文献 [1] では、静的球対称時空を考えている。すなわち線素として以下の形を仮定する。

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)^{-1}dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (3.1)$$

また、 ϕ に対して線形な時間依存性

$$\phi = qt + \psi(r), \quad (3.2)$$

を考える。ここで q は定数である。上式のように、 ϕ に時間依存性を持たせてしまうと、先ほど仮定した静的な条件を破ってしまうように思われる。しかしながら、式 (2.7) を見ると、 ϕ はすべて微分される形で現れており、式 (3.2) が静的な条件を破ることはな

い。式 (2.6) に対して計量で変分をとることで、背景方程式を得ることができる (A.1-A.4)。この背景方程式に対して任意関数を具体的に与えることで BH 解を求めることができる。また、次節以降の議論では、議論の見通しをよくするために、 $h(r) = f(r)$ という一様解仮定をおく。

4 Asymptotically flat black hole

任意関数に対して、以下のサブクラスを考える。

$$G_2 = -\frac{8\eta}{3\lambda^2}X^2, \quad G_4 = 1 - \frac{4\eta}{3}X^2, \quad F_4 = \eta. \quad (4.1)$$

ここで、 $\lambda(> 0)$ 、 η は結合定数である。背景方程式 (A.1)-(A.4) より、この時、 $\phi(t, r)$ および $f(r)$ は次のように求められる。

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \eta q^4 \left(\frac{\pi/2 - \arctan(r/\lambda)}{r/\lambda} \frac{1}{1 + (r/\lambda)^2} \right), \quad (4.2)$$

$$\phi(t, r) = qt + \psi(r),$$

$$[\psi'(r)]^2 = \frac{q^2}{f(r)^2} \left[1 - \frac{f(r)}{1 + (r/\lambda)^2} \right]. \quad (4.3)$$

ただし、 M 、 q は独立な積分定数であり、ある量 A に対して A' は r による微分を表している。式 (4.2) は、 $r \rightarrow \infty$ で $f(r) \rightarrow 1$ となることから、漸近的平坦な hairy BH 解と言える。解 (4.2) において、 η と q は必ず ηq^4 の形で現れている。ここから、 $\eta = -1, 1$ とし、 q^4 と λ の値を変化させることで、全てのパラメータを変化させることになる。以上を踏まえ式 (4.2) のグラフをプロットしたものが図 1, 2 である

ここで、 $\eta q^4 = 0$ は GR における Schwarzschild 解

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r}, \quad (4.4)$$

に帰着し、 $r = 2M$ において horizon ($f(r) = 0$ とする点) を持つことに対応している。図 1 を見ると、scalar hair q の変化によって horizon の位置が変化していることがわかる。すなわち、 q は BH の大きさに影響を与える性質を持っている。 $\eta q^4 > 0$ の時は scalar hair の値によって解の性質が大きく異なる。 $\eta q^4 = 2$ の場合、horizon は 1 つであるが、 $\eta q^4 = 3.7$ の場合は 3 つであり、 $\eta q^4 = 4.5$ では 2 つ形成する

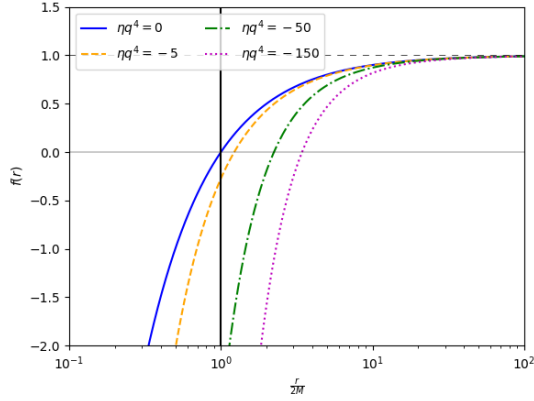


図 1: 距離 r に対する計量成分 $f(r)$ のグラフ. ($\eta q^4 = -150, -50, -5, 0, M/\lambda > \pi\eta q^4/4, M/\lambda = 3.$)

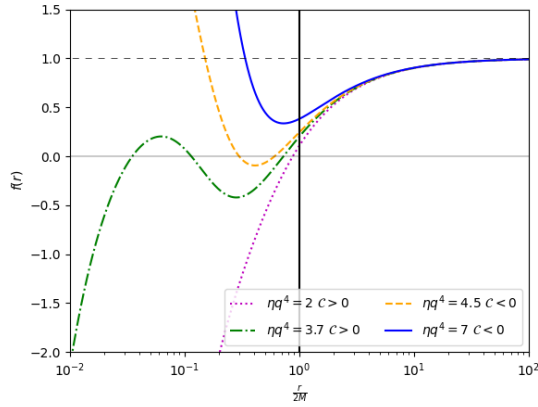


図 2: 距離 r に対する計量成分 $f(r)$ のグラフ. ($\eta q^4 = -150, -50, -5, 0$. $M/\lambda > \pi\eta q^4/4, M/\lambda = 3, C \equiv M/\lambda - \pi\eta q^4/4.$)

ことがわかる. また, $\eta q^4 = 7$ の場合は horizon を持たない裸の特異点時空となることがわかる. また, $r \rightarrow \infty$ で $f(r)$ を展開すると

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + 2\lambda^2 \frac{\eta q^4}{r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right), \quad (4.5)$$

となり, $2\lambda^2 \eta q^4 \rightarrow Q^2$ とすれば, scalar hair が, GR での Reissner-Nordstrom 解

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}, \quad (4.6)$$

における静電荷のような振る舞いを見せることがわかる. さらに, $r \rightarrow 0$ では

$$f(r) = 1 - \frac{2M - \pi\eta q^4 \lambda/2}{r} - \frac{2\eta q^4}{3\lambda^2} r^2 + \mathcal{O}(r^4), \quad (4.7)$$

と展開できる. 式 (4.7) は $M/\lambda = \pi\eta q^4/4$ の時に

$$f(r) = 1 - \frac{2\eta q^4}{3\lambda^2} r^2 + \mathcal{O}(r^4), \quad (4.8)$$

となる. この式 (4.8) において, 以下で表される Kretschmann scalar

$$\mathcal{K} = R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} \quad (4.9)$$

を計算すると

$$\mathcal{K} = \frac{32\eta^2 q^8}{3\lambda^4}, \quad (4.10)$$

となり, 原点で特異点が存在しない regular BH が存在することがわかる.

5 Black hole in a theory with canonical kinetic term

次に, 以下のようなサブクラスを考える.

$$G_2 = \frac{2\eta}{\lambda^2} X, \quad G_4 = 1 + \eta X, \quad F_4 = -\frac{\eta}{4X}. \quad (5.1)$$

前節と同様に, 背景方程式から $f(r), \phi(t, r)$ を求めると

$$f(r) = 1 + \eta q^2 - \frac{2M}{r} + \eta q^2 \left(\frac{\pi/2 - \arctan(r/\lambda)}{r/\lambda} \right), \quad (5.2)$$

$$\phi(t, r) = qt + \psi(r),$$

$$[\psi'(r)]^2 = \frac{q^2}{f(r)^2} \left[1 - \frac{f(r)}{1 + (r/\lambda)^2} \right], \quad (5.3)$$

となる. スカラー場は前節と同じ形である. 同様に, $f(r)$ をプロットすると, 以下のようになる.

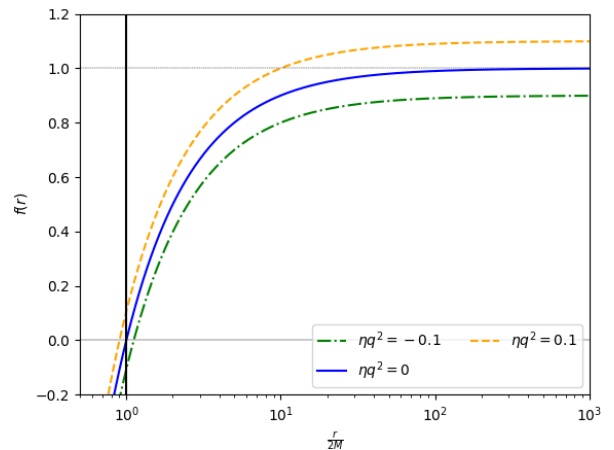


図 3: 距離 r に対する計量成分 $f(r)$ のグラフ. ($\eta q^4 = -0.1, 0, 0.1, M/\lambda > \pi\eta q^4/4, M/\lambda = 2.$)

前節のモデルと同様に, この解も $\eta q^2 = 0$ の時に GR に帰着する. 図 3 から, ηq^2 が負の方向に大きく

なると, horizon の r 座標が大きくなり, 正の方向に大きくなると逆に小さくなることわかる. 他にも, $r \rightarrow \infty$ で $f(r)$ を展開すると

$$f(r) = 1 + \eta q^2 - \frac{2M}{r} + \eta q^2 \frac{\lambda^2}{r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right), \quad (5.4)$$

となり, q が Reissner-Nordstrom 型の項に現れる. この無限遠での展開を見れば, $\eta q^2 > -1$ の時, horizon を持つことがわかる. また, 式 (5.4) に適切な座標変換を施すと, $r \rightarrow \infty$ において, 線素は

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 (1 + \eta q^2) d\Omega^2, \quad (5.5)$$

となる. この式 (5.5) の右辺第 3 項の立体角に対応する部分を見ると, 球の表面積が $4\pi r^2$ に一致せず, 局所的に漸近的平坦な解となることがわかる. また, $r \rightarrow 0$ で展開を行うと

$$f(r) = 1 - \frac{2M - \pi \eta q^2 \lambda / 2}{r} + \frac{\eta q^2 r^2}{3\lambda^2} + \mathcal{O}(r^4). \quad (5.6)$$

A Field equation

以下に背景方程式の明示的な形を示す. 3 つの未知量 $f(r)$, $h(r)$, $\psi(r)$ に対応して E_{tt} , E_{rr} , E_{tr} が導出される. また, 式を簡単にするため以下の量

$$Z(X) = 2XG_{4X} - G_4 + 4X^2F_4, \quad (A.1)$$

を定義する. これを用いると背景方程式は以下のように表される.

$$E_{tr} = -\frac{2hf'}{f}rZ_X + r^2G_{2X} + 2G_{4X} - 2hZ_X + \frac{q^2h}{Xf}(Z_X - G_{4X}) + \frac{2q^2h}{f}rF_4\left(\frac{h'}{h} - \frac{f'}{f}\right), \quad (A.2)$$

$$E_{rr} = -\frac{2hf'}{f}rZ - r^2G_2 - 2G_4 - 2hZ + \frac{q^2h}{Xf}(Z + G_4) - \frac{4q^2h}{f}rF_4X' - h\psi'^2E_{tr}, \quad (A.3)$$

$$E_{tt} = 4rX'Z_X + 2\left(\frac{h'}{h} - \frac{f'}{f}\right)rZ - \frac{E_{rr}}{h} - \left(\psi'^2 + \frac{q^2}{hf}\right)E_{tr}. \quad (A.4)$$

Reference

- [1] A. Bakopoulos, C. Charmousis, P. Kanti, N. Lecoer and T. Nakas. (2023) [arXiv:2310.11919 [gr-qc]].
- [2] 高橋優生. 「シフト対称 GLPV 理論における静的球対称ブラックホール解の解析」. 修士論文 (2024).
- [3] G. W. Horndeski, Int. J. Theor. Phys. 10, 363 (1974).
- [4] S.W.Hawking, Comm.Mat.Phys. 25, 152 (1972).
- [5] J. Gleyzes, D. Langlois, F. Piazza and F. Vernizzi, Phys. Rev. Lett. 114, no.21, 211101 (2015) [arXiv:1404.6495 [hep-th]].

となり, $M/\lambda = \pi \eta q^2 / 4$ の時に, 前節と同様に, Kretschmann scalar を計算すると

$$\mathcal{K} = \frac{8\eta^2 q^4}{3\lambda^4}, \quad (5.7)$$

となり, 原点で特異点が存在しない regular BH が存在する.

6 Future works

ここでは, 文献 [1] で発見された hairy BH 解について取り扱った. それぞれの解についての性質は, 前節までで述べた他にも詳細な議論が [1] で行われている.

今後の研究として, [1] で発見された hairy BH 解の安定性解析を行う予定である. これにより, これらの解についてより発展した研究が行われるかの指標を得られることが期待される.

重宇 a17

繰り込み可能な $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$ ゲージボソンとマヨロンによるハッブルテンションの解決

佐藤 龍政

GeV 温度領域でのマヨロンの温度発展

佐藤 龍政 (横浜国立大学大学院 理工学府)

Abstract

本研究では GeV 温度領域において 1MeV 近辺の質量を持つマヨロンの温度がどのように時間発展するかを調べた。マヨロンとはレプトン数を電荷とする $U(1)_L$ 対称性が自発的に破れることにより生成される南部ゴールドストーンボソンである。このマヨロンとニュートリノとの結合が非常に小さい場合、GeV 温度領域では相互作用はほとんど起きず、マヨロンは逆崩壊により freeze-in 的に生成されると考えられている。しかしながら、散乱過程を通じてニュートリノと活発に相互作用する可能性があるため、この前提が妥当であるかを議論する。

1 Introduction

Hubble 定数 H_0 は、現在の宇宙の膨張率を示す重要な物理量だ。近年、Hubble 定数の測定値が観測方法によって大きく異なることが問題視されている。具体的には、近傍宇宙の観測による直接測定と、遠方宇宙の観測から Λ CDM モデルに基づいて推定される間接測定の間大きな差異が報告されている。この食い違いは「Hubble tension」と呼ばれている。例えば、Planck 衛星による宇宙背景放射 (CMB) の観測データから推定された Hubble 定数は、SH0ES プロジェクトによる近傍宇宙の観測データから得られた値と大きく異なる。

この Hubble tension は、宇宙の進化を記述する Λ CDM モデルに何らかの修正が必要であることを示唆する。従来の研究では、ニュートリノの有効数 N_{eff} を標準模型の予測値よりも大きくすることで、この問題を解決できる可能性が示されている。また、MeV 程度の質量を持つ新たなゲージ粒子 Z' を導入する $L_\mu - L_\tau$ モデルを用いることで、Hubble tension とミューオンの異常磁気モーメント問題 ($g_\mu - 2$ anomaly) を同時に解決できることが提案されている。しかし、従来の $L_\mu - L_\tau$ モデルでは、 Z' の質量を手で加えているため、理論のゲージ対称性が破れており、低エネルギースケールでのみ有効な理論に過ぎない。

そこで本論文では、より理論的に厳密な繰り込み可能な $L_\mu - L_\tau$ モデルを提案し、このモデルが Hubble tension と $g_\mu - 2$ anomaly を同時に解決できるかどうかを探索する。さらに、このモデルではニュートリノの質量起源も説明でき、新たな軽い粒子として Majoron と Z' を含む。これらの新粒子がどのように

宇宙の初期条件や観測データに影響を与えるかを検討する。

2 標準模型における N_{eff}

標準模型 (SM) におけるニュートリノ有効数 (N_{eff}) の定義は以下である。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho_R}{\rho_\gamma}\right)_0 &= 1 + \left(\frac{\rho_\nu/3}{\rho_\gamma}\right)_{0|\text{SM}} (3 + \Delta N_\nu) \\ &= 1 + \frac{7}{8} \left(\frac{T_\nu}{T_\gamma}\right)_{0|\text{SM}}^4 (3 + \Delta N_\nu) \\ &\equiv 1 + \frac{7}{8} \left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} N_{\text{eff}} \end{aligned}$$

初期宇宙における粒子の熱的ダイナミクスを理解するためには、平衡状態の概念が重要である。宇宙の膨張とともに、粒子種間の反応率が宇宙の膨張率よりも十分早く進行する場合、その系は平衡状態であるとみなされます。具体的には、反応率 Γ が Hubble rate (H) よりも大きい場合、 $\Gamma \gg H$ が成立します。この平衡状態は、運動学的平衡、化学平衡、熱平衡の 3 つに分類されます。

N_{eff} は、ニュートリノのエネルギー密度が宇宙の放射成分にどの程度寄与するかを示すパラメータだ。初期宇宙において、ニュートリノは光子の熱浴から脱結合し、その後、電子と陽電子が対消滅することで光子の温度がニュートリノの温度よりも高くなる。この過程を通じて、最終的な N_{eff} の値が決定される。Boltzmann 方程式を用いて、ニュートリノと光子の温度の時間発展を追跡し、数値計算により N_{eff} を求める。

3 $L_\mu - L_\tau$ 模型における Neff

$L_\mu - L_\tau$ モデルは、標準模型のゲージ対称性を $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ で拡張したもので、新たなゲージ粒子 Z' を導入する。このモデルは、ミューオン数 L_μ とタウレプトン数 L_τ の差 ($L_\mu - L_\tau$) を保存する称性を持ち、ミューオンの異常磁気モーメント問題 ($g_\mu - 2$ anomaly) を解決する模型として注目されている。

$L_\mu - L_\tau$ 模型の Lagrangian は、標準模型の Lagrangian に対して、 Z' 場とそのカレントとの相互作用項を追加することで得られる。

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SM} - \frac{1}{4} Z'^{\rho\sigma} Z'_{\rho\sigma} + g_{\mu-\tau} Z'_\rho J_{\mu-\tau}^\rho$$

$$J_{\mu-\tau}^\rho = \bar{\mu}\gamma^\rho\mu + \bar{\nu}_\mu\gamma^\rho P_L\nu_\mu - \bar{\tau}\gamma^\rho\tau - \bar{\nu}_\tau\gamma^\rho P_L\nu_\tau$$

このモデルでは、 Z' 粒子に質量を与えるために質量項を手で加えるが、これにより理論のゲージ対称性が破れる。そのため、低エネルギースケールにおける有効理論としてのみ機能する。

先行研究に基づき、 $L_\mu - L_\tau$ 模型における Neff の計算を行います。具体的には、光子の温度とニュートリノの温度の時間発展方程式を導出し、数値的に解くことで、モデルの物理的な有効性を検証する。結果として、 $L_\mu - L_\tau$ 模型における Neff の値は、標準模型に基づく結果と比較してどのように変化するかを議論する。

4 Majoron ϕ を伴う $L_\mu - L_\tau$ 模型における Neff

従来の $L_\mu - L_\tau$ 模型では、 Z' 粒子の質量を手で加えることで理論のゲージ対称性が破れてた。そのため、より理論的に厳密な「繰りこみ可能な $L_\mu - L_\tau$ モデル」を提案し、このモデルに基づく Neff の計算を行います。このモデルでは、ニュートリノの質量起源を説明し、新たな軽い粒子として Majoron と Z' を導入します。

具体的には、Majoron と Z' の相互作用を考慮した Boltzmann 方程式を用いて、初期宇宙における温度の時間発展を追う。さらに、実験データに基づく Neff への制限から、Majoron と Z' のパラメータ空間に対する制約を議論する。

数値計算の結果、繰りこみ可能な $L_\mu - L_\tau$ モデルにおける Neff の値が標準模型とどのように異なる

かを示し、このモデルが Hubble tension と $g_\mu - 2$ anomaly を同時に解決できる可能性を検討する。

Reference

Takeshi Araki, Kento Asai, Kei Honda, Ryuta Kasuya, Joe Sato, Takashi Shimomura, Masaki J.S. Yang 2021, arXiv:2103.07167v2

Kento Asai, Tomoya Asano, Joe Sato, and Masaki J. S. Yang 2023, arXiv:2309.01162v1

[indexへ戻る](#)

重宇 a18

重力レンズ効果の実体化：光学レンズ設計と3Dプリンターの活用

西原 翼

重力レンズの実体化: 光学レンズ設計と 3D プリンターの活用

西原 翼 (甲南大学大学院 自然研究科)

Abstract

重力レンズ効果とは質量を持った天体の近くを光が通ると、光には質量がないにも関わらずその軌道が曲げられるという現象である。重力レンズ効果により湾曲される光線の曲率は理論的に計算されており、この計算はこれまでの観測の結果によりその整合性が確認されている。しかし、重力レンズ効果を含めた宇宙の現象は視覚的、感覚的に理解しにくい。そこで、視覚的、感覚的に理解しやすくするために実物の教具があればより理解しやすく天文教育に役立つだろう。本稿では重力レンズ効果による光の折れ曲がり再現する光学レンズを設計する。一般相対性理論により導かれた重力レンズ効果による光の軌道を表す方程式を導出し、重力レンズの光の折れ曲がり再現する光学レンズの設計法について横尾他 (1998) の理論 [2] をベースに議論する。

1 Introduction

アルベルト・アインシュタインが 1905 年の特殊相対性理論に続いて、それを発展させた一般相対性理論を 1915 年に発表した。一般相対性理論の予言の一部に重力レンズ効果というものがある。重力レンズ効果とは質量を持った天体の近くを光が通ると、光には質量がないにも関わらずその軌道が曲げられるという現象である。これは天体付近の時空が曲げられるからであり、この効果により、観測者と光源の間の天体がある種のレンズの役割を果たすことから、この現象は重力レンズ効果と名付けられた。

しかしながら、天文教育は未だ発展途上にあり、重力レンズ効果は天文学を専攻する者にとっては広く知れ渡っているが、一般の方々には認知度は低い。この理由の一つとして、重力レンズを含む宇宙の様々な現象は視覚や感覚に訴え理解するのは難しいことがあげられる。私は、宇宙の様々な現象を数式などを用いずに、視覚や感覚に訴えて一般の人々にも理解させることを目指している現在、コンピュータやシミュレーションを用いた動画が活躍しているが、実物の教具があれば、より視覚的・感覚的に理解しやすくなり、天文教育に大いに貢献できると考えられる。

そこで本稿では横尾他 (1998) の理論 [2] に基づいて重力レンズ効果による光の折れ曲がり再現する光学レンズの設計について議論する。

2 Methods/Instruments and Observations

重力レンズ効果による光の折れ曲がり方は一般相対性理論により計算されており。アインシュタイン方程式は以下で表され、

$$R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ij} \quad (1)$$

R_{ij} は曲率テンソル g_{ij} は計量テンソル T_{ij} は運動量テンソル c は光速 G は万有引力定数である。

この式はほとんどの場合、解析的に解くことはできないが、静的、真空、球対称の場合では解くことが出来、この解 (計量) はシュバルツシルト解と呼び

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2)$$

と書くことが出来る。これは球座標で書かれており、 r, θ, ϕ で表される。この計量内で運動方程式

$$\frac{d^2 x^m}{d\tau^2} + \Gamma_{ij}^m \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} = 0 \quad (3)$$

を解く事で重力場内での粒子の運動が求まる。シュバルツシルト計量内での運動方程式 (3) 式は

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{1}{l^2}(\epsilon^2 - 1) + \frac{1}{l^2}u - u^2 + u^3 \quad (4)$$

となる。 $u = r_g/r$ であり、 r_g はシュバルツシルト半径と呼ばれ $2GM/c^2$ で表される。また l は角運動量 L を規格化した無次元角運動量であり、 ϵ はエネルギー E を規格化した無次元エネルギーである。ここで、簡単のため軌道面を $\theta = \pi/2$ とした。光子の運動を考えると、質量 m は 0 の極限をとるので (4) は

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \alpha^{-2} - u^2 + u^3 \quad (5)$$

となる。ここで α は

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\epsilon^2 - 1}{l^2} = \left(\frac{Er_g}{Lc}\right)^2 \equiv \alpha^{-2} \quad (6)$$

である。この (5) 式が重力場内での光子の軌道運動の式となる。一般相対性理論の効果を表す u^3 を無視すると $u = \alpha^{-1} \cos \phi$ となり、 α^{-1} は十分小さく、(5) のは重力源の無い直線の解となる。光線が直線からずれる効果を摂動計算から求めるために近似解として

$$u = \alpha^{-1} \cos \phi + \alpha^{-2} f(\phi) \quad (7)$$

とおく。これを (5) に代入し計算すると

$$f(\phi) = \frac{1}{2}(\sin \phi^2 + 1) \quad (8)$$

が得られる。これを (7) に代入し直行座標に書き換えると

$$y = \begin{cases} -\alpha(x - \alpha r_g) & (y \gg 0) \\ \alpha(x - \alpha r_g) & (y \ll 0) \end{cases} \quad (9)$$

となる。これをグラフにすると図 1 のようになる。

図 1 のよう θ, δ, y_0, r_0 をとると、 $y = 0$ と $x = 0$ を代入することで $r_0 = \alpha r_g, y_0 = \alpha^2 r_g$ と求まり、

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{1}{\alpha} \\ \theta &\simeq \alpha^{-1} \end{aligned} \quad (10)$$

となる。よって、

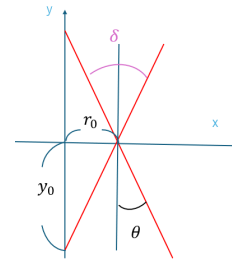


図 1: 弱い重力場近似した重力レンズの光線軌道

$$\begin{aligned} \delta &= 2\alpha^{-1} = \frac{r_g}{r_0} \\ &= \frac{4GM}{c^2 r_0} \end{aligned} \quad (11)$$

という式が現れる。これが原点を重力源とし、弱い重力場近似した重力レンズ効果による光の折れ曲がり角を表す式となる [1]。後の便宜のために (11) の文字を書き換える。

$$\Delta\theta = \frac{4GM}{c^2 r} \quad (12)$$

δ を $\Delta\theta$ に、 r_0 を r に変えた。ここから先は [2] を参考に議論する。

次に、光学レンズの屈折によりこの軌道を再現する。屈折率 n の材質を考えると、入射角 Ψ と屈折角 Φ の関係はスネルの法則より、 $n = \sin \Phi / \sin \Psi$ 十分小さい近似をすると、 $n = \Phi / \Psi$ となる。したがって触れ角は

$$\Delta\theta = \Phi - \Psi \sim \frac{n-1}{n} \Phi = (n-1)\Psi \quad (13)$$

となる。(図 2 参照) 光軸からの距離を r 、レンズの厚みを z とすると、レンズ表面の勾配は

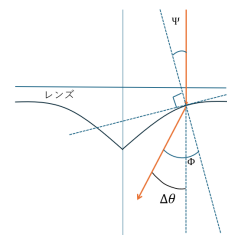


図 2: 等価レンズによる光線の折れ曲がり

$$\frac{dz}{dr} = -\tan \Psi \sim -\Psi \quad (14)$$

が成り立ち、(13) から

$$\frac{dz}{dr} = -\frac{1}{n-1} \Delta\theta \quad (15)$$

となり、(12) を代入すると、

$$\frac{dz}{dr} = -\frac{4GM}{c^2(n-1)} \frac{1}{r} \quad (16)$$

これを積分すると、

$$z = -\frac{4GM}{c^2(n-1)} \ln r + \text{定数} \quad (17)$$

となり、レンズの表面が対数関数になっていればよいことがわかる。

3 Results

表面が対数関数となるようなレンズを 3 D プリンターを用いて作成する。3 DCAD でこれをデザインし、スライサーソフトでコンパイル、その後 3 D プリンターで出力する。素材は Anycubic の High Clear Resin を使用した。この屈折率は 1.52 である。質量が太陽と同じ星を想定すると、(17) は

$$z[m] = -11343 \ln r[m] \quad (18)$$

となり、この大きさのままだとこの光学レンズの半径は 10km 以上必要になるが、3 D プリンターの出力可能なサイズに合わせるため、半径が 5cm 程度になるように縮尺する。つまり、おおよそ 1/200000 倍したものを 3 D プリンターで出力する。これは太陽質量を持つブラックホールの質点から 10km 離れた場所での曲がり角が、光学レンズ状で半径 5cm の場所での曲がり角と一致する。

4 Conclusion

重力レンズ効果で曲げられる光線軌道は (12) であり、これを再現する光学レンズの表面の形状は (17)

となる。太陽質量を持つブラックホールの重力レンズ効果を再現するには、おおよそ 1/200000 倍したものを 3 D プリンターで出力する必要があり、これは太陽質量を持つブラックホールの質点から 10km 離れた場所での曲がり角が、光学レンズ状で半径 5cm の場所での曲がり角と一致する。

Acknowledgement

天文・天体物理若手夏の学校を運営して下さったスタッフの方々、支援して下さった方々に心より感謝申し上げます。また天文・天体物理若手夏の学校に参加するにあたって、ご指導ご鞭撻のほどをしてくださった、先生方、同じ宇宙理論研究室の皆様にご心より感謝申し上げます。

Reference

- [1] 佐藤勝彦 1996, 岩波書店
- [2] 横尾武夫, 加藤好博, 蜂谷正雄, & 福江純 1998, 天文月報

重宇 a19

WMAP 7-year データを用いた初期ベクトル型揺らぎ と原始磁場生成に関する制限

由良 海翔

WMAP 7-year データを用いた初期ベクトル型揺らぎと原始磁場生成に関する制限

由良 海翔 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

銀河や銀河団において磁場が存在することを示す観測的証拠があるが、今のところそのような大規模な磁場の起源は未解明である。放射優勢期の宇宙では、光子と電子、電子と陽子が相互作用によってそれぞれ強く結合して一つの流体のように振る舞う。この流体は、宇宙論的摂動の内、ベクトルの性質を持つベクトルモードから誘起される速度で回転するとされている。これら 2 種類の相互作用の強さの違いと電子と陽子の質量差によって、電子と陽子の回転速度に違いが生じる。これによって生じた電流が磁場を生成することが提案されている (Harrison 1970)。ベクトルモードは、非等方ストレスがなく完全流体が存在するフリードマン宇宙では減衰モードしか持たず、ベクトルモードの宇宙論観測に及ぼす影響は無視できると言われてきた。しかし、宇宙のエネルギー分布にニュートリノのような自由流動粒子による非等方ストレスが存在すれば、ベクトルモードに成長モードが存在することが発見されている (Antony Lewis 2004)。本発表では、論文 (Kiyotomo Ichiki et al. 2012) のレビューを行う。最初に予備知識としてベクトルモードの諸方程式及び強結合近似下でのその解について紹介し、WMAP の CMB 観測データを用いた初期ベクトルモードの量に関する制限について説明する。次に、初期ベクトルモードから生成される磁場のスペクトルを計算し、原始磁場の大きさの上限を与える方法とその結果について説明する。最後に、本論文における WMAP 観測データを Planck によるものにアップデートし、解析を行った結果も発表する。

1 INTRODUCTION

現在広く信じられている銀河内の磁場の生成機構は、大規模な磁場は小さな種磁場から増幅され流体的なプロセスであるダイナモによって持続されたというものである。しかし、ダイナモ自体は種磁場の起源を説明するものではないため、種磁場の起源を探ることが宇宙磁場の起源を理解するための重要な手掛かりである。現在の宇宙で観測された約 $1\mu\text{G}$ の磁場を説明するためには、 $10^{-30} \sim 10^{-20}\text{G}$ の大きさの種磁場が必要であることがわかっている。

種磁場の生成シナリオとしては、主に 3 つが挙げられる。1 つ目は、構造形成後の宇宙で天体活動によって生成されるというシナリオで、2 つ目は、インフレーション期の早期に長い相関長をもつ磁場が生成されるという宇宙論的なシナリオである。3 つ目は、宇宙の再結合前の初期プラズマ中の流体の渦度によって磁場が生成されるというシナリオである。これは放射によって電子が引きずられ、電子と陽子が異なる速度で回転することで、渦電流が生じ、それによって磁場が誘起されるというものである。

非等方ストレスがない完全流体で満たされたフリードマン宇宙では、ベクトル型の揺らぎ(ベクトルモード)は減衰モードしか持たない。これは、ベクトル型の揺らぎは初期時刻で発散していくことを意味し、ベクトルモードを含むモデルはほとんど等方的なフリードマン宇宙と一貫性がなく線形摂動論の枠を超えてしまうので、ベクトルモードは無視できるとしばしば言われてきた。

しかし、ニュートリノのような自由流粒子による非等方圧力が存在すれば、初期ベクトルモードに非ゼロの渦度を持つ成長モードが存在することがわかっている。本論文では、Antony Lewis (2004) によって考案された一次のベクトルモードについて考える。この成長モードはニュートリノのような自由流粒子が存在するときにはしか存在しなく、標準宇宙論モデルで考えるには難しいように思える。しかし、このモードは観測によって制限できる可能性があり、もし観測されれば宇宙の歴史について有益な情報が得られるはずである。

本論文では、初めに WMAP7 年の CMB 観測データを用いて初期ベクトルモードの振幅に関して観測

的な制限を与える。それから、このベクトルモードの振幅に関する制限からベクトルモードによって生成される磁場の振幅を見積もる。

2 EQUATIONS&SOLUTIONS

A. Preliminary

ここでは、初期ベクトルモードの基本的な発展方程式を手短に説明する。メトリック

$$ds^2 = a(\eta)^2[-d\eta^2 + (\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j] \quad (1)$$

の Friedmann-Robertson-Walker 宇宙における synchronous gauge の線形摂動論を考える。ここで、 $a(\eta)$ はスケールファクターである。今ベクトルモードに興味があるので、メトリック摂動 h_{ij} はフーリエ空間で

$$h_{ij} = i\hat{h}_i h_j^V + i\hat{k}_j h_i^V \quad (2)$$

と分解できる。ここで、 h_i^V は divergenceless、すなわち $\hat{k}_i h_i^V = 0$ である。ベクトル h_i^V を

$$h_i^V(\vec{k}) = \sum_{\pm} h_{\pm}^V(\vec{k}) e_i^{\pm}(\vec{k}) \quad (3)$$

のように、2つの独立な横方向の基底ベクトルで展開する。ここで、 \pm はパリティを表している。それぞれのパリティ成分とそのフーリエモードは独立に進化するので、 \vec{k} と \pm の依存性はこれ以降省略することにする。synchronous gauge を使って $\sigma \equiv \dot{h}^V/k$ のように定義したゲージ不変なメトリック変数 σ でこれ以降の議論していく。この変数に関する線形アインシュタイン方程式は、

$$k^2 \sigma = -16\pi G a^2 (\bar{\rho} + \bar{P}) v, \quad (4)$$

$$\dot{\sigma} + 2\mathcal{H}\sigma = 8\pi G a^2 \bar{P} \pi/k \quad (5)$$

である。ここで、 \cdot は共形時間 η に関する微分、 $\mathcal{H} = \dot{a}/a$ は共形的なハッブルパラメータ、 $\bar{\rho}$ と \bar{P} はそれぞれ、全流体の 0 次の密度と圧力、 v と π はそれぞれベクトルモードの速度と非等方ストレスを表す。式 5 からベクトルモードは非等方ストレスがなければ、 $\sigma \propto a^{-2}$ に従う減衰モードしか持たないことがわかる。

物質部分では、バリオンのオイラー方程式は

$$\dot{v}_b + \mathcal{H}v_b = -\frac{4\rho_\gamma}{3\rho_b} a n_e \sigma_T (v_b - v_\gamma) \quad (6)$$

によって与えられる。ここで、 n_e は電子の数密度、 σ_T はトムソン散乱の散乱断面積である。光子についてのボルツマン方程式は

$$\dot{v}_\gamma + \frac{1}{8} k \pi_\gamma = -a n_e \sigma_T (v_\gamma - v_b) \quad (7)$$

とかける。図 1 はベクトルモードの時間変化を示している。

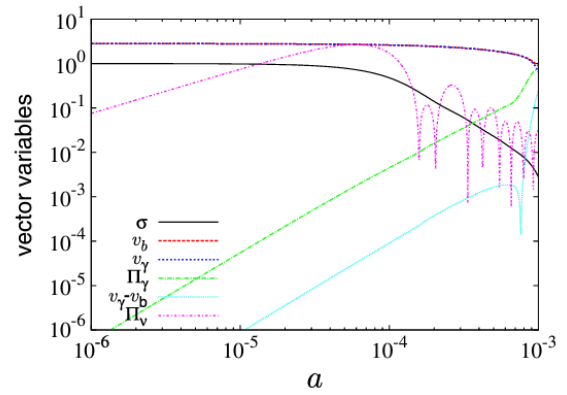


図 1: $k = 0.1 \text{Mpc}^{-1}$ でのベクトルモードの時間変化。

B. Tight coupling approximation and solutions

非常に早い時期の宇宙では、光子とバリオンは強く結合しているため、透過性 $\frac{1}{\tau_c} = a n_e \sigma_T$ は大きい。これによって tight coupling (強結合) 近似ができて、そのパラメータは

$$\epsilon = \frac{k}{\tau_c} \sim 10^{-2} \left(\frac{k}{1 \text{Mpc}^{-1}} \right) \left(\frac{1+z}{10^4} \right)^{-2} \left(\frac{\Omega_b h^2}{0.02} \right)^{-1} \quad (8)$$

であり、 Ω_b は臨界密度で規格化した現在のバリオンの密度で、 h は 100km/s/Mpc で規格化したハッブルパラメータである。2次までの強結合近似の下でのバリオン・光子スリップは次のように与えられる。

$$v_\gamma - v_b = \frac{k}{\tau_c} \frac{RH}{(1+R)k} v_\gamma - \frac{4}{15} \frac{R}{1+R} (v_\gamma + \sigma) \quad (9)$$

3 CMB CONSTRAINT ON THE PRIMORDIAL VECTOR MODE

CMB のデータと正確に比較するために、COSMOMC という MCMC 解析コードに 2 つのパラメータ r_v, n_v を含める。ここで、 r_v はベクトル-スカラー比で、 n_v はベクトルモードパワースペクトルのスペクトル指数である。具体的には、計量摂動 σ の初期振幅を持つ初期ベクトルモードのパワースペクトルを

$$\begin{aligned} \frac{k^3}{2\pi^2} \langle \sigma(\vec{k}) \sigma^*(\vec{k}') \rangle &= \mathcal{P}_\sigma(k) \delta(\vec{k} - \vec{k}') \\ &= A_\sigma \left(\frac{k}{k_0} \right)^{n_v-1} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (10) \end{aligned}$$

のようにパラメタライズする。ここで、 $k_0 = 0.002 \text{Mpc}^{-1}$ である。ベクトル-スカラー比は、

$$r_v = \frac{A_\sigma}{A_s} \quad (11)$$

で定義される。ただし、 A_s はスカラーモードのパワースペクトルの振幅である。

初期ベクトルモードを含むために、 $C_{\text{vector}, \ell}$ を CMB の温度揺らぎ及び E モード偏光の自己相関 (TT, EE) とそれらの相互相関 (TE) を CAMB と呼ばれるコードを用いて計算する。これらのパワースペクトルにスカラーモード、テンソルモードのパワースペクトルを加える。

$$C_{\text{tot}, \ell}^{\text{TT, TE, EE}} = C_{\text{scalar}, \ell}^{\text{TT, TE, EE}} + C_{\text{tensor}, \ell}^{\text{TT, TE, EE}} + C_{\text{vector}, \ell}^{\text{TT, TE, EE}} \quad (12)$$

ただし、初期スカラー、ベクトル、テンソルモードは統計的に独立であると仮定している。それから、CMB データに C_{tot} をフィッティングし、パラメータを推定する。図 2 では、WMAP7 年データと CMB 角度パワースペクトルである。

図 3 は、初期ベクトルモードのパラメータ r_v と n_v の相関を示している。もし、初期ベクトルモードがスケール不変であれば、小さい多重極子 ℓ で制限が行われ、その制限は弱いことがわかる。そのスペクトルが $n_v \gtrsim 1$ のように、より blue-tilt すれば、制限はより大きい多重極子 ℓ からくるので、制限はきつくなる。例えば、 $n_v \approx 1.0$ のとき、制限は $r_v \lesssim 0.001$ であるのに対し、 $n_v \approx 2.0$ のとき $r_v \lesssim 0.001$ になる。

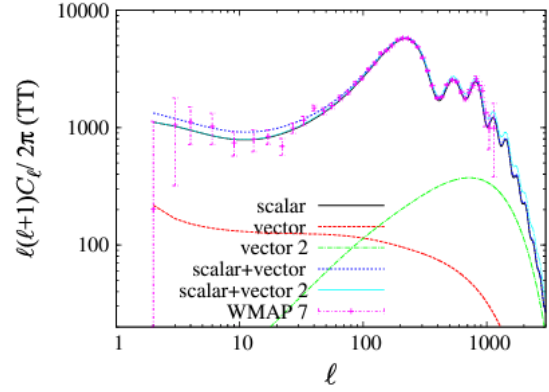


図 2: スカラー、ベクトル型揺らぎによって誘起された CMB の温度異方性パワースペクトル。赤色の破線と黄緑色の破点線のベクトルモードのパラメータはそれぞれ $(r_v, n_v) = (9.45 \times 10^{-3}, 0.921)$ と $(1.0 \times 10^{-3}, 2.0)$ ととっている。

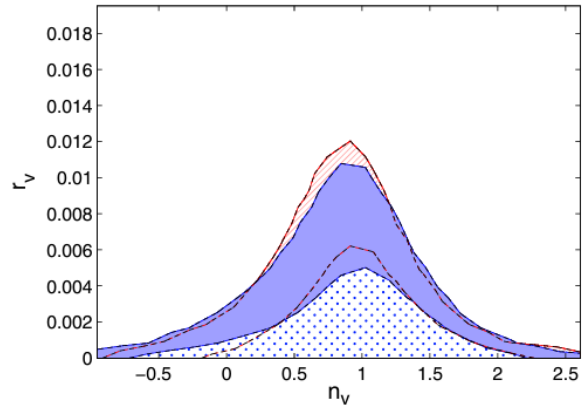


図 3: $n_v - r_v$ 平面の WMAP7 年データによる 68% (水玉) と 95% (青) の信頼領域。赤色の領域はテンソルモードありのときのマルコフ連鎖解析結果である。

この解析を可能な限り一般的にするために、初期テンソルモードありとなしのマルコフ連鎖解析を行う。テンソルモードを含むことでベクトルモードの制限に及ぼす影響は図 3 に赤と青の色分けにより示されている。テンソルモードを含めて解析を行うと、ベクトルモードの制限が全般的にきつくなることがわかる。その制限は、 $r_v \lesssim 8.36 \times 10^{-3}$ (テンソルなし) で、 $r_v \lesssim 8.36 \times 10^{-3}$ (テンソルあり) と得られる。ベクトルモードとテンソルモードの制限を同時に行った結果は図 4 に示されている。実は、ベクトルモードとテンソルモードの温度異方性の角度パ

ワースペクトルは似ているので、現在の CMB データはベクトルモードとテンソルモードの揺らぎの総量に関する制限を与えることができる。その制限は、95.4%の信頼水準で、

$$r_v + \left(\frac{r}{40}\right) \lesssim 0.012 \quad (13)$$

とわかる。ただし、 r はテンソル-スカラー比である。

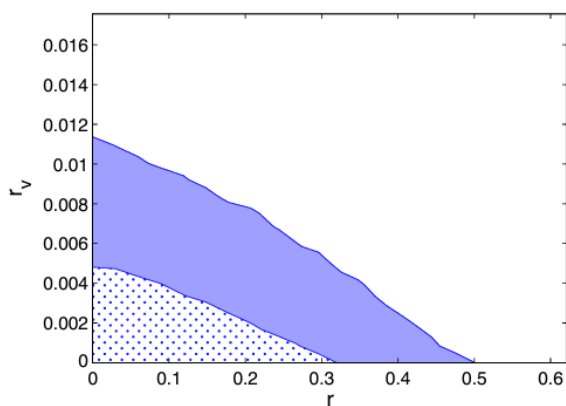


図 4: $r-r_v$ 平面の制限領域。ベクトルモードとスカラーモードの総量の制限を示している。

4 MAGNETIC FIELDS GENERATION

ベクトルモードにバリオンと光子の速度差が存在すれば、磁場は必然的に生成される。これは、光子が陽子よりも質量の小さい電子を選択的に散乱するからである。電場は電子と陽子の電荷分離を妨げるために誘起され、もし過度に差があれば、マクスウェル方程式を通してこの誘起された電場から磁場が生成される。一般的には、磁場は流体の進化に影響を及ぼすが、流体の運動における磁場からの逆反応は考えない。なぜなら、今ゼロから生成される磁場に興味があり、磁場からの逆反応は無視できるからである。宇宙論的摂動論的な観点では、磁場からの逆反応によるローレンツ力やエネルギー運動量テンソル速度は摂動的な速度の 2 次のオーダーであるからである。

トムソン散乱による磁場の発展方程式は

$$\frac{d(a^2 B^i)}{dt} = \frac{4\sigma_T \rho_\gamma a}{3e} \epsilon^{ijk} (v_{\gamma j, k} - v_{b j, k}) \quad (14)$$

で与えられる。ここで、 ϵ^{ijk} は Levi-Civita テンソルで、 e は電荷である。本論文では、この式をおよそニュートリノの脱結合時期に対応する初期条件 $z = 10^9$ で $B = 0$ として解き、生成される磁場の振幅を大雑把に見積もる。式 (14) から、

$$\begin{aligned} (a^2 B) &\simeq \left(\frac{4\sigma_T}{3e}\right) \frac{a}{H} \rho_\gamma k (v_\gamma - v_b) \\ &\simeq \left(\frac{4\sigma_T}{3e}\right) a^2 \rho_\gamma \left(\frac{k}{\tau_c}\right) \frac{R}{(1+R)^2} \left(\frac{4R_\nu + 5}{4R_\nu}\right) \sigma_0 \\ &\sim \left(\frac{4\sigma_T}{3e} a^2\right) \rho_\gamma \left(\frac{k}{\tau_c}\right) \sigma_0 \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、 H はハッブルパラメータで、 $v_\gamma - v_b$ は強結合近似解を用いた。式 (8) と $\rho_\gamma \simeq 2 \times 10^{-51} (1+z)^4 [\text{GeV}^4]$, $\sigma_T \simeq 1.7 \times 10^3 [\text{GeV}^{-2}]$ を代入することで、

$$a^2 B \sim 1.2 \times 10^{-27} \text{G} \left(\frac{k}{\text{Mpc}^{-1}}\right) \left(\frac{1+z}{10^4}\right)^{-1} \left(\frac{r_v}{0.01}\right)^{1/2} \quad (16)$$

とわかる。従って、宇宙再結合期では、磁場の大きさは $B \sim 10^{-21} \text{G}$ と予想される。

5 CONCLUSION

本論文では、Antony Lewis (2004) で議論された初期ベクトルモードに関して CMB の WMAP 観測データによる制限を与えた。その結果、ベクトルモードがほぼスケール不変のとき $r_v \lesssim 0.01$ が得られた。この結果を用いて、再結合期前に生成された磁場の大きさが $B \lesssim 10^{-23} \text{G} \left(\frac{r_v}{0.01}\right)^{1/2} \times \left(\frac{k}{0.002}\right)^{(n_v+1)/2}$ という制限も得られた。また、本論文は WMAP の観測データを用いているが、Planck の最新の CMB データを用いて解析を行えばより制限が厳しくなることが予想されるので、その解析を future work として残しておく。

Reference

- Kiyotomo Ichiki, Keitaro Takahashi, Naoshi Sugiyama, 2012, Phys. Rev. D 85, 043009
 Antony Lewis, 2004, Phys. Rev. D 70, 043518
 Harrison, 1970, Mon. Not. R. astr. Soc. 147, 279-286

[indexへ戻る](#)

重宇 a20

超伝導宇宙ひもの安定性

JHUN JINYOUNG

超伝導宇宙ひもの安定性

Jhun Jinyoung (立教大学大学院 理学研究科 M1)

Abstract

本紙では、位相欠陥と宇宙ひもについて簡単に説明し、超伝導宇宙ひものモデルを導入する。数値的に定常軸対称超伝導宇宙ひもの微分方程式を解き、超伝導ひもが存在できるパラメータ領域について論文 [1] に基づいてレビューする。

1 はじめに

初期宇宙において、宇宙の温度が下がるにつれてポテンシャルの真空期待値が 0 でなくなり、対称性の自発的破れが起きたと考えられている。しかし、物質場のあらゆる点で一律的に対称性が破れるのが不可能な場合があり、その結果として位相欠陥が現れると予想される。特に、1 次元的に形成された位相欠陥のことを**宇宙ひも**と呼ぶ。宇宙ひもは原始重力波の起源の候補としてもよく挙げられる。

標準模型の範囲では宇宙ひもは生じないので、宇宙ひもは少なくとも電弱統一時代より過去の大統一時代の相転移の祭に生じたと考えられる。大統一時代まで遡ると考えられるスカラー場の数も増加する。すると、あるスカラー場の対称性が破れて宇宙ひもを形成し、他のスカラー場がそのひもに流れ込んで局所的なカレントを形成するシナリオも考えることができる。そのような宇宙ひもを**超伝導宇宙ひも**と呼ぶ。

2 位相欠陥

場で構成される物理系を解くことは、時空における場の配置 (configuration) を決めることを意味する。特に定常系が対象になると、空間のみの配置を考えることになる。すると、時間に依存しない物理系において、場からのエネルギーの寄与は以下となる。

$$E = \int_V d^D x [f(\partial\phi) + U(\phi)] \quad (1)$$

ここで $f(\partial\phi)$ は場の空間微分からなるエネルギーの寄与で、 $U(\phi)$ はポテンシャルである。

通常、物理系のエネルギーを考えると、その値が有限 ($E < \infty$) であることを要請する。その要請を満たすためには、勾配エネルギーとポテンシャルエネ

ルギーが急速に 0 に近づく必要がある。勾配エネルギーは通常 0 以上だから、遠方の境界での ϕ の値は、ポテンシャルが 0 になるようなもの (真空多様体 \mathcal{M}) の中に限られる。すなわち

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) = \phi_0 \quad (\phi_0 \in \mathcal{M}, U(\phi_0) = 0) \quad (2)$$

である。これは境界 ∂V における場の対応を考えていることなので、一種の写像とみなすことができる。例えば、境界が二次元的に特徴付けられる場合、境界 ∂V は輪っか S_1 であり、 S_1 から \mathcal{M} への写像を考えることになる。もっと具体的に以下のような複素場からなるポテンシャルを考えるとすると

$$U(\Phi) = \frac{\lambda}{4} (|\Phi|^2 - \eta^2)^2 \quad (3)$$

\mathcal{M} は複素平面上に半径 η の円を描く。したがって、この例では S_1 から S_1 への写像を考えることになる。するとこの写像は、輪っかを何回巻くかで分類される。巻き数を変えるには、境界での場の値がポテンシャルの山を超えないといけないが、そうするためには十分なエネルギーを加える必要がある。よって、十分なエネルギーが与えられない限り、系は巻き数を変えたりはせず、安定である。巻き数が 1 以上の場合はどうしても系の内部で $\Phi = 0$ となる場所が存在し、局所的にエネルギーが高い。このように一律的な真空に変化できず、局所的にエネルギー高いところが生じるのを位相欠陥と呼ぶ。

3 宇宙ひも

宇宙ひもが実現されるモデルとして、以下のような Abelian-Higgs モデルがよく挙げられる。

$$\mathcal{L} = -(D_\mu \Phi)^* (D^\mu \Phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{4} (|\Phi|^2 - \eta^2)^2 \quad (4)$$

このモデルのポテンシャル項は上で例として挙げたポテンシャルと同じである。即ち、宇宙ひもとは 2 次元の面からみて $\Phi = 0$ となる点を 3 次元の空間に拡張して 1 次元の線になったものなのである。

宇宙ひもを記述する運動方程式は (4) のラグランジアンを変分することで得られる。

$$\ddot{\Phi} - \Delta\Phi + 2ieA^\mu \partial_\mu \Phi + e^2 A^\mu A_\mu \Phi + \frac{\partial U}{\partial \Phi^*} = 0 \quad (5)$$

$$\ddot{A}_\nu - \Delta A_\nu = 2e\text{Im}(\Phi^* \partial_\nu \Phi) - 2e^2 A_\nu |\Phi|^2 \quad (6)$$

そこで次のような $r = 0$ が中心の軸対称な ansatz を考える。

$$\Phi = \eta f(r) e^{in\theta} \quad (7)$$

$$A_r = 0, A_\theta = \frac{n}{e} \alpha(r), A_z = 0 \quad (8)$$

すると運動方程式は $x \equiv \eta r, \beta \equiv \lambda/2e^2$ として

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{df}{dx} = \frac{n^2}{x^2} f(\alpha - 1)^2 + \beta(f^2 - 1)f \quad (9)$$

$$\frac{d^2 \alpha}{dx^2} - \frac{1}{x} \frac{d\alpha}{dx} = 2f^2(\alpha - 1) \quad (10)$$

と連立常微分方程式として書ける。境界条件を考えると、複素スカラー場 Φ 及びゲージ場 A_θ は $r = 0$ で 0 を持たないと物理量としてうまく定義されないことから $f(0) = \alpha(0) = 0$ が要請される。遠方においては Φ が真空に落ちる必要があることから $f(\infty) = 1$ であり、有限エネルギー条件を満たすためには角度勾配エネルギーの寄与が 0 である必要があるため、 $\alpha(\infty) = 1$ であることが要求される。この境界値問題は解析的には解けないので、数値的に解く必要がある。

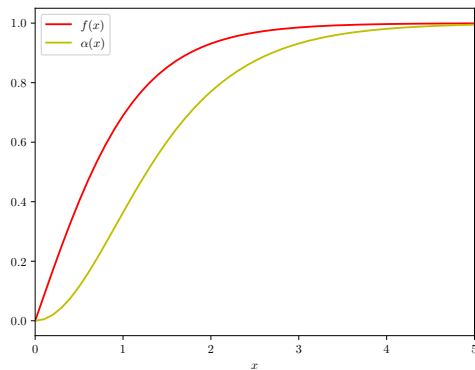


図 1: $n = 1, \beta = 1$ のときの数値解

図 1. は微分方程式を数値的に解いた解をプロットしたものである。この解は Abrikosov-Nielsen-Olesen ひもとも呼ばれる。

4 超伝導宇宙ひも

Abelian-Higgs モデルに複素スカラー場をもう一つ入れて以下のようなモデルを考える。

$$\mathcal{L} = -(D_\mu \Phi)^* (D^\mu \Phi) - (\partial_\mu \sigma)^* (\partial^\mu \sigma) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - V(\Phi, \sigma) \quad (11)$$

ここでポテンシャル $V(\Phi, \sigma)$ は以下のように与えられる。

$$V(\Phi, \sigma) = \frac{\lambda_\Phi}{4} (|\Phi|^2 - \eta^2)^2 + \lambda_{\Phi\sigma} (|\Phi|^2 - \eta^2) |\sigma|^2 + \frac{m_\sigma^2}{2} |\sigma|^2 + \frac{\lambda_\sigma}{4} |\sigma|^4$$

超伝導宇宙ひもになるためには、ローカル $U(1)$ 対称性が破れて Φ が宇宙ひもを形成しそれに沿って σ の局所的なカレントが流れる必要がある。そこで次のような、軸対象な宇宙ひもに沿ってカレントが流れる ansatz を考える。

$$\Phi = \eta f(r) e^{in\theta} \quad (12)$$

$$\sigma = \eta g(r) e^{i(kz - \omega t)} \quad (13)$$

$$A_r = 0, A_\theta = \frac{n}{e} \alpha(r), A_z = 0 \quad (14)$$

(12),(14) は (7),(8) と同じである。すると運動方程式は

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{df}{dx} = \frac{n^2}{x^2} f(\alpha - 1)^2 + \beta_\Phi (f^2 - 1)f + 2\beta_{\Phi\sigma} g^2 f \quad (15)$$

$$\frac{d^2 g}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dg}{dx} = \gamma g + 2\beta_{\Phi\sigma} (f^2 - 1)g + \beta_\sigma g^3 \quad (16)$$

$$\frac{d^2 \alpha}{dx^2} - \frac{1}{x} \frac{d\alpha}{dx} = 2f^2(\alpha - 1) \quad (17)$$

となる。パラメータの関係は以下となる。

$$\beta_\Phi \equiv \frac{\lambda_\Phi}{2e^2}, \beta_{\Phi\sigma} \equiv \frac{\lambda_{\Phi\sigma}}{2e^2}, \beta_\sigma \equiv \frac{\lambda_\sigma}{2e^2},$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{e^2 \eta^2} \left(k^2 - \omega^2 + \frac{m_\sigma^2}{2} \right)$$

境界条件は宇宙ひもに関しては同じで、カレントに関しては局所的であるという条件から $g(\infty) = 0$, そして $r = 0$ で滑らかであるための条件から $dg/dx|_{x=0} = 0$

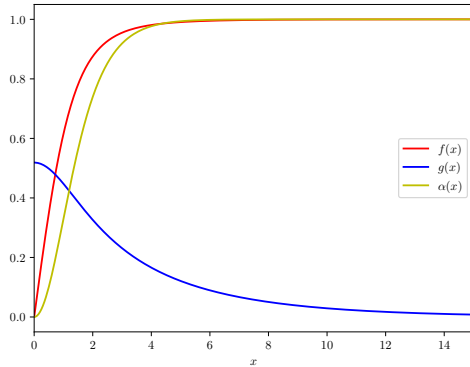


図 2: $n = 1, \beta_\Phi = 1, \beta_{\Phi\sigma} = 0.49, \beta_\sigma = 1, \gamma = 0.05$ のときの数値解

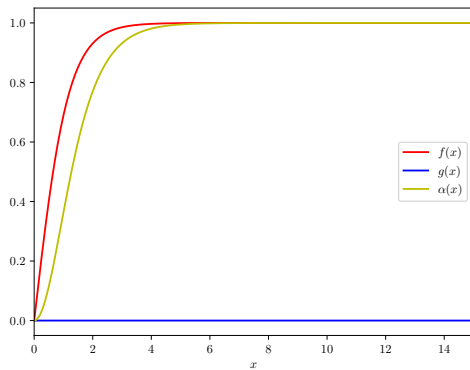


図 3: $n = 1, \beta_\Phi = 1, \beta_{\Phi\sigma} = 0.49, \beta_\sigma = 1, \gamma = 0.3$ のときの数値解

となる。そこで、任意のパラメータを与えたとき必ず超伝導宇宙ひもが生じるかという、そうではない。

図 2. と図 3. は実際に数値計算をして論文 [1] の FIG.2. を論文とは独立な手法で再現したものである。図 2. では明らかにカレントが凝縮しているが、図 3. ではそうならず、カレントが流れない。このように、超伝導宇宙ひもが形成されるかはパラメータに強く依存する。

5 超伝導宇宙ひもが安定的存在できるパラメータ

位相欠陥が安定であるかはポテンシャルの形に強く依存する。超伝導宇宙ひもの場合、カレント

が流れているということが有効ポテンシャルのパラメータの一部として寄与する。実際、モデル (11) に ansatz(12),(13),(14) を代入すると有効ポテンシャルは

$$V_{\text{eff}} = \frac{\beta_\Phi}{2}(f^2 - 1)^2 + 2\beta_{\Phi\sigma}(f^2 - 1)g^2 + \frac{\beta_\sigma}{2}g^4 + \gamma g^2 \quad (18)$$

となり、カレントの運動による寄与 k, ω が γ の一部として入る。まず、ポテンシャルの真空多様体が $f = 1$ であって欲しいことから

$$\beta_\Phi > 0, \gamma > 0, \beta_\Phi\beta_\sigma - (2\beta_{\Phi\sigma} - \gamma)^2 > 0 \quad (19)$$

という制限が得られる。そしてカレントが存在し、かつ局所的に流れるための制限として

$$2\beta_{\Phi\sigma} - \gamma > 0, \beta_\sigma > 0 \quad (20)$$

が得られる。これらをまとめると以下となる。

$$\beta_\Phi > 0, \beta_\sigma > 0, 2\beta_{\Phi\sigma} > \gamma > 0, \\ \gamma > 2\beta_{\Phi\sigma} - \sqrt{\beta_\Phi\beta_\sigma}$$

実際に $\beta_\Phi = 1, \beta_\sigma = 1$ とおいて $(\beta_{\Phi\sigma}, \gamma)$ のパラメータ領域を数値的に解くと以下の図のようになる。

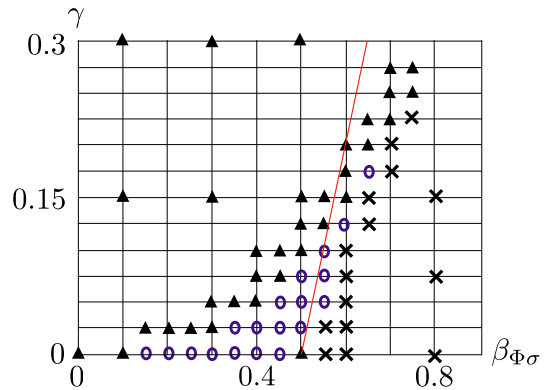


図 4: $n = 1, \beta_\Phi = 1, \beta_\sigma = 1$ のときの数値解の振る舞い

図 4. において三角形は宇宙ひもはできるがカレントが生じない場合、円は超伝導宇宙ひもができる場合、バツは宇宙ひもが存在しない場合を表示している。この図は論文 [1] の FIG.3. とほぼ同じ結果を再現している。図 4. の赤線は $\gamma = 2\beta_{\Phi\sigma} - \sqrt{\beta_\Phi\beta_\sigma}$ を示し、この線より上の領域が安定的な超伝導宇宙ひもである。赤

線の下にある超伝導宇宙ひも解もあるが,それは勾配エネルギーによって支えられているので上の領域より不安定である.

6 Conclusion

本紙では,[1]に基づいて超伝導ひもが存在できるパラメータ領域についてレビューした.そして独立した手法を用いて [1] においての結果が再現できるのを確認した.今後の研究課題としては,モデルで重力との相互作用も考慮し,場のシミュレーションを通して超伝導宇宙ひも起源の重力波について研究することが挙げられる.

7 Acknowledgement

様々な質問に

Reference

- [1]T. Hiramatsu et al., *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 06 (IOP Science), 030, 13 Jun 2024
- [2]A. Vilenkin and E. P. S. Shellard. *Cosmic Strings and Other Topological Defects*. Cambridge University Press, 1994.
- [3]Nicholas Manton and Paul Sutcliffe. *Topological Solitons*. Cambridge University Press, 2004.

[indexへ戻る](#)

重宇 a21

Axion inflation による共鳴的再加熱

辻 天太

Axion U(1)Preheating

辻天太 (KEK, 総合研究大学院大学 素粒子原子核コース)

Abstract

標準的な宇宙の熱史では Inflation のあとに Inflaton のエネルギーは radiation のエネルギーに移り変わる必要がある。この機構は再加熱と呼ばれる。本公演では Axion Inflation の再加熱を考察する。この模型の再加熱は原始磁場生成やバリオン数生成の従来の定量的な評価を変える可能性があり、この系の Preheating の性質を調べることは重要な問題である。この模型の Preheating は Chiral Plasma Instability によって Axion が数回転がる間に爆発的に Gauge 場が生成する。このため preheating の終了時にほとんどのエネルギーを Gauge 場が占めているがその後再加熱は終わるのか、それとも摂動的な再加熱が寄与するのか？を議論する。

1 Introduction

標準的な宇宙の熱史では Inflation の後に宇宙のエネルギーは Inflaton が占めており radiation がエネルギーを支配している Big Bang の時期に入るためには Inflaton が崩壊して radiation にエネルギーを移す再加熱が必要がある。この再加熱機構は Inflation と Big Bang を繋ぐ重要性に反して現在その機構は Inflation や Big Bang 宇宙論に比べてあまり理解されていない。特に Preheating と呼ばれる再加熱の初めの時期に起こり得る非摂動で効率のいい粒子生成の時期は Dark Matter 生成やバリオン数生成など豊富な現象を予言するもののこの時期に出来た radiation が宇宙のエネルギーを支配して再加熱が終わることはないと思われている。つまり再加熱温度など最終的な再加熱の情報は preheating のあとに起こる摂動的な再加熱によって決まると考えられている。したがって preheating が宇宙の熱史にどう影響するのか、またどのようなことが一般に言えるかはほとんどわかっていない。

この問題に対して Axion と U(1)Gauge 場が結合している preheating を考える。Axion は相互作用を通じて Potential に補正を与える radiative correction を受けないため、再加熱を十分に起こすために相互作用の強さを強くしても Inflation を起こすのに必要な Axion の potential の平坦性は影響を受けない。また Axion は CS 結合を通じて U(1)Gauge 場を生成するため、Blazar の観測などで存在が明らかになってきた銀河間磁場を作ることが出来る。したがって銀河形成に必要な種磁場を説明することが出来る可能性がある。またこれらの原始磁場を通じたバリオン数生成機

構も考えられている。しかし、従来の磁場生成などの定量的な評価は Inflation 期間のみの Gauge 場生成を議論しており再加熱の効果を十分に考慮に入れることが出来ていない。このような問題提起から本公演では Axion を用いた Preheating を議論をしこの模型の Preheating の結果とその物理的な意味を議論する。

Preheating に関する議論は [1] をもとに行なっている。Axion Preheating の数値計算の結果は [2][3] を用いた。また Chiral 効果に関する議論は [4] の Review 論文の議論を参考にした。

2 Set Up

FLRW 時空のもと U(1) Gauge 場と Axion を用いたモデルによって Preheating を考えるために以下の作用から始める。

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} \quad (1)$$

ここでラグランジアン \mathcal{L} は

$$\mathcal{L} = \frac{M_{\text{pl}}^2}{2} R - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi - V(\phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{\alpha}{4f} \phi F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \quad (2)$$

である。 α は無次元の結合定数で f は質量次元 1 の Axion の decay constant と呼ばれる量である。

このラグランジアン最後の項は特徴的な形をしておりこの結合は Axion の Shift 対称性を壊さない形をしている。したがってこの結合の結合定数を大きくとっても radiative correction で Inflaton の平坦性を壊すことはない。したがって再加熱のために十分大きな結

合定数を取ることが出来る. またこの項は $\phi \cdot B$ のような形を持っているため ϕ の崩壊を通して電場と磁場が並行となっている特定の偏光のゲージ場 (chiral Gauge 場) が出来る.

3 Chiral Plasma Instability (CPI)

Chiral な Gauge 場生成は Chiral Plasma Instability と呼ばれる効果によって一般的に議論されている. ここでは物理的な描像を掴むために宇宙膨張を切って $a=1$ とする

上記の作用から方程式を導くと以下の Maxwell 方程式が現れる.

$$\nabla \times \mathbf{B} = \partial_t \mathbf{E} + \frac{\alpha}{f} \partial_t \phi \mathbf{B} \quad (3)$$

この方程式の右辺から磁場が電流のように振る舞っていることがわかる. このような磁場によって運動量の低いところで $U(1)$ Gauge 場に tachyonic な共鳴が起きて爆発的に増大する.

実際にこの方程式の Gauge 場に対する振動数の分散関係は

$$\omega^2 = k(k - \frac{\alpha}{f} \partial_t \phi) \quad (4)$$

となっており $k < \frac{\alpha}{f} \partial_t \phi$ で振動数の 2 乗が負となる tachyonic な共鳴をする領域が現れる.

このような現象は簡単な物理的な描像で理解出来る. 図 1. まず初めに z 方向に磁場があるとする. それが電流として働くと, アンペールの法則によって θ 方向の磁場が誘起される. ここで誘起された磁場もまた電流として働くことが出来るので, 同様にアンペールの法則から z 方向の磁場を誘起する. 以上を繰り返すことで磁場が共鳴的に増幅する. これがこの系の基本的な物理描像である.

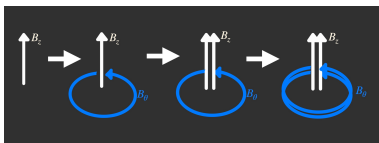


図 1: Chiral Plasma Instability

ここではスケール因子 $a=1$ としたが実際は宇宙膨張が共鳴を弱める方向に働くためその考慮を入れる

必要がある.

4 Semi-Analytical formula

ここでは宇宙膨張も考慮した上でのゲージ場の共鳴を semi-analytical な方法で求めていく. 但し, この計算では Axion の空間微分 $\nabla \phi$ を無視し, 出来た Gauge 場からの Axion に対する Back Reaction を無視する線形近似を用いる. この近似によってこの系の基本的な描像を半解析的に得ることが出来る.

ここで Gauge condition として $\partial_i A_i = 0$ $A_0 = 0$ を採用する. この条件のもと作用から運動方程式を導くと

$$\partial_\tau^2 A_i - \partial_m^2 A_i - \frac{\alpha}{f} \epsilon_{imj} \partial_\tau \phi \partial_m A_j = 0 \quad (5)$$

となる. この方程式は前節で議論した

$$\nabla \times B = \partial_\tau E + \frac{\alpha}{f} \partial_\tau \phi B$$

に対応するものである.

一方向の偏光の増幅を定量的に見るためにこの Gauge 場を偏光ごとに分解して Fourier 変換すると

$$A_i(t, x) = \sum_{\lambda=\pm} \int \frac{d^3 k}{2\pi^3} e^{ikx} \epsilon_i^\lambda(k) [A_k^\lambda a_\lambda(k) + A_k^{\lambda*} a_\lambda^\dagger(-k)] \quad (6)$$

となる. これを (5) 代入すると

$$\ddot{A}_k^\pm + H \dot{A}_k^\pm + k(k \mp \frac{\alpha}{f} \dot{\phi}) A_k^\pm = 0 \quad (7)$$

となる. この方程式から Hubble friction を取り除いて調和振動子の方程式に直すために場を $\psi_k^\pm = a^{1/2} A_k^\pm$ と書き換えると

$$\ddot{\psi}_k^\pm = -[\omega_k^\pm(t)]^2 \psi_k^\pm \quad (8)$$

となる. ここで振動数を

$$[\omega_k^\pm(t)]^2 = \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{4a^2} - \frac{\ddot{a}}{2a} \right) \mp \frac{\alpha k}{f a} \dot{\phi} \quad (9)$$

とした.

この方程式を WKB 近似法を用いて解析すると振動数が 0 となる $\omega_k^\pm(t_1) = \omega_k^\pm(t_2) = 0$ の間の時間 (t_1, t_2) に ψ は指数関数的に増大する. その増幅率は $[\Omega_k^\pm]^2 = -[\omega_k^\pm]^2$ と定義すると

$$\psi_k^\pm \propto \exp \left(\int_{t_1}^{t_2} \Omega_k(t') dt' \right) \quad (10)$$

となる。したがって Gauge 場の振幅の増幅率は semi-analytical には (10) の積分を実行することで求めることが出来る。この増幅率の評価は量子力学の散乱問題と同様のものであり [1] で議論している方法を用いた。

Semi-Analytical に計算した結果 (実線) と数値

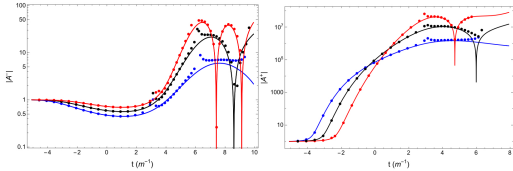


図 2: Semi-Analytical/numerical

計算の結果 (点線) を比較したのが図 2 である。[2] また赤, 青, 黒はそれぞれ $\frac{k}{aH} = 1, e, e^2$ を表している。この図を見るとほとんど Semi-Analytical な結果と数値計算の結果があっていることがわかる。またそれぞれの偏光の振幅を比較すると A^+ が A^- に比べて大きく増幅していることがわかる。これは宇宙膨張の効果によって初めに増幅される A^+ と比べて A^- が tachyonic に増幅するときの増幅率が低くなっていることから理解出来る。

以上より Preheating の時期にカイラルな U(1)Gauge 場が出来ることが線形近似の元で理解出来た。これによってこの系の時間発展の初期の振る舞いを理解することが出来た。しかしながら、爆発的な Gauge 場生成によってすぐ線形近似は使えなくなるということを理解しておかないといけない。

5 Non-Linear Lattice Simulation

ここでは非線形効果を取り入れた Classical lattice Simulation の結果を考察する。ここで用いる Simulation の結果は [3] のものを用いるが [2] も同様の結果を表している

図 3,4,5 はそれぞれ結合定数 $\frac{\alpha}{f}$ を $6, 9.5, 15M_{pl}^{-1}$ と変えた時にどのように Axion と Gauge 場のエネルギー密度が時間発展するのかを示した図である。

これらの図をみると $9.5M_{pl}^{-1}$ を境に Preheating が効率よく起きておりほとんどの Inflaton のエネルギーが

U(1)Gauge 場に移っていることがわかる。このような振る舞いは結合定数を横軸とした図 6 も示している。この結果から一つの指針として結合定数が $9.5M_{pl}^{-1}$ よりも低い場合は Preheating は Efficient ではなく摂動的な再加熱に向かうと結論付けることができる。 $9.5M_{pl}^{-1}$ 以上の結合定数の場合に起きる U(1)Gauge 場のエネルギーの振る舞いは興味深い、なぜなら [1] などが指摘している通り従来は Inflaton のエネルギーと出来た粒子のエネルギーが同程度になった時に Back Reaction や Rescattering の効果によって粒子生成は共鳴から外れて Preheating が終わると考えられていたからである。しかしこのモデルでは Preheating によってほとんどのエネルギーが Gauge 場に移っていることから摂動的な再加熱が起きず、Preheating によって再加熱が完遂する可能性がある。

ここで重要な点としてこの Simulation の結果から『結合定数が強い場合には Preheating で再加熱が終わる』と結論づけることはできない、なぜなら Inflaton のエネルギーが少しでも残っている限り radiation のエネルギーの方が早く減衰するため再度 Inflaton のエネルギーが支配する場合があるからである。

ここでこの Simulation の欠点について述べる。まず数値計算の精度の問題として Inflation から再加熱の終わりまでの全てを Simulation することは出来ない。したがってこの後に Gauge 場や Axion のエネルギー密度がこのあとどのように発展するかがわかっていない。またこの Simulation は古典数値計算なので Preheating など爆発的な粒子生成が起きる場合には効力を発揮するが摂動的な再加熱のような量子論の問題を扱うことは出来ない。したがって数値計算を摂動計算に接続して Boltzmann 方程式で解析する必要がある。

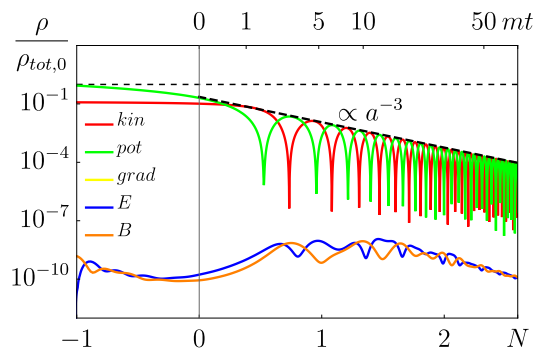


図 3: $6M_{pl}^{-1}$

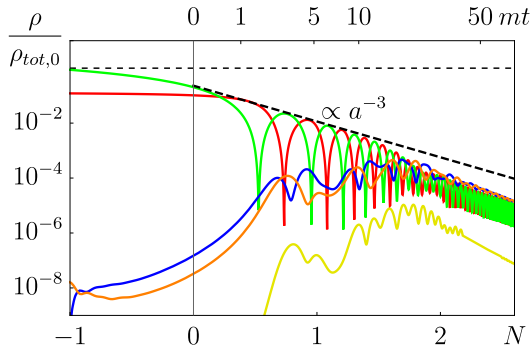


図 4: $9.5M_{pl}^{-1}$

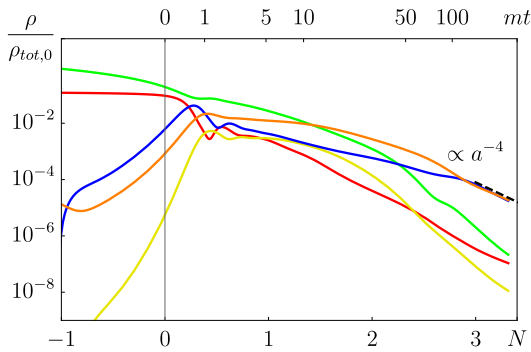


図 5: $15M_{pl}^{-1}$

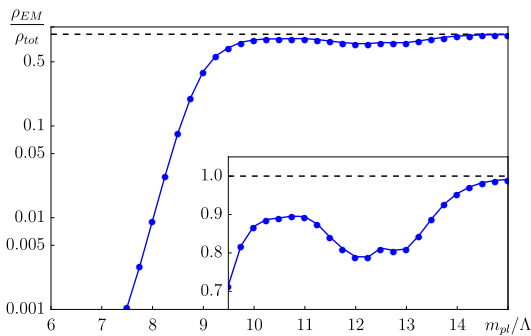


図 6: Preheating Efficiency Max Values

6 結論と今後の展望

上記の結果によって Axion を Inflaton とした場合には Preheating 中にほとんどのエネルギーが U(1)Gauge 場に行くことが理解出来た。

この結果は従来の Preheating と大きく異なり Preheating で再加熱が完遂する可能性を示している。し

たがって、今後この場合に Inflaton が再度エネルギーを支配して摂動的な再加熱が起きるか、それともそのまま Radiation dominant の時代に入るかを調べる必要がある。しかしながら、現状の数値計算の能力からこの後これらのエネルギー密度がどのように発展するのかを調べる事が出来ない。しかし図 6 で示した通りある結合定数を境に大きく系の性質が変わっていることがわかる。この振る舞いなどをさらに調べることでこの系をより詳しく理解できる可能性がある。これは今後の課題である。

以上の結果より Preheating 過程がこの模型にとって重要であることが理解できた。特に U(1)Gauge 場が爆発的に出来ることで磁場生成やバリオン数生成などの評価に大きく影響することがわかる。したがって Preheating 過程を用いたこれらの定量的な評価は今後さらに調べていく必要がある。

acknowledgement

今回の発表に関して再加熱や Axion Inflation についてご指導いただいた向田享平先生、磁場の減衰や観測について教えていただいた学振特別研究員の内田 経夫さん、そして本公演の発表練習に付き合ってください KEK 理論センターの皆様方に深く感謝申し上げます。

Reference

- [1] L.Kofman,A.Linde,A.Starobinsky
Towards the Theory of Reheating After Inflation ,hep-ph/9704452
- [2] P.Adshead,J.Giblin Jr,T.Scully,E.I.Sfakianakis
Gauge-preheating and the end of axion inflation,astro-ph/1502.06506
- [3] J.Cuissa,D.Figueroa
Lattice formulation of axion inflation. Application to preheating,astro-ph/1812.03132
- [4] K.Kamada,N.Yamamoto,D.Yang
Chiral effects in astrophysics and cosmology,Astrophysics/2207.09184

[indexへ戻る](#)

重宇 a22

経路積分形式での曲率ゆらぎの計算

川口 遼大

経路積分形式での曲率ゆらぎの計算 ～1 ループ補正と 3 点相関の関係～ PBH は死んでいない

川口 遼大 (早稲田大学大学院 先進理工学研究科 D1)

Abstract

本講演では (R. Kawaguchi et al. 2024) および (R. Kawaguchi et al. 2024) に基づき、曲率ゆらぎのパワースペクトルへの 1 ループ補正を評価する方法を紹介する。近年、原始ブラックホール (PBH) と関連づけられて盛んに研究されている transient ultra-slow-roll モデルであるが、(J. Kristiano & J. Yokoyama 2022) において問題点が指摘された。小スケールでのゆらぎの増幅が大きなスケール不変 1 ループ補正を生み出し、大スケールにおいてツリーレベルの結果よりも大きな補正をもたらしてしまい、理論の摂動性を破壊してしまうという問題点だ。我々は (J. Kristiano & J. Yokoyama 2022) とは異なったより素直なアプローチを取り、この問題点を再検討した。経路積分を用いて、パワースペクトルへの 1 ループ補正とツリーレベルのバイスペクトルの間に成り立つ関係式 (master formula) 及びツリーレベルのバイスペクトルとパワースペクトルの間に成り立つ関係式 (consistency relation) を導出し、それらを用いて 1 ループ補正を評価した。結果としては、(J. Kristiano & J. Yokoyama 2022) とは異なり、スケール不変 1 ループ補正はツリーレベルよりも十分小さく抑えられており、摂動論は破綻していないことがわかった。

1 Introduction

インフレーション理論は現代宇宙論において広く認められた理論である。宇宙開闢期の指数関数的な加速膨張は標準ビッグバン宇宙モデルでの不自然な点であった平坦性問題や地平線問題を自然と解決する。それだけではなく、現在の宇宙の多彩な構造の起源はインフレーション中の量子ゆらぎにあると考えられている。現状、インフレーションのモデルを制約する観測データは CMB などの大スケールのものに限られており、小スケールでのゆらぎについては未だに強い制約はない。インフレーションの完全な解明及び背後に隠れた高エネルギー物理の探索のためには、小スケールでの振る舞いも明らかにしていく必要があるだろう。

インフレーションで生成される小スケールのゆらぎと関連して活発に議論されているのが原始ブラックホール (PBH) である。もし、インフレーションによって大きなスカラー型ゆらぎ (曲率ゆらぎ) が生成された場合、後の宇宙で密度の大きな領域が誘因される。そのような領域は重力的に潰れブラックホールとなることが予想されており、このように形成されるブラックホールを PBH と呼ぶ。PBH は宇宙論

で大きな役割 (ダークマターなど) を担う可能性があり、大変注目を浴びている天体である。

PBH 形成を引き起こすようなインフレーションモデルは数多くあるが、最も有名なものは Ultra-slow-roll (USR) モデルであろう。USR モデルではインフラトンポテンシャルが平坦な領域 (USR 領域) を持ち、その領域中にハッブル半径を横断したスケールのゆらぎが増幅される。その増幅によって小スケールで十分に大きな曲率ゆらぎが得られれば、PBH は形成されると考えられている。

しかし、近年、Jason Kristiano 氏と横山順一氏によって、この模型のある問題点が指摘された (J. Kristiano & J. Yokoyama 2022)。小スケールでのゆらぎの増幅が 1 ループ補正として大スケールに対して寄与し、摂動性を破壊するというのだ。この議論に対しては多くのフォローアップ論文 (賛成も反対も含む) が書かれており、いまだにこの議論は落ち着いていない。この議論に決着をつけるため、我々は可能な限り不明瞭な点を取り除き、彼らとは異なるアプローチ (経路積分) で 1 ループ補正を計算した。結論としては彼らの結果とは異なり、大きな 1 ループ補正は認められなかった。

2 Transient USR model

まずは簡単に本論文で用いる transient USR model の説明をしておこう。このモデルは USR モデルを解析的に解けるように単純化したモデルであり、それは第 2 スローロールパラメータ $\eta \equiv \epsilon'/a\epsilon H$ によって特徴づけられる。 $\epsilon \equiv -H'/aH^2$ は第 1 スローロールパラメータである。

$$\eta(\tau) = \Delta\eta [\theta(\tau - \tau_s) - \theta(\tau - \tau_e)], \quad \Delta\eta = -6, \quad (1)$$

ここで τ は共形時間であり、 τ_s, τ_e は USR ステージの開始時刻と終了時刻である。

摂動論を考える。特にスカラー型摂動である曲率ゆらぎ ζ に着目する。この時、モード関数 ζ_k は運動方程式

$$D_2\zeta_k = \frac{d}{d\tau} (a^2\epsilon\zeta'_k) - a^2\epsilon\partial^2\zeta_k = 0 \quad (2)$$

を満たす。transient USR model では解析的にこの方程式を解くことができる。具体的な式の形は (J. Kristiano & J. Yokoyama 2022) を参照せよ。その表式を用いて、インフレーション終了時 $\tau = 0$ のパワースペクトル

$$P_\zeta(\tau = 0, k) = \frac{k^3}{2\pi^2} |\zeta_k(\tau = 0)|^2 \quad (3)$$

を計算すると、図 1 が得られる。小スケールでの増幅が見てとれる。これにより PBH 形成が引き起こされる。

しかしこれはツリーレベルでの結果であり、摂動の高次補正を取り入れた場合、その結果は変わり得る。実際、transient USR model は以下のような 3 点相互作用および 4 点相互作用を含む¹。これらから作られる相互作用 vertex によるパワースペクトルへの 1 ループ補正を取り入れるのが本研究の課題である。

$$\mathcal{L}_3 \supset M_{\text{Pl}}^2 \left[\frac{a^2}{2} \epsilon \eta' \zeta^2 \zeta' + \frac{\eta}{2} \zeta^2 D_2 \zeta + \frac{2}{aH} \zeta \zeta' D_2 \zeta \right], \quad (4)$$

$$\mathcal{L}_4 \supset M_{\text{Pl}}^2 \left[\frac{a^2 \epsilon \eta}{3} \zeta^3 \partial^2 \zeta + \frac{2a\epsilon}{H} \zeta^2 \zeta' \partial^2 \zeta \right]. \quad (5)$$

¹ もちろんこれで全てではない。しかし、3 点相互作用の主要な項はここに挙げた 3 項のみである。4 点相互作用は空間座標の rescaling symmetry $x^i \rightarrow e^{-\delta\zeta} x^i$ and $\zeta(\tau, x^i) \rightarrow \zeta(\tau, x^i) + \delta\zeta$ を要請することで、3 点相互作用から自然と導かれる項のみを抽出している。また経路積分では境界項相互作用は寄与しないので無視できることも用いている (R. Kawaguchi et al. 2024)。

² ここでは 1PI のみを考える。

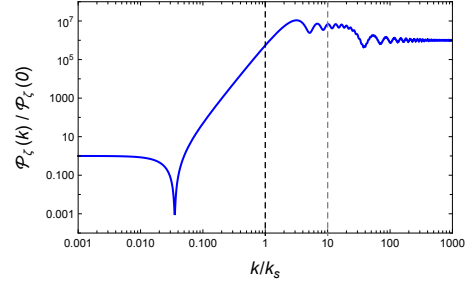


図 1: 曲率ゆらぎのツリーレベルパワースペクトル

3 Master formula

本章ではパワースペクトルへの 1 ループ補正を低次の相関関数と関連付ける公式を経路積分により導出した結果のみを紹介する。細かな計算は (R. Kawaguchi et al. 2024) を参照されたい。

ここでは一般的に議論を展開するために、以下のような 3 次の general Lagrangian を考える。

$$\mathcal{L}_3 = \sum_{A=1}^n \lambda_3^{(A)}(\tau) \prod_{i=1}^3 D_i^{(A)} \zeta, \quad (6)$$

ここで λ は時間依存する結合定数であり、 D_i は時間微分演算子 (恒等演算子も含む) である。パワースペクトルに対しては 2 つの 3 点 vertex を含むダイアグラムが考えられる²。

上記のラグランジアンは 1 ループに対して式 (7) のような寄与を及ぼす。ここで $\tilde{\zeta}$ は ζ のフーリエ変換であり、 $\langle\langle \rangle\rangle$ は相関関数から運動量に関するデルタ関数を省略したものだ。 G_{++} および G_{-+} は ζ のプロパゲータであり、経路積分の closed time path の時間積分経路に応じて 2 種類存在している。また運動量積分に関しては積分範囲を k_{min} 以上に限定した。これは我々の興味が小スケールから大スケールへの補正であるためだ。式 (7) から読み取れるように、1 ループ補正は 3 点相関関数と関係づけられている。これを以下では master formula と呼ぶことにしよう。この式変形を模式的に表したのが図 2 である。

次の章では、3 点相関関数に関する consistency relation を示し、master formula をさらに簡単にする。

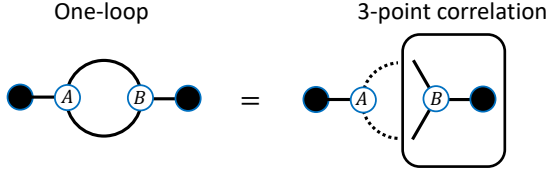


図 2: 式 (7) の模式図

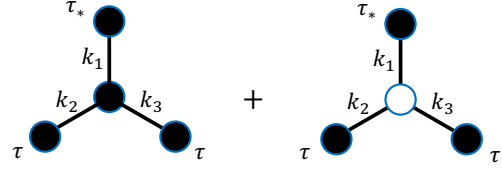


図 3: 3 点相関の Feynman diagram

$$\begin{aligned}
 & \langle\langle \tilde{\zeta}(\tau_*, \mathbf{k}_1) \tilde{\zeta}(\tau_*, -\mathbf{k}_1) \rangle\rangle_{1\text{-loop}, 1\text{PI}}^{(3)} \\
 & \simeq i \int_{\tau_0}^{\tau_*} d\tau \left[\sum_{A=1}^n \lambda_3^{(A)} \sum_{(i_1, i_2, i_3)}^{3 \text{ perms}} \left(\mathcal{D}_{i_1}^{(A)} G_{++}(k_1; \tau, \tau_*) \int_{k > k_{\min}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \langle\langle \tilde{\zeta}(\tau_*, \mathbf{k}_1) \mathcal{D}_{i_2}^{(A)} \tilde{\zeta}(\tau, \mathbf{k}) \mathcal{D}_{i_3}^{(A)} \tilde{\zeta}(\tau, -\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}) \rangle\rangle_{\text{tree}} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \mathcal{D}_{i_1}^{(A)} G_{-+}(k_1; \tau, \tau_*) \int_{k > k_{\min}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \langle\langle \mathcal{D}_{i_2}^{(A)} \tilde{\zeta}(\tau, \mathbf{k}) \mathcal{D}_{i_3}^{(A)} \tilde{\zeta}(\tau, -\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}) \tilde{\zeta}(\tau_*, \mathbf{k}_1) \rangle\rangle_{\text{tree}} \right) \right] \quad (7)
 \end{aligned}$$

4 Consistency relations

本章では 3 点相関関数について、consistency relation が成り立っていることを確かめる。式 (7) に含まれる 3 点相関関数は $\langle\langle \zeta^3 \rangle\rangle$ のみならず、微分演算子を含むものについても示す必要がある。transient USR model の 3 次ラグランジアン (4) の場合、以下の 4 つを考える必要がある。

$$\langle\langle \tilde{\zeta}_L \tilde{\zeta}_S \tilde{\zeta}_S \rangle\rangle, \langle\langle \tilde{\zeta}_L \tilde{\zeta}'_S \tilde{\zeta}_S \rangle\rangle, \langle\langle \tilde{\zeta}_L D_2 \tilde{\zeta}_S \tilde{\zeta}_S \rangle\rangle, \langle\langle \tilde{\zeta}_L D_2 \tilde{\zeta}_S \tilde{\zeta}'_S \rangle\rangle \quad (8)$$

ここで ζ_L, ζ_S は long および short モードを表している。前半の 2 つと後半の 2 つについて別々に議論しよう。

前半の 2 つについては Feynman rules に基づいて素直に計算を行うしかないだろう。すなわち図 3 の計算を愚直に行う。黒丸と白丸はそれぞれ経路積分に登場する + 場と - 場を表しており、2 つのタイプの vertex を計算し、足し合わせる必要がある。結果としては次の関係式が得られる。

$$\langle\langle \tilde{\zeta}_L \tilde{\zeta}_S \tilde{\zeta}_S \rangle\rangle \simeq - \langle\langle \tilde{\zeta}_L \tilde{\zeta}_L \rangle\rangle \frac{1}{k_S^3} \frac{d \left(k_S^3 \langle\langle \tilde{\zeta}_S \tilde{\zeta}_S \rangle\rangle \right)}{d \ln k_S}, \quad (9)$$

$$\langle\langle \tilde{\zeta}_L \tilde{\zeta}'_S \tilde{\zeta}_S \rangle\rangle \simeq - \langle\langle \tilde{\zeta}_L \tilde{\zeta}_L \rangle\rangle \frac{1}{k_S^3} \frac{d \left(k_S^3 \langle\langle \tilde{\zeta}'_S \tilde{\zeta}_S \rangle\rangle \right)}{d \ln k_S}, \quad (10)$$

これは consistency relations に他ならない。

次に運動方程式演算子 D_2 を含む場合について計算を行う。ここで役に立つのが Schwinger-Dyson 方程式である。Schwinger-Dyson 方程式によれば、作用 S に対して次が成り立つ。

$$\langle\langle \frac{\delta S}{\delta \zeta} \zeta \zeta \rangle\rangle \sim 0 \quad (11)$$

ここで $\langle\zeta\rangle = 0$ を用いて、右辺に現れるはずの contact terms はゼロとしている。作用として ζ について 2 次と 3 次のもの考えた時、 $S = S_2 + S_3$ として、

$$\langle\langle D_2 \zeta \zeta \zeta \rangle\rangle \sim \frac{1}{2M_{\text{Pl}}^2} \langle\langle \frac{\delta S_3}{\delta \zeta} \zeta \zeta \rangle\rangle \quad (12)$$

と書き換えることができる。これを図示したものが図 4 である。右辺を transient USR model での具体的な作用で計算すれば、

$$\frac{\delta S_3}{\delta \zeta} \approx M_{\text{Pl}}^2 (-6\zeta D_2 \zeta - 4a^2 \epsilon \zeta \partial^2 \zeta) \quad (13)$$

となり、これを代入することで、 D_2 を含む 3 点相関関数を劇的に簡単に計算できる。結果としては、

$$\begin{aligned}
 \langle\langle \tilde{\zeta}_L D_2 \tilde{\zeta}_S \tilde{\zeta}_S \rangle\rangle & \approx -3 \langle\langle \tilde{\zeta}_L \tilde{\zeta}_L \rangle\rangle \langle\langle D_2 \tilde{\zeta}_S \tilde{\zeta}_S \rangle\rangle - 2a^2 \epsilon \langle\langle \tilde{\zeta}_L \tilde{\zeta}_L \rangle\rangle \langle\langle \partial^2 \tilde{\zeta}_S \tilde{\zeta}_S \rangle\rangle \\
 & \approx - \langle\langle \tilde{\zeta}_L \tilde{\zeta}_L \rangle\rangle \frac{1}{k_S^3} \frac{d \left(k_S^3 \langle\langle D_2 \tilde{\zeta}_S \tilde{\zeta}_S \rangle\rangle \right)}{d \ln k_S} - 2a^2 \epsilon \langle\langle \tilde{\zeta}_L \tilde{\zeta}_L \rangle\rangle \langle\langle \partial^2 \tilde{\zeta}_S \tilde{\zeta}_S \rangle\rangle \quad (14)
 \end{aligned}$$

が得られる。ここからわかるのは 3 点相関関数のみでは consistency relation を満たしておらず、空間微分を含む余分な項が現れるということだ。しかしこれは当然のことである。なぜなら、consistency relation は空間座標の rescaling symmetry に由来するものであり、rescaling 変換の際には ζ のみならず D_2 に含まれる空間微分 ∂^2 の変換も考慮しなければならないからだ。この効果を取り入れるためには 3 点相関関数のみならず 4 点相関関数も加える必要があり、正しい consistency relation は次のように満たされる。

$$\begin{aligned}
 \langle\langle \tilde{\zeta}_L D_2 \tilde{\zeta}_S \tilde{\zeta}_S \rangle\rangle + a^2 \epsilon \int \frac{d^3 k'_S}{(2\pi)^3} \langle\langle \tilde{\zeta}_L \partial^2 \tilde{\zeta}_S \tilde{\zeta}'_{S'} \tilde{\zeta}_{S+S'} \rangle\rangle \\
 \simeq - \langle\langle \tilde{\zeta}_L \tilde{\zeta}_L \rangle\rangle \frac{1}{k_S^3} \frac{d \left(k_S^3 \langle\langle D_2 \tilde{\zeta}_S \tilde{\zeta}_S \rangle\rangle \right)}{d \ln k_S}, \quad (15)
 \end{aligned}$$

この 4 点相関関数は 3 次相互作用からの 1 ループ補正 (7) からは現れないが、4 次相互作用 (5) からの 1 ループ補正から現れる。したがって、3 次と 4 次の 1 ループ補正の和としては consistency relation に従う量が運動量積分の中に現れることが示された。

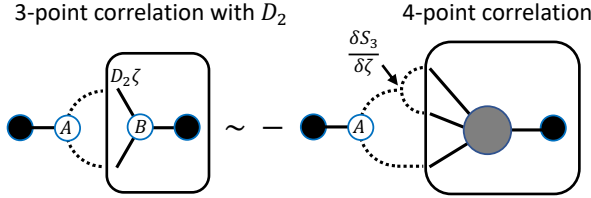


図 4: Schwinger-Dyson 方程式による変換

同様に、

$$\langle\langle \tilde{\zeta}_L D_2 \tilde{\zeta}_S \tilde{\zeta}'_S \rangle\rangle + 2a^2 \epsilon \int \frac{d^3 k'_S}{(2\pi)^3} \langle\langle \tilde{\zeta}_L \partial^2 \tilde{\zeta}_S \tilde{\zeta}'_{S'} \tilde{\zeta}_{S+S'} \rangle\rangle$$

$$\begin{aligned} & \frac{\mathcal{P}_\zeta^{(\text{loop})}(\tau_*, k_1)}{\mathcal{P}_\zeta^{(\text{tree})}(\tau_*, k_1)} \\ & \simeq 2 \int_{\tau_0}^{\tau_*} d\tau \left[\sum_{A=1}^3 \lambda_3^{(A)} \sum_{(i_1, i_2, i_3)}^{3 \text{ perms}} \mathcal{D}_{i_1}^{(A)} \text{Im} (\zeta_{k_1}(\tau) \bar{\zeta}_{k_1}(\tau_*)) \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^3} \frac{d \left(k^3 \langle\langle \mathcal{D}_{i_2}^{(A)} \tilde{\zeta}(\tau, \mathbf{k}) \mathcal{D}_{i_3}^{(A)} \tilde{\zeta}(\tau, -\mathbf{k}) \rangle\rangle \right)}{d \log k} \right] \\ & = 2 \int_{\tau_0}^{\tau_*} d\tau \sum_{A=1}^3 \lambda_3^{(A)} \sum_{(i_1, i_2, i_3)}^{3 \text{ perms}} \mathcal{D}_{i_1}^{(A)} \text{Im} (\zeta_{k_1}(\tau) \bar{\zeta}_{k_1}(\tau_*)) \frac{k_{\min}^3}{2\pi^2} \langle\langle \mathcal{D}_{i_2}^{(A)} \tilde{\zeta}(\tau, \mathbf{k}) \mathcal{D}_{i_3}^{(A)} \tilde{\zeta}(\tau, -\mathbf{k}) \rangle\rangle \end{aligned} \quad (17)$$

さて transient USR model の具体的な 3 次相互作用の形を (A) として代入しましょう。考えられる結合定数と微分演算子は 3 次ラグランジアンより

$$\lambda = M_{\text{Pl}}^2 \frac{a^2}{2} \epsilon \eta', \quad \text{and} \quad \mathcal{D} = \partial_\tau, 1, 1 \quad (18)$$

$$\lambda = M_{\text{Pl}}^2 \frac{\eta}{2}, \quad \text{and} \quad \mathcal{D} = D_2, 1, 1 \quad (19)$$

$$\lambda = M_{\text{Pl}}^2 \frac{2}{aH}, \quad \text{and} \quad \mathcal{D} = D_2, \partial_\tau, 1 \quad (20)$$

の 3 つである。2 つ目と 3 つ目は式 (17) に代入するとゼロとなるので寄与はない。唯一寄与があり得るのは 1 つ目の場合だが、

$$\frac{\mathcal{P}_\zeta^{(\text{loop})}}{\mathcal{P}_\zeta^{(\text{tree})}} \simeq -\frac{\Delta\eta}{4} \left(\mathcal{P}_\zeta^{(\text{tree})}(\tau_s, k_{\min}) - \mathcal{P}_\zeta^{(\text{tree})}(\tau_e, k_{\min}) \right) \quad (21)$$

となり、これも k_{\min} を USR ステージ以前にホライズンをでたスケールに取ればほとんどゼロである。したがって、小スケールからの大スケールへの 1 ループ補正は十分に小さいことが示された。

$$\simeq -\langle\langle \tilde{\zeta}_L \tilde{\zeta}_L \rangle\rangle \frac{1}{k_S^3} \frac{d \left(k_S^3 \langle\langle D_2 \tilde{\zeta}_S \tilde{\zeta}'_S \rangle\rangle \right)}{d \ln k_S}, \quad (16)$$

が成立する。以上により、master formula の中に現れる 3 次もしくは 4 次の相関関数は運動量についての全微分で書けることが示された。

5 One-loop correction

では master formula を用いて実際に 1 ループ補正を計算してみよう。3 点相関もしくは 4 点相関についての consistency relations を代入すると、式 (17) を得ることができる。consistency relations のおかげで運動量積分は表面項として簡単に実行できる。ただし、2 行目では k_{\max} からの寄与は次元正則化により取り除いている。

結論：PBH は死んでいない！

Acknowledgement

対面で開催していただき嬉しいです。運営の方々に感謝申し上げます。

Reference

- R. Kawaguchi, Shinji Tsujikawa, & Yusuke Yamada 2024, arXiv 2403.16022
- R. Kawaguchi, Shinji Tsujikawa, & Yusuke Yamada 2024, 準備中
- J. Kristiano & J. Yokoyama 2022, Phys.Rev.Lett. 132 (2024) 22, 221003, arXiv 2211.03395

[indexへ戻る](#)

重宇 a23

ローレンツ対称性を破る重力理論とウンルー効果

竹内 智貴

ローレンツ対称性を破る重力理論とウンルー効果

竹内 智貴 (立教大学大学院 理学研究科)

Abstract

重力のローレンツ対称性を検証する手段として、ローレンツ対称性の破れを許容する一般相対論の拡張理論が提案されるようになった。そのような重力理論において、ブラックホールのホライズン近傍における粒子対生成現象（ホーキング放射）は、一般相対論と同様に確認することが可能である。一方で、ホーキング放射と深く関連する現象としてウンルー効果があるが、それはローレンツ対称性が破れる状況ではウンルー効果も破れると考えられてきた。そのため、ウンルー効果はローレンツ対称性と根源的な関係があると考えられるようになった。本発表は、[1] のレビューを行う。ローレンツ対称性を破るためにエーテル場とばれるベクトル場を導入する必要があるが、これまでそのダイナミクスは十分に考えられていなかった。本発表では、このエーテル場をダイナミカルな場として議論することでウンルー温度を導くことができ、ローレンツ対称性を破る重力理論においてもウンルー効果が存在することを示す。

1 導入

一般相対論は低エネルギーでの有効理論であり、高エネルギーを記述する重力の理論としては不十分である。そのため、一般相対論を超えるような重力現象を説明するために、修正重力理論や量子重力理論の研究が進められてきた。重力の量子化や宇宙の高エネルギー現象の説明を目的とする研究から、重力はローレンツ対称性が破れていることが示唆されるようになった。ローレンツ対称性は、標準理論では根源的な性質であるのに対し、重力はどのようなスケールでローレンツ対称性が破れるのか、または、破れるとしたらどれほどの破れを許容するのかといったことは十分に理解されていない。ローレンツ対称性が厳密に保たれるとしても、ローレンツ対称性が破れる場合の理論と比較することで表れる差異を議論することにより、重力理論の理解や時空構造の解析が進むことが期待される。

重力の熱力学的な性質は、時空構造を理解するにあたって重要な役割を果たしており、それらを満足しない重力理論を完全に排除することはないが、そうした理論を否定する要件として使用されることがある。簡単には、一般相対論で実現される現象であるホーキング放射やウンルー効果が修正重力理論でも理論的に導かれるかを確認することである。ローレンツ対称性を破る重力理論において、ホーキング放射は一般相対論と同様に、その重力理論に対する因果的境界の近傍で粒子対生成が生じることが確認された。しかし、ローレンツ対称性を破る重力理論では、ウンルー効果が確認することができないと主張する研究がいくつか挙げられるようになった。厳密に明らかにされてはいないものの、ホーキング放射とウンルー効果は原理的に類似した現象であり、いずれも熱的な放射と理解されるため、ローレンツ対称性の破れる重力理論においてどちらか一方が理論的に示されないのは奇妙なことである。

2 ローレンツ対称性を破る重力理論

はじめに、ローレンツ対称性を破る重力の作用について以下のものを考える。

$$S_{LV} = \frac{1}{16\pi G^*} \int d^4x (R - \mathcal{L}_{E\mathcal{E}}) + S_m \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{E\mathcal{E}} = & c_1(\nabla_\alpha U_\beta)(\nabla^\alpha U^\beta) + c_2(\nabla_\alpha U^\alpha)^2 \\ & + c_3(\nabla_\alpha U_\beta)(\nabla^\beta U^\alpha) - c_4(U^\mu \nabla_\mu U_\alpha)^2 \end{aligned} \quad (2)$$

$c_1 \sim c_4$ は定数である。ここで、 U_μ は、エーテル場と呼ばれるベクトル場であり、 $U_\mu U^\mu = -1$ を満たし、時間成分のパラメータ Θ とするとき、これを用いて以下のように表すことができるものとする。

$$U_\mu = \frac{\nabla_\mu \Theta}{\sqrt{-\nabla^\alpha \Theta \nabla_\alpha \Theta}} \quad (3)$$

S_m は物質場による作用である。このように重力場の作用に \mathcal{L}_{LV} を加えて修正した重力理論を Khronometric といい、 Θ を Khronon 場という。フロベニウスの定理により、 Θ 一定のときに現れる空間的超曲面は全て特定の時間方向に対して直交する。この時間方向の単位ベクトルこそ U_μ であり、特別な時間の方向を与えるようなベクトル場である。そのため、作用の時点ではあらわではないが、 \mathcal{L}_{LV} を加えることで自発的なローレンツ対称性の破れを引き起こす。したがって、この重力理論ではローレンツブーストが存在せず、超光速のモードが許容される。

3 リンドラー座標

ローレンツ対称性を破る重力理論におけるリンドラー座標を議論する。リンドラー座標は、ミンコフスキー時空を等加速度運動する観測者の座標

である。(1+1)次元の時空を考えると、計量は以下のように書くことができる。

$$g_{\mu\nu} = -U_\mu U_\nu + S_\mu S_\nu \quad (4)$$

S_μ は U_μ に直交する空間方向の単位ベクトルである。ローレンツ対称性を破るとはいえ、ウンルー効果を考える上ではミンコフスキー時空が背景時空となるため、平坦座標 (t, x) で書き直すことができる。

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 \quad (5)$$

リンドラー座標は、平坦座標を共形変換することで明らかになる。この共形変換は、GR の場合と同様にして行うことができる。したがって、

$$\begin{aligned} ds^2 &= e^{2\bar{a}\xi} (-d\eta^2 + d\xi^2) \quad (6) \\ \eta &= \arctan \frac{t}{x}, \quad x^2 - t^2 = \bar{a}^{-2} e^{2\bar{a}\xi} \\ U_\mu(\eta, \xi) &= \left(-\frac{e^{2\bar{a}\xi} + 1}{2}, \frac{e^{2\bar{a}\xi} - 1}{2} \right) \end{aligned}$$

のように書き下すことができる。ここで、 \bar{a} はミンコフスキー上を等加速度運動する観測者の加速度の大きさである。または、エーテル場の加速度

$$\begin{aligned} A_\mu &= \mathcal{L}_U U_\mu \\ &= U^\alpha \nabla_\alpha U_\mu \end{aligned}$$

の大きさ $\|A\| = \bar{a}$ として理解することができる。リンドラー座標の因果構造を示したものが図1である。光速を超えるモードが許される場合において、光の測地線を用いて時空の因果構造を議論することに意味がないと思われるため、GR で因果的境界として用いられたキリングホライズンに変わる無限大の速度のモードに対する因果的境界の導入が望まれる。そのような境界は universal horizon と呼ばれ、以下のように定義される。

$$U_\mu \chi^\mu = 0 \quad (7)$$

χ は timelike キリングベクトルであり、ミンコフスキー時空中において $\chi^\alpha = \partial_\eta x^\alpha$ である。キリングホライズンは、 $\chi_\mu \chi^\mu = 0$ で定義される。timelike キリングベクトル自身が直交する、すなわち、キリングベクトルと光の単位ベクトルが直交するような表面として定義されていた。それに対し、universal horizon は、timelike キリングベクトルと選択した特定の時間方向の単位ベクトルとの内積が 0 となるような表面として定義される。

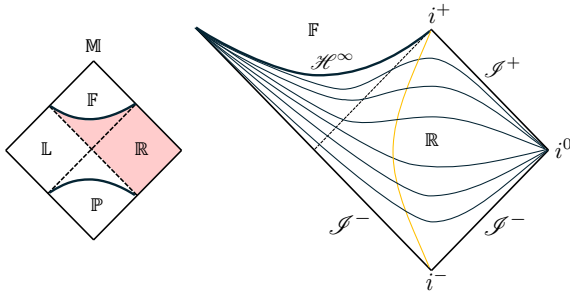


図 1: 左側の図はミンコフスキー時空のペンローズダイアグラム。R という円柱座標を拡大したものが右の図である。黄色の線が速さ $\bar{a}\eta$ で等速度運動する点粒子の世界線である。黒い実線が θ 一定の空間的超曲面である。破線がキリングホライズンの一つであるが、超光速のモードが許される場合には因果的境界として役割を果たさない。代わりに、無限大の速度に対する因果的境界として universal horizon \mathcal{H}^∞ が定義される。

4 ウンルー効果

ウンルー効果とは、「慣性系における真空を加速度系から測定すると、時空の因果的境界の近傍で粒子対生成が起こる」という現象である。より簡潔に言うと、慣性系の真空は、加速度系から見ればある温度の熱浴があるように見える。ローレ

ンツ対称性の破れる重力理論でのウンルー効果を議論する場合でも、導出の流れは基本的に GR の場合と同様である。はじめに、質量を持たないスカラー場 ϕ について、重力場中では以下のような作用を考える。

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} (\partial_\alpha \phi)^2 + \sum_{j=2}^n \frac{c_{2j}}{\Lambda^{2j}} \phi (-\Delta)^j \phi \right) \quad (8)$$

結合定数 c_{2j} 、カットオフパラメータ Λ 、そして、 Δ はラプラシアンである。ラグランジアン第二項は、高エネルギーのモードに対して大きく寄与する項である。また、 n については重力場の方程式から決定される。このように導入したスカラー場のことを Lifshitz スカラーといい、 ϕ について変分すると、スカラー場の方程式が得られる。これを Lifshitz-Klein-Gordon 方程式という。

$$\square \phi - \sum_{j=2}^n \frac{c_{2j}}{\Lambda^{2j-2}} (-\Delta)^j \phi = 0 \quad (9)$$

この微分方程式の一般解を解析的に求めることは困難であるため、以下のように WKB 近似を行う。

$$\phi = \phi_0 \exp \left[\frac{i}{\hbar} S_0 \right] \quad (10)$$

ϕ_0 は定数であり、 S_0 は (8) の作用を点粒子として近似したものである。このようにすることで、解析的にモードを調べることができ、(9) を満たす解 $v_{\mathbb{R}, \Omega}$ が得られる。

このように、(9) の解を求めることができるため、それを用いて量子スカラー場 ϕ を生成・消滅演算子を用いて展開することができる。

$$\begin{aligned} \hat{\phi} &= \int d\Omega v_{\mathbb{R}, \Omega} \hat{b}_\Omega + v_{\mathbb{R}, \Omega}^* \hat{b}_\Omega^\dagger \\ &= \int d\omega u_{\mathbb{M}, \omega} \hat{a}_\omega + u_{\mathbb{M}, \omega}^* \hat{a}_\omega^\dagger \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、 \hat{a}_ω はミンコフスキー時空中における消滅演算子であり、 \hat{b}_Ω はリンドラー座標における消滅演算子である。それぞれの消滅演算子に対して、ミンコフスキー座標における真空 $|0_M\rangle$ とリンドラー座標における真空 $|0_R\rangle$ は以下のように定義することができる。

$$\hat{a}_\omega |0_M\rangle = 0, \quad \hat{b}_\Omega |0_R\rangle = 0 \quad (12)$$

これらの演算子は、ボゴリューボフ変換という線形変換により関係づけることができる。

$$\hat{b}_\Omega = \int_0^\infty d\Omega (\alpha \hat{a}_\omega + \beta \hat{a}_\omega^\dagger) \quad (13)$$

規格化条件を用いることにより、それぞれの係数を決定することができる。そのため、加速度系に対するミンコフスキー真空の粒子数期待値を求めることができる。

$$\langle 0_M | \hat{b}_\Omega^\dagger \hat{b}_\Omega | 0_M \rangle = \frac{1}{e^{\frac{2\pi\Omega}{\bar{a}}} - 1} \quad (14)$$

この粒子数期待値からボース分布関数の形を得ることができるため、熱浴の温度 T を読み取ることができる。

$$T = \frac{\bar{a}}{2\pi} \quad (15)$$

したがって、ローレンツ対称性が破れた重力理論においてもウンルー効果は導かれる。

5 結論

ローレンツ対称性の破れる重力理論においても時空の因果的境界として特徴づけられる universal horizon の近傍で粒子対生成が起きることを導出できた。したがって、ウンルー効果はローレンツ対称性の破れとは関係なく起こりうる現象であり、ローレンツ対称性との本質的な関係はなかったと考えられる。

謝辞

立教大学理論物理学研究室の大学院生ならびに、スタッフの皆様がこの場を借りて謝辞を述べさせていただきます。

Reference

- [1] F. Del. Porro et al., arXiv: 2310.03070(2023).
- [2] F. Del. Porro et al., arXiv: 2310.01472(2023).

重宇 a24

Generalized Cubic Covariant Galileon における非線形パ ワースペクトルと予測

片山 友貴

Generalized Cubic Covariant Galileon による非線形パワースペクトルと予測

片山 友貴 (総合研究大学院大学 高エネルギー加速器科学研究科)

Abstract

次世代調査のデータを最大限に活用するには、非線形スケールまでの物質パワースペクトルの正確なモデリングが必要である。今回レビューする論文 (2404.11471) では Generalized Cubic Covariant Galileon (GCCG) モデルで非線形パワースペクトルの正確な予測を得るために、公開されているソフトウェア ReACT を GCC 用に修正した。G3 モデルの極限で、修正された ReACT コードを N 体シミュレーションと比較し、さまざまなスケールと赤方偏移で一致が見られたことを確認した。次に GCCG によって導入された修正が非線形物質パワースペクトルに及ぼす関連する影響を調べます。最後に、フィッシャー行列法を用いた次世代の調査による分光学的および測光的一次プローブからの予測を示した。

1 Introduction

今回用いるラグランジアンは次のとおりである。

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{M_{\text{pl}}^2}{2} R + L_2 + L_3 \right) + S_m[g_{\mu\nu}, \chi_i],$$

M_{pl}^2 はプランク質量で、 S_m は物質の作用である。また L_i は次のように指定する。

$$L_2 = G_2(\phi, X)$$

$$L_3 = G_3(\phi, X) \square \phi,$$

G_i はスカラー場 ϕ と $X = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$ に関する関数である。

$$G_2 = -c_2 \alpha_2^{4(1-p_2)} (-X)^{p_2},$$

$$G_3 = -c_3 \alpha_3^{1-4p_3} (-X)^{p_3}$$

ここで α_i は次のように指定する。

$$\alpha_2 = \sqrt{H_0 M_{\text{pl}}}, \quad \alpha_3 = \left(\frac{M_{\text{pl}}^{1-2p_3}}{H_0^{2p_3}} \right)^{\frac{1}{1-4p_3}},$$

ここで H_0 はハッブル定数である。また一般性を失わずに $c_2 = 1/2$ とできる。この上記のモデルを Generalized Cubic Covariant Galileon (GCCG) と呼び、特に $p_2 = p_3 = 1$ を G3 と呼ぶ。

2 Methods

本レビューにおいては割愛した内容なので詳細は原論文を参照されたい。

3 Results

詳細は原論文を参照されたい。

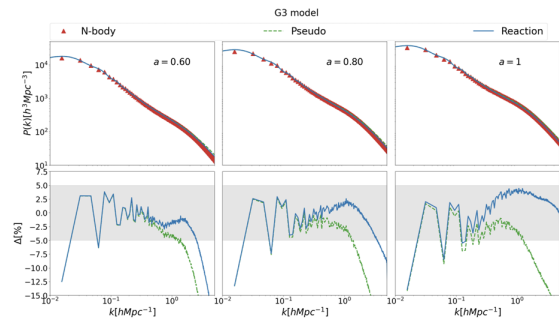


Figure 1: N 体シミュレーションと今回の結果の比較

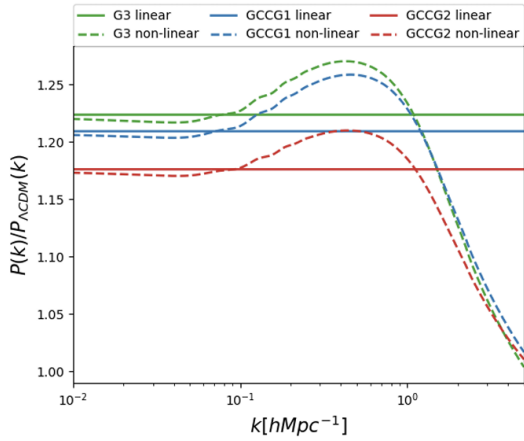


Figure 2: 線形と非線形の比較

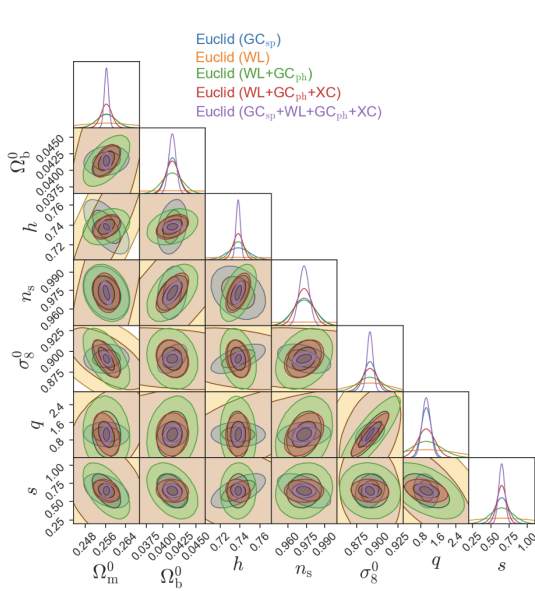


Figure 3: Euclid-like な観測に対するフィッシャー解析

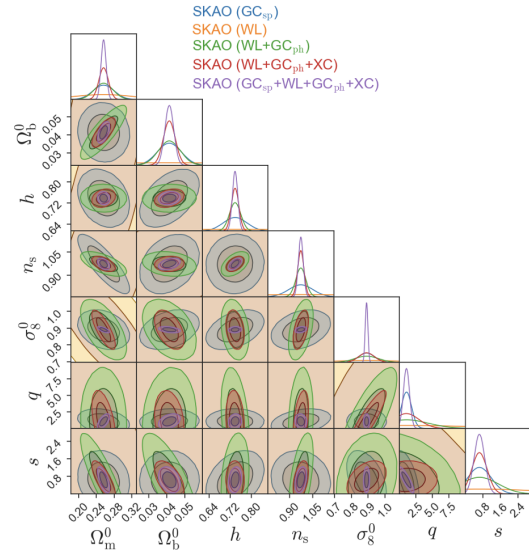


Figure 4: SKAO-like な観測に対するフィッシャー解析

References

Luís Atayde, Noemi Frusciante, Benjamin Bose, Santiago Casas, Baojiu Li 2024, 2404.11741

重字 a25

相対論的量子オットー熱機関における因果律の効果

上永 裕大

相対論的量子オットー熱機関における因果律の効果

上永 裕大 (九州大学大学院 理学府 物理学専攻)

Abstract

相対性理論、熱力学、量子力学の3分野を横断するような研究は、まだ未開拓な部分も多く存在する。その研究テーマの1つに「相対論的量子オットー熱機関」が知られている。曲がった時空の量子場と相互作用する量子系、Unruh-DeWitt(UDW) 検出器 [1] を用いて曲がった時空の量子場から仕事を抽出するというモデルである。一瞬だけ量子場と相互作用するモデルにおいて、量子オットー熱機関における仕事と因果律との関係性が明らかとなっている [2]。本研究では、先行研究 [2] を拡張し任意の相互作用が時間依存性を持つ場合での量子オットー熱機関と因果律との関係性を調べていくことを最終目標とする。本発表では、研究の土台である調和振動子型 UDW 検出器を用いた相対論的量子オットー熱機関のフォーマリズムと、そこから判明した正の仕事を取り出す条件について紹介する。

1 Introduction

現代物理学において様々な分野同士は密接に関連しており、融合分野に対する研究が進んでいる。その中の一つとして近年「量子熱力学」と呼ばれる“量子系における熱力学”が発展してきている。この分野では、熱浴と相互作用する量子物質を作用物質とした量子熱機関が重要な研究テーマとなっており、研究が盛んに行われている。例として、非マルコフ効果を取り入れ量子オットー熱機関を考えた場合、カルノー効率を超えた状況下においても仕事の抽出が可能であることが知られている [3]。

量子熱力学をさらに相対性理論・場の量子論と融合させた研究テーマとして、「相対論的量子オットー熱機関」が知られている。これは、曲がった時空の量子場と相互作用する2準位の量子系、Unruh-DeWitt (UDW) 検出器モデル [1] を利用して、曲がった時空の量子場から熱力学的仕事を抽出するものであり、ウンルー効果を活用した仕事の抽出などが報告されている [4]。また、先行研究 [2] では、一瞬だけ量子場と相互作用する UDW 検出器を用いることにより、相対論的量子オットー熱機関における仕事は因果律が存在する時のみに抽出可能であることを明らかにした。

本研究では、任意の相互作用時間依存性をもった調和振動子型 UDW 検出器を用いて、非摂動的に因果律と相対論的量子オットー熱機関との関連性を調べる。

2 Unruh-DeWitt 検出器モデル

今回は、2準位系の粒子(量子ビット)の代わりに量子調和振動子を用いて、相対論的量子スカラー場と相互作用するモデルを考える。

$$\hbar = k_B = c = G_N = 1 \text{ とする。}$$

2.1 調和振動子型検出器

$n+1$ 次元の定常な¹曲がった時空 (\mathcal{M}, g) を上を、固有時 τ の軌跡 $x(\tau)$ に沿って移動する調和振動子を考える。

量子スカラー場 $\hat{\phi}(x)$ は、

$$\hat{\phi}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n k \left[\hat{b}_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(x) + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger u_{\mathbf{k}}^*(x) \right] \quad (1)$$

と表され、 $\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger$ 、 $\hat{b}_{\mathbf{k}}$ は場の生成消滅演算子、 $u_{\mathbf{k}}(x)$ 、 $u_{\mathbf{k}}^*(x)$ は正および負振動モード関数を表す。

モード関数は、

$$\partial_t u_{\mathbf{k}}(x) = -i\omega_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(x) \quad (2)$$

$$\partial_t u_{\mathbf{k}}^*(x) = i\omega_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^*(x) \quad (3)$$

という性質を持つ。

場における自由ハミルトニアン \hat{H}_ϕ は

$$\hat{H}_\phi = \int_{\mathbb{R}^n} d^n k \omega_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} \quad (4)$$

と表される。

¹ t 方向にキリングベクトルを持つ

調和振動子の自由ハミルトニアンは、

$$\hat{H}_{\text{HO}}(\tau) = \frac{\hat{P}^2(\tau)}{2m} + \frac{1}{2}m\Omega^2\hat{Q}^2(\tau) \quad (5)$$

と表され、 $\hat{Q}(\tau)$ 、 $\hat{P}(\tau)$ はそれぞれ調和振動子の位置演算子および運動量演算子であり、 Ω はエネルギーギャップ、 m は調和振動子の質量である。

相互作用ハミルトニアンは、

$$\hat{H}_{\text{int}}(\tau) = \lambda \{ \chi_1(\tau) + \chi_2(\tau) \} \hat{Q}(\tau) \otimes \hat{\phi}(x(\tau)) \quad (6)$$

と表される。ここで、 $\chi_1(\tau)$ 、 $\chi_2(\tau)$ はスイッチング関数と呼ばれる、場との相互作用の時間依存性を表す関数である。 $\chi_1(\tau)$ は時刻 $\tau_{1\text{on}} \leq \tau \leq \tau_{1\text{off}}$ の間、 $\chi_2(\tau)$ は時刻 $\tau_{2\text{on}} \leq \tau \leq \tau_{2\text{off}}$ の間作用する。また λ は結合定数である。

(4)、(5)、(6) より、ハイゼンベルグ描像における全体系のハミルトニアン $\hat{H}_{\text{tot}}(\tau)$ は

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{tot}}(\tau) = & \hat{H}_{\text{HO}}(\tau) \otimes \mathbf{1}_\phi + \mathbf{1}_{\text{HO}} \otimes \hat{H}_\phi(\tau) \\ & + \hat{H}_{\text{int}}(\tau) \end{aligned} \quad (7)$$

と表される。

2.2 量子ランジュバン方程式

場と相互作用する振動子検出器モデルは、量子ブラウン運動における”Caldeira-Leggett モデル” の特殊ケースに対応する [5]。ハイゼンベルグ描像における振動子のダイナミクスは、量子ランジュバン方程式により記述できる。

$$\begin{aligned} m \frac{d^2}{d\tau^2} \hat{Q}(\tau) + m\Omega^2 \hat{Q}(\tau) \\ - \int_{\mathbb{R}} ds K(x(\tau), x(s)) \hat{Q}(s) = -\hat{\varphi}_0(x(\tau)) \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、

$$\hat{\varphi}_0(x(\tau)) := \lambda \chi(\tau) \hat{\phi}_0(x(\tau)) \quad (9)$$

は振動子に働く外力の項であり、一般性を保つためスイッチング関数を $\chi(\tau)$ と表している。また、

$$\begin{aligned} K_{ab}(x(\tau), x'(s)) := & i\Theta(t(\tau) - t'(s)) \\ & \langle [\hat{\varphi}_0(x(\tau)), \hat{\varphi}_0(x'(s))] \rangle_{\rho_\phi} \end{aligned} \quad (10)$$

は散逸 Kernel と呼ばれる場の遅延伝搬子としてみなせる。 $\Theta(t(\tau) - t'(s))$ はヘヴィサイド階段関数である。

量子ランジュバン方程式 (8) の解は、

$$\begin{aligned} \hat{Q}(\tau) = & \frac{d}{d\tau} G(\tau) \hat{Q}(0) + G(\tau) \left. \frac{d\hat{Q}(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} \\ & - \int_0^\tau ds G(\tau - s) \frac{\hat{\varphi}_0(s)}{m} \end{aligned} \quad (11)$$

と与えられ、ここで $G(\tau)$ は初期条件 $G(0) = 0$ 、 $\dot{G}(0) = 1$ をもつ解の斉次部分である。ラプラス変換を用いて

$$G(\tau) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{z^2 + \Omega^2 - \mathcal{K}(z)/m} \right] \quad (12)$$

と表され、

$$\mathcal{K}(z) = \mathcal{L}[K(\tau - s)] \quad (13)$$

である。

2.3 ガウス形式

本研究では、連続変数システムにおけるガウス状態に注目する。システムの任意のガウス状態は、1次モーメントおよび共分散行列により完全に決定される [6]。1次モーメント $\langle \hat{r} \rangle$ は

$$\langle \hat{r} \rangle := \left(\sqrt{\mu} \langle \hat{Q} \rangle, \langle \hat{P} \rangle / \sqrt{\mu} \right) \quad (14)$$

$$:= (\langle \hat{q} \rangle, \langle \hat{p} \rangle) \quad (15)$$

と定義。ここで、 $\langle \cdot \rangle$ は検出器の状態に対する期待値である。

共分散行列 σ は

$$\sigma(\tau) := \begin{pmatrix} \sigma_{\text{qq}}(\tau) & \sigma_{\text{qp}}(\tau) \\ \sigma_{\text{pq}}(\tau) & \sigma_{\text{pp}}(\tau) \end{pmatrix} \quad (16)$$

と定義する。ここで、

$$\sigma_{\text{ab}}(\tau) := \langle \{ \hat{a}(\tau), \hat{b}(\tau) \} \rangle - 2 \langle \hat{a}(\tau) \rangle \langle \hat{b}(\tau) \rangle \quad (17)$$

である。

共分散行列 $\sigma(\tau)$ の各成分の時間発展を式 (11)、(17) より計算し、 2×2 行列の形で表すと

$$\sigma(\tau) = \mathbf{T} \sigma_0 \mathbf{T}^\top + \mathbf{N} \quad (18)$$

ここで、各変数は

$$\mathbf{T} := \begin{pmatrix} \dot{G}(\tau) & G(\tau)\mu/m \\ m\ddot{G}(\tau)/\mu & \dot{G}(\tau) \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$\mathbf{N} := \int_0^\tau ds \int_0^\tau ds' \mathbf{g}(s) \nu(s, s') \mathbf{g}^\top(s') \quad (20)$$

$$\mathbf{g}(s) := \begin{pmatrix} G(\tau-s)\sqrt{\mu}/m \\ \dot{G}(\tau-s) \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_0 := \begin{pmatrix} \sigma_{qq}(0) & \sigma_{qp}(0) \\ \sigma_{pq}(0) & \sigma_{pp}(0) \end{pmatrix} \quad (22)$$

と定義し、 $\dot{Q}(\tau) = \hat{P}(\tau)/m$ を用いた。

3 相対論的量子オートー熱機関

量子オートーサイクル内で動作する調和振動子型 UDW 検出器について考えていく。

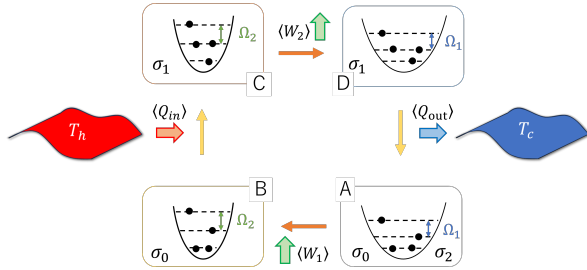


図 1: 相対論的量子オートー熱機関

3.1 ガウス形式の仕事、熱

1. エネルギーギャップが Ω_1 であり、初期状態が σ_0 調和振動子を準備する
2. A→B 量子断熱膨張過程 ($\langle Q_1 \rangle = 0$)
エネルギーギャップを Ω_1 から Ω_2 まで広げる。
ここで $\Omega_2 > \Omega_1$ である。
内部エネルギーは、

$$\text{Tr}[\rho \hat{H}] = \frac{1}{2} \Omega \left(\text{Tr} \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \right] + \langle \hat{r} \rangle^2 \right) \quad (23)$$

で表される [7]。調和振動子がされた仕事は、

$$\langle W_1 \rangle = \frac{1}{2} \Delta \Omega \left(\text{Tr} \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}(0) \right] + \langle \hat{r}(0) \rangle^2 \right) \quad (24)$$

である。ここで $\Delta \Omega := \Omega_2 - \Omega_1$ である。

3. B→C 量子定積加熱過程 ($\langle W_2 \rangle = 0$)

スイッチング関数 $\chi_1(\tau)$ を用いて、調和振動子を時刻 $\tau_{\text{ion}} \leq \tau \leq \tau_{\text{loff}}$ の間、温度 T_h の量子場と相互作用させる。相互作用の間、状態は (18) に従い時間発展する。

熱力学第一法則より、吸収した熱量は、

$$\langle Q_2 \rangle = \frac{1}{2} \Omega_2 \left(\text{Tr} \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}(\tau_{\text{loff}}) \right] + \langle \hat{r}(\tau_{\text{loff}}) \rangle^2 - \text{Tr} \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}(0) \right] + \langle \hat{r}(0) \rangle^2 \right) \quad (25)$$

となる。

4. C→D 量子断熱圧縮過程 ($\langle Q_3 \rangle = 0$)

熱浴との相互作用を終えた後、断熱過程よりエネルギーギャップを Ω_2 から Ω_1 まで縮める。step2 と同様の手順より調和振動子にした仕事は、

$$\langle W_3 \rangle = -\frac{1}{2} \Delta \Omega \left(\text{Tr} \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}(\tau_{\text{loff}}) \right] + \langle \hat{r}(\tau_{\text{loff}}) \rangle^2 \right) \quad (26)$$

と表される。

5. D→A 量子定積加熱過程 ($\langle W_4 \rangle = 0$)

スイッチング関数 $\chi_2(\tau)$ を用いて、調和振動子を時刻 $\tau_{2\text{on}} \leq \tau \leq \tau_{2\text{off}}$ の間、温度 $T_c (T_c < T_h)$ の量子場と相互作用させる。相互作用後の状態は、

$$\boldsymbol{\sigma}_2(\tau) = \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{T} \boldsymbol{\sigma}_0 \mathbf{T}^\top \tilde{\mathbf{T}}^\top + \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{N} \tilde{\mathbf{T}}^\top + \tilde{\mathbf{N}} \quad (27)$$

と表される。ここで、

$$\tilde{\mathbf{T}} := \begin{pmatrix} \dot{G}_2(\tau) & G_2(\tau)\mu/m \\ m\ddot{G}_2(\tau)/\mu & \dot{G}_2(\tau) \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$\tilde{\mathbf{N}} := \int_0^\tau ds \int_0^\tau ds' \tilde{\mathbf{g}}(s) \nu_{22}(s, s') \tilde{\mathbf{g}}^\top(s') \quad (29)$$

$$\tilde{\mathbf{g}}(s) := \begin{pmatrix} G_2(\tau-s)\sqrt{\mu}/m \\ \dot{G}_2(\tau-s) \end{pmatrix} \quad (30)$$

である。

step3 と同様に吸収した熱量は、

$$\langle Q_4 \rangle = \frac{1}{2} \Omega_1 \left(\text{Tr} \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_2(\tau_{2\text{off}}) \right] + \langle \hat{r}_2(\tau_{2\text{off}}) \rangle^2 - \text{Tr} \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}(\tau_{\text{loff}}) \right] + \langle \hat{r}(\tau_{\text{loff}}) \rangle^2 \right) \quad (31)$$

である。

3.2 抽出された仕事量

サイクルでの抽出された全仕事量は、

$$\begin{aligned} \langle W_{\text{ext}} \rangle &= - \sum_{j=1}^4 \langle W_j \rangle \\ &= \frac{1}{2} \Delta \Omega \left(\text{Tr} \left[\frac{1}{2} (\sigma(\tau_{\text{loff}}) - \sigma_0) \right] \right. \\ &\quad \left. + \langle \hat{r}(\tau_{\text{loff}}) \rangle^2 - \langle \hat{r}(0) \rangle^2 \right) \end{aligned} \quad (32)$$

となる。サイクルを閉じる条件 $\sigma(\tau_{\text{loff}}) = \sigma(0)$ を課すことで

$$\langle W_{\text{ext}} \rangle = \langle Q \rangle \quad (33)$$

となる。

4 正の仕事を取り出す条件

1 次モーメント $\langle \hat{r}(0) \rangle = 0$ である場合を考えていく。この時、正の仕事を取り出す条件式は、

$$\sigma(\tau_{\text{loff}}) > \sigma(0) \quad (34)$$

となり、サイクルを閉じる条件 $\sigma(\tau_{\text{loff}}) = \sigma(0)$ を課すと

$$\sigma(\tau_{\text{loff}}) > \sigma(\tau_{\text{loff}}) \quad (35)$$

となることがわかる。

調和振動子の状態が熱的のとき

$$\sigma = \begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \quad (36)$$

であり [6]、ここで

$$\nu = \frac{e^{\Omega/T} + 1}{e^{\Omega/T} - 1} \quad (37)$$

である。

式を変形していくと

$$\frac{T_c}{\Omega_1} < \frac{T_h}{\Omega_2} \quad (38)$$

となり、量子熱力学における“正の仕事を取り出す条件式”を導くことができた。

5 結論、今後の展望

今回、任意の相互作用時間依存性を持つ調和振動子型 UDW 検出器を用いた量子オットー熱機関について考えた。その結果として、量子場との相互作用によって共分散行列に散逸 Kernel と呼ばれる因果律の効果が現れることが分かった。また、量子熱力学における仕事や熱の式をガウス形式で表すことで、サイクルが閉じる条件下での正の仕事を取り出す条件が判明した。しかしながら、今回導出した正の仕事を取り出す条件式は、あくまでも共分散行列が対角行列になるという仮定の下であり、実際に因果律を含む、含まない時において必ずしも成り立つかは不明である。

今後の展望としては、まずは因果律を含まない場合に、共分散行列が対角行列になるための条件式の導出を行う。次に因果律を含んだ上で同様の議論を行っていく。その際に、因果律の有無で抽出される仕事の量の変化などもみていく。最後に、具体的な時空での振る舞いを見ていきたいと考えている。

Acknowledgement

天文・天体物理若手夏の学校を運営して下さったスタッフの方々、支援して下さった方々に心より感謝申し上げます。また本研究を行うにあたり議論、指導して下さった量子宇宙物理理論研究室の方々に、この場をお借りして心より感謝申し上げます。

Reference

- [1] W.G. Unruh, Phys. Rev. D 14, 870 (1976)
- [2] K. Gallock-Yoshimura, J. High Energ. Phys. 01, 198 (2024)
- [3] Y. Shirai, K.Hashimoto, R. Tezuka, C. Uchiyama, N. Hatano Phys. Rev. Research 3, 023078 (2021)
- [4] Arias E, de Oliveira TR, Sarandy MS. The Unruh quantum Otto engine. J High Energ Phys. (2018)
- [5] Heintz-Peter Breuer, Francesco Petruccione, OXFORD (2002)
- [6] Alession Serafini, CRC Press (2017)
- [7] U. Singh, J. K. Korbicz, N. J. Cerf Phys. Rev. Research 5, L032010 (2023)

重宇 a26

qutrit を用いた相対論的量子オットー熱機関の正仕事
条件の導出

廣谷 知也

qutrit を用いた相対論的量子オットー熱機関の正仕事条件の導出

廣谷 知也 (九州大学大学院 理学府 物理学専攻)

Abstract

ブラックホールの熱力学で知られるように、熱力学と相対論は密接に関わっていることが知られている。この関係性はこれまで様々な観点から研究されているが、本研究では、曲がった時空の量子場と相互作用する 3 準位の量子系を用いた相対論的量子情報 (RQI) と量子熱力学の横断的観点から研究を行う。ここでは RQI と量子熱力学の融合的研究の一端として、量子オットー熱機関のサイクルを通して、UDW 検出器が曲がった時空の量子場から仕事を取り出すための条件 (Positive Work Condition:PWC) に着目する。先行研究ではいずれも 2 準位系の UDW 検出器を用いた議論がなされてきたが、3 準位系を用いた議論は RQI の分野では未だ存在しない。そこで、本研究では任意の曲がった時空において、3 準位の UDW 検出器がオットーサイクルから取り出す仕事の条件を導出し、相対論的效果との関わりを議論する。

1 Introduction

相対論的量子情報理論 (RQI) では Unruh-DeWitt (UDW) 検出器と呼ばれる、2 準位以上の量子系が量子場と相互作用するモデルを用いた解析を行う。その代表的な研究例が Unruh 効果であり、これはブラックホールの Hawking 効果の理解に貢献した。このように RQI は相対論、場の量子論、熱力学を横断する研究に用いることが可能である。一方、量子熱力学は熱力学を量子力学の観点から再考する学問分野であり、カルノー効率の突破や、古典的出力・効率トレードオフ境界の突破 [1]、単一熱浴からの仕事抽出 [2] など、古典では見られなかった性質が示されている。また、[3] では、量子熱力学的なアプローチを用いて、膨張する宇宙におけるエントロピー生成と粒子生成の関係が調べられており、相対論、場の量子論、量子熱力学の横断的研究は徐々に開拓されつつある。

本研究では、量子系を用いた熱機関の一種である「量子オットー熱機関 (QOE)」に着目する。QOE は 2 準位量子系 (qubit) が熱浴から仕事を抽出する熱機関であり、これまで非相対論的な状況で議論されてきた。他にも 3 準位の量子系 (qutrit) を用いた研究がなされており、2 準位系に比べて PWC が緩くなるなどの結果が報告されている [4, 5]。一方で文献 [6] はこれを RQI の枠組みに拡張し、2 準位の UDW 検出器が曲がった時空の量子場から仕事を抽出する相対論的量子オットー熱機関の一般論を提案した。しかし、3 準位の量子系を用いた相対論的量子オットー熱機関

は未だかつて研究されていない。そこで本研究では [6] を 3 準位量子系に拡張し、得られる仕事量および PWC を導出する。本稿では自然単位系 $\hbar = k_B = 1$ を用いる。

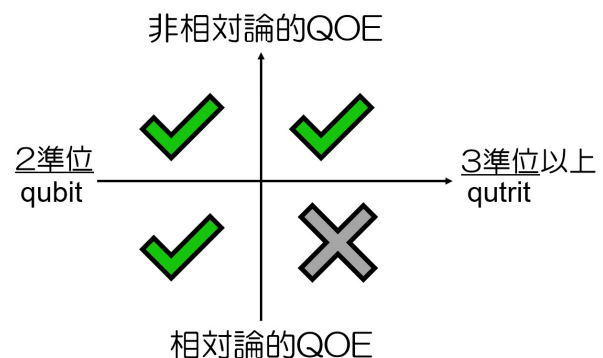


図 1: 本研究の位置づけ。左上、右上、左下の領域はすでに研究がされている。しかし、右下の“qutrit を用いた相対論的 QOE”の領域はまだ未開拓であるため、本研究ではこの領域の開拓に挑戦する。

2 必要な量子熱力学の知識

まず、古典熱力学のアナロジーとして、量子力学における仕事と熱の定義を行う [7, 8]。

量子状態 ρ とハミルトニアン \hat{H} を持つような量子系において、系の内部エネルギー、つまりエネルギー期待値 $U(\rho)$ は以下のように表される。

$$U(\rho) = \text{Tr}[\rho\hat{H}]. \quad (1)$$

上式両辺を全微分すると、

$$dU = \text{Tr}[\hat{H} d\rho] + \text{Tr}[\rho d\hat{H}], \quad (2)$$

となり、古典熱力学における第一法則

$$dU = d'Q + d'W, \quad (3)$$

と比較すると、(2) 式の第一項は状態の時間変化を表しており、我々が制御できない項であるため、(3) 式第一項の熱量に対応していることが分かる。さらに、(2) 式の第二項はハミルトニアンの変化、つまり我々が制御可能な項であるため、(3) 式の第二項の仕事とみなすことができる。ここで、(3) 式右辺の d' は不完全微分を表す。

量子系として n 準位系を考えると、ハミルトニアンの時間変化は n 番目の準位における振動数 ω_n を使って $d\hat{H} \sim d\omega_n$ と書ける。一方、古典熱力学では系がした仕事は $dW \sim \int p dV$ と書けるので、上述した対応関係により、 $d\omega_n \sim dV$ つまり、古典での体積は量子でのエネルギーギャップに対応しているということが分かる。ここで注意してほしいのは、体積が縮むと一般に系の内部エネルギーは増加するが、エネルギーギャップを縮めると内部エネルギーは低下するため、伸び縮みの関係は古典と量子で逆の関係になっている。つまり古典における体積の増加は、量子でのエネルギーギャップの縮小と対応しており、逆も然りである。

3 量子オットー熱機関

ここではオットー熱機関の構造をレビューする。古典では以下の4つの過程から構成される。

- (step1) 断熱膨張過程：熱浴とは切り離され、系の体積を膨張させる。
- (step2) 定積冷却過程：系の体積を不変に保ちつつ、温度 T^C の冷たい熱浴と接触させる。
- (step3) 断熱圧縮過程：熱浴とは切り離され、系の体積を縮小させる。
- (step4) 定積加熱過程：系の体積を不変に保ちつつ、温度 T^H の熱い熱浴と接触させる。

古典のオットー熱機関の場合、正の仕事が取り出せる条件は

$$T^H > T^C, \quad (4)$$

つまり (step4) で接触させる熱浴の温度が、(step2) で接触させる熱浴の温度より高いときに仕事を取り出すことができる。

量子オットー熱機関も断熱過程と定積過程から構成される。ここでは qubit を例にとって説明する (図 2)。

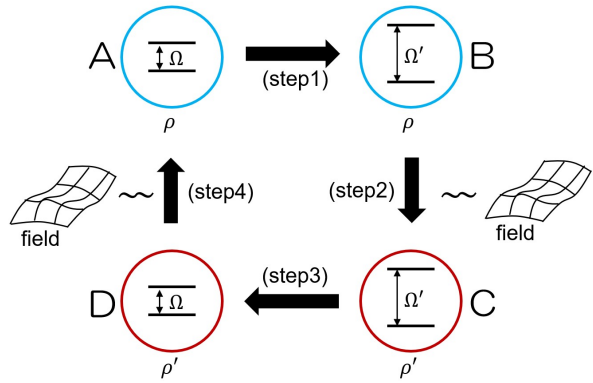


図 2: QOE のサイクルの模式図

- (step1) 量子断熱膨張過程：量子場とは切り離され、qubit のエネルギーギャップを拡大させる ($\Omega \rightarrow \Omega'$)。ここで qubit にする仕事は

$$\langle W_1 \rangle = \int_A^B dt \text{Tr}[\rho \frac{d\hat{H}(t)}{dt}]. \quad (5)$$

- (step2) 量子定積加熱過程：エネルギーギャップ Ω' を不変に保ちつつ量子場と接触させ、状態を変化させる ($\rho \rightarrow \rho'$)。ここで流入する熱量は

$$\langle Q_2 \rangle = \int_B^C dt \text{Tr}[\hat{H}(t) \frac{d\rho}{dt}]. \quad (6)$$

- (step3) 量子断熱圧縮過程：量子場とは切り離され、qubit のエネルギーギャップを縮小させる ($\Omega' \rightarrow \Omega$)。ここで qubit にする仕事は

$$\langle W_3 \rangle = \int_C^D dt \text{Tr}[\rho' \frac{d\hat{H}(t)}{dt}]. \quad (7)$$

- (step4) 量子定積冷却過程：エネルギーギャップ Ω を不変に保ちつつ量子場と接触させる ($\rho' \rightarrow \rho$)。ここで放出する熱量は

$$\langle Q_4 \rangle = \int_D^A dt \text{Tr}[\hat{H}(t) \frac{d\rho'}{dt}]. \quad (8)$$

最終的に我々が取り出せる正味の仕事 $\langle W_{ext} \rangle$ は、

$$\langle W_{ext} \rangle = -(\langle W_1 \rangle + \langle W_3 \rangle), \quad (9)$$

であり、 $\langle W_{ext} \rangle > 0$ になる条件 (PWC) を求めるのが本研究の目的である。

3.1 qubit を用いた相対論的 QOE

量子系として qubit を用いた場合の PWC は先行研究 [6] で求められており、

$$\frac{T_{eff}^H}{\Omega} > \frac{T_{eff}^C}{\Omega'} \quad (10)$$

となる。ここで、 T_{eff}^H は (step2) で熱浴に接触した際に qubit が感じる有効温度であり、 T_{eff}^C は (step4) で qubit が感じる有効温度である。温度というのは系が熱平衡状態になっていないと定義できないため、非平衡系で定義された有効温度というのは厳密には温度ではない。しかし、量子場が熱的状态で、相互作用がゆるやかに行われた場合、有効温度 T_{eff} は温度と見なすことができる。この (10) 式と古典で得られた (4) 式を見比べると、量子オットー熱機関では、PWC にエネルギーギャップも関わってくるという興味深い性質が現れる。

次の 3.2 節では、これを qutrit に拡張したとき、果たして同様の結果が得られるのかという課題について取り組む。

3.2 qutrit を用いた相対論的 QOE

先ほど考えた QOE において、量子系として qutrit を用いた場合の PWC を導出していく。

全系のハミルトニアンは Schrödinger 描像で

$$\begin{aligned} \hat{H}_{s,tot} &= \hat{H}_{s,q} + \hat{H}_{s,\phi} + \hat{H}_{s,int} \\ &\equiv \hat{H}_0 + \hat{H}_{s,int}, \end{aligned} \quad (11)$$

と書ける。ここで、

$$\hat{H}_{s,q} = (\epsilon_0 |g\rangle \langle g| + \epsilon_1 |e_1\rangle \langle e_1| + \epsilon_2 |e_2\rangle \langle e_2|) \otimes \mathbf{1}_\phi, \quad (12)$$

$$\hat{H}_{s,\phi} = \mathbf{1}_q \otimes \int_{\mathbb{R}^n} d^n k \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k, \quad (13)$$

$$\hat{H}_{s,int} = \lambda \chi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) \hat{S}_x \otimes \hat{\phi}(x(\tau)). \quad (14)$$

$\hat{H}_{s,q}$ と $\hat{H}_{s,\phi}$ はそれぞれは qutrit と量子場の自由ハミルトニアン、 $\hat{H}_{s,int}$ は qutrit と量子場の相互作用ハミルトニアンを表している。 λ は相互作用の強さ、 $\chi(\frac{\tau}{\sigma})$ は switching 関数と呼ばれるもので、相互作用の時間依存性を決定する (σ は典型的な相互作用の長さ)。 \hat{S}_x は qutrit の遷移の仕方を決める演算子であり、qubit の場合はスピン 1/2 のスピン演算子 (パウリ行列) $\hat{\sigma}_x$ で表される。そのアナロジーとして、qutrit ではスピン 1 のスピン演算子

$$\hat{S}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

を導入する。これは 1 回の相互作用で隣接する準位にしか遷移できないことを示している (図 3)。

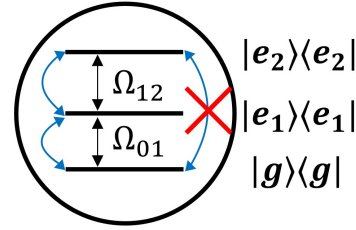


図 3: \hat{S}_x で決定される qutrit の遷移の模式図

全系の初期状態は以下のように用意する。

$$\rho_{tot,0} = \rho_{q,0} \otimes \rho_\phi, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \rho_{q,0} &= p_2 |e_2\rangle \langle e_2| + p_1 |e_1\rangle \langle e_1| \\ &\quad + (1 - p_1 - p_2) |g\rangle \langle g|. \end{aligned} \quad (17)$$

ここで、 p_2, p_1 はそれぞれ $|e_2\rangle \langle e_2|, |e_1\rangle \langle e_1|$ の占有確率であり、量子場の初期状態 ρ_ϕ は quasi-free 状態と呼ばれる、 n 点相関関数が 2 点相関関数の積と和だけで書ける状態とする。quasi-free 状態の例として真空状態や熱的状态などがあげられる。これらを用いると、一回相互作用した (step2) 後の qutrit の状態 $\rho_{q,1}$ は以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \rho_{q,1} &= (p_2 + \delta p_2^H) |e_2\rangle \langle e_2| + (p_1 + \delta p_1^H) |e_1\rangle \langle e_1| \\ &\quad + (1 - p_1 - p_2 - \delta p_1^H - \delta p_2^H) |g\rangle \langle g| + \text{非対角項}. \end{aligned} \quad (18)$$

ここで、

$$\delta p_2^H = \frac{1}{2} \lambda^2 \sigma (p_1 F^H(\Omega_{12}) - p_2 F^H(-\Omega_{12})), \quad (19)$$

$$\delta p_1^H = \frac{1}{2} \lambda^2 \sigma \{ (1 - p_1 - p_2) F^H(\Omega_{01}) - p_1 F^H(-\Omega_{01}) \\ + p_2 F^H(-\Omega_{12}) - p_1 F^H(\Omega_{12}) \}, \quad (20)$$

$$F^H(\pm\Omega) = \frac{1}{\sigma} \int_{\mathbb{R}} d\tau \int_{\mathbb{R}} d\tau' \chi(\tau/\sigma) \chi(\tau'/\sigma) \\ \times e^{\mp i\Omega(\tau-\tau')} W(\tau, \tau'). \quad (21)$$

$F(\Omega)$ は response 関数であり、式 (19),(20) に出てくる $F(\Omega_{01})$ や $F(\Omega_{12})$ はそれぞれ、 $|g\rangle \rightarrow |e_1\rangle$ 、 $|e_1\rangle \rightarrow |e_2\rangle$ への遷移確率に対応しており、 $F(-\Omega)$ はその逆の遷移確率に対応している。

以上より、取り出せる正味の仕事 $\langle W_{ext} \rangle$ は (9) 式より、

$$\langle W_{ext} \rangle = (\delta p_2^H + \delta p_1^H) \Delta\Omega_{01} + \delta p_2^H \Delta\Omega_{12}, \quad (22)$$

ここで、 $\Delta\Omega_{01} = \Omega'_{01} - \Omega_{01}$ 、 $\Delta\Omega_{12} = \Omega'_{12} - \Omega_{12}$ であり、量子断熱膨張 (step1) 後のエネルギーギャップと元のギャップとの差を表す。仮定として、両ギャップが拡大するとする ($\Delta\Omega_{01} > 0$, $\Delta\Omega_{12} > 0$)。先ほどと同様に 2 回目の相互作用 (step4) 後の状態 $\rho_{q,2}$ を求め、サイクルを閉じる条件 $\rho_{q,2} = \rho_{q,0}$ を課し、有効温度 T_{eff}^H, T_{eff}^C を

$$T_{eff}(\Omega) = \frac{1}{\Omega} \ln \frac{F(\Omega)}{F(-\Omega)} \quad (23)$$

のように定義すると、PWC は

$$\frac{T_{eff,01}^H}{\Omega_{01}} > \frac{T_{eff,01}^C}{\Omega'_{01}}, \quad (24)$$

$$\frac{T_{eff,12}^H}{\Omega_{12}} > \frac{T_{eff,12}^C}{\Omega'_{12}}, \quad (25)$$

となる。ここで、 $T_{eff,01}^H, T_{eff,01}^C$ は qutrit の準位 $|g\rangle \leftrightarrow |e_1\rangle$ 間がそれぞれ (step2)、(step4) で感じる有効温度、 $T_{eff,12}^H, T_{eff,12}^C$ は qutrit の準位 $|e_1\rangle \leftrightarrow |e_2\rangle$ 間がそれぞれ (step2)、(step4) で感じる有効温度である。3.1 節を思い出すと、二つの条件式 (24)、(25) は qubit における PWC : (10) 式の単純な拡張であるように見える。しかし、qubit の場合はギャップが Ω の一つしかなかったため、対応する有効温度は 1 種類しかなかったが、qutrit では、2 つのギャップによって感じる有効温度が異なるため、2 種類の有効温度が存在する。

4 Conclusion

本研究では、先行研究 [6] をベースに、qutrit を用いた相対論的量子オート熱機関の PWC を調べた。特に、量子断熱膨張後に、両ギャップが拡大する場合を考えると、qubit の結果 [6] を単純に拡張したような結果が得られた。さらに、一般に 3 準位以上の系ではギャップによって異なる有効温度が定義されることが知られており、本研究でもその結果が確認された。今回の解析では両ギャップが拡大することを仮定したが、他にも $\Delta\Omega_{01}$ が拡大して $\Delta\Omega_{12}$ が縮小する場合などもあり得る。今後の解析では、そうした多様なギャップの変化に対して PWC を求めている。

Reference

- [1] Hiroyasu Tajima and Ken Funo. Superconducting-like heat current: Effective cancellation of current-dissipation trade-off by quantum coherence. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 127, p. 190604, Nov 2021.
- [2] Marlan O. Scully, M. Suhail Zubairy, Girish S. Agarwal, and Herbert Walther. Extracting work from a single heat bath via vanishing quantum coherence. *Science*, Vol. 299, No. 5608, pp. 862–864, 2003.
- [3] Nana Liu, John Goold, Ivette Fuentes, Vlatko Vedral, Kavan Modi, and David Edward Bruschi. Quantum thermodynamics for a model of an expanding universe. *Classical and Quantum Gravity*, Vol. 33, No. 3, p. 035003, Jan 2016.
- [4] Sachin Sonkar and Ramandeep S. Johal. Energy-gap modulation and majorization in three-level quantum Otto engine. *arXiv.2403.09154*, 2024.
- [5] H. T. Quan, P. Zhang, and C. P. Sun. Quantum heat engine with multilevel quantum systems. *Phys. Rev. E*, Vol. 72, p. 056110, Nov 2005.
- [6] Kensuke Gallock-Yoshimura, Vaishant Thakur, and Robert B. Mann. Quantum otto engine driven by quantum fields. *Frontiers in Physics*, Vol. 11, , 2023.
- [7] Sai Vinjanampathy and Janet Anders. Quantum thermodynamics. *Contemporary Physics*, Vol. 57, No. 4, pp. 545–579, 2016.
- [8] H. T. Quan, Yu-xi Liu, C. P. Sun, and Franco Nori. Quantum thermodynamic cycles and quantum heat engines. *Phys. Rev. E*, Vol. 76, p. 031105, Sep 2007.

重宇 a27

量子論的枠組みにおける重力波と光学機械振動子系との結合

福澄 諒太郎

量子論的枠組みにおける重力波と光学機械振動子系との結合

福澄 諒太郎 (九州大学大学院 理学府物理学専攻)

Abstract

本講演ではレーザー干渉計を用いた重力波検出について量子力学に基づき理論的枠組みを構築した論文 [1] のレビューを行う。これまでは重力波を通してその背後にある天体現象の観測を行うことが重要であったが、近年は重力波そのものの原理的性質を研究することへの関心も高まってきている。この研究では、重力波と検出器、またそれらの相互作用を第一原理から導き、その量子力学的振る舞いを正準量子化の手法により解析した。重力波とオプトメカ系の従う運動方程式を導出し、重力波の無い極限では従来のよく知られた運動方程式に帰着することを確認した。また、出力光のスペクトル密度に与える重力波の影響についても評価した。

1 Introduction

現代物理学を支える 2 本の柱として、ミクロな物体が従う量子力学と、マクロな重力現象を記述する一般相対性理論がそれぞれ挙げられる。しかし、量子力学に従う系がどのような重力を作るのか、つまり量子力学と一般相対性理論がどのように関連しているのか、という問題は未解明である。これは、現在の実験で量子状態が実現できている領域 (10^{-5} g 程度) と重力の測定がなされている領域 (10^{-1} g 程度) がそれぞれ重なっていないためである。このような重力の量子的な性質を実験的に探るためには、より大きい質量をもった物体を量子状態にする必要がある。

そこで、近年着目されているのがオプトメカ系である。オプトメカ系は、振動子として振る舞う鏡と固定された鏡からなる光共振器系であり、鏡を光との相互作用を利用して制御することにより、鏡の重心運動の量子状態の実現が期待されている [2]。また、重力波とオプトメカ系の相互作用による光の位相差の変化を利用することで、LIGO 干渉計による重力波の直接検出に成功している [3]。しかし、これらの量子的な相互作用はこれまで注意深く研究されていない。現在までの多くの研究は古典ニュートン重力との相互作用を用いており、一般相対論的観点に基づいた量子力学の第一原理からの理論構築はこれまで行われていない。また、重力波の信号が微弱であるため重力波検出器のノイズレベルは量子効果が影響するまでに小さくなっており、高周波領域では量子雑音により感度が制限されている。そのため、より微小な重力波を検証するには、系の量子力学的取り扱いが必要となる。

文献 [1] は重力波と光干渉計のダイナミクスを正準量子化に基づいて理論的に解析した初めての研究である。本稿では文献 [1] のレビューを通して、重力波とオプトメカ系との量子的な相互作用を考え、重力波と振動子、出力光の従う運動方程式を導出する。また、出力光のスペクトル密度に重力波の効果がどのように現れるかを解析する。

2 Methods

2.1 Setup

現在の重力波探索では図 1 のような二つの腕を持った Michelson 干渉計が用いられている。重力波が来ると二つの腕の固有長さが変化することでそれぞれの方向の光の間に位相差が生じ、それによる光の干渉を計測することで重力波の観測を行っている。このような干渉計の差動モードは、図 2 に示すような単一の光共振器として扱えることが知られている。

図 2 について、左の鏡は座標の原点に固定する。右の鏡は共振器のエンドミラーであり、自由質点として扱う。また、共振器に沿った方向を x 軸方向とする。エンドミラーの変位を q 、共振器の長さを L と表すと、座標は $L' = L + q$ と書ける。共振器内の電磁場は定常波として存在しており、両端で振幅が常に 0 となるような条件を満たす。

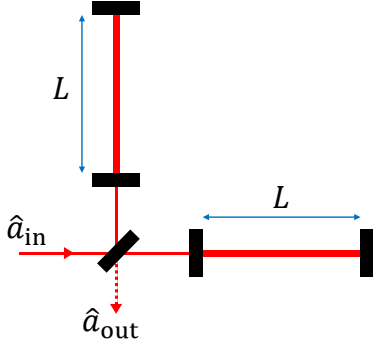


図 1: Fabry-Pérot-Michelson 干渉計の概略。入射光はビームスプリッターにより分けられ、鏡と相互作用する。出力光は再度ビームスプリッターにより干渉し、その差動モードを測定する。

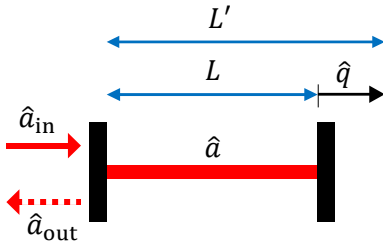


図 2: Fabry-Pérot 共振器の概略。図 1 の干渉計は 1 つの共振器として考えられる。

2.2 Action and Lagrangian

ミンコフスキー時空からの計量の摂動を考える。

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (1)$$

まず重力波について、計量の摂動は次のようにフーリエモードで展開できる。

$$h_{ij}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \tau_{ij}^\lambda(\mathbf{k}) h_\lambda(t, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (2)$$

ただしここで $\tau_{ij}^\lambda(\mathbf{k})$ は偏極テンソル、添え字 λ は偏極の自由度を表す。この摂動が TT ゲージを取るとすると Einstein-Hilbert 作用から、重力波の作用 S_{EH} 、

ラグランジアン $L_{\text{GW}}^{(0)}$ がそれぞれ次のように書ける。

$$\begin{aligned} S_{\text{EH}} &= \frac{c^4}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R \\ &= -\frac{c^4}{64\pi G} \int dt \int d^3\mathbf{k} \left[\frac{1}{c^2} |\dot{h}_\lambda|^2 - k^2 |h_\lambda|^2 \right] \\ &\equiv \int dt L_{\text{GW}}^{(0)} \end{aligned} \quad (3)$$

次に、共振器内の電磁場、また電磁場とエンドミラーの相互作用を考える。電磁場が x 軸方向と y, z 軸方向の成分に分離でき、境界 ($x = 0, L'$) で電磁場の値の大きさが 0 であるという条件から、ベクトルポテンシャルは

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_j(t, \mathbf{x}) &= u(y, z) \mathcal{A}_j(t, x) \\ &= u(y, z) \sqrt{\frac{c^2}{\omega_0 L'}} \Phi_j(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L'} x\right) \end{aligned} \quad (4)$$

と書ける。ここで、 ω_0 は共振器内光の共振振動数、 n はモード数である。これを考慮することで、ミンコフスキー時空での電磁場の作用 $S_{\text{EM}}^{(0)}$ が次のように書ける。

$$\begin{aligned} S_{\text{EM}}^{(0)} &= -\frac{1}{4\mu_0} \int_{V_{\text{cav}}} d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &\equiv \int dt \left[L_{\text{EM}}^{(0)} + L_{\text{OM}} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

ただし $L_{\text{EM}}^{(0)}$ は共振器内の電磁場のラグランジアン、 L_{OM} は電磁場とエンドミラーとの相互作用のラグランジアンをそれぞれ表し、次のように得られる。

$$L_{\text{EM}}^{(0)} = \frac{\mathcal{U}}{2\mu_0} \left[\frac{1}{2\omega_0} \dot{\Phi}_j^2(t) - \frac{\omega_0}{2} \Phi_j^2(t) \right] \quad (6)$$

$$L_{\text{OM}} = \frac{\mathcal{U}}{2\mu_0} \frac{\omega_0 q}{L} \Phi_j^2(t) \quad (7)$$

ここで、 $\mathcal{U} = \iint dydz |\mathbf{u}(y, z)|^2$ であり、 μ_0 は真空の透磁率である。

また、電磁場と重力波の相互作用は、

$$\begin{aligned} S_{\text{EM}}^h &= -\frac{1}{2\mu_0} \int d^4x h_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \\ &= -\frac{\mathcal{U}}{2\mu_0} \int dt \int d^3\mathbf{k} J_{ij}^\lambda(\mathbf{k}) h_\lambda \left[\frac{1}{2\omega_0} \dot{\Phi}_i \dot{\Phi}_j - \frac{\omega_0}{2} \Phi_i \Phi_j \right] \\ &\equiv \int dt L_{\text{GW}}^{\text{int}} \end{aligned} \quad (8)$$

と書ける。ただし

$$J_{ij}^\lambda(\mathbf{k}) = \frac{-i(e^{ik_x L} - 1)}{k_x L} \frac{\tau_{ij}^\lambda(\mathbf{k})}{\sqrt{(2\pi)^3}} \quad (9)$$

である。

最後にエンドミラーの作用は、

$$S_q = \frac{m}{2} \int dt \dot{q}^2 \equiv \int dt L_q^{(0)} \quad (10)$$

と書ける。

まとめると、系全体のラグランジアンは次のように書ける。

$$L = L_{\text{GW}}^{(0)} + L_{\text{EM}}^{(0)} + L_q^{(0)} + L_{\text{GW}}^{\text{int}} + L_{\text{OM}} \quad (11)$$

2.3 Canonical quantization

変数 $(h_\lambda(\mathbf{k}), \Phi, q)$ に対して正準共役量を定義し、次のように交換関係を設定する。

$$[h_\lambda(\mathbf{k}), \Pi_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}')] = i\hbar \delta_{\lambda, \lambda'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (12)$$

$$[\hat{\Phi}, \hat{P}] = [\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \quad (13)$$

ここで、共振器内の電磁場の生成演算子を以下のように定義する。

$$\hat{a}(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\hbar}} \left[\sqrt{\frac{\mathcal{U}}{2\mu_0}} \hat{\Phi} + i \sqrt{\frac{2\mu_0}{\mathcal{U}}} \hat{P} \right] \quad (14)$$

また、電磁場の振幅と位相を表す amplitude quadrature と phase quadrature を次のように定義する。

$$\hat{\alpha}_1 = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (15)$$

$$\hat{\alpha}_2 = -i \sqrt{\frac{\hbar}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \quad (16)$$

これを用いると、

$$\hat{\Phi} = \sqrt{\frac{2\mu_0}{\mathcal{U}}} [\hat{\alpha}_1 \cos \omega_0 t + \hat{\alpha}_2 \sin \omega_0 t] \quad (17)$$

$$\hat{P} = -\sqrt{\frac{\mathcal{U}}{2\mu_0}} [\hat{\alpha}_1 \sin \omega_0 t - \hat{\alpha}_2 \cos \omega_0 t] \quad (18)$$

と書ける。

2.4 Hamiltonian

前項で挙げた正準量を用いてルジャンドル変換を行い、系のハミルトニアンを導出する。まず重力波について、(3) より

$$\hat{H}_{\text{GW}}^{(0)} = \int d^3\mathbf{k} \left[\frac{1}{2M_G} |\hat{\Pi}_\lambda|^2 + \frac{M_G \omega_k^2}{2} |\hat{h}_\lambda|^2 \right] \quad (19)$$

ただし $M_G = c^2/32\pi G$, $\omega_k = c|\mathbf{k}|$ である。

次に、共振器内の電磁場について、(6) より

$$\hat{H}_{\text{EM}}^{(0)} = \frac{\omega_0}{2} (\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\alpha}_2^2) \quad (20)$$

と書けるが、電磁場が共振周波数からずれた振動数 $\omega_L = \omega_0 + \Delta$ で振動しているとき、以下のように書き換えると共振からのずれのみに着目できる。

$$\hat{H}_\Delta = -\frac{\Delta}{2} (\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\alpha}_2^2) \quad (21)$$

このときの Δ を detune と呼ぶ。

また、電磁場とエンドミラーの結合、また電磁場と重力波の結合について、それぞれ (7)(8) より

$$\hat{H}_{\text{OM}} = -\frac{\omega_0 \hat{q}}{2L} (\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\alpha}_2^2) \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{GW}}^{\text{int}} &= -\frac{\omega_0}{2} (\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\alpha}_2^2) \int d^3\mathbf{k} J_{xx}^\lambda(\mathbf{k}) \hat{h}_\lambda(t, \mathbf{k}) \\ &\equiv -\frac{\omega_0}{2} (\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\alpha}_2^2) \hat{h}(t) \end{aligned} \quad (23)$$

となる。ここで、古典的な期待値からの摂動 $\hat{a} \rightarrow \sqrt{\hbar/2\bar{\alpha}} + \hat{a}$ を考え、2次オーダーで近似すると、

$$\hat{H}_{\text{OM}} \sim -\frac{\omega_0 \hat{q}}{L} \bar{\alpha} \hat{\alpha}_1 \quad (24)$$

$$\hat{H}_{\text{GW}}^{\text{int}} \sim -\omega_0 \bar{\alpha} \hat{\alpha}_1 \hat{h}(t) \quad (25)$$

と書ける。これを見ると、重力波、エンドミラーと結合するのは共振器内の電磁場の amplitude quadrature のみであることが分かる。

最後に、エンドミラーについては、(10) より

$$\hat{H}_q^{(0)} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \quad (26)$$

である。

よって全体のハミルトニアンは

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{GW}}^{(0)} + \hat{H}_\Delta + \hat{H}_q^{(0)} + \hat{H}_{\text{GW}}^{\text{int}} + \hat{H}_{\text{OM}} \quad (27)$$

となる。

3 Results

3.1 Equation of motion

このハミルトニアンを使って各変数に対する運動方程式を導出する。まずはエンドミラーについて

$$\dot{\hat{q}} = \frac{1}{m} \hat{p} \quad (28)$$

$$\dot{\hat{p}} = \frac{\omega_0 \bar{\alpha}}{L} \hat{\alpha}_1 - \Gamma \hat{p} + \sqrt{2\Gamma} \hat{\xi} \quad (29)$$

と求まる。ただし、式 (29) の第 2 項 $-\Gamma\hat{p}$ は散逸、第 3 項 $\sqrt{2\Gamma}\hat{\xi}$ はノイズ $\hat{\xi}$ による揺動力をそれぞれ表しているが、これらは揺動散逸関係を満たすように現象論的に導入したものである。また第 1 項は、 $\hat{\alpha}_1$ による輻射圧によりエンドミラーが駆動され、その力の大きさは共振器内の電磁場の振幅のみに依存するというを意味している。

次に、電磁場の運動方程式は

$$\dot{\hat{\alpha}}_1 = -\Delta\hat{\alpha}_2 - \gamma\hat{\alpha}_1 + \sqrt{2\gamma}\hat{\alpha}_1^{\text{in}} \quad (30)$$

$$\dot{\hat{\alpha}}_2 = \Delta\hat{\alpha}_1 - \gamma\hat{\alpha}_2 + \sqrt{2\gamma}\hat{\alpha}_2^{\text{in}} + \omega_0\bar{\alpha}\hat{h}(t) + \frac{\omega_0\bar{\alpha}}{L}\hat{q} \quad (31)$$

となり、 $-\gamma\hat{\alpha}$ 、 $\sqrt{2\gamma}\hat{\alpha}^{\text{in}}$ は揺動散逸関係を満たしている。 γ は共振器内の光の散逸率を表し、図 2 における左の鏡から抜け出る電磁場を説明する。また、この式の意味として、detune の項により電磁場が振動するという、そして重力波による効果とエンドミラーにかかる輻射圧の反作用はどちらも電磁場の位相 $\hat{\alpha}_2$ にも直接影響を及ぼすことが読み取れる。

最後に、重力波について

$$\dot{\hat{h}}_\lambda = \frac{1}{M_G}\hat{\Pi}_\lambda \quad (32)$$

$$\dot{\hat{\Pi}}_\lambda = -\omega_k^2 M_G \hat{h}_\lambda + \omega_0\bar{\alpha}J_\lambda^* \hat{\alpha}_1 \quad (33)$$

となり、重力波が電磁場に及ぼす影響の反作用として重力波が駆動されることが読み取れる。

3.2 Fourier analysis

フーリエ変換を $\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f(t)$ とすると、エンドミラーの運動方程式 (28) と (29) は

$$\hat{q}(\omega) = -\frac{1}{m\omega(\omega + i\Gamma)} \left(\frac{\omega_0\bar{\alpha}}{L}\hat{\alpha}_1 - \sqrt{2\Gamma}\hat{\xi} \right) \quad (34)$$

となる。同様に、電磁場の運動方程式 (30) と (31) を解くと

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\sqrt{2\gamma}}{\gamma - i\omega} \hat{\alpha}_1^{\text{in}} \quad (35)$$

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{1}{\gamma - i\omega} \left[\sqrt{2\gamma}\hat{\alpha}_2^{\text{in}} + \omega_0\bar{\alpha}\hat{h} + \frac{\omega_0\bar{\alpha}}{L}\hat{q} \right] \quad (36)$$

となり、重力波の運動方程式 (32) と (33) を解くと

$$\hat{h}_\lambda(\omega, \mathbf{k}) = \hat{h}_0 + \frac{\omega_0\bar{\alpha}J_\lambda^*}{M_G} \frac{1}{\omega_k^2 - \omega^2} \hat{\alpha}_1 \quad (37)$$

となる。ただし \hat{h}_0 は斉次解である。

4 Discussion

この節では、これまで求めた運動方程式をフーリエ変換することにより、出力光のスペクトル密度を求める。出力光は以下の input-output 関係により、入射光と共振器内の電磁場と関係づけられる。

$$\hat{\alpha}_{1,2}^{\text{out}} = \hat{\alpha}_{1,2}^{\text{in}} - \sqrt{2\gamma}\hat{\alpha}_{1,2} \quad (38)$$

各揺らぎは独立であるとする、出力光のスペクトルは

$$\begin{aligned} & \left\langle \left(\hat{\alpha}_2^{\text{out}} \right)^2 \right\rangle \\ &= \left\langle \left(\hat{\alpha}_2^{\text{in}} \right)^2 \right\rangle + \frac{2\gamma\omega_0^2\bar{\alpha}^2}{\omega^2 + \gamma^2} S_{hh} \\ &+ \frac{4\gamma^2\omega_0^4\bar{\alpha}^4}{(2\pi)^3 M_G^2 (\omega^2 + \gamma^2)^2} \left(\int \frac{d^3\mathbf{k}}{\omega_k^2 - \omega^2} \right)^2 \left\langle \left(\hat{\alpha}_1^{\text{in}} \right)^2 \right\rangle \\ &+ \frac{4\gamma^2\omega_0^4\bar{\alpha}^4}{m^2\omega^2 L^4 (\omega^2 + \Gamma^2) (\omega^2 + \gamma^2)^2} \left\langle \left(\hat{\alpha}_1^{\text{in}} \right)^2 \right\rangle \\ &+ \frac{4\gamma\Gamma\omega_0^2\bar{\alpha}^2}{m^2\omega^2 L^2 (\omega^2 + \Gamma^2) (\omega^2 + \gamma^2)} \left\langle \hat{\xi}^2 \right\rangle \quad (39) \end{aligned}$$

となる。ここで、簡単のため $\Delta = 0$ とし、長波長近似をとった。一項目は入力光のノイズ、二項目は重力波が共振器内の電磁場に与える影響、三項目は電磁場自身が作り出した重力波による影響、四項目は電磁場の揺らぎがエンドミラーに伝わりそれが再び電磁場に及ぼす影響、五項目はエンドミラーのノイズをそれぞれ表していることが分かる。

5 Conclusion

本稿では [1] に基づいてレビューを行った。一次元の Fabry-Pérot 干渉計として光共振器系のモデルを考え、重力との相互作用を正準量子化の手法により一般相対論的な観点から解析した。また重力波が出力光のスペクトル密度に与える影響について考察した。

Reference

- [1] B. Pang, Y. Chen 2018, Phys.Rev.D 98, 124006
- [2] C. Whittle et al. 2021, Science 372, 1333
- [3] B. P. Abbott et al. 2016, Phys.Rev.Lett. 116, 061102

[indexへ戻る](#)

重宇 a28

オプトメカ系で探る重力の量子性の理論的研究

畠山 広聖

重力相互作用で結合するオプトメカの量子もつれ度の誤差推定

畠山 広聖 (九州大学大学院 理学府物理学専攻)

Abstract

オプトメカ系は鏡とキャビティ光からなるシステムであり、光の輻射圧で鏡の運動を量子制御することで、巨視的な量子状態を実験的に生成することが期待されている。本発表では、量子制御下にある二つの鏡の量子性に関する理論的な研究結果を報告する。まず重力相互作用で結合する二つの鏡間のもつれ度を解析した論文 [1] をレビューする。その後、現実的な実験状況に対応した有限時間で量子測定をした場合にもつれ度がどのように変化するかを理論的に解析する。

1 イントロダクション

量子力学と一般相対性理論を融合的に理解できる量子重力理論は多くの候補となる理論が提唱されているが、統一的な解釈は未完成であり、実験的な検証もされていない。この問題に関して、ファインマンは重力の量子的な重ね合わせについての思考実験 [2] を行い、それ以降いくつかの実験モデルが提案されている。近年の Bose らによる提案 [3] は重力によって誘起されたエンタングルメントを実験的に検証する方法であり、ファインマンの思考実験の現実的なアプローチであると解釈できる。

エンタングルメントは古典的な枠組みでは説明することができない、量子的な性質の代表例である。重力によって誘起されたエンタングルメントは未だ観測されたことはないが、検証することができれば量子重力理論の構築に向けて大きな一歩となる。しかし重力相互作用は非常に小さいので、重力の量子力学的性質を検証するためには、より質量が大きい物体を量子状態にすることが求められる [4]。この問題に対して、オプトメカ系と呼ばれる懸架鏡とレーザー光から構成される量子制御システムが有効とされている。オプトメカ系は近年の物理学・工学・光学・材料科学などの横断分野の急速な発達により、近い将来 mg スケールの巨視的鏡の量子状態が実現することが期待されている [5]。

本論文では二つのオプトメカ系において、重力相互作用で結合する 2 枚の鏡の間に生じるエンタングルメントについて議論する。最初に先行研究 [1] に関するレビューを行う。その後、実際の実験と同様に有限の測定時間を考慮した場合にシステム誤差と統計的な誤差を含むもつれ度の時間変化を報告する。

2 定式化

本発表で用いるオプトメカ系のシステムは文献 [1] の Fig1 に準じる。

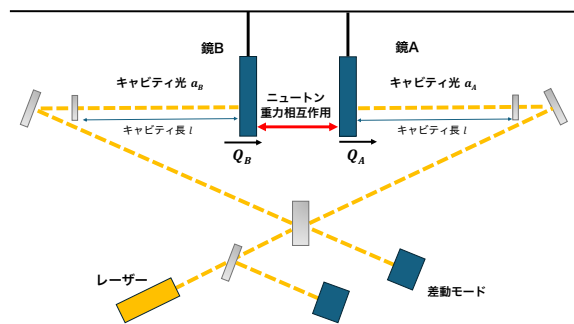


図 1: オプトメカ系の概略。出力光の差動モードと同相モードを右下の検出器でそれぞれ測定する。

二つの重力相互作用で結合する懸架鏡と二つのキャビティ光を考える。この系のハミルトニアンは

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \frac{\hat{P}_A^2}{2m} + \frac{1}{2}m\Omega^2\hat{Q}_A^2 + \frac{\hat{P}_B^2}{2m} + \frac{1}{2}m\Omega^2\hat{Q}_B^2 \\ & + \hbar\omega_c\hat{a}_A^\dagger\hat{a}_A + \frac{\hbar\omega_c}{l}\hat{Q}_A\hat{a}_A^\dagger\hat{a}_A \\ & + \hbar\omega_c\hat{a}_B^\dagger\hat{a}_B + \frac{\hbar\omega_c}{l}\hat{Q}_B\hat{a}_B^\dagger\hat{a}_B \\ & + i\hbar E\left(e^{-i\omega_L t}\frac{\hat{a}_A^\dagger + \hat{a}_B^\dagger}{\sqrt{2}} - e^{i\omega_L t}\frac{\hat{a}_A + \hat{a}_B}{\sqrt{2}}\right) \\ & - \frac{Gm^3}{L}\frac{1}{1 - (\hat{Q}_B - \hat{Q}_A)/L} \end{aligned} \quad (1)$$

と書ける。ここで \hat{Q}_j と \hat{P}_j ($j = A, B$) はそれぞれ鏡 A, B の位置演算子と運動量演算子であり、 $[\hat{Q}_j, \hat{P}_k] = i\hbar\delta_{j,k}$ を満たす。 Ω 、 m はそれぞれ鏡の共振周波数と質量である (鏡 A、鏡 B で共通)。 \hat{a}_j と \hat{a}_j^\dagger ($j = A, B$)

はそれぞれキャビティ光の生成消滅演算子であり、 $[\hat{a}_j, \hat{a}_j^\dagger] = 1$ を満たす。 l はキャビティ長、 ω_c はキャビティ光の共振周波数である。6、8 項目は、鏡と光の相互作用を表し、光の輻射圧光による共振器長の変化から求めることができる。 ω_L はレーザーの周波数であり、レーザーパワー P_{in} とキャビティ光の減衰率 κ を用いてレーザー振幅は $E = \sqrt{P_{in}\kappa/\hbar\omega_L}$ と表すことができる。この項は入力レーザーによる電場を表している。最後の項は二つの懸架鏡の間に作用する重力相互作用を表しており、 L は二つの鏡の間の距離、 G は重力定数である。

最初に同相モードと差動モードを導入する。それぞれ (+, -) の添え字で表され、次の式で定義される。

$$\begin{aligned}\hat{Q}_\pm &= \frac{\hat{Q}_A \pm \hat{Q}_B}{\sqrt{2}}, & \hat{P}_\pm &= \frac{\hat{P}_A \pm \hat{P}_B}{\sqrt{2}}, \\ \hat{a}_\pm &= \frac{\hat{a}_A \mp \hat{a}_B}{\sqrt{2}}\end{aligned}\quad (2)$$

キャビティ光 A と B はそれぞれ反対方向に運動しているので、鏡の位置と運動量とは違い、 \hat{a}_\pm の右辺の分子の符号は \pm ではなく \mp であることに注意する。次に各演算子の一次の摂動展開 $\hat{Q}_j = \bar{Q}_j + \delta\hat{Q}_j$, $\hat{P}_j = \bar{P}_j + \delta\hat{P}_j$, $\hat{a}_j = \bar{a}_j + \delta\hat{a}_j$ を行い、上式に代入する。ここでバー付きは C-number であり、摂動項は Q-number であることに注意する。実験セットアップの対象性から $(\bar{Q}_B, \bar{P}_B, \bar{a}_B) = (-\bar{Q}_A, -\bar{P}_A, \bar{a}_A)$ という条件を課す。また、鏡の位置演算子と運動量演算子を次のように無次元化する。

$$\hat{q}_\pm = \sqrt{\frac{2m\Omega_\pm}{\hbar}}\hat{Q}_\pm, \quad \hat{p}_\pm = \sqrt{\frac{2}{m\hbar\Omega_\pm}}\hat{P}_\pm \quad (3)$$

この条件のもとで、一次摂動に対するランジュバン方程式は

$$\delta\dot{\hat{q}}_\pm = \Omega_\pm \delta\hat{p}_\pm, \quad (4)$$

$$\delta\dot{\hat{p}}_\pm = -\Omega_\pm \delta\hat{q}_\pm - 2g_\pm \delta\hat{x}_\pm - \gamma_m \delta\hat{p}_\pm + \sqrt{2\gamma_m} \hat{p}_\pm^{in}, \quad (5)$$

$$\delta\dot{\hat{x}}_\pm = -\frac{\kappa}{2} \delta\hat{x}_\pm - \Delta \delta\hat{y}_\pm + \sqrt{\kappa} \hat{x}_\pm^{in} \quad (6)$$

$$\delta\dot{\hat{y}}_\pm = -2g_\pm \delta\hat{q}_\pm + \Delta \delta\hat{x}_\pm - \frac{\kappa}{2} \delta\hat{y}_\pm + \sqrt{\kappa} \hat{y}_\pm^{in} \quad (7)$$

と得られる。ここで周波数は

$$\Omega_+ = \Omega, \quad \Omega_- = \Omega \sqrt{1 - \frac{4Gm}{L^3\Omega^2}} \quad (8)$$

と定義した。また、生成消滅演算子の摂動一次の項の代わりに $\delta\hat{x}_\pm = e^{-i\theta} \delta\hat{a}_\pm + e^{i\theta} \delta\hat{a}_\pm^\dagger$, $\delta\hat{y}_\pm = -i(e^{-i\theta} \delta\hat{a}_\pm - e^{i\theta} \delta\hat{a}_\pm^\dagger)$ を導入した。それぞれレーザー光の振幅直交変数 (the optical amplitude quadrature)、位相直交変数 (the optical phase quadrature) と呼ばれる。

またノイズ項については、 \hat{p}_\pm^{in} は鏡のフォノンノイズ、 \hat{x}_\pm^{in} , \hat{y}_\pm^{in} は入力レーザー光のノイズである。これらのランダムノイズ項は次の揺動散逸定理を満たす。

$$\langle \hat{p}_\pm^{in} \rangle = \langle \hat{x}_\pm^{in} \rangle = \langle \hat{y}_\pm^{in} \rangle = 0, \quad (9)$$

$$\frac{1}{2} \langle \{\hat{p}_\pm^{in}(t) \hat{p}_\pm^{in}(t')\} \rangle \sim (2n_{th}^\pm + 1) \delta(t - t'), \quad (10)$$

$$\langle \hat{x}_\pm^{in}(t) \hat{x}_\pm^{in}(t') \rangle = (2N_{th} + 1) \delta(t - t') \quad (11)$$

$$\langle \hat{y}_\pm^{in}(t) \hat{y}_\pm^{in}(t') \rangle = (2N_{th} + 1) \delta(t - t'). \quad (12)$$

また $\Delta = \omega_L - \omega_c(1 + \frac{\bar{Q}}{\sqrt{2}l})$ は detuning を表し、実験的には l を調整することで 0 にすることができる。次章以降では簡単のため $\Delta = 0$ とする。 n_{th}^\pm は熱フォノン数であり、 $n_{th}^\pm = (e^{\hbar\Omega_\pm\gamma_m/k_B T} - 1)^{-1}$, N_{th} は光子数であり、 $N_{th} = (e^{\hbar\omega_c/k_B T} - 1)^{-1}$ と定義した。

3 フーリエ空間での解析・もつれ度

フーリエ変換を $f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{i\omega t}$ と定義すると、ランジュバン方程式の解は次の通りである。

$$\begin{aligned}\delta\hat{q}_\pm(\omega) &= \frac{\Omega_\pm}{\Omega_\pm^2 - i\gamma_m\omega - \omega^2} \left(\sqrt{2\gamma_m} \hat{p}_\pm^{in}(\omega) - \frac{2ig_\pm\sqrt{\kappa}}{\omega + i\kappa/2} \right),\end{aligned}\quad (13)$$

$$\delta\hat{p}_\pm(\omega) = -\frac{i\omega}{\Omega_\pm} \delta\hat{q}_\pm(\omega), \quad (14)$$

$$\delta\hat{x}_\pm(\omega) = \frac{i\sqrt{\kappa}}{\omega + i\kappa/2} \hat{x}_\pm^{in}(\omega), \quad (15)$$

$$\delta\hat{y}_\pm(\omega) = \frac{i}{\omega + i\kappa/2} (-2g_\pm \delta\hat{q}_\pm(\omega) + \sqrt{\kappa} \hat{y}_\pm^{in}(\omega)) \quad (16)$$

次にもつれの指標となるもつれ度について議論する。もつれ度はフーリエ空間において正準交換関係を満たす二つの正準演算子の不確定性とコーシーシュワルツの不等式から導出することができる式であり、次式 $\langle E(\omega) \rangle$ で定義される。 $\langle E(\omega) \rangle < 1$ を下回るとそ

の系の状態はもつれていると判定できる [6, 7]。

$$\langle E(\omega) \rangle = \frac{\langle \hat{R}_{\delta\hat{q}_+}(\omega)^2 \rangle \langle \hat{R}_{\delta\hat{p}_-}(\omega)^2 \rangle \Omega_- / \Omega}{|[\langle \hat{R}_{q_A}(\omega)^2 \rangle, \langle \hat{R}_{p_A}(\omega)^2 \rangle]|^2} < 1 \quad (17)$$

ここで $q_A = (\delta\hat{q}_+(\omega) + \delta\hat{q}_-\sqrt{\Omega/\Omega_-})/2$, $p_A = (\delta\hat{p}_+(\omega) + \delta\hat{p}_-\sqrt{\Omega/\Omega_-})/2$ とする。 $\hat{R}_A(\omega)$ はフーリエ空間でのエルミート演算子であり、 $\hat{R}_A(\omega) = (\hat{A}(\omega) + \hat{A}(-\omega))/2$, ($A = \delta\hat{q}_+, \delta\hat{p}_-$) と定義する。ここで [1] に示される最適化されたパラメータを用いると、

$$\langle E(\omega) \rangle = 0.2019 \quad (18)$$

となる。この数値は無限に長い時間で測定をした、理想的な場合のもつれ度であるということに注意する。

4 有限測定時間での評価

次に有限時間で離散的なデータを用いた場合を考える。フーリエ変換は

$$\delta\hat{q}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \delta\hat{q}(\omega) e^{-i\omega t} \quad (19)$$

$$\delta\hat{q}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \delta\hat{q}(t) e^{i\omega t} \quad (20)$$

で定義される。一方実験で $-T/2 \sim t \sim T/2$ の間に $\delta\hat{q}(t)$ を測定すると、 $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$ として、

$$\delta\hat{q}_d(t, T) = \sum_n \delta\hat{q}_d(\omega_n) \frac{e^{-i\omega_n t}}{\sqrt{T}} \quad (21)$$

$$\delta\hat{q}_d(\omega_n, T) = \int_{-T/2}^{T/2} dt \delta\hat{q}_d(t) \frac{e^{i\omega_n t}}{\sqrt{T}} \quad (22)$$

と表される。ここで直交関係は

$$\int_{-T/2}^{T/2} \frac{e^{-i\omega_n t}}{\sqrt{T}} \frac{e^{-i\omega'_n t}}{\sqrt{T}} dt = \delta_{m,n} \quad (23)$$

となる。無限に長い測定時間の場合と有限測定時間の場合を関係づける式は以下の様になる。測定時間内のある点 t における測定の相関は測定時間が有限の場合と無限の場合で等しくなる。

$$\langle \delta\hat{q}_d(t, T) \delta\hat{q}_d(t', T) \rangle = \langle \delta\hat{q}(t) \delta\hat{q}(t') \rangle \quad (24)$$

有限測定時間における系統誤差を含むもつれ度 $E^d(\omega_n)$ は次式のように Eq. (17) の一次摂動の項を

上記の方法で置き換えたもので定義する。

$$\langle E^d(\omega_n, T) \rangle = \frac{\langle \hat{R}_{\delta\hat{q}_{d+}}(\omega_n, T)^2 \rangle \langle \hat{R}_{\delta\hat{p}_{d-}}(\omega_n, T)^2 \rangle \Omega_- / \Omega}{|[\langle \hat{R}_{q_A}(\omega)^2 \rangle, \langle \hat{R}_{p_A}(\omega)^2 \rangle]|^2} \quad (25)$$

ここで Eq. (17) の分母は交換関係で定義されているので、測定時間に依らないと考えることができる。

次に、もつれ度の統計誤差を計算する。ガウス分布を仮定すると、 n 回測定した場合の統計誤差 $\Delta E_{stat}^{d(n)}(\omega)$ は 1 回測定した場合の統計誤差 $\Delta E_{stat}^{d(1)}(\omega)$ を用いて

$$\Delta E_{stat}^{d(n)}(\omega_n, T) = \frac{\Delta E_{stat}^{d(1)}(\omega_n, T)}{\sqrt{n}} \quad (26)$$

と表される。ここで

$$E^d(\omega_n, T) = \frac{\hat{R}_{q_{d+}}(\omega_n, T)^2 \hat{R}_{p_{d-}}(\omega_n, T)^2 \Omega_- / \Omega}{|[\langle \hat{R}_{q_A}(\omega)^2 \rangle, \langle \hat{R}_{p_A}(\omega)^2 \rangle]|^2} \quad (27)$$

という期待値を取る前の形で定義すると、一回測定した場合の統計誤差は次式で書くことができる。

$$\Delta E_{stat}^{d(1)}(\omega_n, T) = \sqrt{\left\langle \left(E^d(\omega_n, T) - \langle E^d(\omega_n, T) \rangle \right)^2 \right\rangle} \quad (28)$$

ここでガウス分布に従う確率分布 A, B, C, D は $\langle ABCD \rangle = \langle AB \rangle \langle CD \rangle + \langle AC \rangle \langle BD \rangle + \langle AD \rangle \langle BC \rangle$ を満たす。今、 $A = B = C = D$ とすると $\langle A^4 \rangle = 3\langle A^2 \rangle^2$ とできる。これを用いると Eq. (28) は

$$\Delta E_{stat}^{d(1)}(\omega_n, T) = 2\sqrt{2} \langle E^d(\omega_n, T) \rangle \quad (29)$$

となる。

5 結果

Eq.(18) のパラメータにおいて、有限測定時間 T に対する系統誤差を含むもつれ度 Eq.(25) を示す。

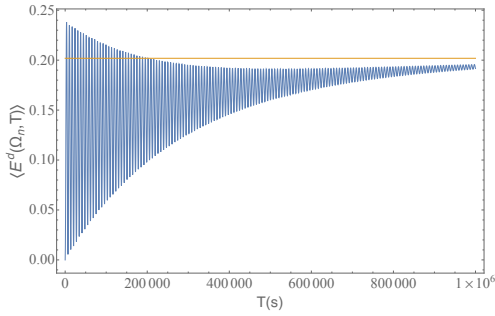


図 2: 有限測定時間 T (s) に対する系統誤差を含むもつれ度 $\langle E^d(\omega_n = \Omega, T) \rangle$ の変化 (青色)。黄色の横線は測定時間を無限とした理想的なもつれ度 Eq.(18) である。

図 2 の通り、系統誤差を考慮したもつれ度は T [s] が小さい領域では激しく振動し、理想的なもつれ度に対して下から漸近し、 T [s] を十分大きくすることで収束する。これは有限時間での測定ではよりもつれているように見えてしまうことを意味する。 T [s] が比較的小さい時、振動の幅が大きい領域があるが、ここでは系統誤差が大きく正確にもつれ度を測れていないと推測できる。

次に有限測定時間 T [s] に対して、系統誤差と統計誤差を含むもつれ度 $\langle E^d(\omega_n, T) \rangle \pm \Delta E_{stat}^{d(n)}(\omega_n, T)$ を数値計算する。ここで測定回数を 10 回とする ($n = 10$)。測定する周波数 ω_n は常に鏡の共振周波数 Ω で固定するものとする。

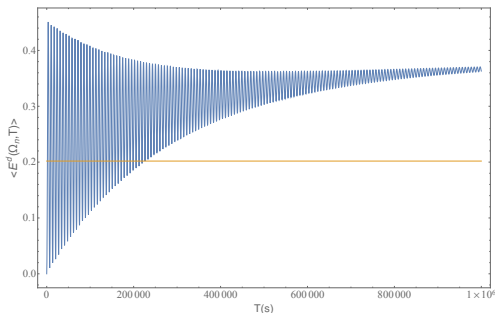


図 3: 有限測定時間 T (s) に対する系統誤差と統計誤差を含むもつれ度 $\langle E^d(\omega_n = \Omega) \rangle$ の変化。青色の線が $\langle E^d(\omega_n, T) \rangle + \Delta E_{stat}^{d(10)}(\omega_n, T)$ 、黄色の横線は測定時間を無限とした理想的なもつれ度 Eq.(18) である。

図 3 は測定回数 10 回の場合における、誤差を含むもつれ度を示している。系統誤差と統計誤差を考慮して

も $E^d(\Omega_n, T)$ は 1 を下回り、もつれていると判定することができる。例として、 $T = 1 \times 10^6$ [s] \sim 11.5[day] 程度の測定を 10 回行う (または同じ精度の実験セットアップを 10 個用意し、同時に測定する) ことで、十分な精度でもつれ度 $E^d(\Omega, T) = 0.1917 \pm 0.1744$ を得ることができる。

6 まとめと展望

本研究では二つの巨視的鏡とキャビティ光で構成されるオプトメカ系において、重力誘起エンタングルメントを数値的に評価した先行研究 [1] をレビューした。その後有限時間で測定した場合のもつれ度を再評価した。十分な測定回数を取ることで、もつれていると判定できる水準を得ることができた。

今後の計画は、今回用いたパラメータと標準量子限界との関係について調査を予定している。

謝辞

三木大輔氏と山本一博氏から本研究の有益なアドバイスを数多くご助言いただきました。厚く御礼申し上げます。また、今年度の若手夏の学校を主催する運営の皆様にも御礼申し上げます。

Reference

- [1] D. Miki, A. Matsumura, K. Yamamoto, Phys.Rev.D **109**, 06490 (2024)
- [2] R. P. Feynman, F. M. Morinigo, and W. G. Wagner, Feynman Lectures on Gravitation (Westview Press, Boulder, 1995).
- [3] S. Bose, A. Mazumdar, Gavin W. Morley, H. Ulbricht, M. Toros, M. Paternostro, A. A. Geraci, P. F. Barker, M.S. Kim, and G. Milburn, Phys. Rev. Lett. **119**, 240401 (2017)
- [4] Y. Chen, Macroscopic quantum mechanics: Theory and experimental concepts of optomechanics, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **46**, 104001 (2013).
- [5] Seth B. Cataño-Lopez, Jordy G. Santiago-Condori, K. Edamatsu, and N. Matsumoto, Phys. Rev. Lett. **124**, 221102 (2020)
- [6] S. Mancini, V. Giovannetti, D. Vitali, and P. Tombesi, Phys. Rev. Lett. **88**, 120401 (2002)
- [7] L. Duan, G. Giedke, J.I.Cirac, P.Zoller, Phys. Rev. Lett. **84**, 2722

重宇 a29

QH系における analog de Sitter での Gravitational
anomaly と Hawking 放射の関係

吉本 吏貢

QH系における analog de Sitter での Gravitational anomaly と Hawking 放射の関係

吉本 吏貢 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

ブラックホールの Hawking 放射と gravitational anomaly の関係は、Wilczek と Robinson によって明らかにされた。本研究では、この gravitational anomaly を用いた Fulx の計算を量子ホール (QH) 系における de Sitter 時空に適用する。この系は chiral であるため、Wilczek と Robinson の手法で仮定されていた horizon 近傍の ingoing mode を無視する条件を課す必要はない。また、この方法は通常の de Sitter 時空では定曲率であることから適用できなかったが、この系では de Sitter 時空が 2 つの Minkowski 時空に挟まれた構造をしており、境界での anomaly の相殺を考えることにより Flux の境界条件が得られる。この境界条件のもと計算を行うことにより、Gibbons-Hawking 温度が再現されることをみる。

1 Introduction

ブラックホールは古典的には何も放出することはないが場の量子論を考えると Hawking 放射を行っている。しかし、その温度の低さゆえに実際のブラックホールからの放射を観測することは難しい。Hawking 放射は Bogoliubov 変換 [1] や tunneling method [2] など様々な方法で研究されてきた。Anomaly の関係するものでは Christensen, Fulling による Trace anomaly を用いた方法 [3] が有名であるが、ここでは Wilczek と Robinson らが発見した gravitational anomaly を用いた方法 [4] に着目する [4]。この方法では horizon 近傍の ingoing mode を無視することで現れる anomaly を一般座標変換不変性を保つために相殺するような Flux として Hawking 放射が得られる。この方法を QH 系における de Sitter 時空 [5, 6] に応用する。QH 系では chiral なエッジモードが存在するが、通常の実験でこのエッジを時間変化させることはできない。エッジが膨張したり収縮したりするような状況を考えて 1+1 次元の曲がった時空の chiral なスカラー場を再現できる。ところで、2次元の重力場中に chiral な場が存在する時は trace anomaly だけでなく gravitational anomaly が存在することが知られている。今回はこの anomaly を Wilczek と Robinson の方法のように相殺することで Gibbons-Hawking 温度を導出する。

2 Setup

この章では今回使う系について説明する。以下のような左向き of 励起が存在し、中心部分が微雨調する QH 系のエッジを考える。

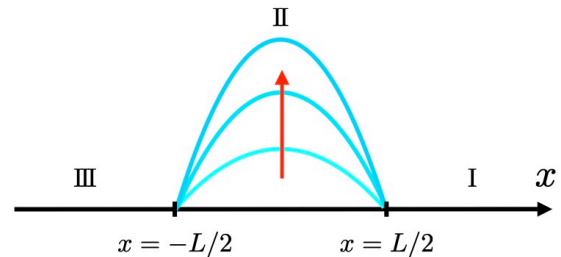


図 1: Schematic picture of an expanding edge in QH systems. Regions I and III are static and region II is the expanding region.

この時各領域での analog metric は

$$\text{Region III: } x_{\text{III}} \leq -L/2, \quad ds^2 = -dx_{\text{III}}^+ dx_{\text{III}}^-,$$

$$\text{Region II: } |x| \leq L/2, \quad ds^2 = -e^{2\Theta(t)} dx^+ dx^-,$$

$$\text{Region I: } L/2 \leq x_{\text{I}}, \quad ds^2 = -dx_{\text{I}}^+ dx_{\text{I}}^-,$$

で与えられる。ここで $e^{\Theta(t)}$ は領域 II でのスケール因子である。また、 $x_{\text{I,III}}^{\pm} = t_{\text{I,III}} \pm x_{\text{I,III}}$, $x^{\pm} = t \pm x$ とした。領域 II での conformal flat な座標は $x = \pm L/2$

の境界上で不連続であるが、この境界での接続条件を考えることにより、 $x_I^\pm, x_{\text{III}}^\pm$ を II の領域に拡張する。計算は省略するが、 $x_I^\pm, x_{\text{III}}^\pm$ で示された II の計量は

$$ds_{\text{II}}^2 = -e^{2\Theta(t)} dx^+ dx^- \\ = -\exp [2\Theta(t) - \Theta(x^+ - L/2) - \Theta(x^- + L/2)] dx_I^+ dx_I^- \quad (1)$$

$$ds_{\text{II}}^2 = -e^{2\Theta(t)} dx^+ dx^- \\ = -\exp [2\Theta(t) - \Theta(x^+ + L/2) - \Theta(x^- - L/2)] dx_{\text{III}}^+ dx_{\text{III}}^- \quad (2)$$

また、II の領域で I, III の座標で貼られた領域が重なる時はその間の座標変換を考えることができ、

$$x_I^+ = \Phi [-L + \Phi^{-1} [x_{\text{III}}^+ + \Phi [L/2]]] - \Phi [-L/2], \quad (3)$$

$$x_{\text{III}}^- = \Phi [-L + \Phi^{-1} [x_I^- + L + \Phi [-L/2]]] - \Phi [L/2] + L. \quad (4)$$

となる。ここで

$$\Phi [x] = \int_0^x dy e^{\Theta(y)}. \quad (5)$$

とした。

今回用いる de Sitter 時空は II の領域での共形因子が

$$e^{\Theta(t)} = \frac{1}{\cos(Ht)}. \quad (6)$$

で与えられる。これを上で計算した $\Phi [x]$ と計量に代入すると

$$\Phi(x) = \frac{1}{2H} \ln \frac{1 + \sin Hx}{1 - \sin Hx}, \quad (7)$$

$$\Phi^{-1}(x) = \frac{1}{H} \arcsin \tanh Hx. \quad (8)$$

$$ds_{\text{II}}^2 = -\frac{dx_I^+ dx_I^-}{\cosh^2 [H(x_I - L/2)]}, \quad (9)$$

$$ds_{\text{II}}^2 = -\frac{dx_{\text{III}}^+ dx_{\text{III}}^-}{\cosh^2 [H(x_{\text{III}} + L/2)]}. \quad (10)$$

が得られる。

3 Calculation and discussion

QH 系は (1+1)D の de Sitter 時空中での chiral なスカラー場を再現している。このような時には以下のように trace anomaly だけでなく gravitational anomaly が存在することが知られている [7, 8]。

$$T_\alpha^\alpha = \frac{R}{48\pi}, \quad (11)$$

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu = \frac{\epsilon_{\mu\nu} \partial^\mu R}{96\pi\sqrt{-g}}, \quad (12)$$

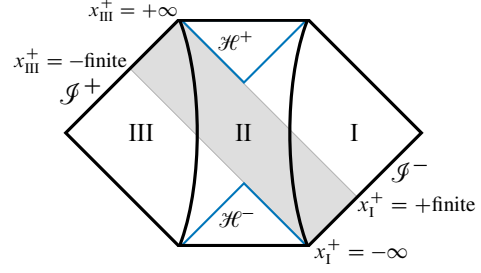


図 2: Penrose diagram for the QH system with a de Sitter edge region II. A future horizon and a past horizon exist (time-symmetric eternal case). The vacuum condition is imposed on the past null infinity \mathcal{G}^- in region I.

T_ν^μ はエネルギー運動量テンソル (EMT) の期待値である。ここでは (3) を I, III, II の $x_I^\pm, x_{\text{III}}^\pm$ で拡張した領域 A, B で解き、それらの境界条件を gravitational anomaly の相殺という観点から得る。

は I, III の Minkowski 時空の領域では anomaly はないので以下ようになる。

$$\partial_- T_{i+}^- = 0, \quad \partial_+ T_{i-}^+ = 0. \quad (13)$$

($j = I, \text{III}$)。これを解くと

$$T_{i+}^- = -2T_{i++} = F_i [x_i^+], \quad T_{i-}^+ = -2T_{i--} = G_i [x_i^-], \quad (14)$$

ここで $F_i [x_i^+]$ は x_i^+ の任意関数で $G_i [x_i^-]$ は x_i^- の任意関数である。

A, B の領域を考えると (3) は

$$T_{j\alpha}^\alpha = \frac{R}{48\pi}, \quad \nabla_\mu T_{j\nu}^\mu = \frac{\epsilon_{\mu\nu} \partial^\mu R}{96\pi\sqrt{-g_j}}, \quad (j = A, B). \quad (15)$$

ここで 0 でないクリストッフェル記号は $\Gamma_{j++}^+ = h_j \partial_+ (1/h_j)$ $\Gamma_{j--}^- = h_j \partial_- (1/h_j)$ である。ただし、 $j = A, B, h_A := \cosh^2 [H(x_I - L/2)], h_B := \cosh^2 [H(x_{\text{III}} + L/2)]$ 。これを解くと

$$T_{A+}^- = -2 \cosh^2 [H(x_I - L/2)] T_{A++} \\ = f_A [x_I^+] \cosh^2 [H(x_I - L/2)], \quad (16)$$

$$T_{A-}^+ = -2 \cosh^2 [H(x_I - L/2)] T_{A--} \\ = \left[\frac{H^2}{24\pi} \theta(-x_I + L/2) + a \right] \\ \times g_A [x_I^-] \cosh^2 [H(x_I - L/2)], \quad (17)$$

$$\begin{aligned} T_{B+}^- &= -2 \cosh^2 [H(x_{\text{III}} + L/2)] T_{B++} \\ &= f_B [x_{\text{III}}^+] \cosh^2 [H(x_{\text{III}} + L/2)] \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} T_{B-}^+ &= -2 \cosh^2 [H(x_{\text{III}} + L/2)] T_{B--} \\ &= \left[\frac{H^2}{24\pi} \theta(x_{\text{III}} + L/2) + b \right] \\ &\quad \times g_B [x_{\text{III}}^-] \cosh^2 [H(x_{\text{III}} + L/2)], \end{aligned} \quad (19)$$

a, b は積分定数。 $f_j [x_j^+], g_j [x_j^-]$ はそれぞれ x_j^+, x_j^- の任意関数である。

次に境界条件を考える。I, または III の領域での EMT は以下のように書ける。

$$T_{\text{I tot } \nu}^{\mu} = T_{\text{I } \nu}^{\mu} [1 - \theta(-x_{\text{I}} + L/2)] + T_{\text{A } \nu}^{\mu} \theta(-x_{\text{I}} + L/2). \quad (20)$$

また、一般座標変換での有効作用の変化は

$$-\delta_{\lambda} W = \int d^2 x \sqrt{-g} \lambda^{\nu} \nabla_{\mu} T_{\text{I tot } \nu}^{\mu}, \quad (21)$$

λ^{ν} は一般座標変換のパラメーターである。有効作用が一般座標変換で不変であることを要請すると、 λ^{ν} の係数は 0 にならなければならない。これを具体的に計算することにより $x = L/2$ での境界条件

$$\begin{aligned} T_{\text{A}++} - T_{\text{I}++} &= -\frac{H^2}{48\pi}, \\ T_{\text{A}--} - T_{\text{I}--} &= 0, \end{aligned} \quad (22)$$

と $x = -L/2$ での境界条件

$$\begin{aligned} T_{\text{III}++} - T_{\text{B}++} &= \frac{H^2}{48\pi}, \\ T_{\text{III}--} - T_{\text{B}--} &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

が得られる。(14),(16),(18)を見るとここで求めたい量である T_{i++} は x_i^+ にしか依存しないことがわかる。そのため I の領域の \mathcal{S}^- で初期条件を与えると因果的に繋がっている III の領域での EMT は決まる。 \mathcal{S}^- で ingoing flux がない場合を考えると III の左向きの flux は (22),(23) の境界条件と (4) を使うと

$$\begin{aligned} T_{\text{III}++} &= -\frac{H^2}{48\pi} \csc^2 \left[HL + \arccos \left[\frac{\cosh Hx_{\text{III}}^+ \sin \frac{HL}{2} + \sinh Hx_{\text{III}}^+}{\cosh Hx_{\text{III}}^+ + \sin \frac{HL}{2} \sinh Hx_{\text{III}}^+} \right] \right] \\ &\quad \times \frac{\cos^2 \frac{HL}{2}}{(\cosh Hx_{\text{III}}^+ + \sin \frac{HL}{2} \sinh Hx_{\text{III}}^+)^2} + \frac{H^2}{48\pi}. \end{aligned} \quad (24)$$

図 3 を見ると $T_{\text{III}++}$ は $x_{\text{III}}^+ \rightarrow +\infty$ で $H^2/(48\pi)$ に近づき、これを黒体放射の flux と比較するとその温度は $T = \frac{\alpha}{2H}$ であることがわかる。 $x_{\text{III}}^+ < 0$ の領域では $T_{\text{III}++} < 0$ で発散するため負エネルギーの flux が左に流れていることになるが、これは past horizon の影響であると考えられる。

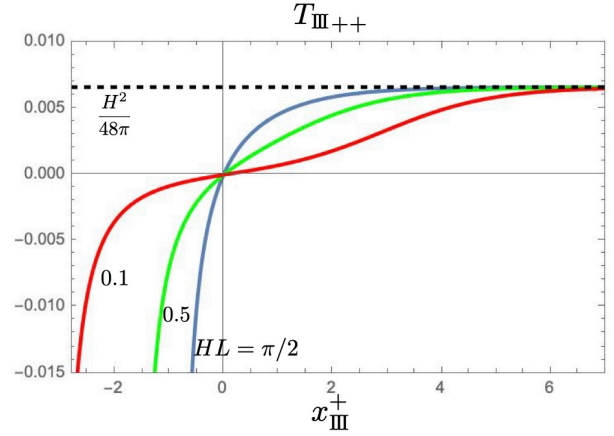


図 3: x_{III}^+ dependence of $T_{\text{III}++}$ in region III with different values of L ($H = 1$). For $x_{\text{III}}^+ \rightarrow \infty$, $T_{\text{III}++}$ approaches to $H^2/(48\pi)$ which corresponds to the outgoing thermal flux with the Gibbons-Hawking temperature $T_{\text{H}} = H/(2\pi)$. For $x_{\text{III}}^+ < 0$, the left-moving flux is negative which represents negative energy density. For a finite negative x_{III}^+ , the flux negatively diverges.

4 Conclusion

ここでは Robinson と Wilczek の gravitational anomaly を用いた方法を QH 系における de Sitter 時空に適用した。通常の de Sitter 時空ではこの方法は用いることができないが、QH 系では Minkowski 時空の領域と de Sitter 時空の領域の境界上で anomaly が 0 でないために境界条件として gravitational anomaly の効果を取り込むことができた。その結果、 $x_{\text{III}}^+ \rightarrow +\infty$ で Gibbons-Hawking 温度が再現されることがわかった。

今回は境界条件を簡単にするために future/past horizon の両方が存在する系を用いたが、 $T_{\text{III}++} < 0$ での発散は past horizon の影響であると考えられるので future horizon に起因する flux を調べたいのであれば図 4 のように future horizon のみが存在する場合の計算が有効であると考えられる。

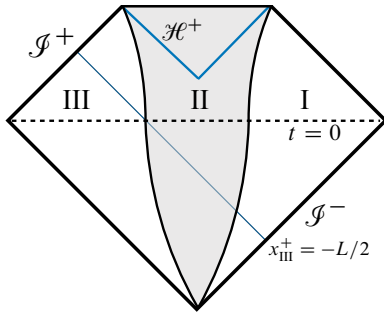


図 4: Penrose diagram for non-eternal case that corresponds to black hole formation via gravitational collapse.

Reference

- [1] S. W. Hawking. Particle Creation by Black Holes. *Commun. Math. Phys.*, 43:199–220, 1975. [Erratum: *Commun.Math.Phys.* 46, 206 (1976)].
- [2] Maulik K. Parikh and Frank Wilczek. Hawking radiation as tunneling. *Phys. Rev. Lett.*, 85:5042–5045, 2000.
- [3] S. M. Christensen and S. A. Fulling. Trace Anomalies and the Hawking Effect. *Phys. Rev. D*, 15:2088–2104, 1977.
- [4] Sean P. Robinson and Frank Wilczek. A Relationship between Hawking radiation and gravitational anomalies. *Phys. Rev. Lett.*, 95:011303, 2005.
- [5] Masahiro Hotta, Yasusada Nambu, Yuuki Sugiyama, Kazuhiro Yamamoto, and Go Yusa. Expanding edges of quantum Hall systems in a cosmology language: Hawking radiation from de Sitter horizon in edge modes. *Phys. Rev. D*, 105(10):105009, may 2022.
- [6] Yasusada Nambu and Masahiro Hotta. Analog de Sitter universe in quantum Hall systems with an expanding edge. *Phys. Rev. D*, 107(8):085002, jan 2023.
- [7] Luis Alvarez-Gaume and Edward Witten. Gravitational Anomalies. *Nucl. Phys. B*, 234:269, 1984.
- [8] R. A. Bertlmann. *Anomalies in quantum field theory*. 1996.

重宇 a30

天体活動が宇宙大規模構造に及ぼす影響の数値シミュレーション

小野田 康平

天体活動が構造形成に与える影響

小野田 康平 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

$\text{Ly}\alpha$ の森を用いることで、銀河サーベイよりも遠方の $z \sim 2-3$ の大規模構造を調べることができる。これにより、 S_8 テンションという、CMB と近傍宇宙の観測にある不協和を $z \sim 2-3$ の遠方宇宙で調べることができるのではないかと期待されている。しかし、 $\text{Ly}\alpha$ forest は中性水素の観測であるため、星形成や超新星フィードバック、AGN フィードバックといった天体活動の影響を考慮しなければならない。そこで本発表では、天体活動を考慮した SPH/N 体シミュレーションを実行し、 $\text{Ly}\alpha$ forest の 1D パワースペクトルを測定した。

1 Introduction

現在の宇宙論の課題として S_8 テンションがある。 S_8 とは物質密度揺らぎの振幅を定量化したもので、構造形成の度合いを示すパラメータである。この S_8 には、Planck 衛星による CMB 観測から推定した値と、銀河サーベイでの弱い重力レンズ効果から算出した値とに乖離があるという問題がある。CMB 観測は $z \approx 1100$ の宇宙の観測であり、銀河サーベイは $z < 1$ の近傍宇宙の観測である。弱い重力レンズ効果で得られる S_8 の値は、CMB から得られる値よりも系統的に小さい。これは、現在の宇宙の構造形成が Λ CDM モデルを仮定した場合よりも進行していないことを示唆している。この問題をより明らかにするためには、 $z \approx 1$ よりも高赤方偏移での観測から S_8 を推定することが有効であると考えられる。銀河サーベイよりも高赤方偏移を観測する方法として、Lyman- α の森の利用が挙げられる。 $\text{Ly}\alpha$ forest とは、遠方クェーサーのスペクトルに見られる $\text{Ly}\alpha$ 吸収線の集合である。 $\text{Ly}\alpha$ 吸収線は、光源であるクェーサーと観測者の間に存在する中性水素ガスによって生じるため、スペクトルの吸収線を見ることで遠方にある銀河間物質 (IGM) の構造を調べることができる。しかし、IGM はダークマターとは違い、星形成、超新星フィードバック、AGN フィードバックといった天体活動の複雑な影響を受けて構造形成をする。そのため、 $\text{Ly}\alpha$ forest の観測から、 S_8 といった統計量を制限するためには、天体活動のフィードバックを考慮した宇宙論的構造形成シミュレーションを行い、天体活動が構造形成に与える影響を調べておく必要がある。本発表では、天体活動を考慮したシミュレー

ションを行い、 $\text{Ly}\alpha$ forest の 1D パワースペクトルを測定した。そして先行研究である Nagamine et al. (2021) との比較を行い、特に AGN フィードバックの影響について議論する。

2 Methods

本研究で用いた宇宙論的流体シミュレーションコードと、 $\text{Ly}\alpha$ のスペクトルの解析手法について説明する。

2.1 Simulation

本研究では、Gadget4-Osaka (Okumura and Nagamine 2024) を用いて中性水素の解析を行なった。Gadget4-Osaka は N-body/SPH コードである Gadget4 (Springel 2020) を拡張したものである。このコードでは星形成、超新星フィードバック、AGN フィードバックが実装されている。シミュレーションのボックスサイズは一辺が共同距離で $50h^{-1}\text{Mpc}$ の場合で行なった。ガスとダークマターの粒子数の初期値は 2×256^3 である。初期条件は Planck2018 の観測結果を元にしてしている。

2.2 $\text{Ly}\alpha$ forest の解析

解析には、まず $\text{Ly}\alpha$ 線に対する光学的厚み τ を計算する。ある点 x_i における $\tau(x_i)$ は一般的に次のよ

うに計算される。

$$\tau(x_i) = \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{12} \sum_j n_{\text{HI}}(x_j) \phi(x_i - x_j, v_{zj}, T_j) dl \quad (1)$$

ここで、 $e, m_e, c, f_{12}, n_{\text{HI}}, \phi, v_z, T$ はそれぞれ素電荷、電子の質量、光速、吸収振動強度 ($f_{12} = 0.4162$)、中性水素数密度、Voigt 関数、シミュレーション粒子の視線速度、ガス温度を表す。吸収線のプロファイルは量子的な効果による広がりを持つため、視線方向に対して和をとる必要がある。吸収線のプロファイルを表した関数が Voigt 関数である。引数の $x_i - x_j, v_{zj}$ はそれぞれ、宇宙膨張による赤方偏移、視線速度による吸収線のずれを考慮するためのものである。実際の光学的厚みの計算には、python モジュールである `fake_spectra` (Astrophysics Source Code Library, record ascl:1710.012) を用いた。

光学的厚みを用いて transmitted flux F 、およびその揺らぎ δ_F を定義する。

$$F = e^{-\tau} \quad (2)$$

$$\delta_F = \frac{F}{\langle F \rangle} - 1 \quad (3)$$

本研究では、統計量として δ_F の視線方向の 1 次元パワースペクトル $P_{1D}(k)$ を解析した。

3 Results

今回は先行研究である Nagamine et al. (2021)、および Walther et al. (2018) による観測結果との $z \sim 3$ における 1D パワースペクトルの比較を行なった。Nagamine et al. (2021) では、本研究で用いた Gadget4-Osaka の古いモデルで計算を行っており、AGN フィードバックモデルが実装されていないという違いがある。図 2 を見ると、 $\log_{10} k \ll -1.0$ の小スケールで Nagamine et al. (2021) の結果 (AGN 無し) と比べて、本研究の結果 (AGN 有り) の場合ではパワースペクトルが大きく減衰され、スロープが急になっている。Walther et al. (2018) でも同様の振る舞いが見られるが、本研究ほどの減衰見られない。 $\log_{10} k \leq -2.0$ の大スケールではどちらも同じような振る舞いを見せるが、本研究の結果が系統的に低くなっている。 $-2.0 \leq \log_{10} k \leq -1.0$ のスケールでは Walther et al. (2018) による観測結果が Nagamine

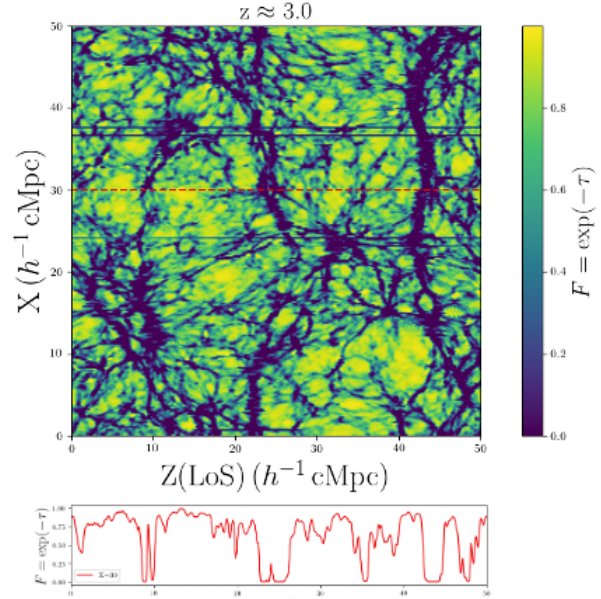


図 1: $z \sim 3.0$ での F のマップの様子

横軸の $Z(\text{LoS})$ が視線方向、ドップラーシフトにより Flux が Z 方向に伸びている。 $X=30$ での赤点線での Flux をプロットすると二段目の図ようになる。

et al. (2021) の観測結果よりも値が大きくなる振る舞いが見られるが、本研究の結果では観測結果と同様の振る舞いが見られる。全体的な $P_{1D}(k)$ の振る舞いとして本研究の結果の方が Nagamine et al. (2021) のものよりも観測結果に近いと言える。ただし、今回の比較では $\text{Ly}\alpha$ forest の解析に一貫性がないことに注意が必要である。Nagamine et al. (2021) ではスペクトル解析コードである `fake_spectra` を用いていないため、解析手法の一貫性が担保されていない。正しい比較のためには、同じデータを用いてそれぞれの解析が同じ結果を返すか確かめる必要がある。

4 Discussion

図 2 を見た通り、AGN 有りの場合小スケールでパワースペクトルが大きく減衰することが特徴的であった。これは、AGN によるガスの吹き飛ばしの効果が小スケールの揺らぎを減衰させたのではないかと考えられる。本研究では AGN フィードバックのみに着目した。しかし、実際に観測からパラメータを制限する場合は、星形成や超新星フィードバックといっ

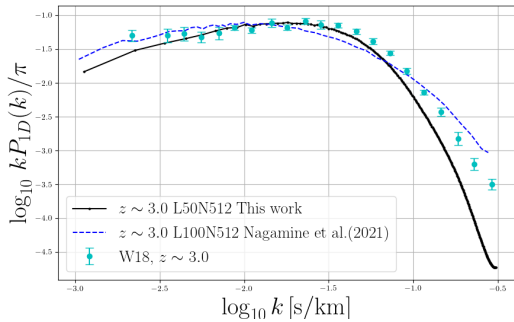


図 2: Power spectrum at $z \sim 3.0$
 黒線が本研究の結果、青の点線が Nagamine et al. (2021) の結果、点は Walther et al. (2018) による観測結果。

た他の様々なフィードバックモデルの強さを変化させ、パラメータを推定する必要がある。

5 Conclusion

本発表では、Lyman α の森を用いた $z = 2 - 3$ での S_8 推定に向けて、天体活動のフィードバックが Lyman α の森の統計量に与える影響を調べた。特に今回は AGN フィードバックの有無に着目し、Nagamine et al. (2021) との比較を行なった。その結果、AGN フィードバックによって、特に小スケールの統計量のプロファイルは大きく変化することがわかった。そのため、Lyman α の森を利用して宇宙論パラメータを制限するためには、天体活動が統計量に与える影響を考慮する必要がある。これには、天体活動そのものの複雑性に加え、フィードバックモデルや、フィードバックの強さの不定性といった複雑性も絡んでくる。シミュレーションのみでこのような不定性を乗り越え、パラメータを制限することは、計算コストの観点から不可能である。そこで、近年機械学習を用いたエミュレーター作成プロジェクトが進行している。本研究は機械学習を用いた Lyman- α のパワースペクトルのエミュレーター作成のための学習用データ作成の一環として行われたものであり、今後は天体活動のフィードバックの強さを様々に変化させた、シミュレーションデータを作成していくことになる。

Reference

- Oku and Nagamine 2024 (arXiv:2401.06324)
- Nagamine, K., Shimizu, I., Fujita, K., Suzuki, N., Lee, K.-G., Momose, R., Mukae, S., Liang, Y., Kashikawa, N., Ouchi, M., & Silverman, J. D. (2021). *The Astrophysical Journal*, 914(66), 20.
- Walther, M., Hennawi, J. F., Hiss, H., et al. 2018, *ApJ*, 852, 22

重字 a31

擬スカラー場の赤方偏移依存性が宇宙複屈折へ及ぼす
効果

吉岡 隼

擬スカラー場の時間進化が宇宙複屈折へ及ぼす効果

吉岡 隼 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) には偏光があり、この偏光は空間反転 (パリティ変換) に対する変換性の違いから E モード、B モードという二つのモードに分解する事ができる。宇宙の一樣等方性からパリティは保存され、各モードは互いに相関を持たない事が予想される。しかし、実際の観測においては二つのモードの相関が確認されており、パリティは保存していない。(Minami & Komatsu 2020)

CMB 偏光におけるパリティが破れる理由として、宇宙の晴れ上がりから現在観測されるまでに生じる偏光面の回転 (宇宙複屈折, Cosmic Birefringence) が考えられている。そして、それを引き起こす物理的過程として擬スカラー場と電磁場との相互作用がある。従来の解析では、CMB 偏光のパワースペクトルを偏光面の回転角が一定という近似のもと求めていた。しかし、一般的な擬スカラー場のモデルにおいては、擬スカラー場の時間変化に伴い回転角も時間変化することが予想されている。時間変化する擬スカラー場はより理論的に妥当であるだけでなく、検出器のもつ不定性と縮退しないという利点も持つ。

本発表は論文 (Galaverni et al. 2023) のレビューである。前半では CMB 偏光の理論と様々な擬スカラー場のモデルについて述べ、後半ではそれらを用いて次世代 CMB 観測、LiteBIRD で擬スカラー場の効果がどの程度検出されるのかを議論する。

1 Introduction

1.1 CMB

CMB (宇宙マイクロ波背景放射) は宇宙の全方位から観測される温度 3K の黒体輻射であり、その温度揺らぎの角度異方性から様々な宇宙論的情報を得ることができる。

CMB 観測では直線偏光の強さも測定されている。直線偏光はパリティ偶な E モード、パリティ奇な B モードという二つのモードに分解することができ、それらのパワースペクトルや相互相関を計算することでさらに多くの情報を得ることができる。

スタンダードな宇宙論モデルでは TB (温度揺らぎ-B モード偏光) 相互相関と EB 相互相関はゼロになることが予想される。パリティが偶の温度揺らぎ、E モード偏光と奇の B モード偏光の間に相関があるということはパリティが破れていることを意味するからだ。しかし、実際の観測データではゼロでない EB 相互相関が確認されている。(図 1)(Minami & Komatsu 2020)

この観測結果を説明するために、パリティを破る物理過程である擬スカラー場 (pseudoscalar field) を以下では考える。

1.2 擬スカラー場

擬スカラー場は電磁場とカップリングし、直線偏光の偏光面を回転させる。

擬スカラー場 ϕ は式 (1) のような形でラグランジアン密度 \mathcal{L} に現れる。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - V(\phi) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{g_\phi}{4}\phi F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \quad (1)$$

V は擬スカラー場のポテンシャル、 $F_{\mu\nu}$ は電磁場テンソル、 $\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ はその双対、 g_ϕ は電磁場と擬スカラー場の相互作用の強さを表す結合定数である。

1、2 項目がスカラー場の発展を、3 項目が電磁場の発展を記述している。4 項目は擬スカラー場と電磁場とのカップリングを記述しており、Chern-Simons 項と呼ばれている。

式 (1) を解くことにより、擬スカラー場を通過した光子の偏光面が

$$\beta = \frac{g_\phi}{2}[\phi(x) - \phi(x_{\text{em}})] \quad (2)$$

回転することがわかる。(Harari & Sikivie 1992)
 $\phi(x)$ は座標 x での擬スカラー場の値である。 $\phi(x_{\text{em}})$ は光子が放射された時の場の値を表しているため、回

転角 β は擬スカラー場の正味の変化量 $\Delta\phi$ に比例している。

1.3 Rotation of polarisation angle

偏光面の角度 β の回転により、CMB 偏光の強度は式 (3) のように変化する。

$$E_\ell^{\text{obs}} \pm iB_\ell^{\text{obs}} = (E_\ell^{\text{rec}} \pm iB_\ell^{\text{rec}}) \exp(\pm 2i\beta) \quad (3)$$

$E_\ell^{\text{obs}}, B_\ell^{\text{obs}}$ はそれぞれ観測された時の E、B モード偏光の強度、 $E_\ell^{\text{rec}}, B_\ell^{\text{rec}}$ はそれぞれ宇宙の晴れ上がり時の E、B モード偏光の強度を表している。

式 (3) より、観測される CMB パワースペクトル C_ℓ は $C_\ell^{\text{EB,rec}} = 0, C_\ell^{\text{TB,rec}} = 0$ のもとで、それぞれ以下のように変化する。

$$C_\ell^{\text{TE,obs}} = C_\ell^{\text{TE,rec}} \cos(2\beta) \quad (4)$$

$$C_\ell^{\text{TB,obs}} = C_\ell^{\text{TE,rec}} \sin(2\beta) \quad (5)$$

$$C_\ell^{\text{EE,obs}} = C_\ell^{\text{EE,rec}} \cos^2(2\beta) + C_\ell^{\text{BB,rec}} \sin^2(2\beta) \quad (6)$$

$$C_\ell^{\text{BB,obs}} = C_\ell^{\text{EE,rec}} \sin^2(2\beta) + C_\ell^{\text{BB,rec}} \cos^2(2\beta) \quad (7)$$

$$C_\ell^{\text{EB,obs}} = \frac{1}{2}(C_\ell^{\text{EE,rec}} - C_\ell^{\text{BB,rec}}) \sin(4\beta) \quad (8)$$

式 (4)-(8) までの結果で特に重要なのは式 (5) と式 (8) で 1.1 章で述べたように擬スカラー場の導入でゼロでない $C_\ell^{\text{EB}}, C_\ell^{\text{TB}}$ が現れることが確認できた。(図 1)

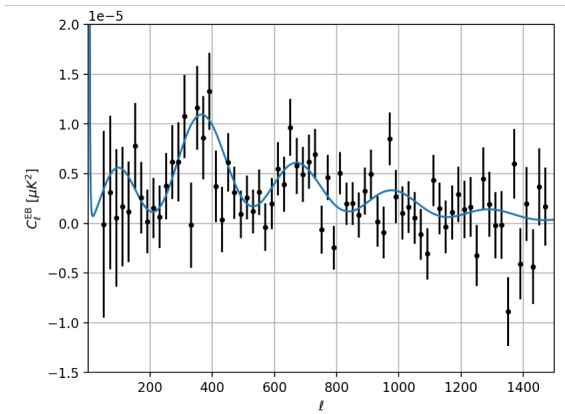


図 1: C_ℓ^{EB} の理論値と観測値
理論値は camb¹ より $\beta = 0.35\text{deg}$ として計算。観測値は Planck DR4² より

ここで偏光面の回転 β を引き起こすのは擬スカラー場だけではないことに注意しなくてはならない。2、3 章でも触れるが、観測機器自体の偏光面に対する回転角の不定性も式 (4)-(8) と同じ効果をもたらす。

2 Theory

擬スカラー場において式 (4)-(8) はあまり正確とは言えない。多くのモデルで擬スカラー場は時間進化し、時間進化する擬スカラー場は観測される C_ℓ に複雑な変化を引き起こすからだ。擬スカラー場の時間進化を考えるためには CMB 偏光を支配する相対論的ボルツマン方程式を考える必要がある。

2.1 Boltzmann equation

偏光に対するボルツマン方程式は式 (9) のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta'_{Q\pm iU}(k, \eta) + ik\mu\Delta_{Q\pm iU}(k, \eta) \\ = -n_e\sigma_T a(\eta)[\Delta_{Q\pm iU}(k, \eta) \\ + \sum_m \sqrt{\frac{6\pi}{5}} \pm 2 Y_2^m S_P^{(m)}(k, \eta)] \\ \mp ig_\phi \phi'(\eta) \Delta_{Q\pm iU}(k, \eta) \end{aligned} \quad (9)$$

$\Delta_{Q\pm iU} = \Delta_Q \pm i\Delta_U$ はストークスパラメータ Q, U の偏光の成分を表している。¹式 (9) を晴れ上がりの時刻 η_{rec} から現時刻 η_0 まで積分したのち、観測される E モード、B モード偏光の成分 $\Delta_{E,\ell}(k, \eta_0), \Delta_{B,\ell}(k, \eta_0)$ に変換すると、

$$\begin{aligned} \Delta_{E,\ell}(k, \eta_0) = \int_{\eta_{\text{rec}}}^{\eta_0} d\eta g(\eta) S_P^{(0)}(k, \eta) \frac{j_\ell(k\eta_0 - k\eta)}{(k\eta_0 - k\eta)^2} \\ \times \cos 2[\alpha(\eta) - \alpha(\eta_0)] \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{B,\ell}(k, \eta_0) = \int_{\eta_{\text{rec}}}^{\eta_0} d\eta g(\eta) S_P^{(0)}(k, \eta) \frac{j_\ell(k\eta_0 - k\eta)}{(k\eta_0 - k\eta)^2} \\ \times \sin 2[\alpha(\eta) - \alpha(\eta_0)] \end{aligned} \quad (11)$$

¹<https://camb.info>

²<https://github.com/LilleJoehs/Observed-EB-Power-Spectrum?tab=readme-ov-file>

¹ストークスパラメータとは E モード、B モードとは異なる偏光のパラメータである。ストークスパラメータはパリティで成分が分解されていない。

k は波数、 η は conformal time、 $S_P^{(0)}(k, \eta)$ はスカラー型揺らぎ²のソース項、 j_ℓ は球ベッセル関数、 $g(\eta) = \tau'(\eta)e^{-\tau(\eta)}$ は visibility function といい、光学的厚み $\tau(\eta)$ で決まる関数である。図 2 からわかるように visibility function は $z \sim 10$ の再電離期と、 $z \sim 1000$ の晴れ上がり期にピークを持っていて、その名の通り見えやすさを表している関数と解釈できる。

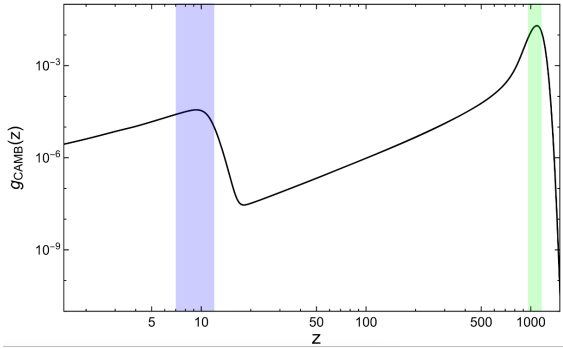


図 2: visibility function (Galaverni et al. 2023)

また、 $\alpha(\eta) = \frac{g_\alpha}{2}\phi(\eta)$ であり、式 (2) からわかるように擬スカラー場により偏光面が α 回転したことを表している。式 (10)、(11) に $\alpha(\eta)$ が $\alpha(\eta) - \alpha(\eta_0)$ という形で入っているため、すべての η で $\alpha(\eta) - \alpha(\eta_0) = \bar{\alpha}$ で一定の時、式 (3) が成立することが少しの計算でわかる。

擬スカラー場の元で $\alpha(\eta)$ は一定では無いため、式 (3) が正確な式ではないというわけである。特に $g(\eta)$ が $z \sim 10$ と $z \sim 1000$ にオーダーで高いピークを持っているため、 $\alpha(\eta_{z \sim 10})$ と $\alpha(\eta_{z \sim 1000})$ が重要となる。ただしここで $z \sim 1000$ での $g(\eta)$ は特に大きいため、近似的に $z \sim 1000$ での積分しか寄与しないとし、さらに $\alpha(\eta) - \alpha(\eta_0) \simeq \alpha(\eta_{\text{rec}}) - \alpha(\eta_0) = \bar{\alpha}$ とすると式 (3) が得られる。

2.2 EDE 擬スカラー場

論文 (Galaverni et al. 2023) では、Axionlike as early dark energy、Axionlike as dark energy、Axionlike as dark matter という 3 つの擬スカラー場のモデルを考えている。本発表では主に Axionlike as early dark energy を取り扱う。

Axionlike as early dark energy は宇宙初期にダーク

エネルギーとしてはたらくようなスカラー場であり、以下のポテンシャルを持つ。

$$V(\phi) = \Lambda^4 \left(1 - \cos \frac{\phi}{f}\right)^n \quad (12)$$

本論文では各パラメータを $n = 2$ 、 $\Lambda = 0.417\text{eV}$ 、 $f = 0.05M_{\text{pl}} = 1.22 \times 10^{17}\text{GeV}$ としている。ポテンシャルは図 3 のようになる。図には比較のため、visibility function も並べてプロットしている。

このポテンシャルのもとで式 (1) を解き、(9) に得られた ϕ を代入することで時間進化する宇宙復屈折を評価することができる。ここで Axionlike as early dark energy は初期にダークエネルギーとしてはたらくため、フリードマン方程式にも式 (12) を代入し、ボルツマン方程式と合わせて解く必要がある。

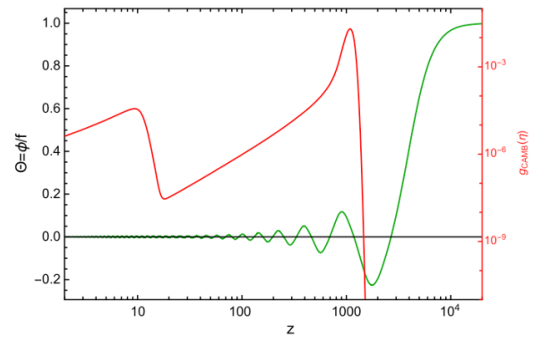


図 3: EDE のポテンシャル (Galaverni et al. 2023)

3 Results

実際に、式 (12) を代入した C_ℓ^{EB} を図 4 に示す。結合定数 g_ϕ が大きいほど C_ℓ^{EB} への寄与が大きいことが読み取れる。また、ラージスケールで式 (3) の近似のもとでの C_ℓ^{EB} と大きくずれていることもわかる。

以降の章で将来観測で予想される C_ℓ を解析していく。

3.1 χ^2 analysis

この章では式 (3) で得られる C_ℓ と EDE 擬スカラー場の元での C_ℓ が将来観測で区別できるのかを χ^2 を用いて検証する。

将来観測における観測値と理論値との実行的なカイ二乗、 χ_{eff}^2 を次のように定義する。式 (10)、(11) で

²今回はベクトル、テンソル型の揺らぎは考えない。

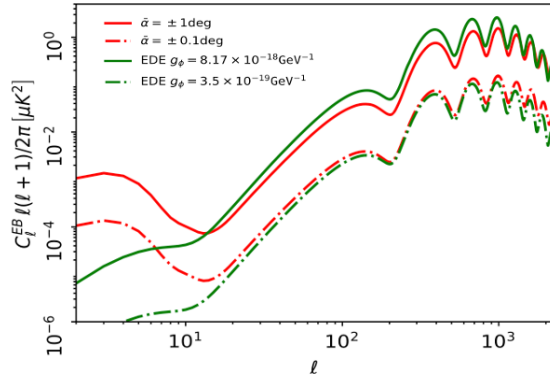


図 4: EDE における C_ℓ^{EB} と式 (3) の近似のもとでの C_ℓ^{EB} (Galaverni et al. 2023)

$\alpha(\eta) - \alpha(\eta_0) = \bar{\alpha} = 0.35 \text{ deg}$ として得られる C_ℓ に次世代 CMB 観測装置である LiteBird で予想されるノイズ N_ℓ を加えたもの

$$C_\ell(\bar{\alpha} = 0.35 \text{ deg}) + N_\ell \quad (13)$$

と、EDE 擬スカラー場での C_ℓ に N_ℓ を加えたもの

$$C_\ell(\text{EDE}) + N_\ell \quad (14)$$

を計算し、式 (13) と式 (14) から χ_{eff}^2 を計算する。ここで結合定数 g_ϕ を決定する必要があるが、 χ_{eff}^2 を最小とするを g_ϕ として決定する。今回の設定では $g_\phi = 1.65 \times 10^{-18} \text{ GeV}^{-1}$ とした。以上の条件で $\chi_{\text{eff}}^2 = 67.3$ となった。 χ^2 が十分大きいため、EDE 擬スカラー場による C_ℓ は式 (3) の回転角一定の近似の元での C_ℓ と LiteBird によって見分けることができると判断できる。

論文 (Galaverni et al. 2023) では g_ϕ の値について様々な考察を行なっているが、ここでは省略する。

3.2 MCMC

この章では擬スカラー場の導入により、1.3 章最後に触れた観測機器の回転角不定性と宇宙複屈折との縮退がどの程度解消されるのかを CosmoMC という MCMC コードを用いて検証する。

MCMC のパラメータとして通常の宇宙論パラメータ $\Omega_c h^2$ 、 $\Omega_B h^2$ 、 n_s 、 A_s 、 τ 、 θ 、EDE 宇宙複屈折のパラメータとして g_ϕ 、観測機器の回転角不定性のパラメータとして α_{miscalib} を加える。MCMC によ

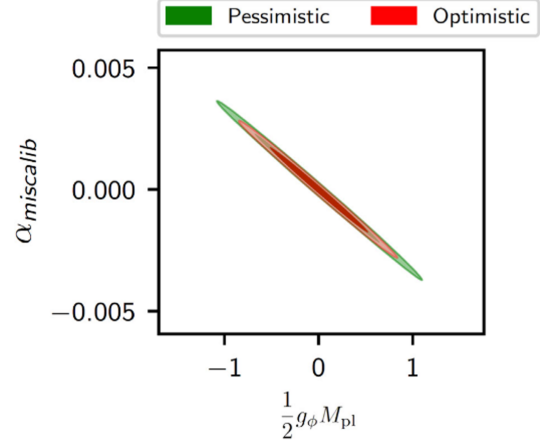


図 5: miscalibration と g_ϕ の縮退 (Galaverni et al. 2023)

て得られる α_{miscalib} と g_ϕ の関係を図 5 に示す。

仮に α_{miscalib} と g_ϕ が完全に縮退していれば図 5 は完全な直線になるため、擬スカラー場によりわずかに縮退が解けたことが読み取れる。

4 Conclusion

本発表では赤方偏移依存性を持つ擬スカラー場が宇宙複屈折にもたらす効果を考察した。EDE 擬スカラー場の時間進化を考慮することで観測される非等方性 C_ℓ に式 (3) の近似のもとでは得られない複雑な効果が現れることがわかった。得られた非等方性から将来観測において宇宙複屈折のモデルを判別できるのかを χ^2 を用いて検証した。また最後に MCMC を用いて宇宙複屈折と観測誤差の縮退がどの程度解けるのかも検証した。

Reference

- Matteo Galaverni, Fabio Finelli, & Daniela Paoletti
2023, Phys. Rev. D, 107, 083529
- Yuto Minami, & Eiichiro Komatsu
2020, Phys. Rev. Lett, 125, 221301
- Diego Harari, & Pierre Sikivie
1992, Phys. Lett. B 289, 67

重宇 a32

暗黒エネルギーと暗黒物質の相互作用による宇宙の加速膨張

堀之内 杏水

暗黒エネルギーと暗黒物質の相互作用による宇宙の加速膨張

堀之内 杏水 (立教大学大学院 理学研究科)

Abstract

本発表は論文 [1] のレビューである。暗黒エネルギーと暗黒物質という2つのスカラー場が相互作用するモデルによって宇宙の加速膨張を説明する。初期条件を適切に与えることで、スカラー場が暗黒エネルギーとして振る舞い、加速膨張を引き起こすことが分かった。

1 Introduction

現在の宇宙におけるエネルギー密度は暗黒エネルギーという未知の物理量がその多くを占めている。しかし暗黒エネルギーの性質については解明されていない部分が多く、これを知ることは宇宙論において重要な課題である。これまでも宇宙定数やスカラー場によって加速膨張を引き起こすクインテッセンなど暗黒エネルギーとして加速膨張を説明するための様々な候補が考えられてきた。本発表では暗黒エネルギーと暗黒物質という2つのスカラー場が相互作用する新たなモデルを提案することで、現在の宇宙の加速膨張を説明する。ポテンシャルとしてヒルトップ型を考え、暗黒物質の振る舞いに対して適切な初期条件を与えることで加速膨張を引き起こす機構について議論する。

2 暗黒エネルギーと暗黒物質が相互作用する系

まず初めに暗黒エネルギー ϕ と暗黒物質 ψ を表す2つのスカラー場が相互作用する系を考える。系のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\psi\partial_\nu\psi - V(\phi, \psi) \quad (1)$$

であり、ポテンシャルの具体形は以下のように設定する。

$$V(\phi, \psi) = \rho_{de}\left\{\left(\frac{\phi}{\Lambda}\right)^2 - 1\right\}^2 + \frac{1}{2}m_\psi^2\psi^2 + \frac{1}{2}\frac{m_{int}^2}{\Lambda^2}\phi^2\psi^2 + \lambda\psi^4 \quad (2)$$

ここで暗黒エネルギーのポテンシャルとしてヒルトップ型を考えた。 ϕ と ψ は一様等方であるとし FLRW

計量を用いる。暗黒エネルギーと暗黒物質はそれぞれ独立に運動する。

3 暗黒エネルギーと暗黒物質の運動方程式

ラグランジアン (1) に対する作用 S を考え、 ϕ と ψ のそれぞれについて変分することで運動方程式を導出する。

$$\delta S = \delta \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\psi\partial_\nu\psi - V(\phi, \psi) \right\} = 0 \quad (3)$$

まず ϕ については、

$$\delta S[\phi] = \int d^4x \left\{ -(\partial_\mu\sqrt{-g})(\partial_\nu\phi)g^{\mu\nu} - \sqrt{-g}(\partial_\nu\phi)\partial_\mu g^{\mu\nu} - \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\partial_\mu\partial_\nu\phi) - \sqrt{-g}\frac{\partial V(\phi, \psi)}{\partial\phi} \right\} \eta = 0 \quad (4)$$

であり、FLRW 計量は

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, a^2(t), a^2(t), a^2(t)) \quad (5)$$

で与えられるので運動方程式は、

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0 \quad (6)$$

となる。ここで H はハッブルパラメータである。 ψ についても変分を行うことで以下の運動方程式を得る。

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \rho_{de}\frac{4\phi}{\Lambda^2}\left(\frac{\phi^2}{\Lambda^2} - 1\right) + \frac{m_{int}^2\psi^2\phi}{\Lambda^2} = 0 \quad (7)$$

$$\ddot{\psi} + 3H\dot{\psi} + m_\psi^2\psi + \frac{m_{int}^2}{\Lambda^2}\phi^2\psi + 4\lambda\psi^3 = 0 \quad (8)$$

初期条件として $m_\psi \gtrsim H_0$ と $\lambda \ll \frac{m_\psi^2}{M_{pl}^2}$ を考える。ここで H_0 は現在のハッブルパラメータの値である。さ

らに $\dot{\phi} = \dot{\psi} = 0$ であるとする。ただし $\psi_i \neq 0$ である。この時 ψ の運動方程式を考えると、左辺第 5 項を無視することができるので、

$$\ddot{\psi} + 3H\dot{\psi} + (m_\psi^2 + \frac{m_{int}^2}{\Lambda^2}\phi^2)\psi = 0 \quad (9)$$

となる。したがって、 ψ の運動は FLRW 背景で周波数 m_ψ を持ち振動は $a^{-\frac{3}{2}}$ で減衰すると考えられる。さらに、 ψ の振動が十分速い場合時間平均 $\langle \psi^2 \rangle$ であるとみなせるので、 ϕ は原点付近で ψ によってトラップされる。ただし、時間が経過すること ψ の振動は減衰するためポテンシャルが ϕ をトラップできなくなる。この時 ϕ は頂点から転がり落ちる。

4 パラメータ空間の解析解

まず初めに $\phi_i \ll \Lambda$ とし、 ϕ と ψ は独立に進化することから $m_{int}\frac{\phi}{\Lambda} \lesssim m_\psi$ を課すと、 ψ の運動方程式は

$$\ddot{\psi} + 3H\dot{\psi} + m_\psi^2\psi = 0 \quad (10)$$

となり、減衰振動を表す。 $\langle \psi^2 \rangle$ が小さい場合にはポテンシャルは (2) において、 $\phi = 0$ で $V_{hill}(\phi) \simeq V_{hill}(0) = \rho_{de}$ となる。この時背景 FLRW 計量はド・ジッター計量になり、ハッブル定数は $H_0^2 \approx \frac{\rho_{de}}{3M_{Pl}^2}$ となる。よって (10) は解析的に解くことができ、

$$\psi(t) = \psi_i \exp(-\frac{3H_0 t}{2}) \cos m_\psi t \quad (11)$$

となる。ここで初期時刻を $t_i = 0$ とした。一方で ϕ に関しては初め ψ^2 の値が大きいと、

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{m_{int}^2\psi^2\phi}{\Lambda^2} = 0 \quad (12)$$

となるが、時間が経過するにつれて ψ^2 が 0 に近づいてくると

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}\phi = 0 \quad (13)$$

で表されるようになり、 ϕ は $\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}$ というポテンシャルの勾配を感じるようになり、転がり落ち始める。このように ψ の運動によって ϕ の運動が決まることがわかる。さらに、完全に転がり落ちるのは有効質量 m_{eff} が 0 になる時で、このことから ψ の運動は最低でも $\langle \psi^2 \rangle > \psi_{crit}^2$ である必要がある。ここで ψ_{crit}^2 は有効質量が 0 になる時の ψ の値であり、有効質量が

$$m_{eff}^2 \simeq \frac{1}{2} \frac{m_{int}^2}{\Lambda^2} \psi_i^2 \exp(-3H_0 t) - \frac{\rho_{de}}{\Lambda^2} \quad (14)$$

と書けることから、

$$\psi_{crit} \equiv \frac{2\sqrt{\rho_{de}}}{m_{int}} \quad (15)$$

で定義される。さらに ϕ がポテンシャルの頂上に十分長い時間とどまることで暗黒エネルギーとして振る舞う時間が長くなり、加速膨張の時間を十分に確保できる。したがって転がり落ちるまでの時間を議論し、膨張の割合を膨張指数 N_{de} を用いて考える。まず初めに $m_{eff} \approx 0$ となるような場合、 ψ の振動が時間が経つにつれて減衰することで ϕ の有効質量は 0 に近づき、 ϕ は原点から転がり落ちる。この時間を t_{end} とすると、

$$t_{end}H_0 \simeq \frac{2}{3} \log\left(\frac{m_{int}\psi_i}{\sqrt{\rho_{de}}}\right) \quad (16)$$

と書ける。次に、 ψ は減衰振動をしているが、 ϕ 方向に対してのポテンシャルの穴を感じそこから落ちる可能性がある。この場合にも ψ は ϕ を原点にトラップしておくことが出来なくなるため、この穴を通り過ぎるのにかかる時間と穴に落ちる時間を比較する必要がある。これを満たすには $|\psi| < \psi_{crit}$ であればよいので、この時間を t_{inst} とすると、

$$t_{inst}H_0 = \frac{2}{3} \log\left(\frac{m_{int}\psi_i\Lambda m_\psi}{4\rho_{de}}\right) \quad (17)$$

と書ける。したがって、 ϕ が原点にトラップされなくなるまでの時間、つまり ϕ が暗黒エネルギーとして振る舞うことのできる時間はどちらかの時間に到達するまでであることから、膨張指数 N_{de} は、

$$N_{de} \leq \min\left[\frac{2}{3} \log\left(\frac{m_{int}\psi_i}{\sqrt{3}M_{Pl}H_0}\right), \frac{2}{3} \log\left(\frac{m_{int}m_\psi\Lambda\psi_i}{12M_{Pl}^2H_0^2}\right)\right] \quad (18)$$

となり、 ϕ は暗黒エネルギーとして N_{de} の最小値の時間まで加速膨張を引き起こすと考えられる。

5 現実的な宇宙モデルとの比較

以上の結果をもとに現実的な宇宙モデルとの整合性を考えていく。初期宇宙において ϕ と ψ の運動はどちらも H によってハッブル摩擦の影響を受けることで、初期値は $\phi_i \simeq \Lambda$ と $\psi \simeq M_{Pl}$ となる。しかし条件 $\Lambda \lesssim M_{Pl}$ 、 $\frac{m_{int}\psi_i}{\Lambda} \gtrsim m_\psi$ 、 $m_{int}\psi_i \gtrsim \rho_{de}$ のもとで運動方程式から分かるように ϕ はポテンシャルの坂を原点に向かって登り始める。 ϕ はポテンシャルの坂を登ると $\phi = 0$ で ψ のポテンシャルを感じ最小値が ρ_{de} であると考えられるようになる。この時 ϕ は

$\phi = 0$ にとどまり暗黒エネルギーとして振る舞う。 ϕ はこの状態で加速膨張を引き起こすが、その時間は長く続かず、 $3H \simeq m_\psi$ で ψ が減衰振動を始めると、ポテンシャルが ϕ を原点に留めておくことができなくなる、もしくは ϕ が ψ の作り出すポテンシャルの穴を見つけその穴から通り抜けていく。この状態になると ϕ はポテンシャルを転がり落ち、暗黒エネルギーとして振る舞うことができなくなることから加速膨張が終了すると考えられる。

6 Conclusion

暗黒エネルギーと暗黒物質という 2 つのスカラール場が相互作用し、かつ初期条件を適切に与えることで加速膨張を引き起こすことが分かった。今回はポテンシャルとしてヒルトップ型を考え、相互作用するスカラール場として暗黒物質を採用したが、他にも指数関数型のポテンシャルやスカラール場としてクインテッセンスなどを考えることができるため、これらを議論することで暗黒エネルギーの性質に対して理解を深めることができると考える。

Acknowledgement

本発表にあたり様々なアドバイスを下さった立教大学理論物理学研究室の皆様に、心より感謝申し上げます。

Reference

- [1] J.M.Gomes et al , arXiv:2311.08888

[indexへ戻る](#)

重宇 a33

星形成銀河と活動銀河核の宇宙再電離への影響

鵜飼 祥

星形成銀河と活動銀河核の宇宙再電離への影響

鵜飼 祥 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙再電離を引き起こした電離光子源として、星形成銀河と活動銀河核 (AGN) が候補として挙げられる。高赤方偏移で暗い AGN が見つかり (Giallongo et al. 2015)、近年の James Webb Space Telescope (JWST) の観測でもそれ以上の数の AGN が見つかったことを受けて (Harikane et al. 2023)、本発表では (Giallongo et al. 2015) に基づいて銀河と AGN の宇宙再電離の寄与を観測から制限している (Yoshiura et al. 2017) をレビューする。(Yoshiura et al. 2017) では、AGN が支配的な再電離史が許されることがわかった。さらに、JWST による AGN の観測 (Harikane et al. 2023) に基づいてこの制限を再検討すると、AGN のスペクトルによっては再電離史の観測と一致しない結果になった。これより、高赤方偏移での AGN のスペクトルの観測が、再電離光子源の検討に大きく影響することがわかった。

1 Introduction

ビッグバン後、高温高密度のプラズマ状態だった宇宙は、宇宙が膨張するにつれて冷え、赤方偏移 1100 程度で中性化する。その後、天体が形成されると、そこから放出される光子によって再び電離される。これを、宇宙再電離と呼び、赤方偏移 20 程度に始まり、観測から赤方偏移 6 程度で完全に電離したことがわかっている。

再電離を引き起こした電離光子源については、完全にはわかっていない。1 つめの候補は、星形成銀河である。実際に、再電離期 $z > 6$ で多くの銀河が観測されていることから、最も有力な候補と言える。2 つめの候補は、活動銀河核 (AGN) である。AGN は、 $z > 3$ で数が急速に減少するため、その寄与は少ないと考えられていた。しかし、 $z = 4 \sim 6$ で暗い AGN が観測されたことから (Giallongo et al. 2015)、AGN が再電離に大きく寄与した可能性が示唆されている。加えて、近年の James Webb Space Telescope (JWST) の観測でも、さらに多くの AGN が高赤方偏移で、そして再電離期でも見つかった (Harikane et al. 2023)。

これを受けて、本発表では (Yoshiura et al. 2017) をレビューする。この論文は、(Giallongo et al. 2015) の高赤方偏移での暗い AGN の観測を受けて、電離光子源として銀河と AGN を考えて再電離史を計算し、観測されている再電離史と比較することでそれぞれの寄与に制限を与えている。加えて、その制限が JWST による AGN と銀河の観測によってどのよ

うに変わるかについて検討する。

2 Methods

水素の電離割合 f_{HII} の進化を理論的に計算するために、

$$\begin{aligned} n_{\text{H}}(1+z)^3 \frac{df_{\text{HII}}}{dt} \\ = \frac{dN_{\gamma, \text{HII}}}{dt} - \alpha_{\text{B, HII}}(T) C n_e (1+z)^3 n_{\text{H}}(1+z)^3 f_{\text{HII}} \end{aligned} \quad (1)$$

を数値積分する。 n_{H} 、 n_e はそれぞれ水素と電子の共動座標での数密度、 $\alpha_{\text{B, HII}}(T)$ は Case B 再結合係数、 C は銀河間物質の clumpiness factor であり、 $C = 3$ としている。 $dN_{\gamma, \text{HII}}/dt$ は単位体積あたりの photoionization rate であり、ここでは電離光子源として星形成銀河と AGN を考えているので、それぞれの和、 $dN_{\gamma, \text{HII}}/dt = dN_{*, \text{HII}}/dt + dN_{\text{AGN}, \text{HII}}/dt$ となる。また、ヘリウムの電離も考えているので、ヘリウムの 1 階電離、2 階電離についても、式 (1) にあたる式を考える。

2.1 星からの電離光子

星からの光子は、エネルギーがそれほど高くない (UV 領域) ため、平均自由行程が短い。そのため、ある赤方偏移で放出された光子は、その赤方偏移の銀河間物質の電離に全て使われると考えることが出来る。そして、単位時間に放出される光子数密度は、

星形成率密度 (star formation rate density、SFRD) に比例すると考えて、

$$\dot{n}_{*\nu} = (1+z)^3 f_{\text{esc}} \dot{\rho}_* \gamma_\nu \quad (2)$$

と書くことが出来る。 γ_ν は星質量あたりに生成される振動数 ν の光子数であり、

$$\int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu \gamma_\nu = \begin{cases} 5.43 \times 10^{60} \text{ M}_\odot & (\nu_1, \nu_2) = (\nu_{\text{HI}}, \nu_{\text{HeI}}) \\ 2.61 \times 10^{60} \text{ M}_\odot & (\nu_1, \nu_2) = (\nu_{\text{HeI}}, \nu_{\text{HeII}}) \\ 0.01 \times 10^{60} \text{ M}_\odot & (\nu_1, \nu_2) = (\nu_{\text{HeII}}, \nu_{\text{max},*}) \end{cases} \quad (3)$$

である (Choudhury et al. 2005)。ここで、パラメーターとして電離光子脱出率 f_{esc} を導入している。再電離期の銀河の電離光子脱出率はわかっていないため、(Yoshiura et al. 2017) ではこれをフリーパラメーターとして、銀河の再電離への寄与を変化させている。そして、今水素とヘリウムの電離を考えるので、放出された光子を、

$$\frac{dN_{*,i}}{dt} = \int_{\nu_i}^{\infty} d\nu \frac{n_i \sigma_i \dot{n}_{*\nu}}{n_{\text{HI}} \sigma_{\text{HI}} + n_{\text{HeI}} \sigma_{\text{HeI}} + n_{\text{HeII}} \sigma_{\text{HeII}}} \quad (4)$$

と、それぞれの粒子種 i に割り振っている。 ν_i はそれぞれの粒子の Lyman limit 振動数であり、 $h_P \nu_{\text{HI}} = 13.6 \text{ eV}$ 、 $h_P \nu_{\text{HeI}} = 24.5 \text{ eV}$ 、 $h_P \nu_{\text{HeII}} = 54.4 \text{ eV}$ である。また、 $h_P \nu_{\text{max},*} = 100 \text{ eV}$ である。

2.2 AGN からの電離光子

AGN は高エネルギーで平均自由行程が長い X 線を多く放出するため、ある赤方偏移 z での AGN からの光子を考えるには、 z よりも大きな赤方偏移に存在する AGN からの光子を考える必要がある。赤方偏移 z での photo-ionization rate は、

$$\frac{dN_{\text{AGN},i}}{dt}(z) = \int_{\nu_i}^{\nu_{\text{max,AGN}}} \frac{d\nu}{h_P \nu} \sigma_i n_i (1+z)^3 F(z, \nu) \quad (5)$$

と書け、 $F(z, \nu)$ は z より大きな赤方偏移からの振動数 ν でのエネルギーフラックスである。積分の上限は $\nu_{\text{max,AGN}} = 2.4 \times 10^{20} \text{ Hz}$ であり、これは光子のエネルギーが 10^3 keV に対応する。エネルギーフラッ

クスは

$$F(z, \nu) = \int_z^{z'} dz' \varepsilon_c(z', \nu') \frac{c(1+z')^2}{H'} \exp(-\tau_\nu(z, z', \nu)) \quad (6)$$

と書ける。 c は光速で、 $\nu' = \nu(1+z')/(1+z)$ である。 $\varepsilon_c(z', \nu')$ は、共動座標での emissivity であり、赤方偏移 z' にある AGN から単位時間あたりに届くエネルギー密度である。これは、AGN の SED L_ν と UV 光度関数 $\Phi(z, M_{\text{UV}})$ を用いて、

$$\varepsilon_c(z', \nu') = \int_{M_{\text{UV}}^{\text{min}}}^{M_{\text{UV}}^{\text{max}}} L_{\nu'}(M_{\text{UV}}) \Phi(z', M_{\text{UV}}) dM_{\text{UV}} \quad (7)$$

と表せる。 $\tau_\nu(z, z', \nu)$ は、赤方偏移 z で振動数 ν として観測される光子が、 z' から z まで届くときの光学的厚みであり、

$$\tau_\nu(z, z', \nu) = \int_z^{z'} dz \frac{c(1+z)^2}{H} \left(f_{\text{HI}} n_{\text{H}} \sigma_{\text{HI}}(\hat{\nu}) + f_{\text{HeI}} n_{\text{He}} \sigma_{\text{HeI}}(\hat{\nu}) + f_{\text{HeII}} n_{\text{He}} \sigma_{\text{HeII}}(\hat{\nu}) \right) \quad (8)$$

と書ける。

AGN の光度関数として、double power-law (Croom et al. 2009)

$$\Phi(z, M_{\text{UV}}) = \frac{\Phi_* \exp(-z/z_{\text{AGN}})}{10^{0.4(\alpha+1)(M_{\text{UV}}-M_*)} + 10^{0.4(\beta+1)(M_{\text{UV}}-M_*)}} \quad (9)$$

を用いている。 Φ_* 、 z_{AGN} 、 α 、 β はパラメーターであり、それぞれ、amplitude、傾きが変わるときの M_{UV} 、暗い側の傾き、明るい側の傾きを変化させるパラメーターである。観測 (Croom et al. 2009) (Giallongo et al. 2015) にフィッティングしているが、高赤方偏移での暗い AGN の数はまだ議論があるため、 $z > 4.25$ での α を α_{hz} としてこれを変化させることで AGN の再電離への寄与を評価している。

AGN の SED として 2 つのモデルを用いている。1 つ目は power-law モデル (PL モデル)

$$L_\nu \propto \begin{cases} \nu^{-0.61}, & h_P \nu < 13.6 \text{ eV} \\ \nu^{-0.61}, & h_P \nu \geq 13.6 \text{ eV} \end{cases} \quad (10)$$

である (Lusso et al. 2015)。2 つ目は accretion disk と corona からの放射を考えている AC モデルである。これは、PL モデルに加えて高エネルギーの光子が多くなっている。

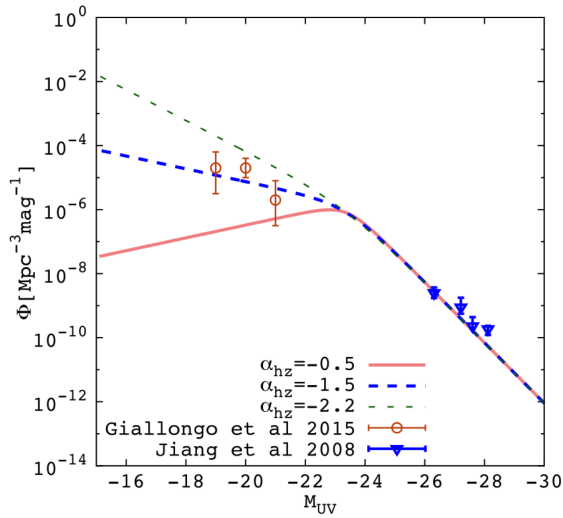


図 1: $z = 5.75$ での AGN 光度関数

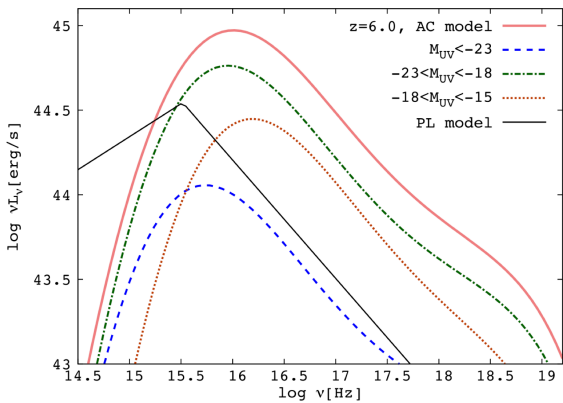


図 2: $z = 6$ での AGN の SED

3 Results

水素の電離史が図 3、図 4 に示されている。電離光子脱出率が大きいほど、 $\alpha_{H\gamma}$ が小さいほど電離が速く進むことがわかる。

次にパラメーターの値を選んだ時の電離史が観測による水素の電離史と一致しているかを調べる。電離史の観測として、 $z = 5.7$ で電離が完了した (Fan et al. 2006)、 $z = 6.6$ で中性率 $f_{H\text{I}} = 0.2 \pm 0.2$ (Ouchi et al. 2010)、 $z = 7.3$ で $0.3 < f_{H\text{I}} < 0.8$ (Konno et al. 2014) と比較している。さらに、CMB 光子のトムソン散乱の光学的厚みを計算し、観測の $\tau_e = 0.058 \pm 0.012$ (Planck Collaboration et al. 2016) と比較している。これらの観測によるパラメーターの制限が図 5、図 6 である。(Giallongo et al. 2015) で示されている

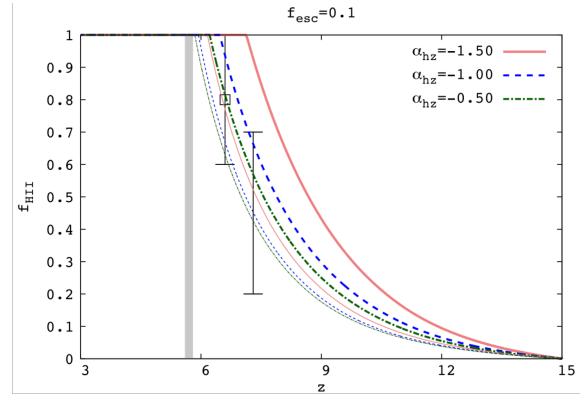


図 3: $f_{\text{esc}} = 0.1$ で、 $\alpha_{H\gamma}$ を変化させた時の水素の電離史の変化

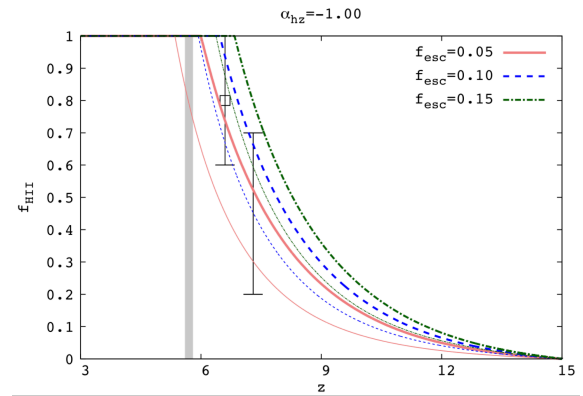


図 4: $\alpha_{H\gamma} = -1.00$ で、 f_{esc} を変化させた時の水素の電離史の変化

$\alpha_{H\gamma} = -1.5$ で、暗い AGN が豊富に存在し、AGN が支配的な再電離史が観測からは許されるという結果になっている。

4 新しい観測を用いた考察

JWST による観測では、高赤方偏移での暗い AGN が (Giallongo et al. 2015) よりもさらに多く観測されており (Harikane et al. 2023)、 $\alpha_{H\gamma} \sim -2.0$ となっている。これを用いてパラメーターの制限を検討すると、AC モデルの場合は $\alpha_{H\gamma} = -2.0$ で制限を満たすことは出来ず、一方で PL モデルの場合には $f_{\text{esc}} \leq 0.07$ の場合に制限を満たすことが出来る。これより、高赤方偏移での AGN のスペクトルが、再電離史の検討に大きく影響を与えることがわかった。

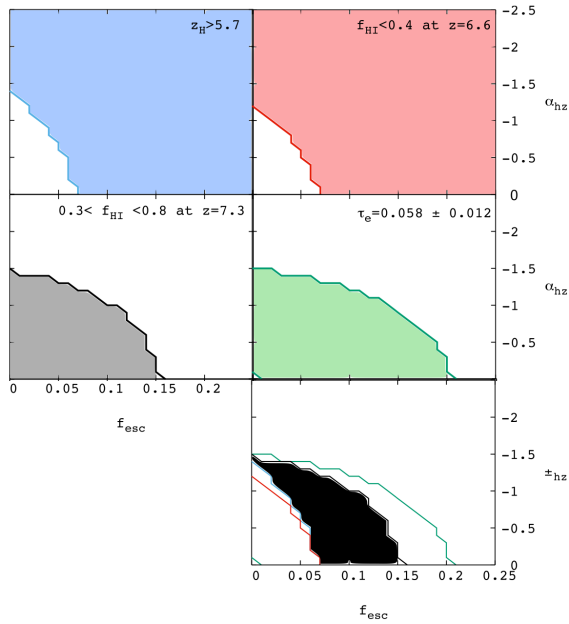


図 5: AGN の SED として AC モデルを用いた時のパラメーターの観測からの制限

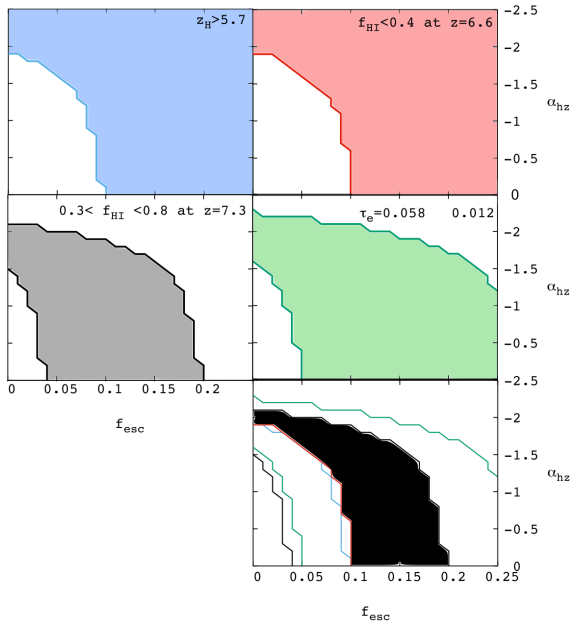


図 6: PL モデルの時のパラメーターの制限

5 Conclusion

本発表では、星形成銀河との宇宙再電離への寄与を観測から制限している (Yoshiura et al. 2017) のレビューをした。Yoshiura et al. (2017) によると、高赤方偏移に暗い AGN が豊富に存在し、AGN が支

配的となるような再電離シナリオが許されることがわかった。さらに、その制限を近年の JWST による AGN の観測 (Harikane et al. 2023) を用いて再検討すると、AGN のスペクトルとして高エネルギー側の光子が多いものを用いた場合には観測を満たすことは出来ず、単純な power-law のスペクトルを用いると $f_{\text{esc}} \sim 0.07$ の場合に制限を満たすことがわかった。これより、高赤方偏移での AGN のスペクトルが、再電離史の検討に大きく影響すると言える。

Reference

- Giallongo, E., Grazian, A., Fiore, F., et al. 2015, *A&A*, 578, A83
- Harikane, Y., Ouchi, M., Oguri, M., et al. 2023, *ApJ*, 959, 39
- Yoshiura, S., Hasegawa, K., Ichiki, K., et al. 2017, *MNRAS*, 471, 3713
- Choudhury, T. R., Ferrara, A. 2005, *MNRAS*, 361, 577
- Croom, S. M., Richards, G. T., Shanks, T., et al. 2009, *MNRAS*, 399, 1755
- Lusso, E., Worseck, G., Hennawi, J. F., et al. 2015, *MNRAS*, 449, 4204
- Fan, X., Strauss, M. A., Becker, R. H., et al. 2006, *AJ*, 132, 117
- Ouchi, M., Shimasaku, K., Furusawa, H., et al. 2010, *ApJ*, 723, 869
- Konno, A., Ouchi, M., Ono, Y., et al. 2014, *ApJ*, 797, 16
- Planck Collaboration XLVII, 2016, *A&A*, 596, A108

重宇 a34

宇宙再電離期における電離バブル構造の高精度モデル 化に向けた高精度輻射輸送計算コードの開発

瀬尾 明莉

宇宙再電離期における電離バブル構造の高精度モデル化に向けた 輻射輸送計算コードの開発

瀬尾 明莉 (筑波大学大学院 理工情報生命学術院数理解物質科学研究群)

Abstract

宇宙再電離は、ビッグバンから約数億年後に宇宙が再び電離状態に戻る過程を指す。宇宙で最初の星、銀河、ブラックホールから放射された紫外線が中性水素を再び電離させたと考えられているが、その電離源や電離史についてはまだわかっていない。

近年、輻射流体計算を用いた宇宙再電離のシミュレーションが行われるようになり、銀河形成と宇宙の電離構造が同時に計算されるようになった。しかし、多くのシミュレーションでは M-1 closure による近似的な輻射輸送計算法が使用されている。この手法は、beam crossing 問題や光速を人工的に小さくしているため、結果として電離構造の精度において信頼性が不足している。

そこで、私は VET (Variable Eddington Tensor) 法を基にした輻射輸送計算コードの開発に取り組んでいる。VET 法は、光子の流れをより正確にモデル化するための手法で、従来の方法に比べて高精度な計算が可能である。本講演では、VET 法の前段階として、1 次元のモーメント式、ray tracing 法の計算結果を紹介する。

1 導入

1.1 宇宙再電離

宇宙再電離とは、ビッグバンから約数億年後に宇宙が再び電離状態に戻る過程のことである。最初の星や銀河が生まれたことで、それらが光を放ち中性だった宇宙をバブル状に電離させていった。赤方偏移 7 頃、完全に電離されたことがわかっている。しかし、具体的な電離源やその過程についてはまだ完全には解明されていない。

1.2 先行研究

先行研究として、Thesan プロジェクト (Neyer et al. 2024) を紹介する。このプロジェクトは再電離と銀河形成のための大規模構造を同時に計算する輻射磁気流体力学シミュレーションである。

図 1 は、電離バブルサイズを宇宙全体の中性度に対してプロットしたものである。赤線が全ての光度の星に対してバブルサイズを計算した結果で、その他の線は明るい光度の星のみに対してバブルサイズを計算した結果である。明るい光度の星のみを計算

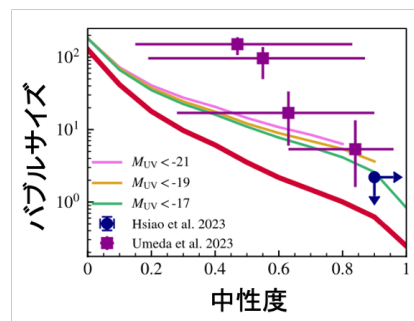


図 1: 宇宙全体の中性度に対する電離バブルサイズ。(Neyer et al. 2024)

した場合の方がバブルサイズが大きいことがみてわかる。また、四角や丸の点は観測の結果であり、赤方偏移 9 付近では観測的に示唆されている典型的なバブルサイズを再現しているものの、赤方偏移 7 付近ではバブルサイズを過小評価している事がわかった。

近年、このような輻射と流体を同時に解くことができるシミュレーションが行われている。これにより、電離源や電離過程の正確な理解が進んでいる。しかし、多くのシミュレーションでは M1 クロージャーによる近似的な輻射輸送計算法が使用されている。この手法は、beam crossing 問題や光速を人工的に小さ

くしているため、結果として電離構造の精度において信頼性が不足している。したがって、現在のジェームズウェッブ宇宙望遠鏡による観測データの解釈、今後の 21cm 線観測プロジェクトに向けて、宇宙の電離構造を高精度にモデル化する事が急務である。

2 beam crossing 問題

図 2 は、2 本のビームが衝突する様子を、M1 クロージャーを用いてシミュレーションした図である。本来、光はぶつかることなくすり抜けるはずであるが、M1 クロージャーを用いてシミュレーションすると、流体のように光が衝突してしまっていることがわかる。これが beam crossing 問題である。宇宙再電離のシミュレーションでは複数の銀河が宇宙に存在するとして計算するため、beam crossing 問題が起こると放たれた放射が衝突してしまい、電離バブルの構造を正しく計算することができなくなる。

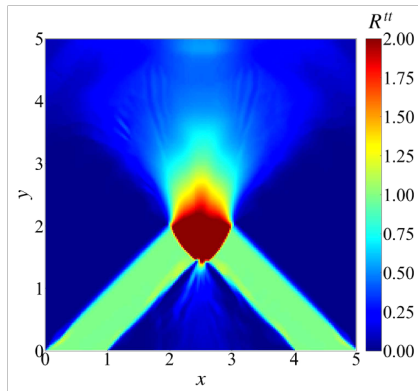


図 2: 2 本のビームが衝突する様子を、M1 クロージャーを用いてシミュレーションした図。(Asahina et al. 2020)

3 光速制限法

3.1 光速制限

光速制限とは、光速を実際の光速の 1/10 や 1/100 に制限することで、時間ステップを大きく設定できる近似法である。

時間ステップの決め方として、以下の不等式が数値

シミュレーションにおいて安定性を保つ条件として知られている。

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c} \quad (1)$$

この条件により、計算が光速よりも速く更新されることが保証され、数値解の安定性が確保される。光速制限法を使用することで、 c を小さくすることができ、クーラン条件を緩和することができる。したがって、 Δt を大きくすることができるため、計算を軽くすることができ、計算時間を短縮することができる。しかし、短時間スケールで急速に成長するバブルを解析する場合に問題となる。

3.2 電離波面の速度

光速制限の問題点には電離波面の速度が関係している。ストリーム半径を以下の式で表す。

$$R_s = \left(\frac{3\dot{N}_s}{4\pi\alpha n^2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2)$$

\dot{N}_s が単位あたりの光子数、 α が結合率、 n が電子密度である。 \dot{N}_s をクエーサーが 10^{58}s^{-1} 、銀河が 10^{55}s^{-1} 、星が 10^{50}s^{-1} とした。これより、電離波面の速度は以下の式で表せる。

$$\begin{aligned} v &= \frac{R_s}{3t_{\text{rec}}} \frac{\exp(-t/t_{\text{rec}})}{(1 - \exp(-t/t_{\text{rec}}))^{\frac{2}{3}}} \\ &\cong \frac{R_s}{3t_{\text{rec}}} \frac{1 - t/t_{\text{rec}}}{(t/t_{\text{rec}})^{\frac{2}{3}}} \end{aligned} \quad (3)$$

t_{rec} は再結合するまでの時間である。この式をクエーサー、銀河、星に対して計算しプロットしたグラフが図 3 である。

縦軸が光速に対する電離波面の速度で、横軸が電子密度である。クエーサーによる電離波面は光速の 1/10 を超える速度で進むことがわかる。電離波面の速度より光速が遅くなると正しく計算できないため、電離波面の速度が速いバブルを計算するとき、光速をあまり小さくできない。したがって、時間ステップを大きくできないため計算が軽くならず、M1 クロージャーのメリットが 1 つなくなってしまふ。

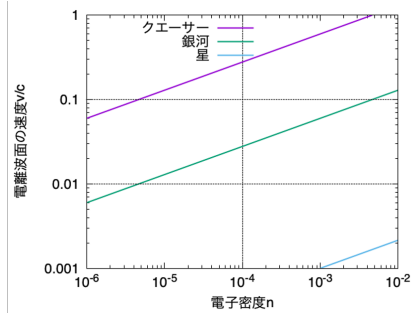


図 3: クエーサー、銀河、星に対しての電離波面の速度

4 Variable Eddington Tensor(VET) 法

そこで、私は Variable Eddington Tensor(VET) 法を用いて計算する。まず、モーメント式を以下に示す。

$$\frac{\partial E_\nu}{\partial t} + \frac{\partial F_\nu^i}{\partial x^i} = \int S d\Omega \quad (4)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial F_\nu^i}{\partial t} + \frac{\partial P_\nu^{ij}}{\partial x^i} = \int l^i l^j S d\Omega \quad (5)$$

モーメント式にはクロージャー関係が必要であり、以下のような式となる。

$$P_\nu^{ij} = f_\nu^{ij} E_\nu \quad (6)$$

f_ν^{ij} はエディントンテンソルという。これを近似的に求めた方法が M1 クロージャーであり、以下の式となる。

$$f_\nu^{ij} = \frac{1 - f_\nu}{2} \delta^{ij} + \frac{3f_\nu - 1}{2} l^i l^j \quad (7)$$

$$f_\nu = \frac{3 + 4\xi^2}{5 + 2\sqrt{4 - 3\xi^2}} \quad (8)$$

$$\xi = \frac{|F_\nu^i|}{cE_\nu} \quad (9)$$

VET 法とは、ray tracing 法で輻射輸送方程式を直接解くことで求めた輻射強度を用いてエディントンテンソルを求める方法であり、以下に式を示す。

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + l^i \frac{\partial I_\nu}{\partial x^i} = S \quad (10)$$

$$f_\nu^{ij} = \frac{\int l^i l^j I d\Omega}{\int I d\Omega} \quad (11)$$

これにより、VET 法は近似法ではないため、beam crossing 問題は起きない。また、光速制限による問題は VET 法でも起きてしまうが、M1 クロージャーという近似法を使ったとしても計算が軽くなるのだとしたら、より正確に計算できる VET 法の方が適切だと考えられる。

5 計算結果

ここでは、VET 法の前段階として、M1 クロージャーと ray tracing 法による計算結果を示す。

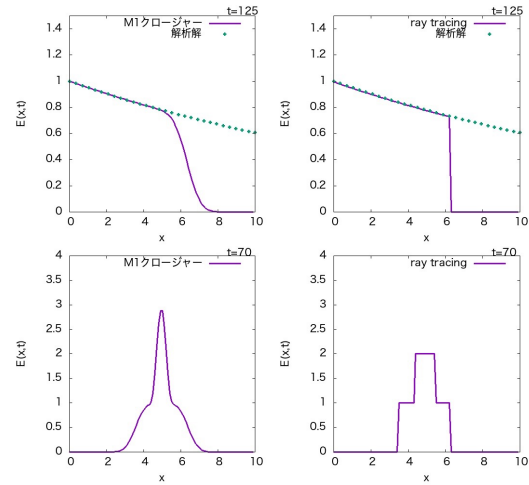


図 4: 左上図、右上図は M1 クロージャー、ray tracing 法を用いてテスト計算を行った結果。左下図、右下図は M1 クロージャー、ray tracing 法を用いて 1 次元の beam crossing 問題を再現した図。

図 4 の左上図、右上図は M1 クロージャー、ray tracing 法を用いてテスト計算を行った結果である。この空間では吸収のみが起こると仮定したとき、輻射輸送方程式は以下ようになる。

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + l^i \frac{\partial I_\nu}{\partial x^i} = -\alpha I_\nu \quad (12)$$

α は吸収係数であり、 $\alpha = 0.05$ とした。解析解は以下ようになり、図の緑点線である。

$$I_\nu = I_0 \exp(-\alpha x) \quad (13)$$

M1 クロージャー、ray tracing 法共に、シミュレーション結果が解析解とよく一致していることがわか

る。

また、左下図、右下図は M1 クロージャー、ray tracing 法を用いて 1 次元の beam crossing 問題を再現した図である。両端から $E_\nu = 1$ の光を入射して、光が重なった瞬間の様子をプロットした。ray tracing 法では、光が重なっている部分はちょうど $E_\nu = 2$ になっていることから、正確に解けていることがわかる。しかし、M1 クロージャーを用いた計算では、重なった部分が $E_\nu > 2$ となり、衝突しているように見える。

6 まとめ

本研究では、1 次元の ray tracing 法の計算コード、M1 クロージャーの計算コードを作成し、その精度を確かめることができた。今後としては、まず、1 次元での VET 法のコードを作成し、その後、2 次元、3 次元に拡張していきたい。

Acknowledgement

本発表にあたり、ご指導いただいた宇宙理論研究室の皆様、講演の機会を与えてくださった夏の学校の運営の皆様へ深く感謝申し上げます。

Reference

Neyer et al. 2024, MNRAS 000, 1–15 (2024)

Asahina et al. 2020, The Astrophysical Journal, 901:96 (21pp), 2020 October 1

[indexへ戻る](#)

重宇 a35

原始ブラックホールの質量分布とクラスタリング

門田 龍正

原始ブラックホールの質量分布とクラスタリング

門田 龍正 (山口大学大学院 創成科学研究科)

Abstract

本発表では、原始ブラックホール (PBH: Primordial Black Hole) の質量分布が広がりを持つ場合に PBH クラスタが形成されるメカニズムについて述べる。PBH は宇宙初期に形成されたブラックホールであり、暗黒物質の候補とされる。しかし、単一質量の PBH で暗黒物質を説明するのは難しくなっており、PBH の質量分布に広がりを持つ可能性が検討されている。そのような場合、重い PBH が軽い PBH を引き付けてクラスタを形成する可能性がある。クラスタの有無は重力波放出量の予言に非常に重要となる。

1 序論

PBH とは、宇宙初期に高密度領域が重力崩壊することによって形成されたブラックホールである (Zel'dovich & Novikov 1967; Hawking 1971)。PBH の質量は 10^{-8}kg という非常に小さい質量から太陽質量の数千倍を超える質量まで、とても幅広い範囲をもつ。

宇宙には、観測されている物質以外にも暗黒物質と呼ばれる未知の物質が存在すると考えられている。暗黒物質 (DM: Dark Matter) の候補の一つとして有力なのが PBH である。PBH 探索は広い質量範囲にわたって行われており、その存在量に制限が設けられている (図 1)。

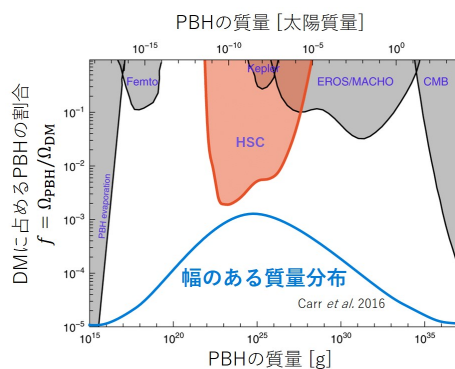


図 1: PBH の観測的制限 ((Niikura et al. 2019) より改変)

現在のところ制限のない範囲でも、まだ不定性が大きいものの制限が提案されており、暗黒物質を単一質量の PBH で説明するのは難しい状況になりつつある。そこで PBH の質量分布が単一ではなく、広がり

を持つ可能性が検討されている (Carr et al. 2021)。

2015 年に重力波検出器 LIGO によって連星ブラックホールの合体によって生じた重力波が初めて観測されて以来、PBH への関心が急激に高まっている。10 太陽質量程度の PBH が宇宙に分布していた場合、その連星から放たれた重力波は LIGO で検出できる可能性がある。実際、30 太陽質量の PBH が暗黒物質の 0.001% 以上存在すれば、LIGO で検出可能であることが示されている (Sasaki et al. 2016)。

こうした研究は、PBH は質量分布が単一だと仮定して行われてきた。しかし、上述のように、幅のある質量分布は今後ますます検討していく必要性があり、質量分布が単一の場合には起こらなかった現象が起こる可能性がある。例えば、重い PBH が軽い PBH を引き付けることで自然にクラスタ (互いの重力の影響によって集団となったもの) が形成されると期待される。連星形成率は密度の 2 乗に比例するため、クラスタの有無は重力波放出量の予言に非常に重要である。

2 PBH クラスタの形成

PBH クラスタが形成される機構を説明する (図 2)。PBH の質量 M_{PBH} は、形成される時刻 t_f に比例して大きくなる。

$$M_{\text{PBH}} \sim \frac{c^3 t_f}{G} \sim 10^5 M_{\odot} \left(\frac{t_f}{1\text{sec}} \right) \quad (1)$$

ただし、 c は光速、 G は万有引力定数、 M_{\odot} は太陽質量である。例えば、宇宙誕生から 10^{-43} 秒後に 10^{-8}kg の PBH が形成され、1 秒後には太陽質量の 1 万倍の PBH が形成される。図 2 に示したように、軽い PBH

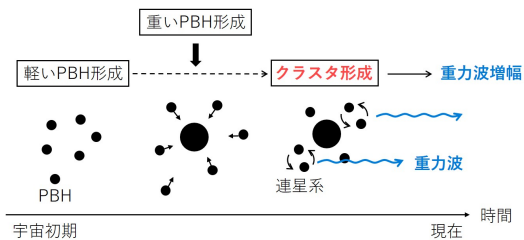


図 2: PBH クラスタの形成

が形成してしばらくしてから重い PBH が形成される。ビッグバン理論によれば、初期から現在まで宇宙は膨張を続けている。そのため、軽い PBH が形成された後、宇宙膨張によって軽い PBH 同士の距離は離れていく。その後重い PBH が形成されると、その重力で軽い PBH が宇宙膨張から離脱して重い PBH の近傍に引き止められる。宇宙初期の高密度が保持されるため、非常に密度の高い PBH クラスタが形成されることが期待される。

3 PBH クラスタの密度分布

重い PBH によって集積される軽い PBH の密度分布を評価する方法について説明する。軽い PBH は、PBH クラスタの内側にある物質の質量（主成分は重い PBH）が生み出す重力によって引き付けられる。重い PBH がどの距離まで軽い PBH を捕縛できるか調べるには、この重力と宇宙膨張を考慮した実質的な 2 体問題を解けばよい。これにより、重い PBH によって集積される軽い PBH の密度分布を評価することができる。以下より、光速 $c = 1$ とする。

FLRW 宇宙において、質量 M_{PBH} の中心 PBH（重い PBH）とテスト粒子（軽い PBH）の固有距離 r は

$$\ddot{r} = -\frac{GM_{\text{PBH}}}{r^2} + \frac{\ddot{a}}{a}r \quad (2)$$

のように変化する。ただし、 a はスケール因子である。第 1 項は中心 PBH からの重力による引力を表し、第 2 項は輻射優勢期において $-r/4t^2$ となり宇宙膨張の減速を表している。中心 PBH が存在しない場合、背景宇宙では \dot{r} は無限遠で 0 に近づくが、決して 0 にはならないので \dot{r} は常に正の値を持つ。しかし、中心 PBH からの重力（第 1 項）が宇宙膨張の項（第 2 項）よりも大きくなると、軽い PBH は宇宙膨張から離脱してターンアラウンドする。ターンアラ

ウンド時刻 t_{ta} のときのターンアラウンド半径 r_{ta} は

$$r_{\text{ta}} \simeq (2GM_{\text{PBH}}t_{\text{ta}})^{1/3} \quad (3)$$

となる (Adamek et al. 2019)。上式は近似のもと得られた解析解を (2) 式の数値解と比較して修正した結果得られた式である。

軽い PBH 同士の相互作用を無視して、重い PBH 周りの軽い PBH の密度分布を導出した。このような場合、密度分布 $\rho(r)$ は

$$\rho(r)r^2dr = \int_r^\infty dr_{\text{ta}}r_{\text{ta}}^2\rho_{\text{ta}}(r_{\text{ta}}) \left(\frac{2dt}{T_{\text{orbit}}} \right) \quad (4)$$

となる。ただし、 $\rho_{\text{ta}}(r_{\text{ta}}(t_{\text{ta}})) = \rho_{\text{PBH}}(t_{\text{f}}/t_{\text{ta}})^{3/2}$ はターンアラウンド時の軽い PBH の密度、 ρ_{PBH} は重い PBH の形成時の密度、 $T_{\text{orbit}} = \pi r_{\text{ta}}^{3/2} r_{\text{g}}^{-1/2}$ は軽い PBH の軌道の周期、 $dt/dr = r_{\text{g}}^{-1/2} (1/r - 1/r_{\text{ta}})^{-1/2}$ は軌道上の軽い PBH の速度の逆数、 $r_{\text{g}} = 2GM_{\text{PBH}}$ は重い PBH の重力半径である。密度分布の導出において軽い PBH 同士の相互作用を無視したので、軽い PBH が重い PBH 周りを楕円軌道で運動せず、重い PBH にそのまま落ちる軌道になってしまう。なので、後々に軽い PBH 同士の相互作用を考慮する必要がある。

4 結論

(4) 式を具体的に計算すると、密度分布 $\rho(r)$ は

$$\frac{\rho(r)}{\rho_{\text{DM0}}} \simeq 1.7 \times 10^{33} \left(\frac{M_{\text{PBH}}}{100M_{\odot}} \right)^{-3/2} \left(\frac{r_{\text{ta}}}{r_{\text{g}}} \right)^{-9/4} \quad (5)$$

と求められた。ただし、 ρ_{DM0} は、現在の暗黒物質の背景密度である。上式から、 ρ_{DM0} と比較して PBH クラスタの密度が非常に高い。また中心 PBH の質量 $M_{\text{PBH}} = 100M_{\odot}$ の場合、6kpc にわたって高密度である。

Reference

Zel'dovich & Novikov 1967, Soviet Astronomy 10, 602
 Hawking 1971, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 152, 75
 Niikura et al. 2019, Nat Astron 3, 524–534
 Carr et al. 2021, Rep. Prog. Phys. 84, 116902
 Sasaki et al. 2016, Phys. Rev. Lett. 117, 061101
 Adamek et al. 2019, Phys. Rev. D 100, 023506

[indexへ戻る](#)

重宇 a36

原始ブラックホールからのバースト的な陽電子放射

八木 大地

原始ブラックホールからのバースト的な陽電子放射

八木 大地 (弘前大学大学院 理工学研究科)

Abstract

原始ブラックホールは理論上、Hawking 放射によって標準模型の素粒子の全てを等重率で放射し、特に電子と陽電子については同数の粒子を放射する。そのため、PAMELA や AMS-02 で観測された 10GeV 以上のエネルギー帯に於ける陽電子過剰の一部を原始ブラックホールの放射が担っている可能性がある。本発表では MacGibbon–Webber の Hawking 放射のモデルに最新の二次粒子放射の数値計算を取り入れ、軽量の原始ブラックホールからのバースト的な陽電子放射のスペクトル及びその地球への伝播を計算し、AMS-02 の観測結果と比較することで原始ブラックホールの存在量に対する制限について考察する。

1 導入

原始ブラックホール (Primordial Black Hole; PBH) とは Zel'dovich ら (Zel'dovich and Novikov (1967)) や Hawking (Hawking (1971)) によって予言された、ビッグバン直後に揺らぎが重力崩壊してできたとされるブラックホールである。恒星からできるブラックホールと異なり、 10^{-5} g 程度まで小さな質量を持つ PBH が理論的に許容されているので、太陽質量以下のブラックホールは PBH である可能性が高いため、軽質量のブラックホールを研究することで、インフレーションモデルなどに対して制限を与えることができる。PBH は様々な質量の様々な観測で数密度の上限値が与えられている

ブラックホールの事象の地平線付近で対生成された粒子が一方はブラックホールに落ち込み、もう一方はブラックホールの外に放射されるという Hawking 放射が発生すると予言されている (Hawking (1974))。ブラックホールは事象の地平線の表面積と等しい面積を持つ黒体とみなすことができ、その温度は

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G M} \quad (1)$$

で与えられる。

Hawking の研究によればブラックホールは Hawking 温度に対応する黒体として振る舞う。したがって、十分軽いブラックホールは Hawking 放射を観測できると考えられている。Hawking 放射は光子だけでなく全ての素粒子を放射する。そのため、Hawking 放射は Alpha Magnetic Spectrometer (AMS-02) (AMS Collaboration (2021)) によって観測された高エネルギー領域での陽電子過剰を説明できる可能性がある。

AMS-02 は国際宇宙ステーションに設置された宇宙線の観測装置である。AMS-02 の観測により、電子に対する陽電子の比が従来の予想に反して高エネルギー側で高いことが明らかになっている。従来、陽電子は一次宇宙線が星間ガスに衝突して発生すると考えられていたが、この観測結果は他に陽電子の源泉が存在することを示唆している。これまでにパルサーや超新星残骸、ダークマターの崩壊等が挙げられているが、本研究ではブラックホールが Hawking 放射として直接陽電子を放出することに着目し、これにより前述の観測結果から PBH の存在量に制限を与えることを目的とする。

類似の観点での研究として、銀河系の暗黒物質ハローに分布する 10^{16} g 程度の PBH から定常的に放射される陽電子についての検討が Boudaud et al. (2019) で行われており、Voyager 1 で観測された低エネルギーの e^\pm の星間フラックスを用いて銀河系ハローに存在する PBH の上限が求められた。これに対し、本研究では太陽近傍に存在する、より軽量の PBH からの非定常な高エネルギー陽電子の放射に着目することが目新しい。

スペクトルの計算に際しては、静止質量、QCD 閉じ込めエネルギースケール、重力による灰色体因子 (Page (1976)) を考慮して PYTHIA (Bierlich et al. (2022)) で粒子の崩壊を計算し、最終的に得られる陽電子のスペクトルを陽電子の拡散方程式に代入して計算することで、理論的に観測されるべきフラックスを計算し、これを AMS-02 の観測データと比較することで、PBH の存在量の上限を導出する。

2 PBH からの陽電子放射

2.1 Hawking 放射

Stefan–Boltzmann の法則により、ブラックホールから放射される光子の光度は

$$L = \sigma T_{\text{H}}^4 \times 4\pi r_s^2 = \frac{\hbar c^5}{15360\pi M^2 G^2} \quad (2)$$

である。よって、エネルギー保存の法則により、ブラックホールの質量の変化率は

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{L}{c^2} < 0 \quad (3)$$

となる。実際にはブラックホールは全ての素粒子を有効自由度ごとに放射する。全有効自由度を $f(M)$ (図 1) とすると、

$$\frac{dM}{dt} = -5.34 \times 10^{25} \text{ g/s} \times \left(\frac{M}{1 \text{ g}}\right)^{-2} f(M) \quad (4)$$

と計算される。

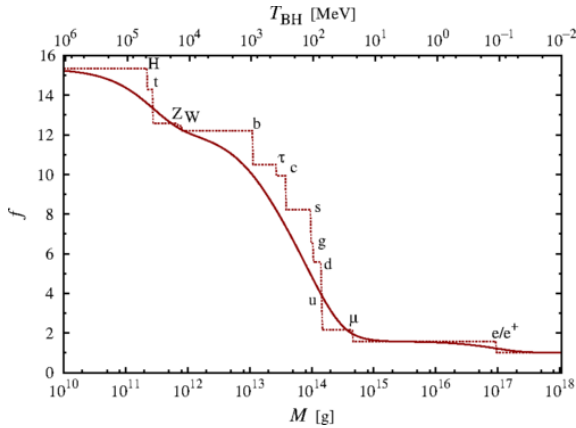


図 1: 質量に対する有効自由度 (Carr et al. (2021))。

この式を $f(M)$ の変化を無視して M について微分方程式を解くと質量 M のブラックホールが蒸発するまでの時間 τ は

$$\tau = 1.98 \times 10^{-34} \text{ yr} \times \left(\frac{M}{1 \text{ g}}\right)^3 f(M)^{-1} \quad (5)$$

となる。これにより、寿命 τ が宇宙年齢 $t_0 = 1.38 \times 10^{10} \text{ yr}$ (Planck Collaboration (2020)) に等しいとすれば、宇宙誕生の際に PBH の質量が $M_* = 5.17 \times 10^{14} \text{ g}$ である時は、ちょうど現在に質量が 0 になり、「蒸発」する。ブラックホールが蒸発する際に、Hawking 温度が急激に上昇し、バースト的に高エネルギーの粒子を放射する。特に高エネルギー側ではほとんどの粒子が蒸発直前に放射される。

2.2 MacGibbon–Webber モデル

Hawking 放射を MacGibbon と Webber の計算方法に基づくモデルで記述する (MacGibbon and Webber (1990))。Hawking 放射では、光子だけでなく、電子やクォークなど、真空から対生成で生じ得る全ての素粒子が放射される。この粒子を i 粒子と呼び、次の粒子を考える。

$$i : d, \bar{d}, u, \bar{u}, s, \bar{s}, c, \bar{c}, b, \bar{b}, t, \bar{t}, e^\pm, \mu^\pm, \tau^\pm, g, Z^0, W^\pm, H^0, \nu_e, \bar{\nu}_e, \nu_\mu, \bar{\nu}_\mu, \nu_\tau, \bar{\nu}_\tau, \gamma$$

粒子の静止エネルギー $m_0 c^2$ に対して、ブラックホールの温度のエネルギー $k_B T_{\text{H}}$ が小さい時は、実質的にその粒子は放射されないと見做す。また、クォークやグルーオンは QCD 閉じ込めスケールのエネルギー $\Lambda = 250\text{--}300 \text{ MeV}$ を超える運動エネルギーを持っていなければ、同様に放射されないと見做す。

i 粒子の多くは崩壊し安定な粒子に崩壊する。最終的な陽電子スペクトルは

$$\frac{d\dot{N}_{e^+}}{dE_{e^+}} = \sum_i g_i \int_0^\infty dE_i \frac{d\dot{N}_i}{dE_i} \frac{dN_{i \rightarrow e^+}}{dE_{e^+}}(E_i, E_{e^+}) \quad (6)$$

と書ける。ここで、 $\frac{d\dot{N}_i}{dE_i}$ が一次粒子のスペクトル、 $\frac{dN_{i \rightarrow f}}{dE_f}(E_i, E_f)$ はエネルギー E_i の i 粒子 1 個から電磁シャワーや QCD ジェットを経て最終的に出るエネルギー E_f の f 粒子の微分多重度である。この微分多重度を解析的に計算することは不可能なので、PYTHIA 8.3 (Bierlich et al. (2022)) を用いてモンテカルロシミュレーションを行なって平均値を数値的に求める。

2.3 モンテカルロシミュレーション

f 粒子のエネルギー E_f を適当なビンの数に分けて、そのビンのエネルギー幅 ΔE_f を用いて、エネルギー E_i の i 粒子 1 個が生成するエネルギービン $[E_f, E_f + \Delta E_f]$ に入る粒子の個数を $\Delta N_{i \rightarrow f}$ と定義する。

PYTHIA 8.3 の Resonance Decays を用いて、静止質量 $m_0 = 2E_i$ 、電荷 0、色荷 0、スピン 1 重項の共鳴状態を設定し、 $i\bar{i}$ 対に崩壊するように設定する。これを繰り返し計算し、 $\Delta N_{i \rightarrow f}$ の平均値を求める。シミュレーション結果は図 2 の通りである。低エネルギー側では破線の一次粒子より崩壊してできた陽電子の方が多くなる (実線は総和)。

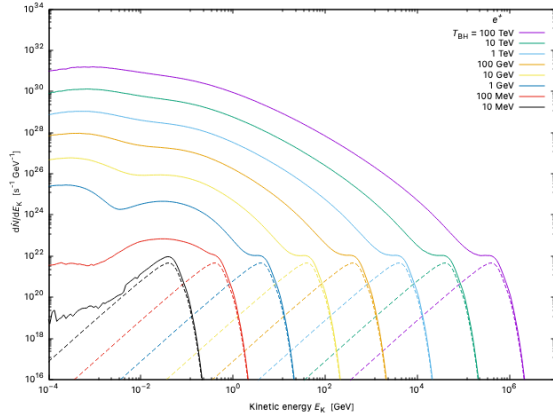


図 2: PBH からの陽電子放射のスペクトル。

2.4 陽電子バーストのスペクトル

陽電子放射率を質量の時間変化率を考慮して時間積分することで、PBH が蒸発するまでに放射する全陽電子のスペクトルが図 3 のように得られる。

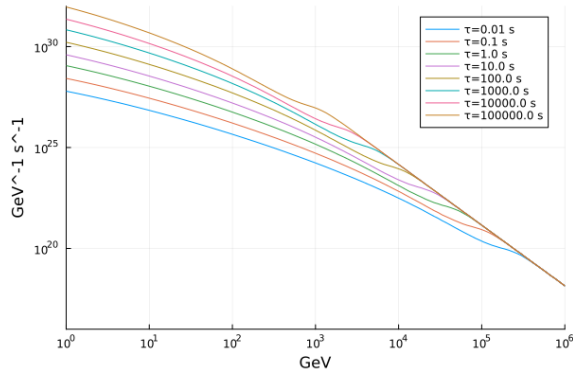


図 3: PBH が完全に蒸発するまでに放射する陽電子のスペクトル。

3 陽電子の伝播

陽電子の伝播を等方的な拡散現象と捉えて、次の拡散方程式

$$\frac{\partial n_{e^+}}{\partial t} - \frac{K}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial n_{e^+}}{\partial r} \right) - Q = 0 \quad (7)$$

を考える。\$K\$ は拡散係数、\$Q\$ は源泉である。ここで、主に銀河風の影響による移流項やエネルギー空間の拡散項は拡散する時間が十分に短いと仮定して無視

した。ここで拡散係数 \$K\$ はエネルギーに依存し、次の式で表される。

$$K = K_0 \beta \left(\frac{p}{1 \text{ GeV}/c} \right)^\delta \quad (8)$$

\$K_0\$、\$\delta\$ は観測によって一意に定まっておらず Donato ら (Donato et al. (2004)) により複数のベンチマークモデルが提案されている (表 1)。

表 1: 拡散パラメータ。

モデル名	\$\delta\$	\$K_0\$ [kpc\$^2\$ Myr\$^{-1}\$]
MIN	0.85	0.0016
MED	0.70	0.0112
MAX	0.46	0.0765

本研究においては MED のパラメータを使用して計算する。また前節で議論した PBH の陽電子スペクトルを源泉として PBH 一個が原点にあると考えると \$Q = \delta^3(\vec{r}) \frac{d\dot{N}_{e^+}}{dE_{e^+}}\$ と書ける。Green 関数 \$G(r, t, t')\$ を用いて、拡散方程式を解くと

$$n(r, E, t) = \int dt' \frac{d\dot{N}_{e^+}}{dE_{e^+}} G(r, t, t') \quad (9)$$

となる。但し Green 関数は

$$G(r, t, t') = \frac{1}{\pi^{3/2} r_{\text{diff}}^3} \exp\left(-\frac{r^2}{r_{\text{diff}}^2}\right), \quad (10)$$

$$r_{\text{diff}} = 2\sqrt{K(t-t')} \quad (11)$$

である (Atoyan et al. (1995))。この積分を数値的に解いて計算すると図 4 のようになる。拡散長 \$r_{\text{diff}}\$ の範囲において陽電子はおおよそ一定の値を取る。

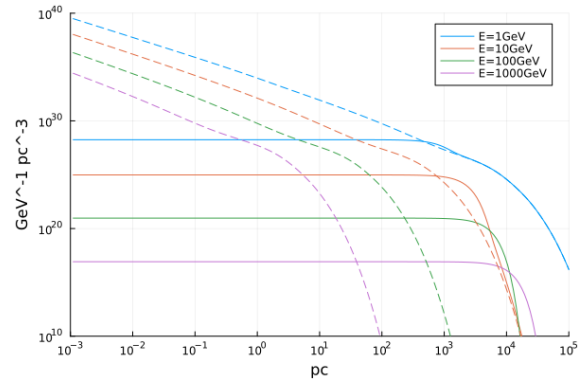


図 4: PBH から拡散した陽電子の分布。

4 結果

拡散長程度の長さスケールで PBH は十分一様に分布すると考えれば、一個の PBH の放射による陽電子の数密度 n_{e^+} と観測される陽電子フラックス $\Phi_{e^+, \text{sim}}$ の関係は、PBH の数密度 n_{PBH} を用いて

$$\Phi_{e^+, \text{sim}} = \frac{c \cdot n_{\text{PBH}}}{\sqrt{3}} \int_0^\infty dr 4\pi r^2 n_{e^+}(E, r) \quad (12)$$

と計算される。このフラックスと実際に AMS-02 で観測されたフラックスを重ねて、実測値を超えないような n_{PBH} が求めたい PBH 数密度の上限となる。

n_{PBH} を求めるには、AMS-02 の観測による陽電子フラックスの実測値を Φ_{e^+} とおくと $\Phi_{e^+} > \Phi_{e^+, \text{sim}}$ を満たす範囲で最大の n_{PBH} を求めれば良い。PBH が現在から $t_0 - \tau = 10 \text{ Myr}$ 前に蒸発したとして、AMS-02 の観測値と比較すると最大の n_{PBH} は

$$n_{\text{PBH}} = 1.369 \times 10^5 \text{ pc}^{-3} \quad (13)$$

であり、この場合の陽電子フラックスの観測値と PBH による陽電子フラックス理論値を比較すると図 5 のとおりになる。 $t_0 - \tau = 0-10 \text{ Myr}$ の範囲で同様に n_{PBH} の上限を計算したが、有意な差は生じなかった。

5 結論

10 Myr 前に蒸発する PBH と現在丁度蒸発する PBH の質量の差は十分小さいので、質量は常に $M_* = 5.17 \times 10^{14} \text{ g}$ とする。一般に PBH の存在量を議論する際に、PBH がダークマターとして振る舞うことに着目し、ダークマターに占める PBH の割合

$$f_{\text{PBH}} = \frac{\rho_{\text{PBH}}}{\rho_{\text{DM}}} = \frac{M_* n_{\text{PBH}}}{\rho_{\text{DM}}} \quad (14)$$

を計算すると、 $f_{\text{PBH}}(M_*) < 3.4 \times 10^{-12}$ という制限を得た。これは従来より強い制限を与えている (図 6)。

Reference

AMS Collaboration 2021, Phys. Rep. **894**, 1–116.
 A.M. Atoyan, F.A. Aharonian, and H.J. Völk 1995 Phys. Rev. D **52**, 3265–3275.
 C. Bierlich et al. 2022, SciPost Phys. Codebases 8.

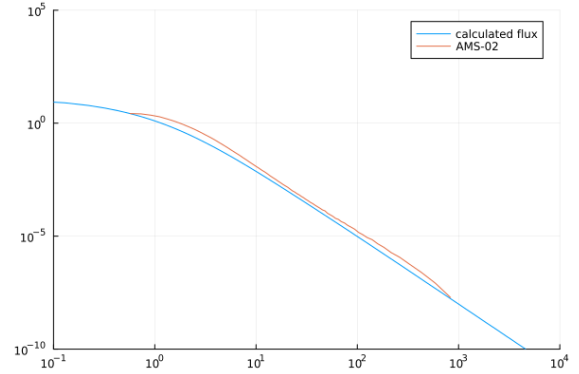


図 5: $n_{\text{PBH}} = 1.369 \times 10^5 \text{ pc}^{-3}$ の場合の PBH からの陽電子フラックスと AMS-02 による観測値の比較。

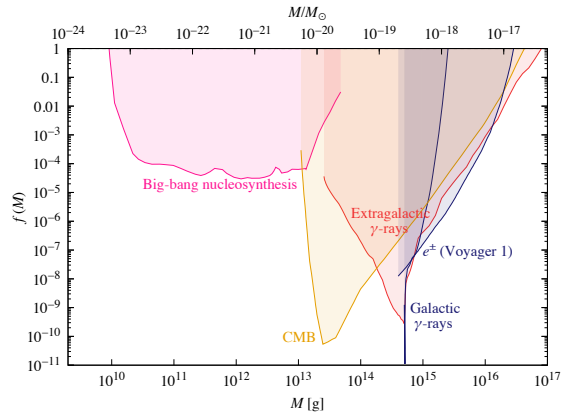


図 6: f_{PBH} への制限。

M. Boudaud and M. Cirelli 2019, Phys. Rev. Lett. **122**, 041104.
 B. Carr, K. Kohri, Y. Sendouda, and J. Yokoyama 2021, Rep. Prog. Phys. **84**, 116902.
 F. Donato, N. Fornengo, D. Maurin, P. Salati, and R. Taillet 2004, Phys. Rev. D **69**, 063501.
 S.W. Hawking 1971, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **152**, 75–78.
 S.W. Hawking 1974, Nature **248**, 30–31.
 J.H. MacGibbon and B.R. Webber 1990, Phys. Rev. D **41**, 3052–3079.
 D.N. Page 1976, Phys. Rev. D **13**, 198–206.
 Planck Collaboration 2020, Astron. Astrophys. **641**, A1.
 Ya.B. Zel'dovich and I.D. Novikov 1967, Sov. Astron. **10**, 602–603.

重宇 a37

Starobinsky's piecewise linear モデルにおける原始ブ
ラックホールの形成について

富田 涼也

Starobinsky's linear model でのインフレーション

富田 涼也 (立教大学大学院 理学研究科)

Abstract

インフレーションは、インフラトンと呼ばれるスカラー場がポテンシャルの坂をゆっくり転がることで実現される (スローロールインフレーション)。またポテンシャルの傾きが小さい時、インフラトンが非常にゆっくり転がることからウルTRASローロールと呼ばれる状況が実現される。ウルTRASローロール中に生成された曲率揺らぎは非常に大きな振幅を持つことから、原始ブラックホールを形成する可能性がある。

今回ウルTRASローロールを起こすインフレーションのモデルの一つとして、piecewise linear potential モデルを考える。このモデルは2つの異なる傾きを持つ線形的なポテンシャルを結合したもので、接合部分以外はスローロールをしているが、傾きが変わった直後はウルTRASローロールが実現され、曲率揺らぎが生成される。

1 Introduction

インフレーションは、宇宙初期の急激な加速膨張である。インフレーションはビッグバン理論の問題点とされる、平坦性問題やホライズン問題を解決する。また、インフレーションの摂動のスカラー成分が現在の宇宙構造の種になっているという点もこの理論を考える利点になっている。

インフレーションの最も簡単なラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)$$

であらわされる。 R はリッチスカラーである。また、運動方程式は

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0$$

H はハッブルパラメータである。

2 starobinsky's linear model

今回考えるインフレーションモデルは図1である。傾きの違う線形的なポテンシャルが $\phi = \phi_0$ で接合している。具体的な V の表式は、

$$\begin{cases} V = V_0 + A_+(\phi - \phi_0) & \phi > \phi_0 \\ V = V_0 + A_-(\phi - \phi_0) & \phi \leq \phi_0 \end{cases}$$

となる。

スカラー場がポテンシャルの坂を下るとき、基本

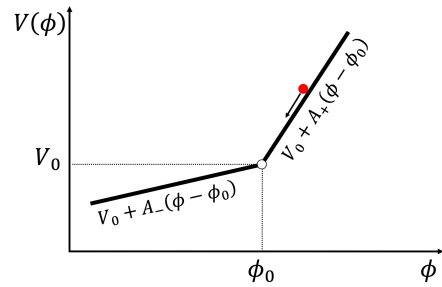


図 1: ポテンシャルの概形

的にはスローロールしている。スローロール条件が成り立つ時のスローロール中の場の運動方程式は

$$3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0$$

となる。接合部分を通じた直後だけはポテンシャルの坂が緩くなるのでスカラー場は減速をする。この時期をウルTRASローロールという。この時の場の運動方程式は

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = 0$$

となる。減速し終わると、再びスローロールに戻る。

3 スカラー場の摂動展開

単一のスカラー場に対して、一様等方であるバックグラウンドと、摂動成分があることを考える。この時、

$$\phi = \bar{\phi}(\tau) + \delta\phi(\mathbf{x}, \tau)$$

となり、 $\delta\phi$ は以下の運動方程式に従う。

$$(\delta\phi)'' + 2\frac{a'}{a}\delta\phi' - \Delta\delta\phi = 0$$

ここで、 $'$ は共形時間での微分である。

a をスケールファクターとして、 $v = a\delta\phi$ という変換を課すと、フーリエ空間で

$$v_k''(\tau) + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right)v_k(\tau) = 0$$

と表される。この式を Mukhanov-佐々木方程式という。

4 曲率揺らぎが従う方程式

Mukhanov-佐々木方程式の解はフーリエ空間で、ハンケル関数を用いて以下のように表される。

$$v_{k,i}(\tau) = C_i(k)\sqrt{-k\tau}H_{3/2}^{(1)}(-k\tau) + D_i(k)\sqrt{-k\tau}H_{3/2}^{(2)}(-k\tau)$$

ここでラベル $i = 1, 2$ のとき、傾きがそれぞれ A_+ 、 A_- となる。

さらに、

$$\mathcal{R}_{k,i}(\tau) = \frac{v_{k,i}(\tau)}{z_i(\tau)}$$

という関係を使えば、

$$\mathcal{R}_k'' + 2\frac{z'}{z}\mathcal{R}_k' + k^2\mathcal{R}_k = 0$$

が得られる。ここで、

$$z := aM_{pl}\sqrt{2\epsilon} = \frac{a|\dot{\phi}|}{H}$$

としている。 z はスローロールパラメータである。このような \mathcal{R} を曲率揺らぎという。

z は場の運動方程式の積分から領域ごとに計算できて、

$$\begin{cases} z(\tau) = -\frac{a_0}{3H_0^2}A_+\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{-1} \\ z(\tau) = -\frac{a_0}{3H_0^2}\left[A_-\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{-1} + (A_+ - A_-)\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^2\right] \end{cases}$$

となる。ここで、 τ はそれぞれ

$$\begin{cases} \tau < \tau_0 \\ \tau \geq \tau_0 \end{cases}$$

また、

$$\begin{cases} \phi(\tau_0) = \phi_0 \\ \tau_0 = -1/a_0H_0 \end{cases}$$

である。

5 パワースペクトルの決定

さて、無次元のパワースペクトル $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\tau) = \frac{k^3}{2\pi^2}|\mathcal{R}_{k,i}(\tau)|^2$$

で求められる。曲率揺らぎを決定するためには Mukhanov-佐々木方程式の階の係数を決定する必要がある。 $i = 1$ の時は短波長極限でミンコフスキー時空の真空解と一致するという条件から、 $i = 2$ の時は接合部分での接続条件から求められる。接続条件の具体的な式は

$$\begin{cases} \mathcal{R}_{k,1}(\tau_0) = \mathcal{R}_{k,2}(\tau_0) \\ \mathcal{R}'_{k,1}(\tau_0) = \mathcal{R}'_{k,2}(\tau_0) \end{cases}$$

である。係数を求め、興味がある $i = 2$ のパワースペクトルを求めると図 2 のようになる。

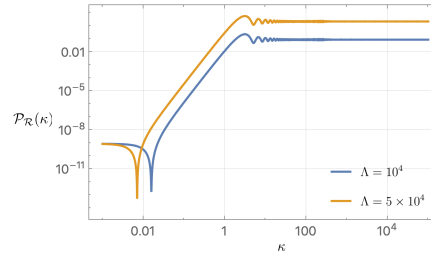


図 2: パワースペクトル

ここで $\kappa = -k\tau_0$ である。インフレーションが終わる時、つまり $\tau = 0$ で CMB の $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^{(IR)} = 8.5 \times 10^{-10}$ で規格化している。

6 パワースペクトルの概形

得られた概形を見ると小スケールで大きなパワースペクトルになっていることが分かる。これがウルトラスローロールの寄与であると考えられる。また、 $\Lambda = A_+/A_-$ であり、 Λ が大きければ大きいほどポテンシャルの接合部分は直角に近づき、ウルトラスローロールの効果が大きくなる。それが小スケールのパワースペクトルにも現れていることがわかる。

7 結論と今後の展望

今回 linear potential model のパワースペクトルを求めるところまでしか計算できなかったが、ウルトラスローロールが実現されれば小スケールでパワースペクトルが大きくなり原始ブラックホールが形成される可能性があることを確認できた。

今後の展望として、スカラー摂動の中でも重要な話題の1つである原始ブラックホールについてこのモデルで考えていきたい。

Acknowledgement

お忙しい中であるにも関わらず多くのアドバイスをいただいた、飯塚さん、斉藤さん、村田さんをはじめとする理論物理学研究室宇宙院生ゼミの皆さんにこの場を借りてお礼申し上げます。また、このような発表の機会を与えてくださった夏の学校運営スタッフの方々にも深く感謝いたします。

Reference

S.Pi & J.Wang 2023, JCAP 06, 018

重宇 a38

複数場インフレーションによる特定のスケールでの原
始ブラックホール生成の促進

川口 健三郎

状態方程式が時間依存する場合における原始ブラックホール生成の促進

川口 健三郎 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

初期宇宙において、高密度の領域が重力崩壊することで原始ブラックホールと呼ばれるブラックホールが生成される可能性がある。崩壊する密度の閾値は宇宙の状態方程式の w に依存する。初期宇宙にスカラー場が一時的に台頭し w の値を下げる場合には、原始ブラックホールの生成量が増加する。今発表では、輻射優勢期に一時的にあるスカラー場の寄与が大きくなるようなモデルを考え、閾値の変化、およびそれにより原始ブラックホールが生成されやすくなることを発表する。

1 Introduction

LIGO が 2015 年に初めてブラックホール (BH) 連星由来の重力波を観測したことは記憶に新しい。連星を成していた BH の質量は太陽質量のおよそ 30 倍であった。通常天体は進化の段階で質量放出を起こすため、こうした大質量 BH の起源を通常天体に求めることは難しい。このような BH はいかにして生じたのか、その問いの答えとなる可能性があるのが原始ブラックホール (Primordial Black Hole: PBH) である。

PBH は宇宙初期に生成される BH である。宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) の観測から、この宇宙には揺らぎが存在していることが明らかになっている。宇宙初期に存在した密度揺らぎのうち、十分振幅が大きな揺らぎが地平線に入った時に重力崩壊を起こす可能性があり、PBH はこの重力崩壊によって生成されると考えられている (図 1)。PBH の質量は概ね生成時のハッブル体積内の質量程度と見積もられるので、大質量 BH の起源となりうるのである。

観測による PBH の質量への制限には 10^{20}g 程度のところに質量窓が存在しており、PBH が宇宙に存在する暗黒物質全てを賄うことも可能である (図 2)。暗黒物質としては axion や WIMP のように標準模型に含まれない粒子を仮定するものもあるが、既存の物質のみで暗黒物質の説明ができることは PBH の大きな魅力の一つである。

未だ PBH の存在を示す直接的な証拠も、間接的な証拠も見つかっていない。しかし、その検出に備え、PBH 連星ができるかどうかを理論的に検証しておくことは重要である。

PBH を生み出すには特定のスケールでの大きな揺

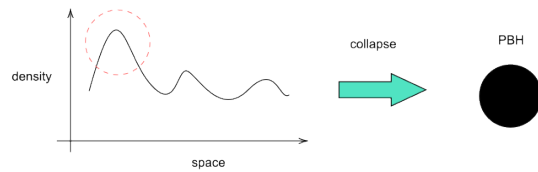


図 1: 原始ブラックホール生成の模式図

らぎ (オーダー 1 程度) が必要である。単一場によるスローロールインフレーションでは、揺らぎはスケール不変となる。密度揺らぎのパワースペクトルは CMB の観測から 10^{-5} 程度とわかっているため、スケール不変な揺らぎを生じるこのモデルでは PBH を作ることはできない。これまでに単一場でも PBH が生成されるよう、インフラトンのポテンシャルが一部平坦になるようなウルTRASローロール模型、インフラトンの他に揺らぎを強める場を導入した複数場インフレーション模型などが多数考えられてきた。

2 Methods

PBH の生成は宇宙初期の密度揺らぎに起因し、その閾値 δ_c は (Harada et al. 2013) により次のように求められている。

$$\delta_c = \frac{3(1+w)}{5+3w} \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi\sqrt{w}}{1+3w} \right) \quad (1)$$

ここで、 w は宇宙の状態方程式 $\rho = wp$ の w である。 w が変化する場合、この閾値 δ_c も変化し、PBH の生成が促進される可能性がある。そのために、輻射優勢期にスカラー場が一時的に台頭するモデルを考

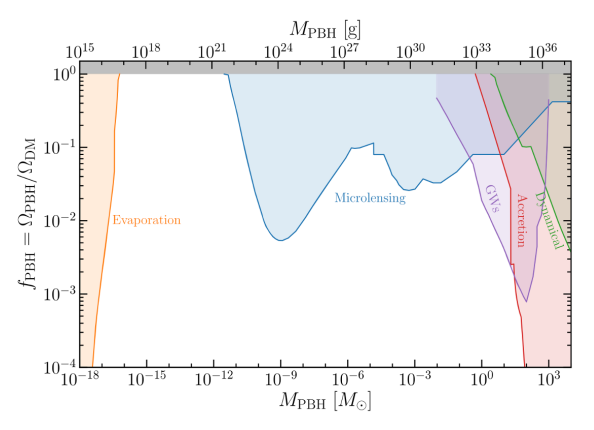


図 2: PBH の蒸発、マイクロレンズ効果、重力波、PBH の降着から得られる、PBH が全ダークマターに占める割合の制限。(Green, A. M. et al. 2021)

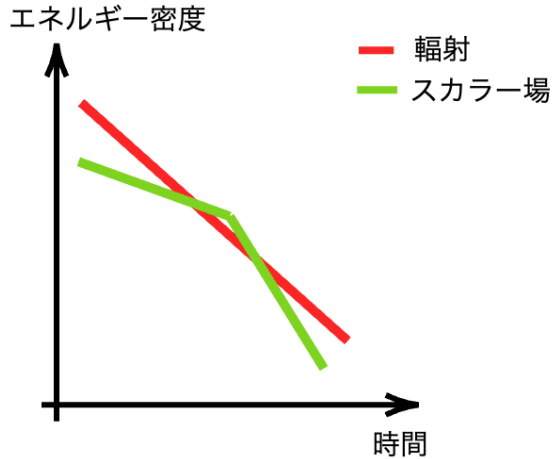


図 3: 今回のモデルの模式図。一時的にスカラー場のエネルギー密度が輻射を上回るような場合を考える。

え、どの程度 PBH が生成されうるかを調べる。(図 3)

自然単位系 ($c = \hbar = k_B = 1$) を用いて、以下の二つの方程式を連立して解く。

$$\begin{aligned}\ddot{\phi} &= -(3H + \Gamma_\phi)\dot{\phi} - m^2\phi, \\ \dot{\rho}_r &= -4H\rho_r + \Gamma_\phi\dot{\phi}^2,\end{aligned}\quad (2)$$

ここで、エネルギー密度と圧力は以下のように表される。

$$\begin{aligned}\rho_\phi &= \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2, \\ p_\phi &= -\frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2, \\ H^2 &= \frac{8\pi G}{3}(\rho_r + \rho_\phi) = \frac{1}{3M_{\text{pl}}^2}(\rho_r + \rho_\phi), \\ M_{\text{pl}} &:= \frac{1}{\sqrt{8\pi G}}.\end{aligned}\quad (3)$$

上式より、 $\dot{\phi}$ を掛けて整理すると、

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_\phi &= -(3H + \Gamma_\phi)\rho_\phi, \\ \dot{\rho}_r &= -4H\rho_r + \Gamma_\phi\rho_\phi,\end{aligned}\quad (4)$$

と書ける。

目的のスケールで PBH が生成されるかどうかを確認するために、数値計算を行う。ここで目標とする PBH の質量は 10^{20}g 程度である。時間スケール $t \approx \Gamma_\phi^{-1}$ 程度で輻射が優勢になる。この間に ρ_ϕ は急速に減少し、 ρ_ϕ と ρ_r の逆転が起こる。

初期条件として、

$$\rho_{r,i} = R\rho_{\phi,i}, \quad R \gg 1 \quad (5)$$

とする。 Γ が小さい場合、 $\rho_r \propto a^{-4}$ 、 $\rho_\phi \propto a^{-3}$ であるので、 $\rho_r \approx \rho_\phi$ となるのは $a = R$ の時である。輻射優勢期では $a \propto t^{1/2}$ であるので、 $t = R^2 t_i$ である。したがって、

$$\frac{1}{\Gamma t_i} > R^2 \quad (6)$$

が得られる。

以上のことから、次の方程式が得られる。

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_\phi}{d(\Gamma t)} &= -(3\frac{H}{\Gamma} + 1)\rho_\phi, \\ \frac{d\rho_r}{d(\Gamma t)} &= -4\frac{H}{\Gamma}\rho_r + \rho_\phi, \\ \left(\frac{H}{\Gamma}\right)^2 &= \frac{8\pi}{3} \frac{\rho_r + \rho_\phi}{M_{\text{pl}}^2 \Gamma^2}.\end{aligned}\quad (7)$$

初期条件は、

$$\left(\frac{H_i}{\Gamma}\right)^2 = \left(\frac{1}{2\Gamma t_i}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} \frac{(1+R)\rho_{r,i}}{M_{\text{pl}}^2 \Gamma^2}, \quad \frac{1}{\Gamma t_i} > R^2 \quad (8)$$

となる。

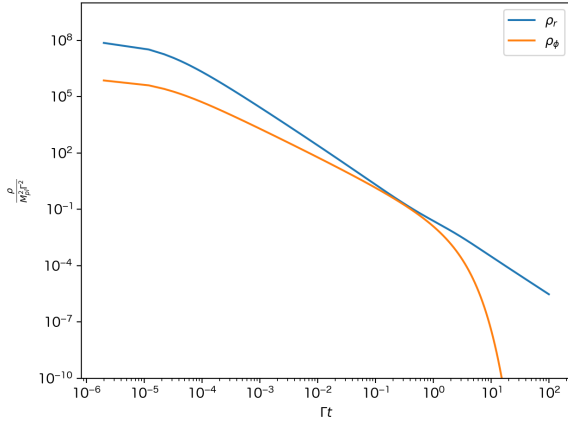


図 4: 輻射のエネルギー密度 (青) とスカラー場のエネルギー密度 (橙)

ビリアル定理から、 $\rho_\phi = \overline{\dot{\phi}^2}$ であり、 $p_\phi = -\rho_\phi + \dot{\phi}^2 = 0$ 、つまり振動している時は $w_\phi = 0$ である。これより、

$$w_{\text{total}} = \frac{\rho_r/3 + p_\phi}{\rho_r + \rho_\phi} = \frac{\rho_r/3}{\rho_r + \rho_\phi} \quad (9)$$

となる。

3 Results

方程式 (4) を解いて得られた結果が図 4, 図 5 である。また、全領域のうち、PBH に崩壊する領域の割合 β は次で与えられる。

$$\beta(M) = \int_{\delta_c}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2(M)}} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2(M)}\right) d\delta \quad (10)$$

ここで、 δ は揺らぎ、 σ は揺らぎの標準偏差である。スケール不変な揺らぎを想定し、 $\sigma = 10^{-3}$ とした時の β が図 6 である。

4 Conclusion

図 6 より、特定のスケールで PBH が生成されやすくなるのがわかる。PBH が生成される時期は概ね $t \sim 1/\Gamma$ の時である。つまり、スカラー場の崩壊率により PBH が生成される時期が決定される。

今後、適当な複数場インフレーションモデルにおいて同様に計算を行い、今回の設定が具体的なイン

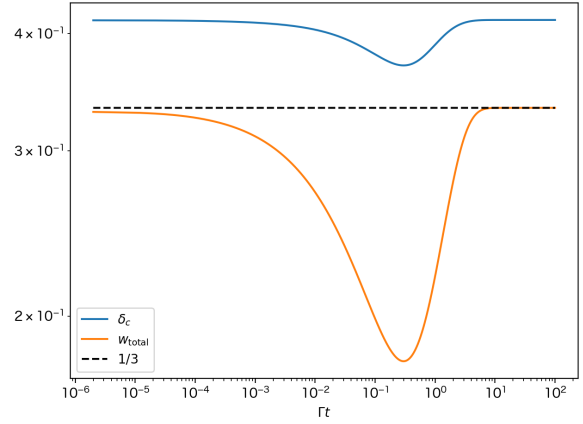


図 5: PBH 生成の閾値 δ_c (青) と w_{total} (橙)

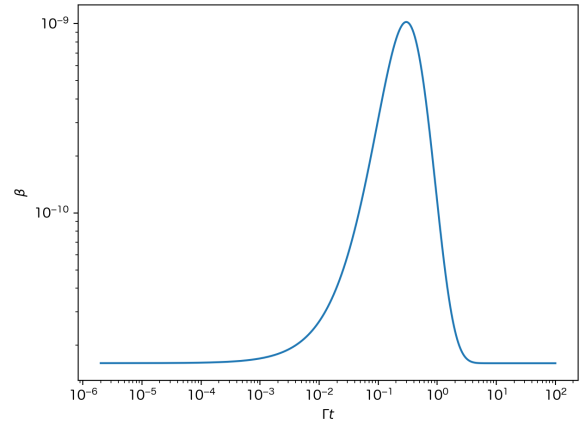


図 6: PBH に崩壊する領域の割合

フレーションモデルを設けても成り立つかしらべ、その場合の PBH の質量スケールを検証する。

Reference

Harada, T., Yoo, C. M., & Kohri, K. 2013. Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology, 88(8), 084051.

Green, A. M., & Kavanagh, B. J. 2021, Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, 48(4), 043001.

重字 b01

インフレーション中に生成される非ガウス性揺らぎと
その原始ブラックホール形成

島田 正顕

インフレーション中に生成される非ガウス性揺らぎと その原始ブラックホール形成

島田 正顕 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

近年ガウシアン曲率揺らぎに対して生成量が増大されるとして非ガウス性を持つ曲率揺らぎの議論が行われている。そこで本研究ではインフレーション中に生成される非ガウス性を持つ揺らぎに注目し、その揺らぎの崩壊によって形成される原始ブラックホール (PBH) の形成の数値シミュレーションを行う。そのためにまずガウシアン曲率揺らぎと非線形的な関係を持つ曲率揺らぎを導出する。シミュレーションを実行した結果、PBH が形成されるために必要な振幅と形成される PBH の構造の非ガウス性依存性の議論を行う。本研究では非ガウス性が強くなればなるほど PBH 形成に必要な振幅が小さくなることが示された。さらには形成される PBH の質量や形成量に議論も行いたい。

1 Introduction

原始ブラックホール (PBH) は、インフレーション中に生成された量子揺らぎが宇宙膨張に従って引き延ばされ、その揺らぎの崩壊によって形成されるブラックホール (BH) である。PBH が形成されるかどうかは主にこの揺らぎの振幅に依存する。すなわち揺らぎの振幅がある閾値を超える場合に PBH は形成される。そのような揺らぎはさらにその構造から I 型と II 型に分類される。II 型揺らぎは振幅が大きすぎることから生成量も少なく PBH 形成への寄与も小さいと考えられ続けてきた。しかし近年揺らぎが強い非ガウス性を持つ場合は II 型揺らぎの生成量も大きくなり II 型揺らぎの寄与を考えることも重要である可能性が指摘された [1]。

本研究では揺らぎの非ガウス性に注目し、揺らぎの崩壊の数値シミュレーションを実行する。本研究で用いる曲率揺らぎは、ガウス性の曲率揺らぎと非線形的な関係を持っているため非ガウス性を持っている。そこで非ガウス性の強さを表すパラメータを導入し、そのパラメータごとにシミュレーションを実行する。その結果 PBH 形成に必要な揺らぎの振幅と非ガウス性の関係についての議論を図る。さらには形成される PBH の質量や量の定性的評価を行うことにより、観測結果との比較を目指す。

2 Curvature Fluctuation with non-gaussianity

PBH 形成モデルとして three-zone モデルを用いる [2]。three-zone モデルは flat FLRW 宇宙の内側に過密領域である揺らぎが closed FLRW 宇宙として存在するようなモデルである。したがって背景宇宙の計量は

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dr^2 + r^2 d\Omega^2) \quad (1)$$

と書かれる。一方内側の宇宙においては PBH 形成時の仮定を課す。十分 super-horizon scale において ζ の振幅が PBH 形成閾値 μ_c よりも大きい場合に、horizon reentry 後の放射優勢期に PBH は形成され得る。super-horizon scale では Hubble horizon R_H と揺らぎの長さスケールを表す R_m で関連付けられる無次元パラメータ $\epsilon \equiv R_H/R_m$ は $\epsilon \ll 1$ を満たす。 $\epsilon \rightarrow 0$ 極限において球対称計量は

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)e^{2\zeta(r)}(dr^2 + r^2 d\Omega^2) \quad (2)$$

と書くことができる。

本研究ではガウシアン曲率揺らぎ ζ_G の曲率揺らぎに対して非線形的な関係を持つ曲率揺らぎ $\zeta = \zeta(\zeta_G)$ を用いる。これは δN formalism を用いて導出することができる [3]。具体的には

$$\zeta = -\frac{1}{\beta} \ln(1 - \beta\zeta_G) \quad (3)$$

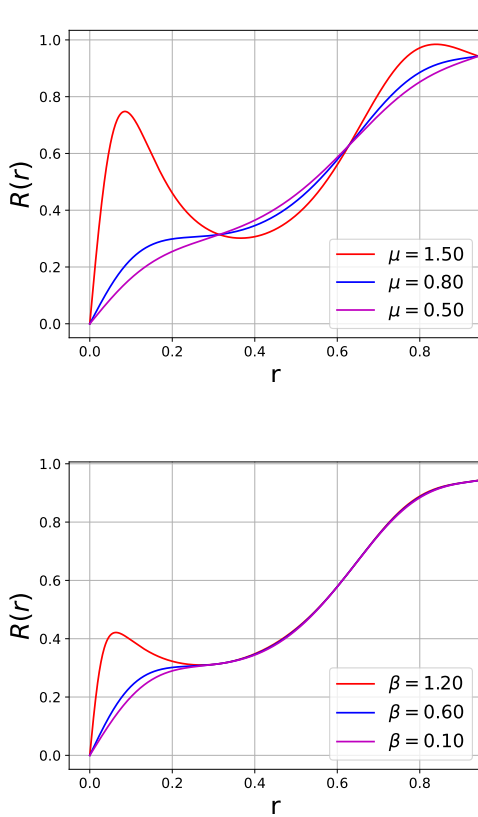


図 1: 面積半径 $R(r)$ と μ 依存性 (上図) と β 依存性 (下図). 上図は $\beta = 0.5$ の場合, 下図は $\mu = 0.8$ の場合のプロファイルを示した. 青と紫が I 型揺らぎ, 赤が II 型揺らぎを表す.

と表さる. ここで β は新しく導入された非ガウス性の強さを表すパラメータであり, $\beta = 0$ はガウス性を表す. また ζ_G に対しては典型的なプロファイルである monochromatic は表式を仮定する; 揺らぎの波数 k を用いて $\zeta_G = \mu \text{sinc}(kr)$ と書かれる. したがって最終の曲率揺らぎは

$$\zeta = -\frac{1}{\beta} \ln(1 - \beta \mu \text{sinc}(kr)). \quad (4)$$

3 Type I/II Fluctuations

PBH を形成するような曲率揺らぎは I 型と II 型揺らぎに分類される. I 型と II 型の本質的な違いはその振幅の大きさである. II 型揺らぎの定義は, 面積半径 $R = \text{are}^{\zeta(r)}$ が単調性を失う点が存在することで

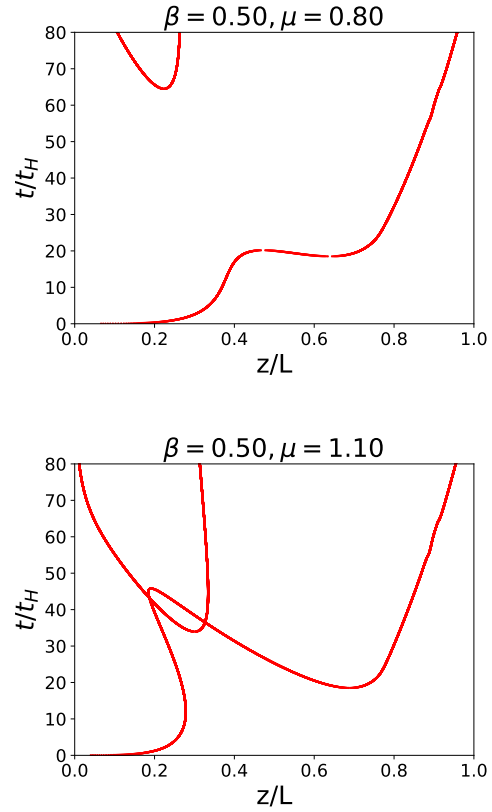


図 2: A 型 PBH(上図) と B 型 PBH(下図) の構造.

ある, すなわち $R'(r_{\text{II}}) = 0$ となるような r_{II} が存在する場合その揺らぎは II 型揺らぎである. 逆にこのような r_{II} が存在せず面積半径が単調性を保っているような揺らぎを I 型揺らぎと定義する.

図 1 に面積半径 R の μ を変えた場合と β を変えた場合のプロファイルを示す. 図内において極値を持つような赤色の線は II 型揺らぎである. 振幅を大きくした場合, もしくは非ガウス性を表す β の値を大きくした場合に II 型揺らぎが生成されることが分かる. また図 4 内の青線に I 型と II 型揺らぎの境界を示した. β が正の領域では非ガウス性が大きくなるにつれて, すなわち β の値が大きくなるにつれてその閾値は小さくなる事が分かる.

4 Type A/B PBH spacetime

曲率揺らぎの崩壊によって形成される PBH の構造もまた, その構造から A 型と B 型に分類される. A 型と B 型の決定的な違いは bifurcating horizon が存在

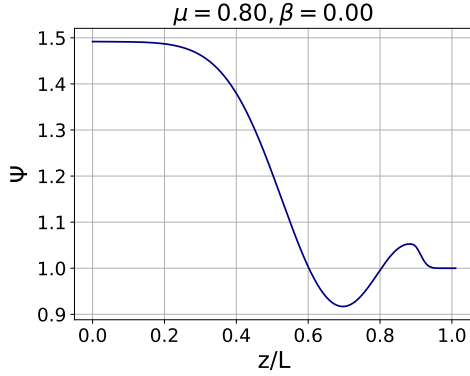


図 3: $\Psi = e^{\zeta/2}$ の初期プロファイル.

するかどうかである. 図 2 に 2 つの場合の PBH の構造を示した. 赤色の線は trapping horizon を表している. bifurcation horizon は 2 つの trapping horizon が交わっている場所を表している. 図 2 の上図のように交点が無いような構造の PBH を A 型 PBH と定義し, 下図のように bifurcating horizon が存在するような構造の PBH を B 型 PBH と定義する. より詳細な議論は [4] を参照されたい.

5 Set-up

本研究はアインシュタイン方程式を数値的に解く数値コード「COSMOS」を用いて曲率揺らぎの崩壊の数値シミュレーションを実行する [5]. このセクションでは数値計算を行うにあたっての初期条件の説明を行う. 数値計算を行う曲率揺らぎの初期条件の表式としては, 式 4 を用いるが $0/0$ を避けるために $r = 0$ 近傍においてはテイラー展開をした形を用いる. また r が大きい部分では Window function $W(r)$ を導入した形を用いる [6].

$$\zeta = \begin{cases} -\frac{\ln(1-\beta\mu)}{\beta} + \frac{\mu k^2 r^2}{6(-1+\beta\mu)} + O(r^4) & \text{for } 0 \leq r < 0.0001 \\ -\frac{1}{\beta} \ln(1-\beta\mu \text{sinc}(kr)) & \text{for } 0.0001 \leq r < 0.7725 \\ -\frac{1}{\beta} \ln(1-\beta\mu \text{sinc}(kr))W(r) & \text{for } 0.7725 \leq r \leq 1.0 \end{cases}$$

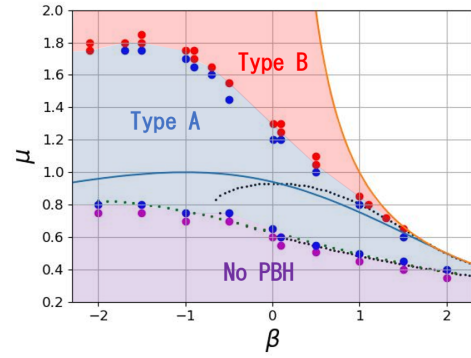


図 4: 形成される BH のタイプと非ガウス性 β と振幅 μ の関係.

Window function $W(r)$ の具体的な表式は [6] を参照されたい. 数値コードには $\Psi = e^{\zeta/2}$ のプロファイルを導入し, その時間発展を計算することによって揺らぎの崩壊の数値シミュレーションを行う. 図 3 に $\mu = 0.80, \beta = 0.0$ (ガウシアン) の場合の Ψ の初期プロファイルを示す. z, L は数値計算上の座標であり, 特に z は r に対して scale-up 座標を用いている [4].

6 Results

図 4 にパラメータ μ, β ごとの形成される PBH のタイプを示した. 青色の線は I 型曲率揺らぎと II 型曲率揺らぎの境目を表しており, 青線より上側は II 型曲率揺らぎである. またオレンジ線より上側は 4 の真数条件から来るパラメータ禁止領域である. また黒点と緑点はそれぞれ, compaction function と q-parameter と呼ばれる手法によって推定される PBH 形成閾値を表している [7].

図 4 から明らかなように非ガウス性を表すパラメータ β の値が大きくなるにつれて PBH 形成に必要な振幅の値も B 型 PBH が形成に必要な振幅の値も小さくなるのが分かる.

7 Conclusion

本研究ではガウシアンの曲率揺らぎに対して典型的なプロファイルを仮定し, ガウシアン曲率揺らぎと (5) 非線形的な関係を持つ曲率揺らぎの崩壊の数値シミュレーションを実行することで, 揺らぎの持つ非ガウス

性による, 揺らぎと PBH 形成への影響を調べた. 揺らぎに対しては非ガウス性を表すパラメータ β が正の領域で, 非ガウス性が大きくなるにつれて II 型揺らぎは生成されやすくなる. PBH 形成に対しても同様の条件で A 型, B 型 PBH の両方の形成に必要な振幅が小さくなることが分かった.

8 Future Work

今後は形成された PBH のアクリーシヨンの効果を考慮し, PBH の最終的な質量とその生成量を考える. それらを求めることでそれらの振幅や非ガウス性の依存性を調べることを目的とする.

Reference

- [1] Gow, A. D., Assadullahi, H., Jackson, J. H. P., Koyama, K., Vennin, V. and Wands, D., *Non-perturbative non-gaussianity and primordial black holes*, *EPL* **142** (2023) 49001.
- [2] T. Harada, C.-M. Yoo and K. Kohri, *Threshold of primordial black hole formation*, *Phys. Rev. D* **88** (2013) 084051.
- [3] A. Escrivà, V. Atal and J. Garriga, *Formation of trapped vacuum bubbles during inflation, and consequences for pbh scenarios*, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2023** (2023) 035.
- [4] K. Uehara, A. Escrivà, T. Harada, D. Saito and C.-M. Yoo, *Numerical simulation of type II primordial black hole formation*, 2401.06329.
- [5] C.-M. Yoo, H. Okawa and K.-i. Nakao, *Black-hole universe: Time evolution*, *Phys. Rev. Lett.* **111** (2013) 161102.
- [6] C.-M. Yoo, T. Ikeda and H. Okawa, *Gravitational collapse of a massless scalar field in a periodic box*, *Classical and Quantum Gravity* **36** (2019) 075004.
- [7] A. Escrivà, C. Germani and R.K. Sheth, *Universal threshold for primordial black hole formation*, *Phys. Rev. D* **101** (2020) 044022.

重字 b02

Lensing ring による M87* および Sagittarius A* の電荷への制限

鈴鹿 悠太

Lensing ring による M87* および Sagittarius A* の電荷への制限

鈴鹿 悠太 (東京理科大学大学院 加瀬研究科)

Abstract

Event Horizon Telescope (EHT) collaboration は、M87 銀河の超大質量天体の M87* と、天の川銀河の超大質量天体の射手座 A*(Sgr A*) のリング画像を公開した。EHT は、観測されたリングの半径が電荷による光子球のサイズの変化率に比例するという仮定の下で、M87* および Sgr A* の電荷 (または代替電荷) に対する制限を与えた。この仮定の妥当性は確かめられていないため、電荷に対する 制限を別の仮定の下で確認する価値がある。

本研究では、単純なモデルで光子球だけでなく、lensing ring の半径の変化率を考慮し、前述の制限について調べた [1] のレビューを行う。結論として、光子球の半径の変化率に基づく EHT の制限は、lensing ring の半径の変化率に基づいて制限を行った場合に緩和される。[1] では、Reissner-Nordström ブラックホール時空に焦点を当てているが、ブラックホール時空上の代替電荷パラメータの上限の緩和を示唆している。

1 Introduction

M87 銀河の超大質量コンパクト天体 M87* と、天の川銀河の中心にあるいて座 A*(Sgr A*) は、私たちから見える最も大きな見かけの大きさを持つブラックホール (BH) 候補天体である。最近、Event Horizon Telescope (EHT) collaboration は、波長 1.3 mm で観測する全球超長基線干渉計アレイを使用して、M87* と Sgr A* のリング画像を観測した。彼らは、リング画像が光子球や photon ring ではなく、一般相対論的磁気流体力学 (GRMHD) シミュレーションにおける Kerr BH の photon ring のほぼ外側にある高温プラズマからのシンクロトロン放射によって形成される強い重力レンズ画像で説明できると主張した。

Reissner-Nordström BH は、静的球対称で漸近的平坦な Einstein-Maxwell 方程式の帯電真空解である。EHT は、観測画像と他の観測結果を合わせ、Reissner-Nordström BH の光子球と Schwarzschild BH の光子球の変化率を用いて、1- σ レベルで電荷 Q と質量 M の比を、M87* では $0 \leq |Q|/M < 0.90$ [2]、Sgr A* では $0 \leq |Q|/M \leq 0.84$ [3] に制限した。観測されたリングは光子球ではなく、高温プラズマからのシンクロトロン放射による重力レンズ画像と一致しているため、この制限がどの程度正確であるかは疑問が残る。

本研究では、単純なディスクと BH の場合の lensing ring の変化率からの制限との比較により、光子球の変化率からの制限を緩和できることを示す。簡単

のために BH の角運動量については扱わない。最も単純なモデルとして、粒子の最も内側の安定円軌道 (ISCO) に内縁を持つ幾何学的に薄いディスクの周りの Reissner-Nordström BH に焦点を当てる。幾何学単位系 ($c = G = 1$) を用いる。

2 Reissner-Nordström Black Hole

Einstein-Maxwell 方程式の帯電真空解である Reissner-Nordström 解の線素は、座標 $x^\mu = (t, r, \vartheta, \varphi)$ において、

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (1)$$

である。ここで $f(r)$ は、

$$f(r) \equiv 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \quad (2)$$

であり、 M と Q は中心天体の質量と電荷を表す。静的球対称時空を考えているため、一般性を失わずに $\vartheta = \pi/2$ とすることができる。

光子の軌道は、

$$-f(r)\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{f(r)} + r^2\dot{\varphi}^2 = 0 \quad (3)$$

で求められる。ここでドットはアフィンパラメータでの微分を表す。また、衝突径数 $b \equiv L/E$ は、

$$E \equiv f(r)\dot{t} > 0 \quad (4)$$

$$L \equiv r^2 \dot{\phi} \quad (5)$$

で与えられる光のエネルギーと角運動量から求められる。衝突径数を使って、(3)を書き直した後、光線が放射される位置 $r = r_e$ から観測する位置 $r = r_o (> r_e)$ まで積分すると、光線が運動中に掃引する光線の曲がり角 γ は次のように表される。

$$\gamma = \pm \int_{r_e}^{r_o} \frac{dr}{r \sqrt{r^2/b^2 - f(r)}} \quad (6)$$

ここで、 \pm は $dr/d\phi$ の符号と同じになるように選ぶと、曲がり角は、

$$\gamma \equiv \int_{\phi_e}^{\phi_o} d\phi = \phi_o - \phi_e \quad (7)$$

と定義できる。以下では、方位角座標 ϕ について、観測する位置を $\phi_o = \pi/2$ に固定する。 $dr/d\phi$ は、光線が近星点 $r = P = P(b)$ を通る時に符号が変わることに注意すれば、光線が運動中に近星点を通過する場合の曲がり角は、

$$\gamma = - \int_{r_e}^{P(b)} \frac{bdr}{r \sqrt{r^2 - f(r)b^2}} + \int_{P(b)}^{r_o} \frac{bdr}{r \sqrt{r^2 - f(r)b^2}} \quad (8)$$

と計算される。近星点を通過しない場合は、

$$\gamma = \int_{r_e}^{r_o} \frac{bdr}{r \sqrt{r^2 - f(r)b^2}} \quad (9)$$

と計算される。

3 Set Up for Imaging

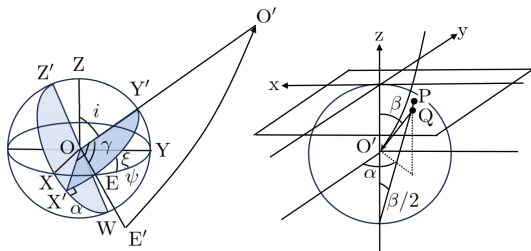


図 1: (左) 中心 O が BH 中心でもある単位球と円盤の内縁にある点 E' から放射される光線 (右) 中心 O' にいる観測者の単位天球 ([1] より引用)

文献 [4] で用いられている方法で画像の導出を行う。図 1 の左側の図では、 E' にある光学的かつ幾何

学的に薄い降着円盤の内縁から放射された光線を、 O' の位置にいる観測者が角度 i で見た場合を示している。ここでは、中心が O の単位球と座標 (X, Y, Z) を導入している。中心 O は、BH の中心と一致する。ディスクは平面 OXY 上にあり、その内縁は ISCO 軌道、つまり $r_e = r_{\text{ISCO}}$ であり、観測者 O' と中心 O の距離は $OO' = r_o = 10^5 M$ であると仮定する。

図 1 の右側の図では、 O' の観測者に対する単位球と座標 (x, y, z) と天球座標 (α, β) を導入している。ここでは、 (x, y, z) は x 軸と y 軸が、 OX' と OZ' に平行になり、 z 軸が OO' と重なるように設定している。点 Q は、 O' での光線の接線と単位球の交点であり、天球座標 β は、 z 軸と $O'Q$ の間の角度で与えられる。

簡単な計算から、天球座標 (α, β) は、

$$\cos \alpha = \cot i \cot \gamma \quad (10)$$

$$\tan \beta = \frac{b\sqrt{f_o}}{\sqrt{r_o^2 - f_o b^2}} \quad (11)$$

で求められる。ただし、 $f_o = f(r_o)$ である。天球座標 (α, β) で決まる点 Q を平面 $z = 1$ 上の点 P に投影すれば、以下となる。

$$x = -2 \sin \alpha \tan \frac{\beta}{2} \quad (12)$$

$$y = -2 \cos \alpha \tan \frac{\beta}{2} \quad (13)$$

4 Direct and Lensing Rings

光子球の存在により、ディスク上の一点から光線が放射された場合でも、無数の光線が観測者に到達する可能性がある。光線はディスクからの放射後、 n 回ディスク面を横切る。ディスク面を 0 回、1 回、2 回以上横切った光線によって形成されるリング像を、それぞれ direct ring ($n = 0$)、lensing ring ($n = 1$)、photon ring ($n > 1$) と呼ぶ。

本研究においては、 $i = 0^\circ$ の場合のみを考える。この場合、リング像は図 2~図 4 に示すように完全に円形をしている。BH、観測者、およびディスクの配置により、観測される光線の曲がり角は $|\gamma| = (1/2 + n)\pi$ である。したがって、direct ring ($n = 0$) と lensing ring ($n = 1$) の曲がり角は、それぞれ $|\gamma| = \pi/2$ と $3\pi/2$ である。各交差数 n に対して、リング像をブ

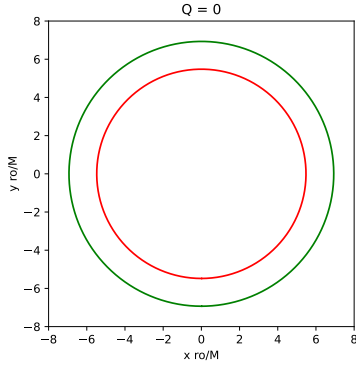


図 2: $i = 0^\circ$ 、 $Q = 0$ の場合の direct ring(緑) および lensing ring(赤)

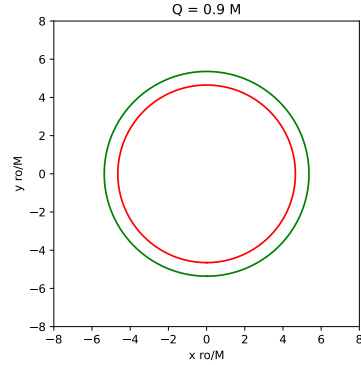


図 4: $i = 0^\circ$ 、 $Q = 0.9M$ の場合の direct ring(緑) および lensing ring(赤)

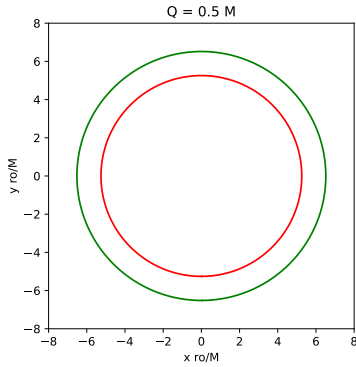


図 3: $i = 0^\circ$ 、 $Q = 0.5M$ の場合の direct ring(緑) および lensing ring(赤)

ロットするための衝突径数 b を求めることができる。 Q の値に対して (9) を数値的に解き、direct ring に対応する $|\gamma| = \pi/2$ を満たす b の値を求める。また、lensing ring についての衝突径数は、 $|\gamma| = 3\pi/2$ として (8) を数値的に解くことで求めることができる。その時の絶対値 $|b|$ は direct ring の場合、lensing ring の場合共に、電荷 $|Q|$ が 0 から M に増加するにつれて、減少する。

5 Constraints of the Charge by Observations

このセクションでは、M87* と Sgr A* の観測データから、lensing ring の変化率による電荷の制限を行う。前セクションで求めた電荷 Q に対する衝突径

数 b の変化率を、

$$\rho = \frac{b}{b_0}, \quad (14)$$

と定義する。ここで、 b_0 は電荷がない時 ($Q = 0$) の b の値である。

5.1 M87*

EHT は、波長 1.3 mm で直径 $42 \pm 3 \mu\text{as}$ の M87* のリング画像を観測し、距離 $D = 16.8 \pm 0.8 \text{ Mpc}$ という仮定の下で、GRMHD シミュレーションで観測されたリング画像が $1\text{-}\sigma$ レベルで $M = (6.5 \pm 0.7) \times 10^9 M_\odot$ の Kerr BH と一致すると結論付けた。質量 M と距離 D の比は $\theta_g \equiv M/D = 3.8 \pm 0.4 \mu\text{as}$ と求められた。一方、M87* の周囲の星の運動から見積もった質量の観測から $\theta \equiv M/D$ を求めると $3.62^{+0.60}_{-0.34} \mu\text{as}$ となる。ここで、

$$\delta \equiv \frac{\theta_g}{\theta} - 1, \quad (15)$$

によって質量 M と距離 D の比を比較すれば、 $\delta = -0.01 \pm 0.17$ を得る [5]。EHT は、文献 [2] では、 $\delta = 0.00 \pm 0.17$ とし、 δ が Reissner-Nordström BH と Schwarzschild BH の光子球の大きさの許容差に対応すると仮定し、 $1\text{-}\sigma$ レベルで電荷 $|Q|/M < 0.90$ の制限を得た。

一方、 $\delta = -0.01 \pm 0.17$ と lensing ring の半径の変化率を使用すると、図 5 に示すように、 $1\text{-}\sigma$ レベルでの境界 $|Q|/M \leq 0.96$ が得られる。

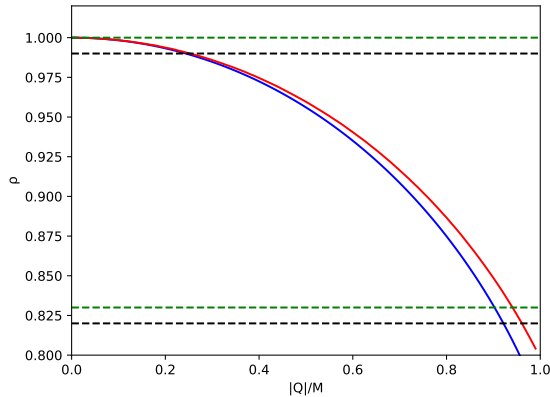


図 5: $1-\sigma$ レベルでの M87* の観測による電荷の制限は、 $\delta = -0.01 \pm 0.17$ が黒色で、 $\delta = 0.00 \pm 0.17$ が緑色で示されている。曲線は direct ring(青)、lensing ring(赤) の ρ の変化率を表す。

5.2 Sgr A*

EHT の Sgr A* のリング画像観測に基づく、電荷の制限についても同様の議論を行うため、ここでは簡単に結果を示す。Keck 観測による制限を用いると、図 6 に示すように光子球半径の変化率による制限は、 $|Q|/M \leq 0.84$ である [3] が、lensing ring の半径の変化率を使用すると、 $0 \leq |Q|/M \leq 0.87$ となる。

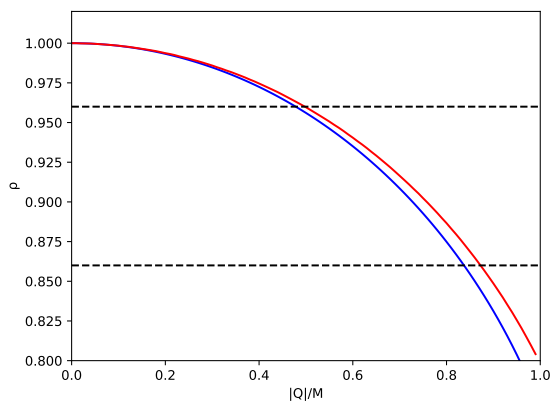


図 6: Keck 観測データを用いた $1-\sigma$ レベルでの Sgr A* の観測による電荷の制限は黒色の直線である。曲線は direct ring(青)、lensing ring(赤) の ρ の変化率を表す。

6 Conclusion

本研究では、EHT 観測とその他の観測から BH の電荷または代替電荷に制限をかける方法を検討した [1] のレビューを行った。EHT は、光子球の半径の変化率を使用して、M87* と Sgr A* の電荷または代替電荷に対する制限を与えたが、観測されたリングは光子球にも phorton ring にも一致しないという事実には留意する必要がある。

本研究において、BH の周りに幾何学的に薄いディスクの ISCO 半径にある光源からの放射によって形成される lensing ring のサイズの変化率を用いることによって、EHT が光子球のサイズで与えた電荷の制限を緩和できることを示した。粒子の ISCO に内縁がある幾何学的に薄いディスクは、単純なモデルであり、観測されるリング画像が lensing ring によって説明ができるとは主張しない。今回の研究の論点は、光子球のサイズによって与えられた電荷の制限をチェックし、電荷の制限が緩和される可能性があることを示すことにある。

[1] では Reissner-Nordström 解に焦点を当てたが、代替電荷を持つ代替 BH 解の場合にも、制限を与える研究が広く行われている。これらの代替 BH 解の場合においても、lensing ring のサイズを用いて代替電荷の制限が緩和される可能性がある。

Reference

1. N. Tsukamoto and R. Kase, [arXiv:2404.06414 [gr-qc]].
2. P. Kocherlakota et al. (Event Horizon Telescope), Phys. Rev. D 103, 104047 (2021), [arXiv:2105.09343 [gr-qc]].
3. K. Akiyama et al. (Event Horizon Telescope), Astro-phys. J. Lett. 930, L17 (2022), [arXiv:2311.09484 [astro-ph.HE]].
4. K. Hioki and U. Miyamoto, Phys. Rev. D 107, 044042 (2023), [arXiv:2210.02164 [gr-qc]].
5. K. Gebhardt, J. Adams, D. Richstone, T. R. Lauer, S. M. Faber, K. Gultekin, J. Murphy, and S. Tremaine, Astrophys. J. 729 119 (2011), [arXiv:1101.1954 [astro-ph.CO]].

[indexへ戻る](#)

重宇 b03

Thermal Wash-in Leptogenesis via Heavy Higgs Decay

渡邊 秀長

Thermal Wash-in Leptogenesis via Heavy Higgs Decay

渡邊 秀長 (総合研究大学院大学 素粒子原子核コース M2)

Abstract

本発表では、粒子崩壊では直接バリオン数やレプトン数を破ることのない leptogenesis の機構を提案する。特に今回のモデルでは、標準模型に新たに二組の Higgs doublet を加えた three Higgs doublet model を考える。新たに加えた Higgs doublet のうち、軽い方の Higgs の崩壊によって、右巻き電子非対称性が作られる。この非対称性は高温の初期宇宙では、近似的な保存量になる。この性質を利用することで、右巻き電子非対称性は右巻きニュートリノが関わる wash-in 機構と sphaleron 機構を通して、最終的にバリオン非対称性へと変換される。

1 Introduction

現在の我々の宇宙にはバリオンと反バリオンの間に非対称性が存在する。このバリオン非対称性の起源を説明することは、宇宙の未解決問題の一つである。

バリオン非対称性を説明する有力なシナリオの一つとして、leptogenesis が挙げられる。標準模型の枠内ではバリオン数 B やレプトン数 L は量子的に破れている。高温の初期宇宙においては、バリオン数やレプトン数を破る sphaleron という過程が熱平衡にあり、バリオン数やレプトン数を破る反応が頻繁に起こっていたと考えられている。しかし、バリオン数とレプトン数の差 $B - L$ はその過程でも保存している。したがって、例えばバリオン数やレプトン数を同じ量だけ作る (すなわち、 $B - L = 0$ を保つ) GUT baryogenesis では、この sphaleron が熱平衡であるために、せっかく作ったバリオン数やレプトン数が 0 にならされてしまう。sphaleron が熱平衡にある温度はおよそ $10^2 \text{ GeV} \sim 10^{12} \text{ GeV}$ であり、この期間でどのようにバリオン非対称性を作るかが重要である。

leptogenesis では、この sphaleron の熱平衡過程を利用してバリオン非対称性を作る。まず、何らかの機構によってレプトン非対称性を作る ($B - L = c$, ($c \neq 0$))。次に、sphaleron が熱平衡にあるためそのレプトン非対称性が減らされる。しかし、ここで重要なのが sphaleron が $B - L$ を保つということである。この性質があるために、減らされたレプトン非対称性はバリオン非対称性へと変換される。これが leptogenesis の概要である。

次に問題になるのはどのように $B - L$ 非対称性を作るかである。その一つの方法はマヨラナニュートリ

ノを導入することである。標準模型にマヨラナニュートリノを加えると、次のような項をラグランジアンに加えることができる。

$$M \bar{\nu}_R \nu_R + \lambda \bar{\ell} \tilde{\phi} \nu_R + \text{H.c.} \quad (1)$$

ここで、第一項はマヨラナ質量項、第二項はニュートリノ湯川相互作用項である。この第一項のマヨラナ質量項はレプトン数を破っている。したがって、マヨラナニュートリノを加えることでレプトン数を破る反応が起きる。

2 Wash-in Leptogenesis

本研究では、wash-in leptogenesis という機構を利用してバリオン非対称性を作る。通常の leptogenesis では、マヨラナニュートリノの非平衡な崩壊によって $B - L$ 非対称性を作る。この場合、逆反応によってその非対称性が薄められないようにするため宇宙が高温の時期でマヨラナニュートリノを崩壊させる必要がある。そのためこの場合のマヨラナニュートリノの質量は非常に大きな値 ($> 10^9 \text{ GeV}$) を持つ傾向にある。

対して、今回採用する wash-in leptogenesis では $B - L$ 非対称性を作るマヨラナニュートリノの反応は化学平衡にあると考える。その結果、上述のような質量の大きいマヨラナニュートリノを考える必要がなくなり、比較的質量の小さいマヨラナニュートリノでもバリオン非対称性を作ることが可能である。以下では、右巻き電子非対称性に着目した wash-in 機構について議論する。

右巻き電子の非対称性は標準模型の湯川相互作用によって変化しうる。しかし、宇宙が高温になると相互作用の反応率が宇宙膨張の速度に負けて、その相互作用が効かなくなる。したがって、ある温度以上では右巻き電子は近似的に保存量になる。電子の湯川相互作用の反応率と Hubble rate を比較すると、その温度は $T_e = 8.7 \times 10^4 \text{ GeV}$ であることが知られている。この温度より高い温度帯では、右巻き電子は近似的に保存量になる。より高温になると、他の相互作用も効かなくなりそれに伴って新たな保存量が現れる。今回はそのような相互作用が効かなくなっている保存量が右巻き電子だけである場合の温度帯 ($10^5 \sim 10^6 \text{ GeV}$) での wash-in を考える。すなわち、 $B-L$ を破るマヨラナニュートリノの質量 M_1 が $10^5 \text{ GeV} < M_1 < 10^6 \text{ GeV}$ にあるとする。したがってこの場合、 $B-L$ を破る反応が decouple する温度 T_{B-L} もおよそ $10^5 \text{ GeV} < T_{B-L} < 10^6 \text{ GeV}$ である。

この温度帯での保存量と化学平衡になっている反応及びそれらに対応する化学ポテンシャルの拘束条件を表 1 に示す。これらの化学ポテンシャルに対する連立方程式を解くことで、各粒子の化学ポテンシャルを右巻き電子の化学ポテンシャル μ_e で表すことができる。そして最終的に $B-L$ 非対称性と右巻き電子非対称性の関係として、

$$q_{B-L} = -\frac{3}{10} q_e \quad (2)$$

を得る。このように、何らかの機構で作られた右巻き電子非対称性は wash-in 機構を通してその一部が $B-L$ 非対称性へと変換される。物理的には、右巻きニュートリノは右巻き電子とは結合していないため、右巻き電子以外のレプトン非対称性を減らすことができ、その結果正味のレプトン数すなわち $B-L$ を生成している (図 1)。この図から分かるように、右巻き電子非対称性を作る段階では全体のレプトン数を破る必要はない。実際、のちに説明する右巻き電子非対称性を生成するモデルでは、右巻き電子を生成する際レプトン数は破っていない。

最終的に必要なバリオン非対称性と右巻き電子非対称性との関係は

$$\frac{q_B}{s} \simeq \frac{28}{79} \frac{q_{B-L}}{s} = -\frac{42}{395} \frac{q_e}{s}, \quad (3)$$

で与えられる。そして、現在観測されているバリオン非対称性は $q_B/s|_{(\text{obs})} \simeq 8.6 \times 10^{-11}$ であるから、

現在のバリオン非対称性を説明するために必要な右巻き電子非対称性は

$$\left. \frac{q_e}{s} \right|_{T_{B-L}} \simeq -8.1 \times 10^{-10} \quad \text{for } T_{B-L} > T_e. \quad (4)$$

である。 $B-L$ を破る反応が decouple する前、すなわち宇宙の温度がマヨラナニュートリノの質量くらいになる前までに、これだけの右巻き電子非対称性を作り出す必要がある。次節で、この右巻き電子非対称性を作るモデルを提案する。

表 1: 保存量と化学平衡の反応

conserved charge	chemical equilibrium
q_e $Q_Y = 0$	μ_e $3\mu_q + 6\mu_u - 3\mu_d - \mu_{\ell_e} - \mu_{\ell_\mu}$ $-\mu_{\ell_\tau} - \mu_e - \mu_\mu - \mu_\tau + 2\mu_\phi = 0$
equilibrium reaction	chemical equilibrium
weak sphaleron	$q\mu + \mu_{\ell_e} + \mu_{\ell_\mu} + \mu_{\ell_\tau} = 0$
strong sphaleron	$-2\mu_q + \mu_u + \mu_d = 0$
アップ湯川	$-\mu_q - \mu_\phi + \mu_u = 0$
ダウン湯川	$-\mu_q + \mu_\phi + \mu_d = 0$
荷電レプトン湯川	$\mu_{\ell_\mu} + \mu_\phi + \mu_\mu = 0$ $\mu_{\ell_\tau} + \mu_\phi + \mu_\tau = 0$
ニュートリノ湯川 (マヨラナ質量)	$\mu_{\ell_i} - \mu_\phi + \mu_\nu = 0 \quad i = e, \mu, \tau$ ($\mu_\nu = 0$)

3 右巻き電子非対称性の生成

前節で、バリオン非対称性を説明するために必要な右巻き電子非対称性の量を見積もった。本節で、この右巻き電子非対称性を作るモデルを提案する。簡単で非自明な例として、標準模型に新たに Higgs doublet を二組加えた、いわゆる three-Higgs-doublet model を考える。新たに加えた Higgs doublet は電弱スケールよりも十分重い質量を持つとする。本モデルでは、軽い方の Higgs doublet の崩壊によって右巻き電子非対称性が作られる。

本研究で考えるモデルの Lagrangian は以下の通りで

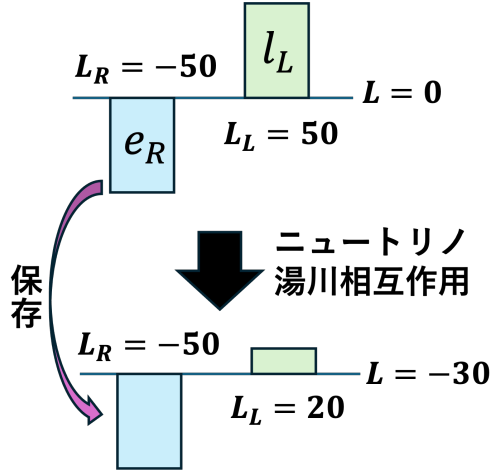


図 1: wash-in 機構の概念図。右巻きニュートリノの湯川相互作用が化学平衡にある状態で $B-L$ を破る反応が起こる。この時、右巻き電子は右巻きニュートリノと結合していないため、右巻きニュートリノによってその量を減らされることはなく保存するが、左巻きレプトンは右巻きニュートリノによりその量を減らされるため正味でレプトン数すなわち $B-L$ を作っている。

ある。

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{SM}} + \mathcal{L}_{\text{RH}\nu} + \mathcal{L}_{\text{HH}} \quad (5)$$

$$\mathcal{L}_{\text{RH}\nu} = \bar{N}_i i \not{\partial} N_i - \frac{1}{2} M_i \bar{N}_i N_i - \left(\bar{l}_f \tilde{H}_{\text{SM}} \lambda_{fi}^{\text{SM}} N_i + \text{H.c.} \right) \quad (6)$$

$$\mathcal{L}_{\text{HH}} = |DH_\alpha|^2 - M_{H_\alpha}^2 |H_\alpha|^2 - \left(\bar{l}_f H_\alpha Y_{ff'}^\alpha e_{f'} + \bar{l}_f \tilde{H}_\alpha \lambda_{fi}^\alpha N_i + \text{H.c.} \right) \quad (7)$$

ここで、 \mathcal{L}_{SM} は、標準模型のラグランジアン、 N_i は i 世代目のマヨラナニュートリノ ($i = 1, 2, 3$)、 l_f は f 世代目の lepton doublet ($f = e, \mu, \tau$)、 H_{SM} は標準模型の Higgs doublet、 λ_{fi}^{SM} はニュートリノ湯川の結合定数である。また、 H_α ($\alpha = 1, 2$) は新たに加えた Higgs doublet で、対応する荷電レプトン湯川とニュートリノ湯川の結合定数は $Y_{ff'}^\alpha$ と λ_{fi}^α である。右巻き電子非対称性はこの中の H_1 の崩壊によって作られる。この時の湯川相互作用項はレプトン数を保つ相互作用であるため、反応の前後ではレプトン数は保存している。また、簡単のためマヨラナニュートリノの質量と Higgs の質量の関係は次のようにする。

$$T_e < T_{B-L} \simeq M_1 < M_{H_1} \lesssim M_{H_2} \ll M_2, M_3. \quad (8)$$

初め H_1 は熱浴に存在し、粒子と反粒子の間に非対称性がなかったとすると、 H_1 及び \tilde{H}_1 の粒子数密度に対して

$$\frac{n_{H_1}}{s} = \frac{n_{\tilde{H}_1}}{s} \simeq 2 \frac{n_{\text{eq}}}{s} = \frac{45\zeta(3)}{\pi^4} \frac{1}{g_*}. \quad (9)$$

が得られる。また、崩壊の逆反応によって右巻き電子非対称性が薄められないと仮定すると、

$$1 \gtrsim \frac{\Gamma_{H_1 \rightarrow \bar{e}_1 \ell}}{H} \Big|_{T=M_{H_1}} \simeq \left(\frac{90}{\pi^2 g_*} \right)^{1/2} \frac{(Y^{1\dagger} Y^1)_{11}}{16\pi} \frac{M_{\text{Pl}}}{M_{H_1}} \quad (10)$$

$$\rightarrow M_{H_1} \gtrsim 10^{12} \text{ GeV} \left(\frac{Y}{0.01} \right)^2. \quad (11)$$

となる。この場合 H_1 の質量は N_1 の質量よりも十分大きいことになる。

崩壊率について、後の便宜のために次の記号を定義する。

$$\Gamma_{H_1 \rightarrow \bar{e}_f \ell} \equiv \sum_{f'} \Gamma_{H_1 \rightarrow \bar{e}_f \ell_{f'}}, \quad (12)$$

$$\Gamma_{H_1 \rightarrow \bar{e} \ell} \equiv \sum_f \Gamma_{H_1 \rightarrow \bar{e}_f \ell}, \quad (13)$$

\tilde{H}_1 についても同様の定義をする。また Γ_{H_1} を H_1 の全崩壊率とする。

右巻き電子非対称性は、

$$\frac{q_{e_1}}{s} = \frac{n_{e_1} - n_{\bar{e}_1}}{s} \quad (14)$$

$$\simeq \frac{\Gamma_{\tilde{H}_1 \rightarrow e_1 \bar{\ell}} n_{\tilde{H}_1}}{\Gamma_{H_1}} \frac{1}{s} - \frac{\Gamma_{H_1 \rightarrow \bar{e}_1 \ell} n_{H_1}}{\Gamma_{H_1}} \frac{1}{s} \quad (15)$$

$$\simeq - \frac{2\Gamma_{H_1 \rightarrow \bar{e} \ell}^{(0)}}{\Gamma_{H_1}^{(0)}} \epsilon_{\bar{e}_1 \ell} \times \frac{45\zeta(3)}{\pi^4} \frac{1}{g_*}, \quad (16)$$

ここで、“(0)”という記号はツリーレベルであることを示す。また、 $\epsilon_{\bar{e}_f \ell}$ は、

$$\epsilon_{\bar{e}_f \ell} \equiv \frac{\Gamma_{H_1 \rightarrow \bar{e}_f \ell} - \Gamma_{\tilde{H}_1 \rightarrow e_f \bar{\ell}}}{\Gamma_{H_1 \rightarrow \bar{e} \ell} + \Gamma_{\tilde{H}_1 \rightarrow \bar{e} \ell}} \simeq \frac{\Gamma_{H_1 \rightarrow \bar{e}_f \ell} - \Gamma_{\tilde{H}_1 \rightarrow e_f \bar{\ell}}}{2\Gamma_{H_1 \rightarrow \bar{e} \ell}^{(0)}}, \quad (17)$$

であり、 H_1 とその反粒子の崩壊率の差を表すパラメータである。右巻き電子非対称性を作るためには CP の破れが必要になるが、その効果はこのパラメータに現れている。このパラメータがゼロでない値を持つことによって、右巻き電子非対称性を作ることができる。

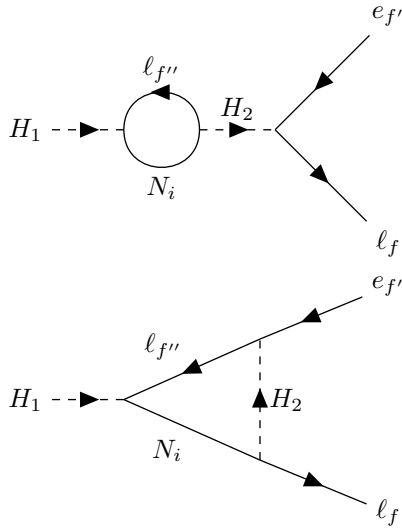


図 2: 右巻き電子非対称性を作るために必要なファインマンダイアグラム。これらワンループのダイアグラムとツリーのダイアグラムの干渉から非対称性の効果が現れる。

この asymmetry parameter は tree diagram と one-loop diagram の干渉から得られる。図 2 に asymmetry parameter に寄与する one-loop diagram を示す。

これらの one-loop diagram と tree diagram の干渉から得られる asymmetry parameter は次のようになる。

$$\epsilon_{\bar{e}_1 \ell} \simeq \frac{1}{8\pi} \frac{\text{Im} \left(Y_{11}^1 Y_{11}^{2\dagger} \lambda_{11}^1 \lambda_{11}^{2\dagger} \right)}{\text{tr} (Y^{1\dagger} Y^1)} f(M_{H_2}/M_{H_1}) \quad (18)$$

ここで、

$$f(x) \equiv f_{\text{self}}(x) + f_{\text{vertex}}(x), \quad (19)$$

$$f_{\text{self}}(x) \equiv \frac{1}{x^2 - 1}, \quad (20)$$

$$f_{\text{vertex}}(x) \equiv 1 - x^2 \log(1 + 1/x^2). \quad (21)$$

である。index の”self”と”vertex”はそれぞれ、tree と self-energy diagram、tree と vertex-diagram との干渉から得られる寄与を表している。

また、tree level の崩壊率を計算すると、

$$\Gamma_{H_1 \rightarrow \bar{e}\ell}^{(0)} \simeq \Gamma_{H_1 \rightarrow \bar{e}\ell}^{(0)} \simeq \frac{1}{16\pi} \text{tr} (Y^{1\dagger} Y^1) M_{H_1}, \quad (22)$$

$$\Gamma_{H_1 \rightarrow \bar{\ell} N_1}^{(0)} \simeq \Gamma_{H_1 \rightarrow \bar{\ell} N_1}^{(0)} \simeq \frac{1}{16\pi} \text{tr} (\lambda^{1\dagger} \lambda^1) M_{H_1}, \quad (23)$$

である。ただし、 $M_1 \ll M_{H_1}$ であるため、 $M_1 \simeq 0$ とした。

これらの結果を用いると、最終的な右巻き電子非対称性として

$$\frac{q_e}{s} = \frac{q_{e_1}}{s} \simeq -\frac{\kappa}{4\pi} \frac{\text{Im} \left(Y_{11}^1 Y_{11}^{2\dagger} \lambda_{11}^1 \lambda_{11}^{2\dagger} \right)}{\text{tr} (Y^{1\dagger} Y^1) + \text{tr} (\lambda^{1\dagger} \lambda^1)} \times f(M_{H_2}/M_{H_1}) \frac{45\zeta(3)}{\pi^4} \frac{1}{g_*} \quad (24)$$

$$\sim -8 \times 10^{-10} \delta_{CP} \left(\frac{Y}{0.01} \right)^2, \quad (25)$$

が得られる。ただし、 κ は H_1 崩壊時の wash-out factor で、 δ_{CP} は、 CP の破れを表す位相である。さらに、 $M_{H_2} = 2M_{H_1}$, $Y^1 \sim Y^2 \sim \lambda^1 \sim \lambda^2$ とした。

4 Conclusion

本講演では、three-Higgs doublet model を用いた新たなレプトジェネシスの機構を明らかにした。その結果、本模型で得られる右巻き電子非対称性は式 (25) となった。これから、バリオン非対称性を説明するために必要な右巻き電子非対称性を本模型で説明できることが明らかになった。

本研究では、新しい機構の概念に集中して議論したために、定性的な議論が多かった。そのため、将来的には、ボルツマン方程式を解くなどより定量的な議論をすることで、より正確な非対称性の値を見積もる予定である。

また、本研究では簡単のため右巻き電子非対称性のみが保存する温度帯での wash-in を考えた。しかし、より高温になると他の相互作用が宇宙膨張に負けて効かなくなり、それに伴って新たな保存量が現れる。そのため、より高温で近似的保存量が右巻き電子以外にも存在する場合についても考える予定である。

Reference

- [1] K. Mukaida, H. Watanabe, M. Yamada, arXiv:2405.14332.

[indexへ戻る](#)

重宇 b04

中性子星の潮汐変形率

佐藤 圭悟

中性子星の潮汐変形率

佐藤 圭悟 (東京理科大学大学院 理学研究科)

Abstract

一般相対性理論 (GR) からの帰結の 1 つにアインシュタイン方程式があり、それは「何がしかのエネルギーが存在すれば、そこに時空の歪みが生じる」ことを示唆したものとなっている。大きく広がる物質があればなだらかに歪み、局所的に重い物質があれば鋭く歪む。さらに、物質が変形すればその変形に応じてその周りに作られる歪みも変化する。重力波というのは主に、星が回りあったり衝突することで生じるのだから、その回り合う星が変形するのであれば、そこから出てくる重力波にも変更が生じるかもしれない。

一方で、次のような見方をすることもできる。例えば、星表面の情報を持つ中性子星が連星をなす場合である。このような連星系においては、星が潮汐変形する過程で貯蓄された星の内部エネルギーによる、軌道の変化が起こることが考えられている。これは内部構造を持たないブラックホールとは大きく異なる点である。従って、天体固有の変形のしやすさを表す潮汐変形率は、可観測量である重力波の周波数に対して影響を及ぼし得る物理量となる。そこで、今回はこの潮汐変形率を GR の下で計算した文献 [1] をレビューする。具体的には、星の内部構造を想定した物質場を導入した時空における摂動方程式を導出し、それを数値的に解くことで、星の潮汐変形率、及び潮汐 Love 数を決定する。その上で、星を特徴づけるパラメータの値を振らすことにより、GR における潮汐 Love 数が何に強く依存するのかを明らかにする。これらの操作は、修正重力理論下においても、類似の手続きで潮汐 Love 数を求められることがすでに示されており、これらのテンプレートを理論側で数多く用意しておくことは、これからの観測技術の発展を見通した GR 検証にも大いに役立つことが期待できる。

1 導入

2017 年 8 月 17 日に中性子星連星同士の衝突によって生じた重力波が観測された。これに先んじて、ブラックホール連星合体による重力波もまた観測されており、ブラックホールと中性子星は重力波を用いた重力理論の検証の鍵としてともに重要な役割を担う。

一方、中性子星連星から発せられる重力波観測の成功には、ブラックホール連星の場合とはまた違った価値がある。中性子星連星合体時の重力波にはブラックホール連星の重力波に含まれない、中性子星内部を構成する物質の情報が含まれているためである。そのため、宇宙分野だけでなく核物理をはじめとする物性分野においても大きな影響を及ぼし得る。さらには、中性子星は合体時に重力波以外にも電磁波やニュートリノを放つため、どの連星系から放出されたのかを特定しやすいといった利点があり、所謂マルチメッセンジャー天文学的な重要性を有している。今回はこのような中性子星を GR の下で考えていく。

2 潮汐変形率と潮汐 Love 数

潮汐変形率と潮汐 Love 数は、多重極モーメントを使って定義される。ここで多重極モーメントというのは、球対称ではない分布 (今回は物質場である) を十分遠方から見た場合に、その分布がおおよそ球対称であるといった近似のもとでテイラー展開 (これが要するに多重極展開である) した時に出てくるものである。

理論の詳細は省略するが、この多重極モーメントは潮汐テンソルを用いて以下のように表現することができる。

$$Q_{ij} = -\lambda \varepsilon_{ij} \quad (1)$$

この時の Q_{ij} は四重極モーメントで、多重極モーメントにおける最低次項であり、それが潮汐テンソル ε_{ij} に比例する、といった式になっている。要は潮汐力 (潮汐テンソル) によって変形すればするほど、多重極モーメントが星の外にたくさん放出されることを表しており、その係数部分がちょうど潮汐変形率 λ になっている。その潮汐変形率を表面の次元で再

定義したものが、以下の潮汐 Love 数である.

$$k_l \equiv \frac{(2l-1)!!}{2} GR^{-2l-1} \lambda_l \quad (2)$$

3 摂動量の導入

星の潮汐変形率と潮汐 Love 数を定義するために、まずは中性子星を想定した物質の詰まった星に関する摂動時空を考える。以下の通り、背景計量は GR の下で静的球対称時空を仮定しているが、星内部においては $f(r)$ や $h(r)$ が未知関数となっていることに注意が必要である。

$$ds^2 = g_{\mu\nu}^{(b)} dx^\mu dx^\nu = -f(r) dt^2 + \frac{1}{h(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3)$$

$$h(r) \equiv 1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} \quad (4)$$

また便利のために、 $h(r)$ に関しては予めこのような形を置いておく。 $M(r)$ もまた未知関数であるため、先ほどの議論に支障を与えない。また、星外部においては、真空でかつ静的球対称な時空であるという仮定から $f(r) = h(r) = 1 - 2M/r$ となり、Schwartzchild 時空の外部解に帰着する。

一方、摂動時空に関してだが、線型摂動の場合は偶パリティの物理量と奇パリティの物理量を完全に分けて考えることができる。これは、摂動の 1 次までを含む Einstein 方程式が、微分演算子とパリティ変換が可換になる性質を持っているためである。そこで、今回考える時空における力学的自由度は、重力場の 2 自由度と物質場の 1 自由度の合計 3 自由度になるが、それらの自由度はヘルムホルツ分解に従って、重力場の自由度はそれぞれ偶パリティと奇パリティに 1 つずつ、物質場の自由度は偶パリティに振り分けられることが分かっている。そこで、星の変形率を考える上で重要となってくるのは、物質場の自由度を含んだ偶パリティの摂動方程式であるため、今回の講演では [1] と同様に偶パリティ摂動に焦点を当てた議論を進めていく。

まず、偶パリティの摂動時空については以下の通りである。

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(b)} + h_{\mu\nu} \quad (5)$$

ただし、

$$h_{\mu\nu} = \text{diag}[f(r) H_0(r), \frac{1}{h(r)} H_2(r), r^2 K(r), r^2 \sin^2(\theta) K(r)] Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (6)$$

とし、 $H_0(r)$ や $H_2(r)$, $K(r)$ は Regge-Wheeler ゲージにおける動径方向の摂動量であり、始めから摂動の時間依存性は落としていることにも注意が必要である。また、角度方向に関しては球面調和関数 Y_{lm} で展開している。

この摂動時空において摂動の 1 次までを考慮し、重力に関する摂動量を 1 つに上手くまとめると、以下のような方程式に書き下すことができる。

$$H''(r) + \left[\frac{2}{r} + \frac{1}{h(r)} \left(\frac{2M(r)}{r^2} + 4\pi r(p(r) - \rho(r)) \right) \right] H'(r) + \left[-\frac{6}{h(r)r^2} + \frac{4\pi}{h(r)} \left(5\rho(r) + 9p(r) + \frac{\rho(r) + p(r)}{dp/d\rho} \right) - \frac{1}{r^2} \left(\frac{8\pi r^2 p(r) + 1}{h(r)} - 1 \right)^2 \right] H(r) = 0 \quad (7)$$

この式は、動径方向に関する摂動量が時空内でどのように振る舞うのかを表す式になっている。物理的なイメージをするのなら、安定な軌道を描く調和振動子の運動方程式を思い出すと良い。今、時空が動径方向に対して原点なる中心から遠かったり近づいたりしており、そこに例えばある試験粒子を置いたとする。そうすると、揺らぐ時空に引きづられて、その粒子も動径方向に揺さぶられることが想像できるであろう。これを星の表面上で考えるのであれば、それはまさに星の表面が上下に変形していることを表し、このマスター方程式 (7) から潮汐変形率や潮汐 Love 数を定義できることも整合的である。

(7) 式が物質を含む星内部での摂動方程式となっている一方で、星の外側では真空 ($\rho(r) = 0$, $P(r) = 0$) を仮定しているため、解析的に解ける形にこの方程式を落とし込むことができる。具体的には、 $x = r/M - 1$ と変数変換することで、以下のルジャンドル陪微分方程式 ($l = m = 2$) の形にすることができる。

$$(x^2 - 1)H''(x) + 2xH'(x) - \left(6 + \frac{4}{x^2 - 1} \right) H(x) = 0 \quad (8)$$

この方程式の持つ解がルジャンドル陪関数であるこ

とは既に知られており、以下ようになる。

$$\begin{aligned}
H(r) &= H(x(r)) \\
&= c_1 P_2^2 \left(\frac{r}{M} - 1 \right) + c_2 Q_2^2 \left(\frac{r}{M} - 1 \right) \\
&= 3c_1 \left(\frac{r}{M} \right)^2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \\
&\quad + c_2 \left(\frac{r}{M} \right)^2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left[\frac{3}{2} \log \left(\frac{r}{r-2M} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{M(M-r)(2M^2 + 6Mr - 3r^2)}{r^2(2M-r)^2} \right] \quad (9)
\end{aligned}$$

ただし、 $P_2^2(r)$ 、 $Q_2^2(r)$ はそれぞれ $l = m = 2$ における第一種、第二種のルジャンドル陪関数を表している。

次に、積分定数 c_1 と c_2 を決定するために、無限遠方における漸近解を考える。

$$\begin{aligned}
H(r) &= c_1 3 \left(\frac{r}{M} \right)^2 + \mathcal{O} \left(\left(\frac{r}{M} \right) \right) \\
&\quad + c_2 \frac{8}{5} \left(\frac{M}{r} \right)^3 + \mathcal{O} \left(\left(\frac{M}{r} \right)^4 \right) \quad (10)
\end{aligned}$$

ここでは、第一項と第二項はそれぞれの解における、無限遠方で最もリーディングな項を示している。これらの項が漸近的平坦な系と繋がるように、 c_1 と c_2 を比較すると以下のように決定できる。

$$c_1 = \frac{M^2}{3} \varepsilon, \quad c_2 = \frac{15}{8M^3} \lambda \varepsilon \quad (11)$$

この時点で、ようやく星外部における摂動方程式の厳密解を得ることができた。従って、(9) 式と (11) 式から星表面における $H(R) =$ と $H'(R) =$ の式を作り、その 2 式を連立することで ε を消去しつつ潮汐変形率を表す λ に関する式を導く。最後に、

$$k_2 = \frac{3}{2} G \lambda R^{-5} \quad (12)$$

の関係式を使うことにより、以下の式を得る。これが今回の潮汐 Love 数 ($l = 2$) の定義式となる。

$$\begin{aligned}
k_2 &= k_2 \left(C \equiv \frac{M}{R}, y \equiv \frac{RH'(R)}{H(R)} \right) \\
&= \frac{8C^5}{5} (1 - 2C)^2 [2 + 2C(y - 1) - y] \\
&\quad \times \left\{ 2C(6 - 3y + 3C(5y - 8)) \right. \\
&\quad \left. + 4C^3 [13 - 11y + C(3y - 2) + 2C^2(1 + y)] \right. \\
&\quad \left. + 3(1 - 2C)^2 [2 - y + 2C(y - 1)] \log(1 - 2C) \right\}^{-1} \quad (13)
\end{aligned}$$

4 数値解析のための準備

(7) 式を解析的に解くことは不可能であるため、数値的に解かねばならない。(13) 式から値を得るためには、星の表面上での摂動量 $H(R)$ 、 $H'(R)$ を知る必要があるため、以下の TOV 方程式と合わせてそれらを計算していく。

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (14)$$

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{G(\rho(r) + P(r)/c^2)(M(r) + 4\pi r^3 P(r)/c^2)}{r^2[1 - 2GM/(c^2 r)]} \quad (15)$$

質量勾配を表す (14) 式は星の球殻における質量であり、圧力勾配の (15) 式はエネルギー保存則から得られる。一方で、星内部における状態方程式に関しては、最もシンプルな形とされるポリトロープ状態方程式

$$P = \mathcal{K} \rho_0^\Gamma \quad (16)$$

を仮定している。ただし、 ρ_0 は静止エネルギー密度を表しており、 \mathcal{K} 、 $\Gamma \equiv 1 + 1/n$ は共に定数とする。

具体的な数値計算をする上では [2] の流れに倣って、以下の無次元量を導入した。これは主に、計算過程における不用意な桁落ちを避けるための操作である。

$$x = \frac{r}{r_0}, y = \frac{\rho}{\tilde{\rho}_0}, z = \frac{P}{\tilde{\rho}_0 c^2}, m(r) = \frac{3M(r)}{4\pi \tilde{\rho}_0 r_0^3} \quad (17)$$

ここで、 r_0 に関しては以下の通り、 $\tilde{\rho}_0$ を用いた距離の次元を持った量となっている。

$$r_0 = \sqrt{\frac{c^2}{G \tilde{\rho}_0}} \quad (18)$$

さらに、圧力 z と密度 y に関しては、次の無次元化された静止エネルギー密度 χ 、

$$\chi \equiv \frac{\rho_0}{\tilde{\rho}_0} \quad (19)$$

を使う。このようにすることで、この (19) 式の値をいじることにより、圧力と密度の値を同時に振らすことができる。また、かなり天下りとなるが、 χ を使った圧力と密度の表式を以下に提示しておく。

$$z(x) = K \chi(x)^\Gamma, y(x) = \chi(x) + \frac{K}{\Gamma - 1} \chi(x)^\Gamma \quad (20)$$

ここで、(20) 式の左側に関しては、事前に仮定していたポリトロープ状態方程式の形そのものであることが分かる。

5 解析の流れと結果

摂動量に関する数値計算は、星の中心部から表面にかけて背景量の計算と同時並行で行っていく。そのため、まずは星中心における χ_c を求める必要がある。(20) 式の右側について少し変形をし、

$$\chi + \frac{K}{\Gamma - 1} \chi^\Gamma - \frac{\rho_c}{\tilde{\rho}_0} = 0 \quad (21)$$

を満たす χ を見つけ、これを数値計算における初期値とする。ただし、 $\tilde{\rho}_0 = 1.6749 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ で、 ρ_c は我々で与えるパラメータとなる。このようにして得られた χ_c からその他の中心における圧力や密度等が決定されるため、あとは 4 次のルンゲクッタ法により (15) 式を数値的に解いていく。

ここで、星の半径については、圧力すなわち (20) 式における $z(x)$ が 0 になった時の距離 $x = x_R$ に対応する半径がそれになる。従って、星の表面 $r = R_*$ は (17) 式より

$$R_* = x_R r_0 \quad (22)$$

と定義できる。また、この距離までに星の中心部から累積されていた質量を星の総質量と見做している。これらの星の質量と半径の組 (M_*, R_*) と、(7) 式を星の表面まで解いた摂動量 $(H(R_*), H'(R_*))$ によって、それらに対応する潮汐 Love 数の値が 1 つ決定することができる。

最後に、今回の大きな目標であった、潮汐 Love 数を決定付けるいくつかのパラメータを振らすことで、その性質を吟味したい。レビュー論文 [1] と整合性が取れた限られたパラメータ領域のみでのプロットでかつ見苦しいノイズも入っているが、以下の図 1 が現段階での解析結果である。

n は (16) 式の Γ から出てきたポリトロープ指数であり、今回は $n = 0.3$ (赤), 1.0 (青), 1.2 (緑) の 3 つの値の下で、横軸のコンパクトネス (星がどれだけぎゅっと詰まっているのかを表した量である) の値を降らせてみた。結果として一番重要なことは、コンパクトネスを変化させるよりも、ポリトロープ指数 n を変化させた方がはるかに潮汐 Love 数が変化し得る、といったことである。これは、星の変形率を司る主な情報は、ポリトロープ状態方程式に押し込められていることを意味する。一般相対性理論に限った議論ではあるが、星を特徴づける上でとても重要な帰結である。

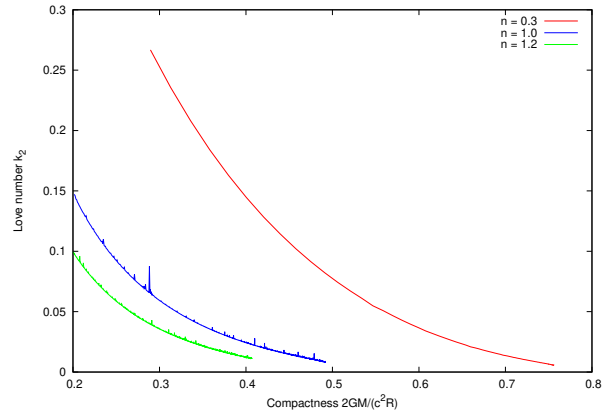


図 1: 潮汐 Love 数の依存性 ($n = 0.3, 1.0, 1.2$)

6 この分野の今後とその意義

Abstract でも述べたように、今後の観測で更なる詳細が明らかになるであろう重力波に対して、理論側から重力理論の候補を用意しては選別するといった過程がとても大切になってくる。理論を選別する上で判断材料となる Love 数の数値に関しても、修正重力理論の下で用意する先例がすでに存在している。このような中性子星を扱った分野では、ブラックホール解に対して無毛定理が成り立ってしまうような修正重力理論においても今回の議論は有用であり、より幅広い視野で重力理論を精査することができるという意味でも、かなり有意義で面白い分野だと個人的に考えている。

Reference

- [1] T. Hinderer, *Astrophys. J.* **677**, 1216-1220 (2008) [erratum: *Astrophys. J.* **697**, no.1, 964 (2009)] [arXiv:0711.2420 [astro-ph]].
- [2] R. Kase, M. Minamitsuji & S. Tsujikawa, *Phys. Rev. D* **97**, no.8, 084009 (2018) [arXiv:1711.08713 [gr-qc]].

重宇 b05

最尤法に基づく銀河・銀河レンズパワースペクトルの 推定法開発

手良脇 大誠

最尤法に基づく銀河・銀河レンズパワースペクトルの推定法開発

手良脇 大誠 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

前景銀河の分布と背景銀河の形状は、重力レンズ効果に起因する相関を持つ。これは銀河・銀河レンズと呼ばれており、大規模構造に基づく宇宙論解析において重要な役割を担っているが、パワースペクトル・バイスペクトルなどのフーリエ統計量による解析は進んでいない。実際の観測データの単純なフーリエ解析によって得られるフーリエ統計量は、観測領域の形状の複雑さや明るい星などのマスクの影響を畳み込んでしまい、理論的解釈が難しくなる。そのため、こうした観測効果 (window 効果) を取り除いたパワースペクトル・バイスペクトルを推定する手法が必要となる。本研究では、銀河クラスタリングなどで用いられている最尤法という手法に着目し、window 効果を取り除いた銀河・銀河レンズのパワースペクトル・バイスペクトルの推定法の開発を行っている。本発表では、この手法のパワースペクトルに対する適用について議論する。

1 Introduction

1.1 Λ CDM モデルの現状

Λ CDM モデルは、ビッグバン元素合成や CMB の異方性など、数多の事象を説明可能な現在の宇宙論における標準モデルである。しかし、多様な高精度観測が進んだ現在、異なる観測間における結果の不整合 (テンション) が見られるようになった。その 1 つに S_8 テンションがある。これは、宇宙の構造形成の進行度を表す宇宙論パラメタである S_8 の値が、Planck-2018 などの CMB 観測とすばる Hyper-Suprime-Cam (HSC) などの大規模構造観測との間で不一致を示している、というものである。この不整合が本当にモデルの綻びであるのかを判定するために、統計精度の向上や多彩な観点からの解析による更なる検証が望まれている。

1.2 銀河・銀河レンズ効果

我々が観測する銀河の形状は、光路上にある暗黒物質分布の弱重力レンズ効果によって歪められている。この歪みの大きさは暗黒物質の存在量である Ω_m や S_8 に対して感度を持つため、大規模構造を解析する上で重要な役割を持つ。また、現在標準的な宇宙の構造形成シナリオは、暗黒物質が密集した領域に銀河が形成されることを予言する。そのため、図 1 に示すように、前景銀河の分布と背景銀河の形状は、共に前景銀河周辺の暗黒物質分布を反映してお

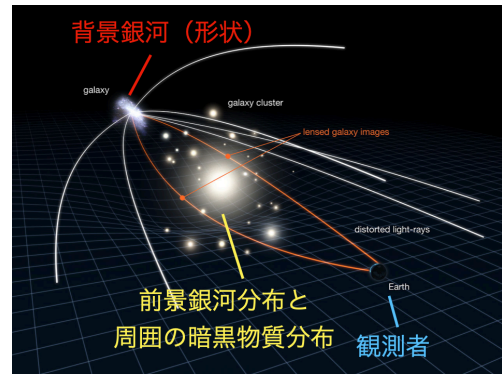


図 1: 銀河・銀河レンズの模式図。背景銀河の光は前景銀河周辺の暗黒物質に曲げられるため、前景銀河分布と背景銀河形状の間に相関が生まれる。(Credit: NASA, ESA & L. Calçada)

り、銀河・銀河レンズと呼ばれる相関を持つ。

銀河の詳細な形成過程については、未だに第一原理的な理解が為されておらず、この不定性は精密宇宙論における系統誤差の重要な原因となる。銀河・銀河レンズは、銀河クラスタリング (銀河分布自体の相関) との組み合わせにより、この不確かさの影響を受けにくい宇宙論解析を可能にする。これまでも、銀河・銀河レンズの二点相関関数を用いて宇宙論を制限する研究が多く行われてきた。その一方で、フーリエ統計量であるパワースペクトルやバイスペクトルを用いた解析は殆ど為されておらず、こうした統計量による解析を可能にすることで、更なる宇宙論的情報が引き出せるようになると期待され

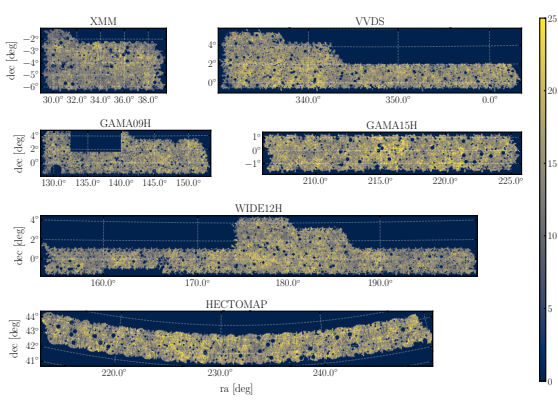


図 2: すばる HSC の 3 年分の観測領域。黄色がデータの存在する領域、青色がデータの欠落した領域である。(Li et al., 2023.)

る。そこで本研究では、銀河・銀河レンズのフーリエ統計量に着目した。

1.3 Window 効果

実際の観測領域は、その形状自体が複雑である上、明るい星によるマスクなどといった観測的な事情でデータが無い領域を含んでいる (図 2)。FFT を使ったフーリエ解析を行うためには長方形のデータマップが必要であるから、こうしたデータの欠損領域にはゼロ埋めを行うことになる。そのため、観測されるデータは $d_w(\mathbf{x}) = W(\mathbf{x})d_{\text{true}}(\mathbf{x})$ と書ける。ここで $W(\mathbf{x})$ は、データがある座標では 1 を、無い座標では 0 を返す window 関数である。よって、例えば銀河・銀河レンズのパワースペクトルは次のようになる。ここで X は、重力レンズの成分である E モードあるいは B モードを意味する。

$$P_{gX}^w(k) = \int \frac{d^2\mathbf{k}'}{(2\pi)^2} |\tilde{W}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')|^2 \cos 2\phi_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} P_{gX}^{\text{true}}(k') \quad (1)$$

すなわち、我々が window 付きのデータから直接得られるパワースペクトル $P^w(k)$ は、知りたい真のパワースペクトル $P^{\text{true}}(k)$ に window に起因する関数を畳み込んだものになっているのである。このように、実データの単純なフーリエ解析によって得られるパワースペクトルやバイスペクトルは、観測領域の形状の効果を受けてしまい、その理論的解釈が困難になる。理論から計算されるパワースペクトルは当然 $P^{\text{true}}(k)$ であるから、(1) 式のままでは理論と

観測結果を比較することができない。そのため、観測データ d_w から window 効果のないパワースペクトル・バイスペクトルを推定する手法の開発が必要である。

その方法の 1 つとして、(1) 式を波数について bin 分けした上で P^{true} に関して逆解きする Pseudo- C_ℓ という手法がある。この手法はパワースペクトルに対しては十分機能することが知られているが、バイスペクトルに対しては計算コストの観点から難しいと考えられている。そこで本研究では別なるアプローチを取る。O.Philcox(2021) は、銀河クラスタリングや CMB に対して、最尤法という手法に基づいた計算によって window 効果を取り除いたパワースペクトル・バイスペクトルが共に計算可能であることを示した。そこで本研究はこの手法を拡張し、銀河・銀河レンズのパワースペクトル・バイスペクトルを測定する手法の開発を行っている。ここではパワースペクトルに着目して議論する。

2 Methods

最尤法の基本的な考え方は、「与えられた (window 付きの) データベクトルに対して、尤度関数を最大化するようなパワースペクトルを探す」ということである。尤度関数は以下で与えられる。

$$L[\mathbf{d}](\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^n \sqrt{\det[C(\mathbf{p})]}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{d}_w^T C^{-1}(\mathbf{p}) \mathbf{d}_w\right) \quad (2)$$

p は真の (window のない) パワースペクトル、 d_w は window 付きのデータベクトルであり、 C は共分散行列と呼ばれ、真なるパワースペクトルから決まる量である。ここから計算を進めるために、 p_{guess} という何らかのパワースペクトル周りで尤度関数を 2 次まで展開し、極大条件 $\frac{\partial L}{\partial p} = 0$ を解く。すると以下のような推定式が得られる。

$$p_\alpha^{\text{est}} = p_{\text{guess},\alpha} + \frac{1}{2} \sum_\beta F_{\alpha\beta}^{-1} \text{Tr} \left[C^{-1}(\mathbf{p}_{\text{guess}}) \left[\frac{\partial C}{\partial p_\beta} C^{-1}(\mathbf{p}_{\text{guess}}) (\mathbf{d}_w \mathbf{d}_w^T - C(\mathbf{p}_{\text{guess}})) \right] \right] \quad (3)$$

$$\left(F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[C^{-1}(\mathbf{p}_{\text{guess}}) \frac{\partial C}{\partial p_\alpha} C^{-1}(\mathbf{p}_{\text{guess}}) \frac{\partial C}{\partial p_\beta} \right] \right)$$

この式においてはパワースペクトルは波数で bin 分けされており、 α, β がその bin を指定する添字である。 p_{guess} は自由に選ぶことができるが、尤度関数の展開を 2 次までで止めている以上、真なるパワースペクトルに近いほど良い推定式となる。(3) 式の第二項がデータベクトルに依存しているため、最初に推定する p_{guess} の真なるパワースペクトルからのズレを、データを元に第二項で補正することで、 p^{est} というパワースペクトルの推定値を得る、という構成になっている。

詳細については（余白が狭すぎるので）割愛するが、(3)(4) で与えられる数式は更に式変形することができ、FFT で計算することができる。特に、パワースペクトルに対しても window 効果を現実的な時間で取り除けることが、この最尤法の強みとなる。

3 Data

3.1 観測量の生成

開発したコードが正しく機能するか否かをテストするために、真なるパワースペクトルが既知であるシミュレーションデータに対して本手法を適用する。今回使用したシミュレーションデータは、暗黒物質粒子の 3 次元 N 体シミュレーションによって得られた暗黒物質分布とハロー分布からなる。このシミュレーションから得られた $2000\text{Mpc}/h \times 2000\text{Mpc}/h \times 250\text{Mpc}/h$ のボックスを 2 次元に射影することで、一辺が $2\text{Gpc}/h$ の正方形領域に属する暗黒物質・ハロー分布を 24realizations 生成した。

銀河・銀河レンズを見るために必要な観測量は、前景銀河の数分布と背景銀河の楕円率 ϵ_1, ϵ_2 である。そしてこの楕円率は、弱重力レンズに起因する $\kappa, \gamma_1, \gamma_2$ と、銀河の固有形状に起因する $\epsilon_{\text{int},1}, \epsilon_{\text{int},2}$ (ノイズとして寄与する) によって計算される。そこで今回は、前景銀河分布としてハロー分布を使用する。また、背景銀河形状に関しては暗黒物質分布から擬似的に $\kappa, \gamma_{1,2}$ を生成し (Bmode が 0 になるように生成した。)、乱数によって固有形状 $\epsilon_{\text{int},1,2}$ を発生させることで、銀河・銀河レンズの擬似データをセットアップした。

3.2 window と p_{guess}

前節の流れで得られた 2 次元マップに、図 3 のような window を割り当てた。黄色の領域にはデータが存在するが、紫色の領域には存在しない (ゼロ埋めされている)。また、window をかける前の擬似データに対して直接パワースペクトルを測ることで、真なるパワースペクトルを求めた。図 4 にこの真なるパワースペクトルと、今回使用した p_{guess} をプロットした。すなわち、赤線で与えられる推測したパワースペクトル p_{guess} から始めて、(3) 式の第二項を通じ、青線で与えられる真なるパワースペクトルを復元できるかを検証する。

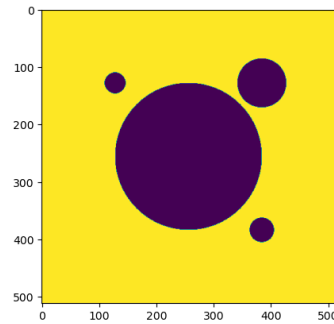


図 3: 今回使用した window の形状。黄色の領域にはデータがあり、紫の領域にはデータが無い。

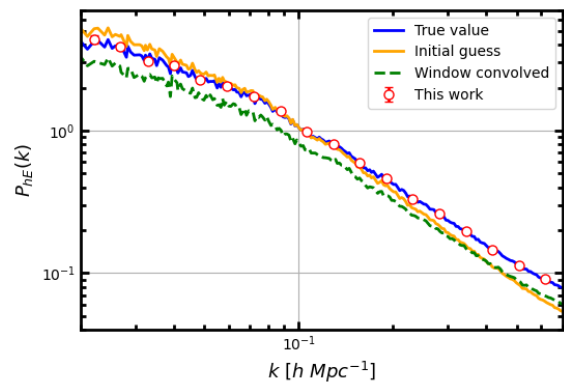


図 4: halo-Emode のパワースペクトルの比較。青線が真なるパワースペクトル、黄色線は推定法に必要な p_{guess} 、緑線が (1) 式で与えられる window-convolved なパワースペクトル、赤丸が本研究で開発した手法の適用結果。

4 Results and Discussion

まず図 4 に、本手法による halo-Emode についての推定結果を赤丸で示す。最初の推測値である p_{guess} (黄色線) を離れ、真のパワースペクトル (青線) と整合する結果となっていることが確認できる。また、(1) 式に相当する、window の効果を残したままナイーブに計算したパワースペクトル (緑線) に着目すると、window の影響で真なる値よりもパワーが落ちていることが確認できる。逆に、window 付きのデータであっても、本研究で開発した推定法を用いることで、この失われたパワーを復元できることがわかる。続

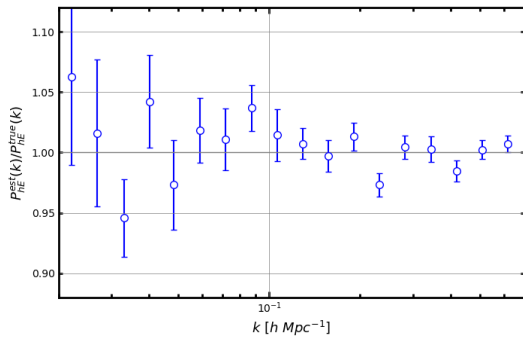


図 5: halo-Emode についての、推定結果と真の値の比のプロット。

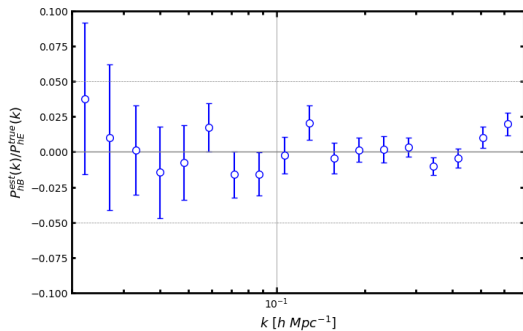


図 6: halo-Bmode の推定結果を、halo-Emode の真の値で割ったプロット。

いて、図 5 に本手法による推定結果を真なるパワースペクトルで割った結果を示す。どの波長においても比が 1 の周りに分布しており、およそ 5% 以下程度の精度で本手法による復元がうまく機能していることがわかる。また、図 6 に halo-Bmode の推定結果を、halo-Emode の真なるパワースペクトルで割った結果を示した。Bmode は 0 になるように場を作って

いたため、この結果も無矛盾である。さらに、今回のデータには銀河の固有形状をノイズとして取り入れていたが、これらの結果から、このノイズも正しく除くことができていると考えられる。尚、今回使用したデータは 24realizations であったが、これを増やせば E,Bmode 共に真なる値からのバラつきが更に抑えられると考えている。

5 Conclusion and Future work

本研究では、銀河・銀河レンズのパワースペクトルに対して最尤法に基づいて window 効果を取り除く手法を開発した。そして、N 体シミュレーションから生成した擬似的な前景銀河分布・背景銀河形状の window 効果付きのデータに対して開発手法を適用し、約 5% 以下の制度で window 効果を取り除いたパワースペクトルを復元できることを示した。

今回用いたデータは、 $\kappa, \gamma_1, \gamma_2$ を擬似的に暗黒物質分布から生成していたため、背景銀河の形状の歪みが前景銀河 (ここではハロー) 付近の暗黒物質分布のみの影響を受けているような状況であると言える。しかし、実際の背景銀河の形状は、視線方向上の暗黒物質分布全ての影響を受けているため、前景銀河付近以外の暗黒物質の寄与がノイズとして現れる。その意味で、今回の結果は理想化された環境での検証であるといえる。現在、より現実の宇宙に近いデータでの検証を行うため、ray-tracing シミュレーションに基づく全天のシアー・ハローデータに対して本手法の適用を試みている。そしてその後、すばる HSC の銀河形状データと Sloan Digital Sky Survey (SDSS) の銀河分布データに対して手法を適用する見通しである。また、銀河・銀河レンズのバイスペクトルに対しても最尤法による推定法開発を行う予定である。

Reference

- 1.Oliver H.E. Philcox (2021). “Cosmology without window functions: Quadratic estimators for the galaxy power spectrum”, American Physical Society
- 2.Oliver H.E. Philcox (2021). “Cosmology without window functions. II. Cubic estimators for the galaxy bispectrum”, American Physical Society
- 3.Xiangchong Li et al (2023). “Hyper Suprime-Cam Year 3 Results: Cosmology from Cosmic Shear Two-point Correlation Functions”, American Physical Society

[indexへ戻る](#)

重宇 b06

量子重力理論解明に向けた包括的なアプローチの実現

柏木 海翔

量子重力理論解明に向けた包括的なアプローチの実現

柏木 海翔 (九州大学大学院 量子宇宙物理理論研究室 M2)

Abstract

現代物理学では、量子重力理論として確立した理論は存在せず、重力が量子力学に従うか否かも不明であるため、重力がどちらの立場をとるか、どのようなモデルに従うかを明確にすることが量子重力理論の解明に繋がる。本研究の目的は、モデルに依存しないアプローチの実現に向けて、2つの立場から提案されているモデルをまとめる理論的枠組みを構築することにある。そこで、そのような理論的枠組みとしてポアンカレ対称性を持つ相対論的な Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad 方程式 (以降、GKSL 方程式) に基づく理論を構築した。しかしながら、先行研究では相互作用を持つ量子系を考慮していないという問題点があった。そこで、先行研究では相互作用の導入方法の目途として、相対論的散逸現象の開放量子系の理論による定式化について着目し、具体的なモデルを用いてそのダイナミクスを調べた。本発表では、得られた研究結果について紹介する。

1 Introduction

現代において、重力と量子を統合した量子重力理論は未完成であり、重力の量子的性質を示す実験的証拠も報告されていない。そのため、重力が量子力学に従うか否かについても不明であり、次の2つの立場に分かれている。1つは「重力は量子力学に従う」とする立場であり、例えば量子化されたニュートン重力モデル [1] や摂動的量子重力理論 [2] などが提案されている。もう1つは、「重力は量子力学に従わない」とする立場であり、Diósi-Penrose モデル [3] や Oppenheim モデル [4] などが代表的なモデルとして挙げられている。重力がどの立場の、どのモデルに従うかを明確にすることは、量子重力理論の解明に繋がると期待される。そこで、本研究ではモデルの詳細に依存しないアプローチの実現に向けて、2つの立場から提案されているモデルをまとめる理論的枠組みを構築することを目的とする。先行研究では弱重力場の下で成立するポアンカレ対称性を持つ相対論的な GKSL 方程式、

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \mathcal{H}[\rho(t)] + \mathcal{L}[\rho(t)] \quad (1)$$

$$\mathcal{H}[\rho(t)] = -i \left[\hat{H}, \rho(t) \right] \quad (2)$$

$$\mathcal{D}[\rho(t)] = \int d^3p \left[\hat{a}(\mathbf{p})\rho(t)\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) - \frac{1}{2} \left\{ \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}), \rho(t) \right\} \right] \quad (3)$$

を導出し、この方程式に基づく枠組みを提供した [5]。しかし、この枠組みには問題点がある。それは、相互作用を持つ量子系を考慮していない点である。これでは、重力相互作用を適用できず、目的の理論的枠組みの構築ができない。これを解決するためには、対称性を維持しながらの相互作用の導入方法が明らかにしなければならない。本研究では具体的な相対論的散逸現象を開放量子系のアプローチ (GKSL 方程式) で再定式化による相互作用項が満たすべき条件の導出を目指す。

2 Scattering theory and GKSL equation

本来、GKSL 方程式は開放量子系¹の散逸ダイナミクスなどを記述する際にしばしば用いられる方程式であり、以下のように与えられる:

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i \left[\hat{M}, \rho(t) \right] + \mathcal{D}[\rho(t)] \quad (4)$$

$$\mathcal{D}[\rho(t)] = \sum_{\lambda} \left[\hat{L}_{\lambda}\rho(t)\hat{L}_{\lambda}^\dagger - \frac{1}{2} \left\{ \hat{L}_{\lambda}^\dagger\hat{L}_{\lambda}, \rho(t) \right\} \right] \quad (5)$$

ここで、 $\rho(t)$ は開放量子系の密度演算子、 \hat{L}_{λ} は Lindblad 演算子と呼ばれ、環境との相互作用の影響を表す。以降では、(1) 式の右辺全体を GKSL 生成子と

¹量子力学で想定される孤立系は厳密には成立せず、実際には量子系は何らかの環境と相互作用をしている。このとき、この量子系を開放量子系と呼ぶ

呼ぶ。例えば、GKSL 方程式で記述される現象としては光子の散逸、自然放出などがある。これらの現象は、非相対論的な量子系におけるものである。相対論的領域においても、散逸現象は起こりうるものである。Neutral pion decay を例に考えてみよう。

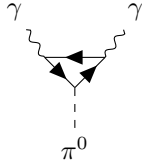


図 1: Neutral pion decay
Neutral pion は 2 つの光子に崩壊していく。このとき、neutral pion を開放系だと捉え、そのダイナミクスは散逸ダイナミクスと考えることができるかもしれない。その場合、このダイナミクスは GKSL 方程式で記述できる可能性がある。ここでは、これらの現象の記述によく使われる散乱理論の中に、GKSL 生成子が現れることを見ていく。

次のような散乱ダイナミクスを考えてみる:

$$\begin{aligned} S[\rho_s^{\text{in}}] &= \text{Tr}_E \left[\hat{S} \rho_s^{\text{in}} \otimes |0\rangle_E \langle 0| \hat{S}^\dagger \right] \\ \hat{S} &= \mathcal{T} \exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} dt \hat{V}_I(t, \mathbf{x}) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、**赤色**の文字は着目している量子系 (以降、**着目系**) の自由度、**深緑色**の文字は環境の自由度を表している。 $\hat{V}_I(t, \mathbf{x})$ は**相互作用演算子**であり、演算子 \hat{S} は **S 演算子**²と呼ばれ、散乱前の状態から散乱後の状態への状態発展を記述する。そのため、(6) の左辺は散乱後における着目系の状態だと言える。記法の簡便化のため、S 演算子を次のように書いておく。

$$\hat{S} = \hat{\mathbb{I}} + i\hat{\mathbb{T}} \quad (7)$$

表式 (6) は、次に定義された演算子及び環境での完全性関係を用いて書き直すことができる:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{T}}_\beta^s &= {}_E \langle \beta | \hat{\mathbb{T}} | 0 \rangle_E \\ \hat{\mathbb{T}}_0^s &= {}_E \langle 0 | \hat{\mathbb{T}} | 0 \rangle_E \\ \hat{\mathbb{I}}_E &= \int d\beta |\beta\rangle_E \langle \beta| \end{aligned}$$

したがって、(7) とこれらの定義及び条件³を用いると、

$$\begin{aligned} S[\rho_s^{\text{in}}] &= \rho_s^{\text{in}} + i \left[\text{Re} \hat{\mathbb{T}}_0^s, \rho_s^{\text{in}} \right] \\ &+ \int d\beta \left[\hat{\mathbb{T}}_\beta^s \rho_s^{\text{in}} \hat{\mathbb{T}}_\beta^{s\dagger} - \frac{1}{2} \left\{ \hat{\mathbb{T}}_\beta^{s\dagger} \hat{\mathbb{T}}_\beta^s, \rho_s^{\text{in}} \right\} \right] \end{aligned}$$

² \mathcal{T} は時間順序積を表している。

³他にも、S 演算子のユニタリー条件も用いている。

記号 Re は演算子の実部⁴を意味する。生成子が状態発展を記述することを踏まえて、次のようなものを定義する:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\rho_s^{\text{in}}] &\equiv S[\rho_s^{\text{in}}] - \rho_s^{\text{in}} \\ &= i \left[\text{Re} \hat{\mathbb{T}}_0^s, \rho_s^{\text{in}} \right] \\ &+ \int d\beta \left[\hat{\mathbb{T}}_\beta^s \rho_s^{\text{in}} \hat{\mathbb{T}}_\beta^{s\dagger} - \frac{1}{2} \left\{ \hat{\mathbb{T}}_\beta^{s\dagger} \hat{\mathbb{T}}_\beta^s, \rho_s^{\text{in}} \right\} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

これにより、各散乱モデルにおいて、従来の散乱振幅の計算で $\text{Re} \hat{\mathbb{T}}_0^s$ と $\hat{\mathbb{T}}_\beta^s$ を計算することで、GKSL 生成子の具体的な表式を求めることが可能となった。

3 Decaying particle model

前節では、散乱理論における GKSL 生成子の表式を求めた。ここでは、**不安定スカラー粒子の崩壊過程**を用いて、生成子の具体的な表式を求めていく。この過程でのダイアグラムは次のように与えられる:

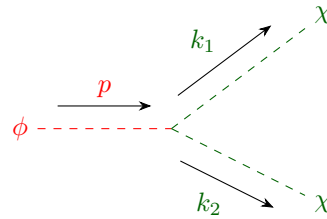


図 2: 不安定スカラー粒子の崩壊

このモデルにおいて、着目系はスカラー場 ϕ であり、それぞれの質量は場 ϕ が μ 、場 χ が m である。また、全系のハミルトニアンは以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{tot}} &= \hat{H}_\phi \otimes \hat{\mathbb{I}}_\chi + \hat{\mathbb{I}}_\phi \otimes \hat{H}_\chi + \hat{V}_I(\mathbf{x}) \\ \hat{H}_\phi &= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \left[\hat{\Pi}_\phi^2(\mathbf{x}) + (\nabla \hat{\phi}(\mathbf{x}))^2 + \mu^2 \hat{\phi}^2(\mathbf{x}) \right] \\ \hat{H}_\chi &= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \left[\hat{\Pi}_\chi^2(\mathbf{x}) + (\nabla \hat{\chi}(\mathbf{x}))^2 + m^2 \hat{\chi}^2(\mathbf{x}) \right] \\ \hat{V}_I(\mathbf{x}) &= -\lambda \int d^3\mathbf{x} \phi(\mathbf{x}) \otimes \chi^2(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (9)$$

以下で、このモデルにおける GKSL 生成子を求める。

⁴演算子 \hat{A} の実部は、 $\text{Re} \hat{A} \equiv \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{A}^\dagger)$ で与えられる。

3.1 Calculation of \hat{T}_β^s

\hat{T}_β^s の定義は、着目系での完全性関係を用いて、次のように書き換えることができる:

$$\begin{aligned} \hat{T}_\beta^s &= \mathbb{E} \langle \beta | \hat{T} | 0 \rangle_{\mathbb{E}} \\ &= \mathbb{E} \langle \beta | \int d\alpha |\alpha\rangle_S \langle \alpha | \hat{T} \int d\bar{\alpha} |\bar{\alpha}\rangle_S \langle \bar{\alpha} | 0 \rangle_{\mathbb{E}} \\ &= \int d\alpha \int d\bar{\alpha} |\alpha\rangle_S \mathbb{E} \langle \beta | \otimes \langle \alpha | \hat{T} |\bar{\alpha}\rangle_S \otimes |0\rangle_{\mathbb{E}} \langle \bar{\alpha} | \end{aligned} \quad (10)$$

ここに、このモデルにおける散乱振幅、

$$S_{\alpha\beta, \bar{\alpha}0} \equiv \mathbb{E} \langle \beta | \otimes \langle \alpha | \hat{T} |\bar{\alpha}\rangle_S \otimes |0\rangle_{\mathbb{E}}$$

が現れているのが分かる。これは、図 2 のダイアグラムにおいてファインマン則を用いて計算ができる。したがって、本モデルでの散乱振幅は、

$$S_{\alpha\beta, \bar{\alpha}0} = -\frac{i\lambda}{2\sqrt{\pi\omega_p E_{k_1} E_{k_2}}} \delta^4(k_1 + k_1 - p) \quad (11)$$

となり、演算子 \hat{T}_β^s は、

$$\hat{T}_\beta^s = -\int d^3p \frac{i\lambda}{2\sqrt{\pi\omega_p E_{k_1} E_{k_2}}} \delta^4(k_1 + k_1 - p) |0\rangle_S \langle p | \quad (12)$$

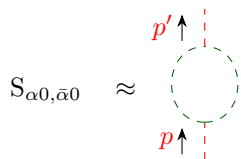
となる。

3.2 Calculation of \hat{T}_0^s

次に、 \hat{T}_0^s の計算を見る。(8) と (12) より、**2次までの摂動を考えなければいけない**。 \hat{T}_β^s のときと同様、定義を書き直すと、次のような散乱振幅が出てくる:

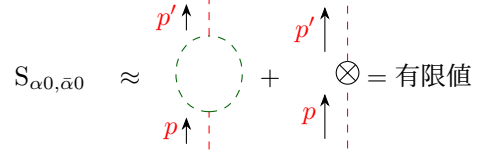
$$S_{\alpha 0, \bar{\alpha} 0} \equiv \mathbb{E} \langle 0 | \otimes \langle \alpha | \hat{T} |\bar{\alpha}\rangle_S \otimes |0\rangle_{\mathbb{E}}$$

この散乱振幅の 2 次までの摂動を考える際は、不適切なものを除けば、大体次のようなダイアグラムを考えればよい:



見て分かる通り、このダイアグラムは発散を起こす。しかしながら、 $m^2 \rightarrow m^2 + \delta m^2$ として繰り込みの操

作をすることで、有限の値にすることができる。すなわち、



という風に、 δm^2 から来る相殺項によってループが引き起こす発散を打ち消すことができる。この繰り込みのパラメータを調整することで、この有限値をゼロにすることができる。したがって、演算子 \hat{T}_0^s は無視することができるのである。

4 Result

これまでの結果をまとめると、このモデルにおける GKSL 生成子は次のようになる:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\rho_s^{\text{in}}] &= \frac{2\lambda^2}{\mu} \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - m^2} \theta(\mu^2 - 4m^2) \\ &\quad \times \int \int \frac{d^3p d^3p'}{\sqrt{\omega_p \omega_{p'}}} \delta^4(p - p') \\ &\quad \times \left[\hat{a}(p) \rho_s^{\text{in}} \hat{a}^\dagger(p) - \frac{1}{2} \{ \hat{a}^\dagger(p) \hat{a}(p), \rho_s^{\text{in}} \} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

また、 $\hat{a}(p)$ は以下のように定義している:

$$\hat{a}(p) \equiv |0\rangle_S \langle p |$$

表式 (13) を見ると、いくつかの特徴点がある。それを以下に列挙する。

1. 係数 $\frac{2\lambda^2}{\mu} \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - m^2} \theta(\mu^2 - 4m^2)$ の意味
係数の中に現れる階段関数 $\theta(\mu^2 - 4m^2)$ は $\mu^2 - 4m^2 < 0$ だと 0 になる。これは、すなわち、 ϕ 場と χ 場の質量の関係が $\mu^2 - 4m^2 > 0$ ではないと崩壊が起きないことを意味している。

2. デルタ関数からの発散を含む

見ての通り、この生成子はエネルギーに関するデルタ関数 $\delta(0)$ により、発散が起きる。これは、必ず崩壊が起きることを意味している (もちろん、上の質量関係の下で)。それもそのはずで、今の場合、着目系のダイナミクスを無限大のタイムスケールで見ている。そのため、着目系のスカラー粒子がいずれ崩壊することは自然なことである。

3. ポアンカレ対称性を持つ

(13) 式は、以下のポアンカレ対称性の条件式⁵を満たす:

$$\hat{U}(\Lambda, \mathbf{a}) \mathcal{L}[\rho_s^{\text{in}}] \hat{U}^\dagger(\Lambda, \mathbf{a}) = \mathcal{L} \left[\hat{U}(\Lambda, \mathbf{a}) \rho_s^{\text{in}} \hat{U}^\dagger(\Lambda, \mathbf{a}) \right] \quad (14)$$

これはタイムスケールが無限大であることが原因となっている。相互作用のタイムスケールは有限の値であるはずなので、時間に対するカットオフを入れなければならない。カットオフ T を入れると、 $\delta(0) \rightarrow T$ と置き換わるので、ポアンカレ対称性は破れらることが分かる。しかしながら、もしそのタイムスケールが十分に長時間なのであれば、(13) を用いた記述が十分有効になるということである。

5 Summary and Future Outlook

5.1 Summary

今回、スカラー粒子の崩壊モデルから GKSL 生成子 (13) を導出し、ポアンカレ対称性が満たされることを確認した。しかし、無限大のタイムスケールによりこの生成子は自明なダイナミクスしか引き起こさない。そのため、今後は非自明なダイナミクスからの生成子の導出を計画している。具体的には以下のような、スカラー場の対消滅過程を考える。

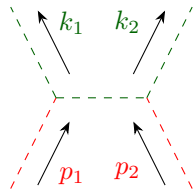


図 3: スカラー場の対消滅

場が出会わないと対消滅は起きないので、非自明なダイナミクスが現れると予想している。

5.2 Future Outlook

本研究は、冒頭でも述べたように量子重力研究に対して応用できる可能性がある。本研究により、対

⁵ Λ や \mathbf{a} はそれぞれ Lorentz 変換と時空並進のパラメータである。

称性が満たされる演算子の形式が分かると期待され、それを先行研究の枠組みに定義として組み込むことで、相互作用も考慮できる枠組みを構築できると考えている。その暁には、今度は完成した枠組みからモデルに対してどのような制限が課されるかを調べていきたいと思っている。

Reference

- [1] S. Bose et al., Phys. Rev. Lett. **119**, 240401(2017).
- [2] J. F. Donoghue, Phys. Rev. D **50**, 3874(1994).
- [3] D. Carney et al 2019 Class. Quantum Grav. **36** 034001.
- [4] J. Oppenheim, Phys. Rev. X **13**, 041040.
- [5] K. Kaito & A. Matsumura, Phys. Rev. A **109**, 052214(2024).

[indexへ戻る](#)

重宇 b07

The ways to quantum gravity

佐野 大志

静的球対称ブラックホールのシュレーディンガー対称性

佐野 大志 (早稲田大学理工学術院 先進理工学科)

Abstract

本発表では、重力の量子化を見据えた古典的な静的球対称ブラックホールの持つ対称性について近年の先行研究 [1,2] のレビューを行う。古典論において自由粒子や調和振動子型のポテンシャル持つ非相対論的な粒子系は、過大な対称性としてシュレーディンガー対称性を持つ。量子化によってこの対称性は保存され、過分でない対称性となり、系の量子性を特徴づける対称性となる。静的真空球対称なブラックホールは古典レベルでシュレーディンガー対称性を持つことを示す。粒子系からの類推から、この対称性は球対称ブラックホールの量子性の議論において重要な役割を果たすことが期待できる。

1 導入

今日の物理学における最大の謎の一つが重力の量子性である。量子重力理論は、時空をそのもののダイナミクスを考える一般相対性理論と量子論の融合であると予想されるが、理論的にでさえ量子重力理論の確立は困難である。

一般相対性理論を特徴づける現象の一つとして、ブラックホールが存在する。ブラックホールは様々な新しい物理の宝庫であると考えられ、重力の量子性も顕著になると考えられている他、熱力学第二法則を満たすようなエントロピーを持つことが理論的に予言されている。エントロピーの統計力学的な解釈としてのマイクロ状態や、そこから如何にしてマクロな状態として時空が現れるかは未知であり、これらは適切な量子重力理論によって説明されると考えられている。

具体的なマイクロな状態がどのようなものであるかは、仮定するモデルに依るものの、このマイクロな状態からマクロな状態が現れるという考え方は凝縮系の物理と同様のものであり、マクロな状態の物理は大域的対称性に支配された連続状態近似によって現れると予想される。そのため、ブラックホールの力学と凝縮系の物理の間の対応関係について多くの研究がなされている [1,2]。

本発表では、静的球対称ブラックホールがシュレーディンガー対称性を持つことを紹介する。シュレーディンガー対称性は、調和振動子型のポテンシャルなどを持つ非相対論的な粒子系が持つ対称性であり、共形変換に対する対称性を含む。非相対論的な粒子系において、シュレーディンガー対称性は古典系では過

剰な対称性であり、そのチャージ同士が独立とはならない。しかし、量子化でもこの対称性は保持され、過剰でない対称性となる。そのため、シュレーディンガー対称性は理論の量子性を特徴づける対称性であると考えられる。

本集録では、非相対論的な粒子系におけるシュレーディンガー対称性を、古典、量子それぞれで説明した後、静的球対称ブラックホールがシュレーディンガー対称性を持つことを紹介する。

2 非相対論的古典系におけるシュレーディンガー対称性

本節では、非相対論的古典粒子系におけるシュレーディンガー対称性に関して手短かに述べ、それが過剰な対称性であることを述べる。d 次元非相対論的自由粒子の作用は、以下のように表せる。

$$S = \frac{m}{2} \int dt \dot{x}^i \dot{x}_i \quad (1)$$

ここで、 m は粒子の質量であり、 $\dot{}$ は時間 t による微分を表し、 $i = 1, 2, \dots, d$ である。この系のハミルトニアンは、 x^i の共役な運動量 $p_i = m\dot{x}_i$ を用いて $H = \frac{1}{2m} p^i p_i$ と表わされる。物理量 \mathcal{O} の時間変化はポアソン括弧を用いて、

$$d_t \mathcal{O} = \{\mathcal{O}, H\} + \partial_t \mathcal{O} \quad (2)$$

と表わされる。 ∂_t は、 $x^i, p_i (i = 1, 2, \dots, d)$ に独立な偏微分である。上記の時間発展に対して、運動量

p_i 及び、以下で定義される b_i, j_{ij} はチャージとなる。(すなわち、 $d_t \mathcal{O} = 0$ 。)

$$b_i = x_i - \frac{t}{m} p_i \quad (3)$$

$$j_{ij} = x_i p_j - x_j p_i \quad (4)$$

これらのチャージはそれぞれ d 個の空間並進、 d 個のガリレイ変換、 $\frac{1}{2}d(d-1)$ 個の空間回転に対応し、ポアソン括弧に対して以下のような関係を持つ。

$$\{b_i, b_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \{b_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad (5)$$

$$\{j_{ij}, b_k\} = \delta_{ik} b_j - \delta_{jk} b_i, \quad (6)$$

$$\{j_{ij}, p_k\} = \delta_{ik} p_j - \delta_{jk} p_i, \quad (7)$$

$$\{j_{ij}, j_{kl}\} \quad (8)$$

$$= \delta_{ik} j_{jl} - \delta_{il} j_{jk} - \delta_{jk} j_{il} + \delta_{jl} j_{ik} \quad (9)$$

これらに加えて、以下の q_+, q_0, q_- も保存するチャージとなり、それぞれ時間並進、時間ディラレーション、特殊共形変換に対応する。

$$q_+ = mH = \frac{1}{2} p^i p_i, \quad (10)$$

$$q_0 = \frac{1}{2} x^i p_i - Ht, \quad (11)$$

$$q_- = \frac{1}{2} x^i x_i - \frac{t}{m} x^i p_i + \frac{t^2}{m} H \quad (12)$$

これらの間の 0 でポアソン括弧は以下であり、 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ の Lie 代数を形成する。

$$\{q_0, q_{\pm}\} = \pm q_{\pm}, \quad \{q_+, q_-\} = -2q_0 \quad (13)$$

これら q_0, q_{\pm} と j_{ij} の間のポアソン括弧は 0 となるが、 q_0, q_{\pm} と b_i, p_j の間のポアソン括弧は 0 でないものが存在する。これら全てのチャージとそのポアソン括弧が作る代数が d 次元シュレーディンガー代数

$$\mathfrak{sh}(d) = (\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{so}(d)) \oplus_s (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \quad (14)$$

となる。ここで、 \oplus_s は半直積を意味する。このシュレーディンガー代数によって生み出される対称性がシュレーディンガー対称性である。ただし、古典論において系の自由度は $2d$ 個であるのに対して、これらチャージの数は d 個 (p_i の分) + d 個 (b_i の分) + $\frac{1}{2}d(d-1)$ 個 (j_{ij} の分) + 3 個 (q_0, q_{\pm} の分) と明らかに過剰である。実際、 j_{ij}, q_0 , 及び q_{\pm} はいずれも b_i, p_i (及び、 m, t) のみから表現可能であり独立でない。しかし、量子論においてはこれらは独立となり、過剰でない系の対称性となることを次節で見る。

3 非相対論的量子力学におけるシュレーディンガー対称性

本節では非相対論的量子力学においても、シュレーディンガー対称性が存在し、量子論においては古典論において独立でなかったチャージが独立となることを見る。前節同様に、非相対論的 d 次元自由粒子を考える。 $\Psi(x)$ とその複素共役 $\bar{\Psi}(x)$ を場の変数として作用は以下のように表される。

$$\mathcal{S}[\Psi, \bar{\Psi}] = \int dt d^d x \left[i\hbar \bar{\Psi} \partial_t \Psi - \frac{\hbar^2}{2m} \partial_i \bar{\Psi} \partial^i \Psi \right] \quad (15)$$

この作用から以下のように自由粒子のシュレーディンガー方程式が得られる。

$$\partial_t \Psi = \frac{\hbar}{2m} \partial_i \partial^i \Psi \quad (16)$$

以下では、この作用の正準量子化的な取り扱いを考える。正準共役な変数の組 $\Psi, \bar{\Psi}$ に対して以下のポアソン括弧の関係及びハミルトニアン H が与えられる。

$$\{\Psi(x), \bar{\Psi}(y)\} = \frac{1}{i\hbar} \delta^{(d)}(x-y), \quad (17)$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \int d^d x \bar{\Psi} \partial^i \partial_i \Psi \quad (18)$$

これらを用いて、物理量の期待値の時間発展 $\mathcal{O} = \int d^d x \bar{\Psi} \hat{\mathcal{O}} \Psi$ は古典論と同様に与えられる。

$$d_t \mathcal{O} = \{\mathcal{O}, H\} + \partial_t \mathcal{O} \quad (19)$$

位置、運動量、角運動量の期待値は以下のように与えられる。

$$X^i = \int d^d x \bar{\Psi} x^i \Psi \quad (20)$$

$$P_i = -i\hbar \int d^d x \bar{\Psi} \partial_i \Psi \quad (21)$$

$$J_{ij} = -i\hbar \int d^d x \bar{\Psi} (x_i \partial_j - x_j \partial_i) \Psi \quad (22)$$

P_i, J_{ij} 及び $B_i := X_i - \frac{t}{m} P_i$ は上記時間発展に対して保存するチャージとなり、これらのポアソン括弧による関係は以下ようになる。

$$\{B_i, B_j\} = \{P_i, P_j\} = 0, \{B_i, P_j\} = \delta_{ij} n \quad (23)$$

$$\{J_{ij}, B_k\} = \delta_{ik} B_j - \delta_{jk} B_i, \quad (24)$$

$$\{J_{ij}, P_k\} = \delta_{ik} P_j - \delta_{jk} P_i, \quad (25)$$

$$\{J_{ij}, J_{kl}\} \quad (26)$$

$$= \delta_{ik} J_{jl} - \delta_{il} J_{jk} - \delta_{jk} J_{il} + \delta_{jl} J_{ik} \quad (27)$$

ここで、 $n := \int d^d x \bar{\Psi} \Psi$ である。同様に古典論における q_0, q_{\pm} の期待値に対応する Q_0, Q_{\pm} も以下のように定義される。

$$Q_+ = mH \quad (28)$$

$$Q_0 = \frac{1}{2}D - Ht \quad (29)$$

$$Q_- = \frac{1}{2}\chi - \frac{t}{m}D + \frac{t^2}{m}H \quad (30)$$

ただし、 D, χ は以下で定義される。

$$D := -\frac{i\hbar}{2} \int d^d x \bar{\Psi} \partial^i \partial_i \Psi \quad (31)$$

$$\chi := \int d^d x \bar{\Psi} x^i x_i \Psi \quad (32)$$

これら Q_0, Q_{\pm} も時間発展に対するチャージとなり、他のチャージとのポアソン括弧に対して古典論と同様の関係を満たす。

故に、量子論においてもこれらチャージはシュレーディンガー代数を $\mathfrak{sh}(d)$ を形成し、系はシュレーディンガー対称性を持つ。古典論との重要な相違点は、古典論の場合と異なり、これらチャージは独立であるということである。例えば、古典論では $j_{ij} = b_i p_j - b_j p_i$ となるが、量子論では $J_{ij} \neq B_i P_j - B_j P_i$ となる。これは、 \mathcal{O} は期待値であり、二つ量の積の期待値とそれぞれの期待値の積が異なる事実を反映しており、 Ψ が場の変数であり本質的に無限の自由度を持つことに起因している。

4 静的球対称ブラックホールのシュレーディンガー対称性

本節では、一般相対性理論において真空の静的球対称ブラックホールが 2 次元シュレーディンガー対称性を満たすことを手短かに説明する。

静的球対称性時空の線要素は以下のように表される。

$$ds^2 = \epsilon(-N^2(r)dr^2 + \gamma_{tt}(r)dt^2) + \gamma_{\theta\theta}(r)d\Omega^2 \quad (33)$$

$\epsilon = \pm 1$ はブラックホール内外でそれぞれ +1, -1 を取る。ここで、

$$\gamma_{tt} = 2\beta(r)/\alpha(r), \gamma_{\theta\theta} = l_s^2 \alpha(r) \quad (34)$$

とすれば、2 変数 α, β を持つ系として考えられる。 $(l_s$ は長さの次元を持った量) ただし、ハミルトニア

ン拘束と呼ばれる理論の時間 (ここでは、 r 方向の座標のラベル) 付け替え不変性に対応する第一類拘束条件が存在し、ラプス関数 $N(r)$ がそのラグランジュ未定乗数に相当する。この計量の下、アインシュタインヒルベルト作用 (一般相対性理論における重力の作用) の変分を考えればシュヴァルツシルト計量が得られる。

以下では、正準的な取り扱いを考える。 $N = \sqrt{\alpha/2\beta}$ とゲージ固定すると、 α, β に共役の運動量 p_α, p_β は以下のように得られる。

$$p_\alpha = \frac{\epsilon C l_p}{\alpha^2} (\beta \dot{\alpha} - \alpha \dot{\beta}), p_\beta = -\epsilon C l_p \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \quad (35)$$

ここで、 l_p はプランク長である。また、 C は以下のように定義される系の IR スケールと UV スケールの比に相当する定数である。

$$C := \frac{4\pi l_s^2}{l_p^3} \int_{t_i}^{t_f} dt \quad (36)$$

ゲージ固定後のハミルトニアン \mathcal{H} は宇宙項が存在しない場合、以下ようになる。

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{\epsilon C l_p} \left[\alpha p_\alpha p_\beta + \frac{1}{2} \beta p_\beta^2 \right] - \frac{C l_p}{l_s^2} \approx 0 \quad (37)$$

これは、ハミルトニアン拘束によって 0 となるが、通常のハミルトニアンと同様にポアソン括弧を用いて r 方向の発展を以下のように記述することが出来る。(ポアソン括弧を取った後に、拘束条件を用いると約束する。)

$$d_\tau \mathcal{O} = \{\mathcal{O}, \mathcal{H}\} + \partial_\tau \mathcal{O} \quad (38)$$

ここで、 τ はラプス関数 $N(r)$ のゲージ固定によって選ばれた r 方向の座標である。チャージは $d_\tau \mathcal{O} = 0$ を満たす \mathcal{O} として得られる。

以下では、この系の持つチャージから対称性を考える。対称性を明確にするために変数を $p_{\alpha, \beta}$ から取り換えて考える。

$$P_+ = \sqrt{\alpha} p_\alpha + \frac{\beta p_\beta}{2\sqrt{\alpha}}, \quad B_+ = \epsilon \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\tau}{C l_p} P_+ \quad (39)$$

$$P_- = \sqrt{\alpha} p_\beta, \quad B_- = 2\epsilon \sqrt{\alpha} + \frac{\tau}{C l_p} P_- \quad (40)$$

$$J = \epsilon(P_+ B_- - P_- B_+) = 2\alpha p_\alpha \quad (41)$$

上記はいずれもチャージとなっており、以下の関係を満たす。

$$\{P_+, P_-\} = \{B_+, B_-\} = 0, \quad (42)$$

$$\{B_\pm, P_\pm\} = 0, \quad \{B_\pm, P_\mp\} = \epsilon, \quad (43)$$

$$\{J, B_\pm\} = \pm B_\pm, \quad \{J, P_\pm\} = \pm P_\pm, \quad (44)$$

また、 Q_0, Q_{\pm} を以下のように定義する。

$$Q_+ = Cl_P \mathcal{H} \quad (45)$$

$$Q_0 = D - \tau \mathcal{H} \quad (46)$$

$$Q_- = -2\epsilon\beta - \frac{2\tau}{Cl_P} D + \frac{\tau^2}{Cl_P} \mathcal{H} \quad (47)$$

ただし、 $D = (\alpha p_\alpha + \beta p_\beta)$ である。これらもまたチャージとなり、以下の関係を満たし $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ 代数を作る。

$$\{Q_0, Q_{\pm}\} = \pm Q_{\pm}, \quad \{Q_+, Q_-\} = -2Q_0 \quad (48)$$

非相対論的粒子系の場合と同様に、 Q_0, Q_{\pm} と J の間のポアソン括弧は 0 であるが、 Q_0, Q_{\pm} と P_{\pm}, B_{\pm} の間には 0 でないポアソン括弧が存在する。

以上より、真空の静的球対称ブラックホールにおけるチャージは以下のシュレーディンガー代数を作る。

$$\mathfrak{sh}(2) = (\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{so}(1, 1)) \oplus_s (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \quad (49)$$

5 まとめと展望

上記のように、一般相対性理論に静的球対称ブラックホールは二次元のシュレーディンガー対称性を持つ。この対称性は非相対論的粒子系において量子化によって保持され、量子論的性質を特徴づけるものであった。そのため、重力の量子化を考える場合にも鍵となる対称性であると考えられる。この結果を基に凝縮系の物理に習って重力の量子性を考えることは非常に興味深く、量子ブラックホールの興味深い特性を明らかにするかもしれない。

Reference

- [1] J. Ben Achour, E. R. Livine, D. Oriti, Phys.Rev.D 108 (2023) 10, 10
- [2] J. Ben Achour, E. R. Livine, D. Oriti, and G. Piani, arXiv:2207.07312.

重宇 b09

銀河赤方偏移サーベイ BOSS の銀河パワースペクトル を用いた複数場インフレーションモデルの制限

中野 新太郎

銀河赤方偏移サーベイ BOSS の銀河パワースペクトルを用いた 複数場インフレーションモデルの制限

中野 新太郎 (東京大学大学院 理学系研究科 M2)

Abstract

インフレーションモデルの検証に有用な観測量として、場の揺らぎの Gauss 分布からのずれを表す「局所的原始非 Gauss 性 (LPNG)」がある。 $f_{\text{NL}}^{\text{local}}$ は LPNG の大きさを表す重要なパラメータであり、単一場インフレーションのほとんどでは $f_{\text{NL}}^{\text{local}} < 1$ となる一方、複数場インフレーションでは一般に $f_{\text{NL}}^{\text{local}} > 1$ となる。従って、 $f_{\text{NL}}^{\text{local}} > 1$ が検出されれば、単一場インフレーションの多くを棄却できると同時に、複数場インフレーションのモデルに制限をかけることができる。

LPNG は密度揺らぎを通して銀河分布に影響を与え、銀河パワースペクトルにおいて波数の 4 乗に反比例する振る舞いを残す。すなわち、極めて大スケールにおいて LPNG の痕跡が残っているわけだが、観測に伴う系統誤差に埋もれてしまうという問題がある。特に、天の川銀河のダストの影響が大きく、角度方向に依存した大スケールの系統誤差として現れる。本研究では、銀河パワースペクトルの計算に用いる銀河のペアを視線方向周りに限って行うことでこの効果を軽減することを試みる。またシミュレーションによる手法の正確性の評価についても報告する。

1 イントロ

星や銀河、大規模構造から私達人類の存在まで、現在の宇宙に見られる多様な構造は、全てインフレーション理論が予言する原始揺らぎに起因すると考えられている [1]。では、インフレーションを起こした場の正体は何か？ この答えに迫る一つの鍵が、揺らぎの Gauss 性である。宇宙マイクロ波背景放射などの観測結果から、この原始揺らぎは非常に Gauss 分布に近いことが分かっているが、僅かな非 Gauss 性の存在は許されている。インフレーションを一つの場合が起こす単一場モデルは整合性関係から $\mathcal{O}(1)$ 以上の揺らぎを作り出せない。一方で、インフレーションに関わる場が 2 つ以上ある複数場モデルには $\mathcal{O}(1)$ の揺らぎから $\mathcal{O}(10^3)$ 程度の揺らぎまで作れるものもある。従って、観測によって有意な Gauss 分布からのズレが検出できれば、直ちに単一場モデルを棄却することができ、そうでない場合は得られた値によって複数場モデルの中からより相応しいものを選ぶことができる。

一方で、大スケールに渡る銀河分布の特徴を捉えるには、様々な観測的な困難がある。例えば、天の川銀河のダストなども同様に大スケールで変化し、観測される銀河数を方向ごとに変化させてしまう。その影響で、銀河パワースペクトルの解析では、極めて大スケールの情報は用いられていないのが現状である。そこで本研究では、Hand らが開発した角度方向に変化する系統誤差の影響を取り除く手法

[2] を応用し、BOSS の観測データに適用することを目標とする。その準備段階として、宇宙論的シミュレーションのデータを用いて手法の効果を確かめた。

第 2 節では、非 Gauss 性があるとき銀河分布に生じるスケール依存する補正項の導出を行う。次に第 3 節では、観測データから測定した銀河分布から、視線方向に垂直な方向に変化する系統誤差の影響を取り除く Hand らの手法 [2] をレビューする。そして第 4 節では本研究で行なった計算の概略を述べる。最後に第 5 節で結果と展望に触れる。

2 原始非 Gauss 性と銀河分布

2.1 局所的原始非 Gauss 性 (LPNG)

Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker 計量のスカラー揺らぎを共形 Newton ゲージにおいて考える：

$$ds^2 = a^2[-(1 + 2\Psi)d\eta^2 + \delta_{ij}(1 + 2\Phi)dx^i dx^j] \quad (2.1)$$

このとき、 Ψ が Newton 重力ポテンシャルに対応し、 Φ は Bardeen ポテンシャルと呼ばれる。また非等方ストレスが無視できるとき一般相対性理論では $\Phi = -\Psi$ であり、以降では代表して Φ を用いる。

インフレーションが作る揺らぎが非 Gauss 分布である場合を考え、改めて非 Gauss 分布な Bardeen ポテンシャルを

Φ_{NG} と表記し、次のように展開する [3, 4, 5] :

$$\Phi_{\text{NG}}(\mathbf{x}) = \phi_{\text{G}}(\mathbf{x}) + f_{\text{NL}}^{\text{local}} [\phi_{\text{G}}(\mathbf{x})^2 - \langle \phi_{\text{G}}^2 \rangle] + \mathcal{O}(\phi_{\text{G}}^3) \quad (2.2)$$

ここで、 ϕ_{G} は Gauss 分布の場合、 $\sqrt{\langle \phi \rangle^2} < 10^{-4}$ より ϕ_{G} の高次の項は十分に小さいため、Taylor 展開はすぐに収束する。この 2 次の係数 $f_{\text{NL}}^{\text{local}}$ が局所的原始非 Gauss 性 (local primordial non-Gaussianity; LPNG) である [6, 7]。第二項の $\langle \phi_{\text{G}}^2 \rangle$ は 2 次までで $\langle \Phi_{\text{NG}} \rangle = 0$ を保証する。以下、local の添字は省略する。

2.2 非 Gauss 分布 物質密度揺らぎ

ここでは、ポテンシャル Φ の初期条件を定義する時刻 η_{ini} として、等密度時以降 ($\eta_{\text{eq}} \ll \eta_{\text{ini}}$) かつ super horizon で非線形成長が無視できる ($k\eta_{\text{ini}} \ll 1$) 時点での値を選び、時間の引数を省略し単に $\Phi_{\text{NG}}(\mathbf{k})$ と表す。物質優勢期に入り十分時間が経ったとき、sub horizon のポテンシャルは線形成長の下で、

$$\Phi_{\text{NG}}^{(1)}(\mathbf{k}, \eta) = T(k) \frac{D_+(\eta)}{a(\eta)} \Phi_{\text{NG}}(\mathbf{k}) \quad (2.3)$$

であり、 $D_+(\eta)$ は物質優勢期で $a(\eta)$ に規格化された線形成長因子で、 $T(k)$ は遷移関数である。線形 Poisson 方程式は

$$\begin{aligned} \delta_{\text{m,NG}}^{(1)}(\mathbf{k}, \eta) &= \mathcal{M}(k, \eta) \Phi_{\text{NG}}(\mathbf{k}) \\ \left(\mathcal{M}(k, \eta) &= \frac{2}{3} \frac{k^2 T(k)}{\Omega_{\text{m}0} H_0^2} D_+(\eta) \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.3 非 Gauss 分布 ハロー数密度揺らぎ

物質の集まりであるハローは、揺らぎのピークに生じると考えられる。そこで、Gauss 分布である ϕ_{G} を、背景を担う長波長揺らぎ δ_l とピークを担う短波長揺らぎ δ_s に分解する (Peak-background split) [8] : $\phi_{\text{G}} = \phi_l + \phi_s$ 。これを、式 (2.2) と Poisson 方程式に代入すると、 $\nabla^2 \Phi = A\delta$ として、次のように混合項が現れる [9] :

$$\begin{aligned} \delta_l &= \delta_{\text{G},l}(1 + 2f_{\text{NL}}\phi_l) + 2A^{-1}f_{\text{NL}}\nabla\phi_l \cdot \nabla\phi_l \\ \delta_m &= 2f_{\text{NL}}(\delta_{\text{G},s}\phi_l + \delta_{\text{G},l}\phi_s) + 4A^{-1}f_{\text{NL}}\nabla\phi_l \cdot \nabla\phi_s \\ \delta_s &= \delta_{\text{G},s}(1 + 2f_{\text{NL}}\phi_s) + 2A^{-1}f_{\text{NL}}\nabla\phi_s \cdot \nabla\phi_s \end{aligned} \quad (2.5)$$

ピーク付近では $\nabla\phi_s = 0$ であることなどを用いると、最終的に $\delta_s + \delta_m \simeq \delta_s(1 + 2f_{\text{NL}}\phi_l)$ が得られる。すなわち、非 Gauss 性が ϕ_{G} の非線形項として現れ、それにより短波長

モードと長波長モードのカップリングが生じ、短波長揺らぎのピークが長波長揺らぎによって $1 + 2f_{\text{NL}}\phi_l$ 倍に増幅されたことを意味する。結局、ハローの数密度揺らぎは

$$\delta_{\text{h,NG}}^{(1)}(\mathbf{x}, \eta) = b_1(\eta)\delta_l(\mathbf{x}, \eta) + b_\phi(\eta)f_{\text{NL}}\phi_l(\mathbf{x}, \eta) \quad (2.6)$$

となり、ポテンシャルに比例する項が加わる。ここで、 $b_\phi = 2\delta_{\text{cr}}(b_1 - 1)$ とおいた [10]。

2.4 銀河分布の LPNG 補正項

上記の議論より銀河数密度揺らぎは

$$\delta_{\text{g}}^{(1)}(\mathbf{x}, \eta) = b_1(z)\delta_{\text{m,G}}^{(1)}(\mathbf{x}, \eta) + b_\phi(\eta)f_{\text{NL}}\phi_{\text{G}}(\mathbf{x}) \quad (2.7)$$

と書け、次節で定義する銀河パワースペクトルは

$$P_{\text{gg}}^{(11)}(k) = \left[b_1^2 + \frac{2b_1b_\phi f_{\text{NL}}}{\mathcal{M}(k)} + \frac{b_\phi^2 f_{\text{NL}}^2}{\mathcal{M}(k)^2} \right] P_{\text{mm}}(k) \quad (2.8)$$

となる。上式の [•] 内が、LPNG によるスケール依存バイアス (の 2 乗) であり、Gauss 分布 ($f_{\text{NL}} = 0$) の場合と比べ、新たに $\mathcal{M}(k)^{-2} \propto k^{-4}$ に比例する項が加わっている。

3 系統誤差の影響

3.1 銀河パワースペクトル

銀河パワースペクトルは、Fourier 空間での銀河数密度揺らぎの相関から定義される :

$$\langle \delta_{\text{g}}(\mathbf{k})\delta_{\text{g}}(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta_{\text{D}}(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P(k) \quad (3.1)$$

宇宙原理によれば、大域的に一様等方であるため、統計量の銀河パワースペクトルは波数の大きさ k にしか依らないはずである : $P(\mathbf{k}) = P(k)$ 。しかし、一般には赤方偏移空間変形や Alcock Pachynski 効果などの観測的效果により視線方向に関して非等方性が現れる : $P(\mathbf{k}) = P(k, \mu)$ 。さらに、観測される銀河パワースペクトル P^{obs} には、系統誤差からの寄与が含まれる。視線方向に垂直な方向のクラスタリングにのみ影響する系統誤差を考えると、観測で得られる銀河パワースペクトルは

$$P^{\text{obs}}(k, \mu) = P(k, \mu) + P^{\text{sys}}(k)\delta_{\text{D}}(\mu) \quad (3.2)$$

ここで、 $P(k, \mu)$ は系統誤差がない場合の銀河パワースペクトルであり、ここに興味のある宇宙論的情報が含まれている。今興味がある等方成分は、 μ についての平均である :

$$P_0(k) = \int_0^1 d\mu P(k, \mu) \quad (3.3)$$

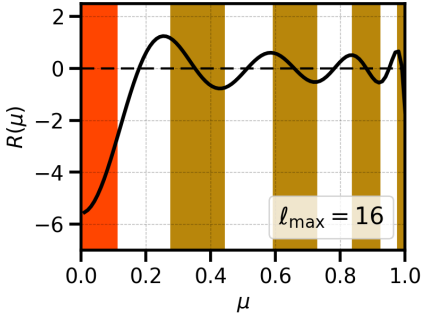


図 1: $\ell_{\max} = 16$ での $R(\mu)$ と non-uniform binning. 白と茶の各範囲では $R(\mu)$ の積分は 0 になり、左端の赤の範囲だけが 0 でない。

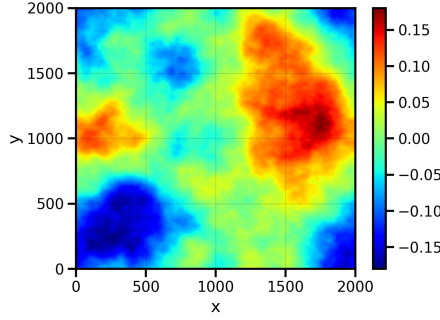


図 2: 一辺が 2000 Mpc/h の box 内に生成した系統誤差の場の、 $z = 0$ Mpc/h の xy 平面でのスライス。大スケールの揺らぎは大きく、小スケールの揺らぎは小さい。

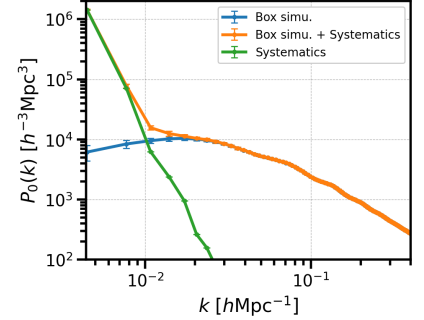


図 3: Box シミュレーション (青)、系統誤差の場 (緑) およびそれらの和 (橙) のそれぞれから測定した \hat{P}_0 。全て 25 個の realization での平均。

3.2 系統誤差の漏れ出し

観測データから高速 Fourier 変換を用いて直ちに得られるのは、Legendre 展開の係数 (多重極) である：

$$\begin{aligned} \hat{P}_\ell^{\text{obs}}(k) &= \frac{2\ell + 1}{2} \int d\mu P^{\text{obs}}(k, \mu) \mathcal{L}_\ell(\mu) \\ &= P_\ell(k) + P^{\text{sys}}(k) \frac{2\ell + 1}{2} \mathcal{L}_\ell(0) \end{aligned} \quad (3.4)$$

ただし実際の解析では、計算時間が有限であるため $\ell = 0, 2, \dots, \ell_{\max}$ に対する有限個の多重極しか得ることができない。これらを用いて元の $P(k, \mu)$ を推定すると、

$$\begin{aligned} \hat{P}^{\text{obs}}(k, \mu) &= \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} \hat{P}_\ell^{\text{obs}}(k) \mathcal{L}_\ell(\mu) \\ &= \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} \hat{P}_\ell(k) \mathcal{L}_\ell(\mu) - P^{\text{sys}}(k) R(\mu) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\left(R(\mu) = -\frac{\ell_{\max} + 1}{2\mu} \mathcal{L}_{\ell_{\max}+1}(0) \mathcal{L}_{\ell_{\max}+1}(\mu) \right) \quad (3.6)$$

となる。すなわち、元々系統誤差の影響は $\mu = 0$ のみに存在していたにも関わらず、観測データから推定した $\hat{P}^{\text{obs}}(k, \mu)$ には $\mu > 0$ にも系統誤差の影響が現れてしまう。

3.3 Non-uniform binning

式 (3.5) から明らかなように、 $\hat{P}^{\text{obs}}(k, \mu)$ を式 (3.3) に代入して得られる $\hat{P}_0(k)$ には、一般に 0 ではない系統誤差由来の項が加わる。そこで、積分範囲から $\mu = 0$ 周りを除き、その影響を軽減することを考える。このとき、 $\hat{P}_0(k)$ に対

する系統誤差の寄与は $R(\mu)$ の積分に比例する：

$$(\hat{P}_0(k) \text{ への系統誤差の寄与}) \propto \int_{\mu_{\min}}^1 d\mu R(\mu) \quad (3.7)$$

つまり、この積分の値を最小にする、積分範囲の下限 μ_{\min} を求めれば良い。幸い、関数 $R(\mu)$ の具体形は既知であり、グラフの概形は図 1 のように振動する。従って、ちょうど上振れと下振れの寄与が相殺するような μ の範囲の区切り方が存在し、これを non-uniform binning と呼ぶ。 $\ell_{\max} = 16$ の場合は全部で 9 個の bin が存在し、各 bin の端を $\mu_0 = 0, \mu_1, \dots, \mu_8, \mu_9 = 1$ とおくと、 $[\mu_i, \mu_{i+1}]$ ($i = 1, \dots, 8$) での $R(\mu)$ を積分値は 0 となる。

4 Box simulation への実装

本研究ではまず、AbacusSummit[11] の box simulation のデータを用いて、そこに角度方向にのみ変化する系統誤差を与えた際に上記の方法を用いて解析した。

系統誤差としては、LPNG による銀河パワースペクトルへの寄与 (2.8) を想定し、次のような関数形を考える：

$$P_{\text{sys}}(k_\perp) \propto \frac{1}{k_\perp^4}. \quad (4.1)$$

上式を満たす系統誤差の場として、Fourier 空間で

$$\delta^{\text{sys}}(\mathbf{k}) = 2\pi \delta_D(k_\parallel) \sqrt{P_{\text{sys}}(k_\perp)} e^{i\phi_{\mathbf{k}_\perp}} \quad (4.2)$$

として生成し、その後 FFT により実空間の場とした (図 2)。ただし、 z 軸を視線方向に選び、 $\phi_{\mathbf{k}_\perp} \in [0, 2\pi)$ はランダム変数である。Box シミュレーションのみ、系統誤差の場のみ、およびこれらの和から測定した、積分範囲 $\mu = [0, 1]$ でのパワースペクトルは図 3 に示した。

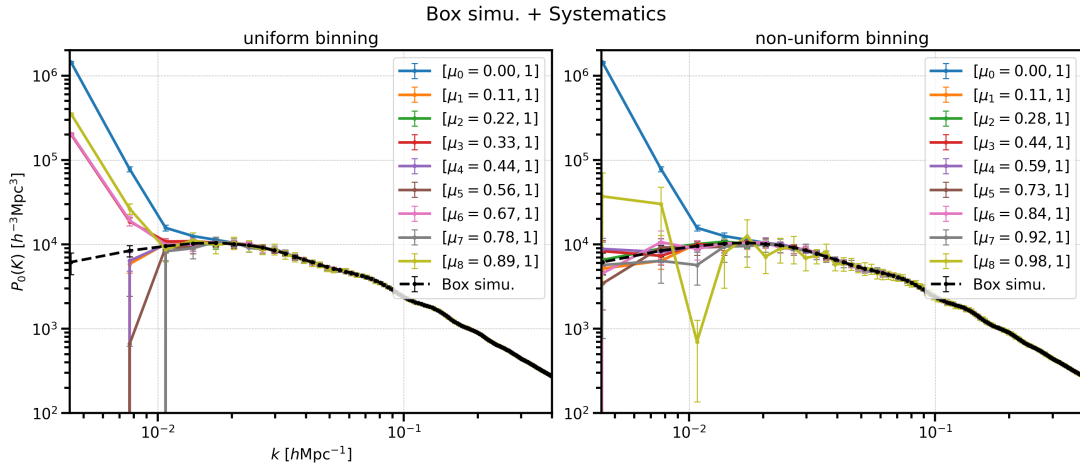


図 4: 左が uniform bin、右が non-uniform bin における測定した $\hat{P}_0(k)$ 。ラベルは $\hat{P}_0^{\text{obs}}(k, \mu)$ の積分範囲。

5 結果・展望

積分範囲の下限 μ_{min} を変化させた際の銀河パワースペクトルの解析結果は図 4 のようになった。まず uniform binning では、どの μ_{min} に対しても、small k で元のパワーを復元することはできなかった。一方 non-uniform binning では、確かに全ての $\mu_{\text{min}} \neq \mu_0$ で系統誤差の影響を取り除くことができた。特に、 μ_1 から μ_3 では統計誤差によるふらつきも小さく、元の振幅を復元できている。

現在、分光観測の領域・状況を模した光円錐状の模擬銀河データを作成した上で、視線方向を固定せず各銀河ペアごとに定めた定式化の下で同様の測定を行っており、その後 BOSS の実データに対して行う予定である。

Reference

[1] E. Komatsu et al., The Astrophysical Journal Supplement Series **180**, 330 – 376 (2009).
 [2] N. Hand, Y. Li, Z. Slepian and U. Seljak, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics **2017**, 002 – 002 (2017).
 [3] N. Dalal, O. Doré, D. Huterer and A. Shirokov, Physical Review D **77** (2008).
 [4] P. McDonald, Physical Review D **78** (2008).
 [5] V. Desjacques, D. Jeong and F. Schmidt, Physics Reports **733**, 1 – 193 (2018).

[6] V. Assassi, D. Baumann, E. Pajer, Y. Welling and D. v. d. Woude, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics **2015**, 024 – 024 (2015).
 [7] V. Assassi, D. Baumann and F. Schmidt, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics **2015**, 043 – 043 (2015).
 [8] F. Schmidt, D. Jeong and V. Desjacques, Physical Review D **88** (2013).
 [9] T. Giannantonio and C. Porciani, Physical Review D **81** (2010).
 [10] A. Barreira, G. Cabass, F. Schmidt, A. Pillepich and D. Nelson, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics **2020**, 013 – 013 (2020).
 [11] N. A. Maksimova et al., Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **508**, 4017 – 4037 (2021).

重宇 b10

リュードベリ原子を用いた高周波重力波の観測方法の 構築

谷口 彰

リュードベリ原子を用いた高周波重力波の観測方法の構築

谷口 彰 (九州大学大学院 理学府)

Abstract

高周波重力波には様々な天体や初期宇宙に関する情報が含まれていると期待されているが、高周波重力波の観測方法は未だ確立していない。このような背景から、私たちはリュードベリ原子を用いた高周波重力波検出器を提案した [1]。リュードベリ原子を電磁誘導透明体 (EIT) というシステムとして用いると、電場を高感度で検出することができる。近年、この方法を発展させたスーパーヘテロダイン法が考案され、電場の検出感度が大幅に向上した。そこで、リュードベリ原子を用いたスーパーヘテロダイン法で、重力波が一定の磁場中に到来したときに発生する微弱な電場を検出できるかどうかを調べた。その結果、一例として、周波数 26.4GHz、振幅約 10^{-20} 程度の重力波を検出できることを見出した。また、この検出器は原子のエネルギー準位差や検出器の大きさを変更することで、幅広い周波数帯の重力波を検出することができることが判明した。本発表では、検出器の構成や重力波の検出方法を [1] に基づいて説明する。

1 Introduction

2015 年の KIGO/Virgo による重力波の初の直接検出により、近年の重力波天文学は著しく発展している。現在、地上の重力波干渉計は 1 Hz~1 kHz を観測でき、将来宇宙に打ち上げ予定の重力波干渉計は 10^{-4} Hz ~ 10^{-1} Hz 程度の重力波を観測できる。さらに、パルサータイミングアレイは 10^{-9} Hz ~ 10^{-6} Hz の範囲を観測対象にできる。このように、1kHz よりも低周波領域の重力波の観測方法は非常に発展している。しかし、1kHz よりも高周波領域の重力波の観測方法は確立されていない。

高周波重力波には宇宙物理に関する豊富な情報が含まれていると期待されている。例えば、高周波重力波は原始ブラックホール連星から放出される。一般的に、天体起源のブラックホール連星からの重力波の最大周波数は 10kHz 程度である。一方で、原始ブラックホールは天体起源のブラックホールよりも軽い質量になり得るため、10kHz 以上の高周波重力波を放射できる。したがって、高周波重力波の検出は原始ブラックホールの探索に有用である。

リュードベリ原子は、微弱な電場を測定する量子センシングとして用いられる。近年、スーパーヘテロダイン法という方法が考案され、電場の検出感度が大幅に向上した [2]。このような背景から、重力波と磁場の相互作用から生じる電場をリュードベリ原子を用いて測定すること、高周波重力波を検出できる可能性に注目した。

2 検出器の概要

2.1 重力波と磁場の相互作用

はじめに、重力波と磁場の相互作用によって電場が誘起されることを示す。ここでは、一様一定磁場に重力波が入射する状況を考える。電磁場の作用は、電磁場テンソル $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ を用いて

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right] \quad (1)$$

と書ける。作用 (1) に、4次元ミンコフスキー時空からの摂動 $h_{\mu\nu}$ を考慮した計量

$$ds^2 = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu \quad (2)$$

を代入して、ゲージ場 A^μ に関する変分を取ること、Maxwell 方程式

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} + \partial_\nu \left(\frac{1}{2} h F^{\mu\nu} + h^\nu_\alpha F^{\alpha\mu} - h^\mu_\alpha F^{\alpha\nu} \right) = 0 \quad (3)$$

が得られる。 E^i は重力波と一様一定磁場との相互作用によって生じるため、 $B^i \sim \mathcal{O}(1)$ 、 $E^i \sim \mathcal{O}(h)$ であることから、式 (3) は以下のように変形できる。

$$E^i = \varepsilon^{ijk} h^0_j B^k \quad (4)$$

これは、重力波と磁場の相互作用から電場が生じることを表している。

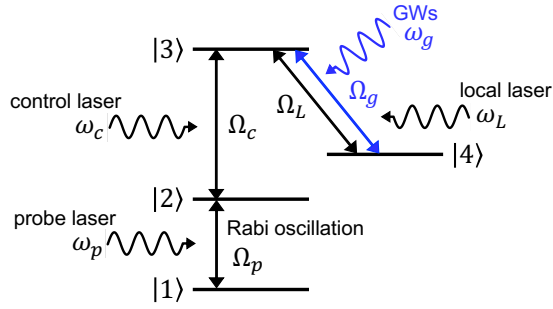


図 1: スーパーヘテロダイン法のエネルギー準位

2.2 スーパーヘテロダイン法

リユードベリ原子は、スーパーヘテロダイン法として用いることで微弱な電場の測定に利用される [2]. スーパーヘテロダイン法では、4 準位系 (低いエネルギー状態 |1>, |2> と 2 つのリユードベリ状態 |3>, |4>) を用意する (図 1). 状態 |1> と |2> の間の遷移は、状態 |1> と |2> のエネルギー順位差に対応する周波数 ω_p を持つプローブレザー $\mathbf{E}_p \cos(\omega_p t)$ によって実現する. そして、プローブレザーは周波数 $\Omega_p \equiv |\mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{E}_p|$ のラビ振動を誘起する. ここで、 \mathbf{d}_{ij} は $|i\rangle$ と $|j\rangle$ の双極子モーメントである. 興味深いことに、コントロールレーザー $\mathbf{E}_c \cos(\omega_c t)$ によって誘起される |2> と |3> の間の周波数 $\Omega_c \equiv |\mathbf{d}_{23} \cdot \mathbf{E}_c|$ のラビ振動は、|1> と |2> の間のラビ振動に干渉する. その結果、原子がプローブレザーが透明になる (プローブレザーが吸収されない) という現象が生じる. この現象を電磁誘導透明体 (EIT) という. さらに、スーパーヘテロダイン法ではローカルレーザー $\mathbf{E}_L \cos(\omega_L t)$ を用いて |3> と |4> の間にもラビ振動 $\Omega_L \equiv |\mathbf{d}_{34} \cdot \mathbf{E}_L|$ を誘起する. ここで、重力波がリユードベリ原子に到達したとする. 4 準位のリユードベリ原子が存在する領域に一樣一定の磁場をかけると、重力波と磁場の相互作用によって、周波数 ω_g の微弱な電場が発生する. この電場は、|3> と |4> の間にラビ振動 $\Omega_g \equiv |\mathbf{d}_{34} \cdot \mathbf{E}_g|$ を誘起する. 式 (4) より、重力波で誘起されるラビ振動は、

$$\Omega_g = |\mathbf{d}_{34} \cdot \mathbf{E}| = |\mathbf{d}_{34}^i \varepsilon^{ijk} h^0_j B^k| \quad (5)$$

である. ただし、 $\Omega_g \ll \Omega_L$ である. このラビ振動によってプローブレザー吸収率が変化する. この変化を測定することで、重力波の到来を検知することができる.

2.3 Fermi-Normal 座標

前節では、磁場が一定かつ一様であると考えて計算を進めてきた. したがって、式 (5) で表される重力波を考えるためには局所慣性系を考える必要がある. そこで、Fermi-Normal (FN) 座標を用いる. 感度が最大になるのは重力波が誘起するラビ振動が最も大きい場合である. これは、磁場に対して重力波が垂直に入射するとき実現される. このとき、平均化されたラビ振動数 $\langle \Omega_g \rangle$ は

$$\langle \Omega_g \rangle = |d^{(34)i} \varepsilon^{ijk} \langle h^0_j \rangle B^k| = \frac{F(\epsilon)}{\sqrt{2}} |\mathbf{d}_{34}| h B \quad (6)$$

となる. $F(\epsilon)$ は Fermi-Normal 座標を導入したことによる補正項であり、

$$F(\epsilon) \equiv \frac{\pi (\pi^2 \epsilon^2 - 3) \text{Si}(2\pi\epsilon)}{2\pi\epsilon} + \frac{\pi (2\pi^2 \epsilon^2 - 15) \cos(2\pi\epsilon)}{8\pi^2 \epsilon^2} + \frac{\pi (2\pi^2 \epsilon^2 + 15) \sin(2\pi\epsilon)}{16\pi^3 \epsilon^3} \quad (7)$$

である. ここで、 ϵ は、重力波の波長 λ_g とセルの半径 l の比 $\epsilon = l/\lambda_g = kl/(2\pi)$ である.

$F(\epsilon)$ の振る舞いを図 2 に示した. 長波長の重力波では、図 2 に示すように $F(\epsilon)$ が急激に減衰するため、重力波に対する検出器の感度が著しく低下する. 一方、短波長の重力波の場合、波長内のリユードベリ原子の数は体積 ϵ^{-3} に比例して減少するため、感度が減少する. その結果、検出器の感度は $\epsilon = 0.7$ で最大になる. これは、観測目標にする重力波の波長と同等の大きさのセルを設置することで、重力波の感度が最大になることを意味している.

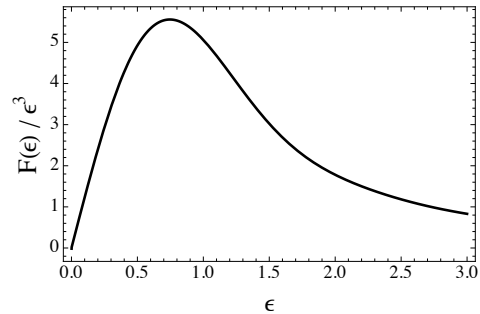


図 2: Fermi-Normal 座標を導入したことによる補正項の振る舞い. $F(\epsilon)/\epsilon^3$ の $\epsilon = l/\lambda_g = kl/(2\pi) = \omega_g l/(2\pi)$ 依存性のプロットである. $\epsilon \sim 0.7$ 程度で感度が最大になる. これは、観測目標にする重力波の波長と同等の大きさのセルを設置することで、重力波の感度が最大になることを意味している.

3 感度の評価

この章では、本検出器の感度を評価する。重力波の到来は、プローブレーザーに変化の吸収率に変化を与える。そして、プローブレーザーの吸収率は、4準位系の密度演算子で表される複素感受率の虚部に比例する [3]。これらの関係について簡単に説明をした後、感度の評価を行う。

3.1 複素感受率と密度演算子の関係

はじめに、プローブレーザーの吸収率が複素感受率に比例していることを示す。以下の式で表されるような、 z 軸に沿って進む振幅 E_0 の電場を考える。

$$E(z, t) = E_0 \exp(ikz - i\omega t) \quad (8)$$

また、複素誘電率は、

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 + \chi(\omega, k) \quad (9)$$

と表される。ここで、 $\chi(\omega, k)$ は線形感受率であり $|\chi| \ll 1$ である。屈折率 $n(\omega)$ と減衰係数 $\kappa(\omega)$ を用いて $\sqrt{\varepsilon(k, \omega)}$ を実部と虚部に分けると、

$$\sqrt{\varepsilon(k, \omega)} = \frac{k}{\omega} \equiv n(\omega) + i\kappa(\omega) \quad (10)$$

と書けるので、電場の表式が以下になる。

$$E(z, t) = E_0 e^{i(\omega n(\omega)z - \omega t)} e^{-\omega \kappa(\omega)z} \quad (11)$$

したがって、 $\kappa(\omega)$ は電場の吸収率を表していることが分かる。次に、複素感受率も実部 χ' と χ'' に分けて表したものを $\chi \equiv \chi' + i\chi''$ を式 (9) と式 (10) に代入することで、

$$\kappa(\omega) = \frac{\chi''}{2} \quad (12)$$

を得る。これは、吸収率が複素感受率の虚部に比例していることを意味している。

次に、感受率と密度演算子の関係を導出する。エネルギー準位 $|1\rangle$ と $|2\rangle$ の 2 準位系に注目する。双極子モーメント演算子 \hat{d}_{12} は、

$$\hat{d}_{12} = d_{12} |1\rangle \langle 2| + d_{21} |2\rangle \langle 1| \quad (13)$$

と表される。ここで、 d_{12} は双極子モーメントである。半古典論では、プローブレーザー $\mathbf{E}_p \cos(\omega_p t)$ によって誘起される分極 \mathbf{P} は、原子数密度を N 、密度

演算子を $\rho(t)$ とすると、 $\mathbf{P}(t) = N \text{Tr}[\hat{d}\rho(t)]$ と表される。これらを式 (13) と組み合わせることによって、

$$\mathbf{P}(t) = N \text{Tr}[\hat{d}\rho(t)] = N d_{12} \rho_{21}(t) + \text{c.c.} \quad (14)$$

となる。さらに、 $\mathbf{P}(t)$ の Fourier 変換を $\tilde{\mathbf{P}}(\omega_p)$ として、分極を Fourier モードで表すと、

$$\mathbf{P}(t) = \tilde{\mathbf{P}}(\omega_p) e^{-i\omega_p t} + \text{c.c.} \quad (15)$$

よって、式 (14) と式 (15) を組み合わせることで、

$$\tilde{\mathbf{P}}(\omega_p) = N d_{12} \rho_{21}(t) e^{i\omega_p t} \quad (16)$$

を得る。また、 $\mathbf{E}(t)$ のフーリエ変換を $\tilde{\mathbf{E}}(\omega_p)$ として電場 $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_p \cos(\omega_p t)$ も Fourier モードで表すと、

$$\mathbf{E}(t) = \tilde{\mathbf{E}}(\omega_p) e^{-i\omega_p t} + \text{c.c.} = \frac{1}{2} \mathbf{E}_p e^{-i\omega_p t} + \text{c.c.} \quad (17)$$

と表される。ここで、2 行目の変形には、 $\cos(\omega_p t) = (e^{i\omega_p t} + e^{-i\omega_p t})/2$ を用いている。複素感受率は

$$\tilde{\mathbf{P}}(\omega_p) = \chi(\omega_p) \tilde{\mathbf{E}}(\omega_p) \quad (18)$$

で定義されるので、式 (16), (17), (18) より、感受率と密度演算子が以下の関係を満たすことが分かる。

$$\chi(\omega_p) = \frac{2N |d_{12}|^2}{\Omega_p} \rho_{21}(t) e^{i\omega_p t} \quad (19)$$

3.2 マスター方程式

リュードベリ原子の 4 準位系のハミルトニアンは、以下のように表される。

$$\hat{\mathcal{H}} = \Delta_p |2\rangle \langle 2| + (\Delta_p + \Delta_c) |3\rangle \langle 3| + (\Delta_p + \Delta_c + \Delta_L) |4\rangle \langle 4| - \left[\frac{\Omega_p}{2} |2\rangle \langle 1| + \frac{\Omega_c}{2} |3\rangle \langle 2| + \frac{\Omega_L + \Omega_g e^{-i\delta_g t}}{2} |3\rangle \langle 4| + \text{h.c.} \right] \quad (20)$$

ここで、 Δ_p , Δ_c , Δ_L , and δ_g は離調 (detuning) と呼ばれる量で、以下のように定義される。

$$\Delta_p \equiv (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - \omega_p \quad (21)$$

$$\Delta_c \equiv (\varepsilon_3 - \varepsilon_2) - \omega_c \quad (22)$$

$$\Delta_L \equiv \omega_L - (\varepsilon_3 - \varepsilon_4) \quad (23)$$

$$\delta_g \equiv \omega_g - \omega_L \quad (24)$$

全系の密度演算子 $\tilde{\rho}$ に対する Lindblad 方程式は

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho} = -i[\hat{\mathcal{H}}, \tilde{\rho}] + \sum_{k=2,3,4} \gamma_k \left[\hat{O}_k \tilde{\rho} \hat{O}_k^\dagger - \frac{1}{2} \left\{ \hat{O}_k^\dagger \hat{O}_k, \tilde{\rho} \right\} \right] \quad (25)$$

で与えられ, $\hat{O}_k = |1\rangle\langle k|$ は $|k\rangle$ から $|1\rangle$ への自然崩壊を表す演算子であり, 崩壊率を γ_k で表している.

マスター方程式 (25) を解き, 関係式 (19) に代入することで,

$$\text{Im } \chi = 2N|\mathbf{d}_{12}|^2\kappa_0 + 2N|\mathbf{d}_{12}|^2\kappa_1\Omega_g \cos(\delta_g t) \quad (26)$$

を得る. ここで, κ_0, κ_1 は, ラビ振動数 Ω , 離調 Δ , 崩壊率 γ に依存する定数である. 透過してきたプローブレーザーのパワーは, $P(t) = |E(z, t)|^2 = P_i e^{-\omega_p L \text{Im } \chi}$ を用いて計算できる. ここで, $P_i (= |E_0|^2)$ はプローブレーザーの入力時のパワーであり, L はリユードベリ原子が入っているセルのサイズである. したがって, $z = L$ とおいた式 (11) と式 (12) に, 式 (26) を代入して $P(t)$ を計算すれば,

$$P(t) = P_0 + 2P_0 N |\mathbf{d}_{12}|^2 \omega_p L \kappa_1 \Omega_g \cos(\delta_g t) \quad (27)$$

となる. ここで, $P_0 \equiv P_i e^{-\omega_p L 2N |\mathbf{d}_{12}|^2 \kappa_0}$ である.

ここで, 式 (27) において第 2 項目の振動項が第 1 項目の定常項と同等のときに重力波を検出できると考えられるため, 以下の条件を課すことができる.

$$2N |\mathbf{d}_{12}|^2 \omega_p L |\kappa_1| \Omega_g = 1 \quad (28)$$

ここに, 式 (6) を代入することで, 検出可能な重力波の最小振幅を評価できる.

3.3 測定可能な重力波の最小振幅

測定可能な重力波の最小振幅を評価する. リユードベリ原子にルビジウムを用いて, 4 準位を $|1\rangle : 5S_{1/2}$, $|2\rangle : 5P_{3/2}$, $|3\rangle : 59P_{3/2}$, and $|4\rangle : 57D_{5/2}$ にとる. この場合, 双極子モーメントとエネルギー準位差は, $|\mathbf{d}_{12}| = 5.158ea_0$, $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = 384 \text{ THz}$, $|\mathbf{d}_{34}| = 2416ea_0$, $\varepsilon_3 - \varepsilon_4 = 26.4 \text{ GHz}$ である. ここで, e は電気素量, a_0 はボーア半径である. 原子数密度 N は, [4] によると, $N \sim 1.6 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ まで大きくすることが可能である. 以上のパラメータを用いて感度を計算すると,

$$h = 5.7 \times 10^{-20} \left(\frac{1.91}{F(\epsilon)} \right) \left(\frac{10 \text{ T}}{B_z} \right) \left(\frac{2416 ea_0}{|\mathbf{d}_{34}|} \right) \times \left(\frac{5.158 ea_0}{|\mathbf{d}_{12}|} \right)^2 \left(\frac{1.6 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}}{N} \right) \times \left(\frac{384 \text{ THz}}{\omega_p} \right) \left(\frac{10 \text{ cm}}{L} \right) \left(\frac{0.042 \text{ MHz}^{-2}}{|\kappa_1|} \right) \quad (29)$$

となり, 周波数 26.4GHz, 振幅約 10^{-20} の重力波を観測することが可能であることが分かった. さらに, 26.4GHz 以外の重力波も, エネルギー準位 $|3\rangle$ と $|4\rangle$ のエネルギー差, および, リユードベリ原子を入れているセルの大きさを, 観測目標の重力波の波長に対応させて変更することで, 周波数が約 2GHz~ 約 100GHz の重力波を観測目標にすることが可能である.

4 まとめ

本研究では, リユードベリ原子を用いて高周波重力波を検出器できる可能性を調べた. 本検出器は, 重力波と磁場の相互作用から生じる電場を, リユードベリ原子を用いたスーパーヘテロダイナ法で測定する. この感度を評価したところ, 一例として, 周波数 26.4GHz, 振幅約 10^{-20} の重力波を検出できることを見出した. また, この検出器の利点は, エネルギー準位 $|3\rangle$ と $|4\rangle$ のエネルギー差, および, リユードベリ原子を入れているセルのサイズを変更することで, 約 2GHz~ 約 100GHz の範囲の幅広い周波数の重力波を観測目標にすることができる点である.

謝辞

本講演は, 指導教員の菅野優美准教授と, 神戸大学の早田次郎教授との共同研究に基づくものです. 日々の議論を通して多大なご指導を頂いていることに, 感謝を申し上げます.

Reference

- [1] K. Sugumi, J. Soda, and A. Taniguchi, arXiv preprint arXiv:2311.03890 (2023).
- [2] Mingyong Jing et al. In: Nature Physics 16.9, 911- 915, (2020)
- [3] Marlan O. Scully and M. Suhail Zubairy. "Quantum optics" Cambridge university press, (1997)
- [4] Harald Kübler et al. In: Nature Photonics 4.2, 112-116, (2010)

重宇 b11

重力波波源の自己相関角度パワースペクトルとレンズ 収束場の関係とその観測可能性

中馬 史博

重力波源の自己相関角度パワースペクトルと レンズ収束場の関係とその観測可能性

中馬 史博 (千葉大学大学院 融合理工学府先進理化学専攻物理学コース)

Abstract

連星ブラックホールの合体から放射される重力波は非常に強力な標準音源である。しかし、その宇宙論への応用に重要な重力波源の赤方偏移は測定が難しいことがわかっており、重力波を十分活用するには、赤方偏移を使わない手法の開発が求められる。本研究では、重力波源の自己相関角度パワースペクトルとレンズ収束場の関係を明らかにするとともに、その関係から赤方偏移の情報なしにレンズ収束場の分散を導く手法を開発した。今回はその手法の提案と観測可能性について議論する。

1 Introduction

GW150914 の観測以降、重力波観測技術は発展し、宇宙論への重力波観測の応用が盛んに行われるようになった。期待される応用の一つにレンズ収束場の分散 (κ^2) の測定がある。レンズ収束場の分散 (κ^2) は、例えば原始ブラックホールの存在量 (Zumalacárregui & Seljak 2018) やニュートリノの質量 (Hada & Futamase 2014)、小スケールの宇宙論的密度パワースペクトル (Ben-Dayan & Takahashi 2015) 等の制限に有効であり、レンズ収束場の分散からは豊富な宇宙論的情報を得ることができる。先行研究で、Ia 型超新星の観測から距離と赤方偏移の関係を求め、距離のばらつきからレンズ収束場の分散を得ていた。しかし、Ia 型超新星は優れた標準光源であるが、その光度進化が予期しない系統誤差を生む可能性があり、Ia 型超新星とは独立な手法による相補的な観測も重要である。有望なものに、連星ブラックホールがインスパイラル期に放射する重力波を用いる手法がある。インスパイラル期とはブラックホール同士が互いに公転運動しながら重力波を放射する段階で、この段階の波形は一般相対論で精度よく予測できる。この予測された波形と観測データとの相関をとり重力波の信号を抽出できる。重力波形の解析からは理論的には 1% 以下の精度で、電磁波観測とは独立に光度距離を測定できる (Holz & Hughes 2015)。また、Ia 型超新星では探査できない高赤方偏移まで探査が行えることが特長である。

重力波は他の電磁波と同様に重力レンズ効果を受け波形が変化する。したがって、重力波形から得ら

れた光度距離は波源から観測点までの重力レンズ効果でばらつく。このことから、連星ブラックホールの赤方偏移が重力波観測から得られれば、Ia 型超新星と同様の手法から、レンズ収束場の分散が得られ、宇宙論への応用ができると期待された。

しかし、現在まで連星ブラックホールの重力波観測で赤方偏移が同定された例はない。これは、1) 重力波形から赤方偏移を得るのが困難、2) 赤方偏移の同定に必要な、合体に伴う電磁波放出は稀な現象、3) 重力波観測器は到来方向の決定精度が悪く、母銀河の特定に大規模な追観測が必要、であることが原因である。そのため、連星ブラックホールの重力波から宇宙論的情報を得るには、赤方偏移を使わない手法の開拓が必要となる (Oguri 2015)。

今回、連星ブラックホールから放射される重力波を用い、赤方偏移の情報は使わずに、レンズ収束場の分散を推定する手法を提案する。本研究では、理論的に連星ブラックホールの自己相関角度パワースペクトルにレンズ収束場の分散を組み込み (§2)、両者の関係を導いた (§3.1)、さらに、信号対雑音比を調べ、連星ブラックホールの自己相関角度パワースペクトルが観測可能であることがわかった (§3.2)。この関係から、観測で得られた重力波源の自己相関角度パワースペクトルからレンズ収束場の分散を得ることができる。

2 Methods

2.1 重力波源の自己相関角度パワースペクトル

2.1.1 重力波源までの光度距離

重力波源の分布は光度距離によって構成される。この光度距離には、観測誤差に加えて、弱い重力レンズ効果によるぼらつきを伴う。そこで、標準理論のもと、一様等方宇宙でロバートソン・ウォーカー計量から計算される光度距離 $\bar{D}(z)$ 、標準理論に重力レンズに効果を考慮した光度距離 $D(\theta, z)$ 、重力波観測から得られた光度距離 D_{obs} とすると、重力波源の分布は次のよう表すことができる。

$$p(D_{\text{obs}} | D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\ln D} D_{\text{obs}}} \exp[-x^2(D_{\text{obs}})]$$

ただし、簡単のため重力波源の分布には対数正規分布を仮定した。ここで、確率変数 $x(D_{\text{obs}})$ は

$$x(D_{\text{obs}}) \equiv \frac{\ln D_{\text{obs}} - \ln D}{\sqrt{2}\sigma_{\ln D}}$$

である。分散 $\sigma_{\ln D}$ は、重力波観測の観測誤差や、コンパクト天体の質量や系の傾きなどのパラメータと光度距離との縮退など、様々な影響による誤差を含む。解析において $\sigma_{\ln D}$ は、Einstein Telescope といった次世代重力波観測器を想定する。

標準理論に重力レンズ効果を考慮した光度距離 $D(\theta, z)$ はロバートソン・ウォーカー計量から計算される光度距離 $\bar{D}(z)$ と、重力レンズ効果の増光率 μ を収束場 κ 、シア場 γ で 2 次まで展開して近似的に

$$D = \bar{D}/\sqrt{\mu} \simeq \bar{D}/\sqrt{1 + 2\kappa + 3\kappa^2 + \gamma^2}$$

と表される。

2.1.2 重力波源の 3 次元数密度場の 2 次元天球面上への射影

重力波源の 3 次元数密度 $n_{\text{GW}}(\boldsymbol{\theta}, z)$ を視線方向に沿って光度距離によるビン $D_{\min,i} < D_i < D_{\max,i}$ に区切り、2 次元天球面上に射影する。i 番目のビンの重力波源の角度数密度を $n_i^w(\boldsymbol{\theta})$ とすると

$$n_i^w(\boldsymbol{\theta}) = \int_0^\infty dz \frac{\chi^2}{H(z)} S_i(z) n_{\text{GW}}(\boldsymbol{\theta}, z)$$

ここで、 $d^2V/d\Omega dz = \chi^2(d\chi/dz) = \chi^2/H(z)$ であることに注意する。 $S_i(z)$ は $D_{\min,i} < D_i < D_{\max,i}$ のビン分けをする選択関数である。この選択関数 $S_i(z)$ は、

$$S(z) = \frac{1}{2} (\text{erfc}\{x(D_{\min})\} - \text{erfc}\{x(D_{\max})\})$$

と相補誤差関数 $\text{erfc}(x)$ で表される。確率変数を

$$x(D_{\text{obs}}) \simeq \bar{x} + \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_{\ln D}} \left(\kappa + \frac{1}{2}\kappa^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 \right)$$

と近似し、 $\delta x = (\kappa + \frac{1}{2}\kappa^2 + \frac{1}{2}\gamma^2) / \sqrt{2}\sigma_{\ln D}$ が十分小さいとして、 \bar{x} の周りで選択関数 $S_i(z)$ を Taylor 展開すると

$$S_i(z) = \bar{S}_i(z) + T_i(z) \left(\kappa + \frac{\kappa^2}{2} + \frac{\gamma^2}{2} \right) + U_i(z)\kappa^2$$

ただし、

$$\bar{S}_i(z) \equiv \frac{\text{erfc}\{\bar{x}(D_{\min,i})\} - \text{erfc}\{\bar{x}(D_{\max,i})\}}{2}$$

$$T_i(z) \equiv \frac{-\exp\{-x^2(D_{\min,i})\} + \exp\{-x^2(D_{\max,i})\}}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\ln D}}$$

$$U_i(z) \equiv \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma_{\ln D}^2} [\bar{x}(D_{\min,i}) \exp\{-\bar{x}^2(D_{\min,i})\} - \bar{x}(D_{\max,i}) \exp\{-\bar{x}^2(D_{\max,i})\}]$$

ここで、i 番目のビンにおける重力波源の平均角度数密度 \bar{n}_i^w は、

$$\bar{n}_i^w = \int_0^\infty dz \frac{\chi^2}{H(z)} [S_i(z) - T_i(z)\langle\kappa^2\rangle + U_i(z)\langle\kappa^2\rangle] T_{\text{obs}} \frac{\dot{n}_{\text{GW}}(z)}{1+z}$$

ただし、ray-tracing simulation から得られる $\langle\kappa\rangle = -2\langle\kappa^2\rangle, \langle\gamma^2\rangle = \langle\kappa^2\rangle$ の関係を用いた (Takahashi, et al. 2015)。 T_{obs} は観測期間。 $(1+z)^{-1}$ は、ある赤方偏移 z の宇宙の観測では、当時よりも宇宙膨張で時間が引き伸ばされることを考慮している。連星ブラックホールの合体率は近傍宇宙で $\dot{n}_{\text{GW}} \sim 10^{-6} - 10^{-8} h^3 \text{Mpc}^{-3} \text{yr}^{-1}$ と見積もられ、高赤方偏移では、合体率は高くなることが観測からわかっている。以

上から、重力波源の数密度の揺らぎ $\delta_i^{2D,w}(\boldsymbol{\theta})$ は、

$$\begin{aligned} \delta_i^{2D,w}(\boldsymbol{\theta}) = & \int_0^\infty dz [W_i^s(z)\delta_{\text{GW}}(\boldsymbol{\theta}, z) \\ & + W_i^t(z) \left(\kappa + \frac{\kappa^2}{2} + \frac{\gamma^2}{2} + \langle \kappa^2 \rangle \right) \\ & + W_i^b(z)\delta_{\text{GW}} \left(\kappa + \frac{\kappa^2}{2} + \frac{\gamma^2}{2} \right) \\ & + W_i^u(z)\delta_{\text{GW}}\kappa^2 + W_i^v(z)(\kappa^2 - \langle \kappa^2 \rangle)] \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} W_i^s(z) &\equiv \frac{1}{\bar{n}_i^w} \frac{\chi^2}{H(z)} \bar{n}_{\text{GW}}(z) S_i(z) \\ W_i^t(z) &\equiv \frac{1}{\bar{n}_i^w} \frac{\chi^2}{H(z)} \bar{n}_{\text{GW}}(z) T_i(z) \\ W_i^u(z) &\equiv \frac{1}{\bar{n}_i^w} \frac{\chi^2}{H(z)} \bar{n}_{\text{GW}}(z) U_i(z) \end{aligned}$$

重力波源の自己相関角度パワースペクトルは、その定義式である $\langle \delta_i^{2D,w} \delta_i^{2D,w} \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C^{\text{ww}}(\ell)$ から

$$\begin{aligned} C^{\text{ww}}(\ell) &= C^{\text{ss}}(\ell) + C^{\text{st}}(\ell) + C^{\text{sb}}(\ell) + C^{\text{tt}}(\ell) \\ C^{\text{ss}}(\ell) &= \int_0^\infty dz W_i^s(z)^2 \frac{H(z)}{\chi^2} b_{\text{GW}}^2 P_m \left(\frac{\ell+1/2}{\chi}, z \right) \\ C^{\text{st}}(\ell) &= -2 \int_0^\infty dz W_i^s(z) W_i^t(z) \\ &\quad \times \frac{H(z)}{\chi^2} b_{\text{GW}}^2 P_m \left(\frac{\ell+1/2}{\chi}, z \right) \langle \kappa(z, \boldsymbol{\theta})^2 \rangle \\ C^{\text{su}}(\ell) &= 2 \int_0^\infty dz W_i^s(z) W_i^u(z) \\ &\quad \times \frac{H(z)}{\chi^2} b_{\text{GW}}^2 P_m \left(\frac{\ell+1/2}{\chi}, z \right) \langle \kappa(z, \boldsymbol{\theta})^2 \rangle \\ C^{\text{tt}}(\ell) &= \int_0^\infty dz \left[W_i^t(z)^2 \frac{H(z)}{\chi^2} b_{\text{GW}}^2 P_m \left(\frac{\ell+1/2}{\chi}, z \right) \right. \\ &\quad \times \int_0^z dz'' W^\kappa(z''; z) W^\kappa(z''; z) \frac{H(z'')}{\chi''^2} \\ &\quad \times P_m \left(\frac{\ell+1/2}{\chi''}, z'' \right) \left. \right] \\ &\quad + \int_0^\infty dz \int_0^\infty dz' W_i^t(z) W_i^t(z') \int_0^{\min(z,z')} dz'' \\ &\quad \times W^\kappa(z''; z) W^\kappa(z''; z') \frac{H(z'')}{\chi''^2} P_m \left(\frac{\ell+1/2}{\chi''}, z'' \right) \end{aligned}$$

ここで、レンズ収束場 $\kappa(\boldsymbol{\theta}, z)$ は物質密度場 $\bar{\rho}_m(z)$ の視線方向の積分で次のように表せられることを用いた

$$\begin{aligned} \kappa(\boldsymbol{\theta}, z) &= \int_0^z dz' \frac{\bar{\rho}_m(z')}{H(z')(1+z')\Sigma_{\text{crit}}(z'; z)} \delta_m(\boldsymbol{\theta}, z') \\ &\equiv \int_0^z dz' W^\kappa(z'; z) \delta_m(\boldsymbol{\theta}, z') \end{aligned}$$

3 Results

今回得られた重力波源の自己相関角度パワースペクトルとレンズ収束場の分散の関係と重力波源の自己相関角度パワースペクトルの信号対雑音比 S/N を示す。計算設定は次のとおりである。z の範囲：[2.0, 3.0]；観測誤差 $:\sigma_{\ln D} = 0.05$ ；BBH の合体率： $\dot{n}_{\text{GW}} = 1.0 \times 10^{-5} h^3 \text{Mpc}^{-3} \text{yr}^{-1}$ ；観測時間： $T_{\text{obs}} = 5 \text{yr}$ ；線形バイアス： $b_{\text{GW}} = 1.5$ ；レンズ収束場の分散： $\langle \kappa^2 \rangle = 3.6 \times 10^{-3}$ 。合体率は簡単のため定数とした。線形バイアスの赤方偏移依存性は未だ未解明な部分が多い。線形バイアス b_{GW} も簡単のため定数とし、赤方偏移依存性は考慮していない。

3.1 自己相関角度パワースペクトルとレンズ収束場の分散の関係

初めに、今回得られた自己相関角度パワースペクトルとレンズ収束場の関係を示す。本研究により、図 1 のような重力波源の自己相関角度パワースペクトル C_ℓ^{ww} とレンズ収束場の分散 $\langle \kappa^2 \rangle$ の間に反相関の関係があることがわかった。この反相関の関係を用いれば、重力波源の観測から得られる自己相関角度パワースペクトルからレンズ収束場の分散を求めることができると考えられる。ただし、 $\langle \kappa^2 \rangle$ が大きくなり、観測誤差が小さくなると、レンズ収束場の展開で得られた近似式の破綻が見られる。

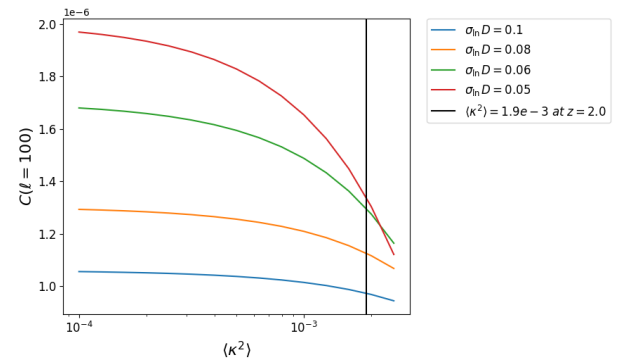


図 1: 重力波源の自己相関角度パワースペクトルとレンズ収束場の分散の関係。両者の間には反相関の関係がある。観測誤差を小さくすると自己相関角度パワースペクトルの値は増加する。ただし、観測誤差が小さくなると近似の破綻が現れやすくなる。 $\ell = 100$ の時の結果である。

3.2 信号対雑音比 S/N

次に重力波源の自己相関角度パワースペクトルの信号対雑音比 S/N を示す。自己相関角度パワースペクトルの共分散は

$$\sigma^2 \sim \text{Cov} = \delta_{\ell\ell'} \frac{2}{2\ell+1} \left(C_{\ell}^{\text{ww}} + \frac{1}{\bar{n}_{\text{GW}}} \right)^2$$

である。 S/N は

$$S/N \equiv \sqrt{\sum_{\ell}^{\ell_{\text{max}}} \frac{C_{\ell}^{\text{ww}2}}{\text{Cov}}}$$

信号対雑音比 S/N を計算するにあたり、 ℓ ビンの設定をする。そのビン幅は $\Delta\ell = 1.0$ とした。図 2 ようになる。重力波源の天球面上の数密度 $\bar{n}_{\text{GW}} (\Omega^{-1})$ は $\bar{n}_{\text{GW}} \sim 10^4$ であり、この逆数が重力波源の有限性によって生じるショットノイズである。したがって、 $C_{\ell}^{\text{ww}} \simeq 10^{-7} \sim 10^{-6} \ll 1/\bar{n}_{\text{GW}} \sim 10^{-4}$ であるから共分散はショットノイズに支配される。この時、 S/N は

$$S/N \simeq \sqrt{\sum_{\ell}^{\ell_{\text{max}}} \ell \bar{n}_{\text{GW}}^2 C_{\ell}^{\text{ww}2}}$$

となり、 ℓ が増加するにつれて、 S/N は増加するが、増加率は減少する傾向が見られる。したがって、ショットノイズの影響が大きい、重力波源の自己相関角度パワースペクトルは観測可能であるとわかる。

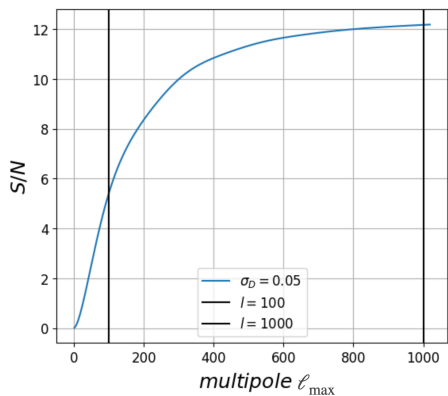


図 2: 重力波源の自己相関角度パワースペクトルの SNR。ショットノイズの影響で ℓ が増加すると増加率が下がる傾向がある。

4 Conclusion

レンズ収束場の分散は宇宙論的情報を豊富に持つ。この観測に連星ブラックホールが利用できると以前から期待されていた。連星ブラックホールの重力波は光度距離を直接導くことができ、系統誤差が少ない。また、重力波は遠方宇宙の観測にも有効であるため、非常に優れた標準音源である。本研究では重力波観測の宇宙論への応用の一貫として、重力波観測からレンズ収束場の分散を得る手法を開発した。この手法で重要なのは、赤方偏移の情報を使用しない点である。コンパクト連星合体による重力波、特に連星ブラックホールの重力波観測によって赤方偏移を同定するのは難しいことが明らかとなっており、連星ブラックホールによる重力波を宇宙論に十分応用するためには赤方偏移に頼らない手法の開発が必要である。我々は重力波から得られる光度距離が重力レンズ効果で変化することに注目し、重力波源の自己相関角度パワースペクトルとレンズ収束場には反相関の関係があること、自己相関角度パワースペクトルの S/N を調べることで、想定される環境で観測が可能であることを明らかにした。

Acknowledgment

指導教官である千葉大学先進科学センター教授・大栗真宗先生には指導教員として本研究の実施の機会を与えて戴き、その遂行にあたり終始ご指導を戴いた。この場を借りて深謝の意を表す。重ねて、本専攻宇宙論研究室の各位にはこれまで貴重な助言を戴いた、ここに感謝の意を表す。

Reference

- [1] M. Zumalacárregui and U.Seljak, Physical Review Letters, Volume 121, Issue 14, id.141101(2018)
- [2] R. Hada, T. Futamase, The Astrophysical Journal, Volume 828, Issue 2, article id. 112, 8 pp. (2016).
- [3] I.Ben-Dayan and R.Takahashi, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 455, Issue 1, p.552-562(2016)
- [4] D.Holz and S.Hughes, The Astrophysical Journal, Volume 629, Issue 1, pp. 15-22(2005)
- [5] M.Oguri, Physical Review D, Volume 93, Issue 8, 083511(2016)
- [6] R.Takahashi, et al.: The Astrophysical Journal, Volume 742, Issue 1, article id. 15, 15 pp. (2011)

重宇 c01

PTA (Pulsar timing array) による SGWB (Stochastic Gravitational Wave Background) の検出と SMBHB (Supermassive Black Hole Binary) の影響

山本 峻

PTA における半球平均の角度相関曲線を用いた GW 飛来方向の推定

山本 峻 (弘前大学大学院 理工学研究科)

Abstract

本収録は Sasaki, Yamauchi, Ymamoto & Asada 2024, Phys. Rev. D 109, 024023, 2024 に基づいて書かれている。この研究では、パルサータイミングアレイ (PTA) 観測によって得られるパルサーの開き角の角度相関曲線を用いて、巨大ブラックホール連星 (SMBHB) から飛来する重力波の方向を推定する手法について調べた。角度相関曲線を得る際には、これまでの全方向に分布したパルサーについて平均を取るのではなく、半球での平均を取る手法を用いた。

1 Introduction

数十年前に、重力波 (GW) の探索にパルサーを利用するというアイデアが提案された。特に、Hellings と Downs (HD) は、天球上で平均化されたパルサーペアの角度相関パターンが、GW の証拠となりうることを指摘した。そして昨年、複数のパルサータイミングアレイ (PTA) チームがナノヘルツの重力波の存在を報告した。彼らの結果によると、超巨大ブラックホール連星 (SMBHB) の重力波の重ね合わせが重力波源として考えられるものの、この顕著な相関の起源は特定されていない。一般相対論における偏波モードで構成される等方的な背景重力波の場合、パルサーペアの相関は HD 曲線に従うことが期待される。この相関曲線と比較して、単一の超巨大ブラックホール連星からの重力波は等方性確率的背景と同じ相関パターンを示す。つまり、この相関曲線を用いて、単一の SMBHB を特定することは難しい。

しかし、平均する領域が全天から変更された場合、全天平均からの逸脱によって等方性が破られる。そのため、GW 源の天体位置特定に修正された相互相関曲線を使用することを可能にするかもしれない。本研究の主な目的は、半球内のパルサーペアの角度相関パターンによって、相関曲線への影響を考慮することで GW 源を特定することである。本収録の構成は以下の通りである。第 2 章では、半球で平均をとるための方法について議論する。3 章ではその結果として、単一の半球について最大相関と最小相関の差が最も大きくなるのは、その半球の北極が GW

源の天球上の位置にある場合のみであることを示す。第 4 章は結論である。本収録では、a と b のラベルは 2 つのパルサーをペアとして示す。

2 Method

2.1 座標系と全天平均

座標系 (x, y, z) において z 方向にあると仮定した GW 源を考える。(GW 方向座標系 (x, y, z) については図 1 を参照。) a 番目のパルサーのタイミング観測における分周周波数シフトは次のように表すことができる。

$$\frac{\delta\nu_a}{\nu_a} = R_a h(t) + n_a(t) \quad (1)$$

ここで $h(t)$ は GW 信号、 $n_a(t)$ はノイズ、 R_a は $\cos 2\Phi_a (1 + \cos \Theta_a)$ の応答 ($\Theta_a \in [0, \pi]$ および ($\Phi_a \in [(0, 2\pi))$) である。全天を平均化することで、

$$\Gamma_S \equiv \frac{1}{4\pi} \int_S R_a R_b d\Omega \quad (2)$$

パルサーペア間の相互相関は HD 曲線となる。ここで S は単位球であり、ノイズ項は相関がないと仮定されている。これまで (2) は主に背景重力波について考えられてきた。

2.2 半球平均の座標

図 2 の半球 H を考察する。半球の北極方向 N_H は $N_H \equiv (\sin\alpha\cos\beta, \sin\alpha\sin\beta, \cos\alpha)$ と表記され、 α は GW 源方向からの半球の傾斜角である。この半球の平均は次のように表される。

$$\Gamma_S \equiv \frac{1}{2\pi} \int_S R_a R_b d\Omega \quad (3)$$

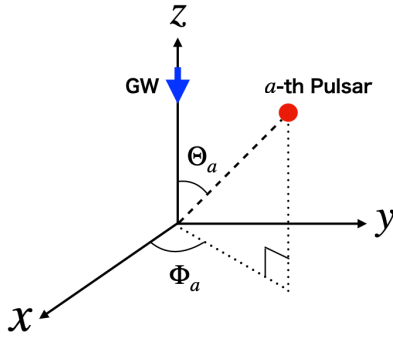


図 1 z 軸方向から飛来する重力波を仮定した座標系

半球積分の前にある因子が $1/2 \pi$ である。半球の場合の θ_a と ϕ_a は、非自明な領域で許容されるため、 $R_H d\Omega$ の計算は容易ではない。したがって、研究対象とする半球での平均を尊重するために、角度座標 θ と ϕ を以下で指定します。式 (3) の計算を行うため、北極を z' 軸として選択するような別の座標 (x', y', z') を導入することが便利である。この座標系では、a 番目のパルサーへの単位ベクトルを $n_a = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ と表わすことができる。

2.3 パルサーの座標

パルサー対の分離角を γ で表す。2 つのパルサーの配置を明確に表現するために、第 3 の座標系 (X, Y, Z) を導入し、a 番目のパルサーの位置を Z 軸に沿って選ぶ。b 番目のパルサーは円錐上にあり、頂点が (X, Y, Z) 座標の原点、頂点角度が γ 、a 番目のパルサーは軸上にある。第 3 座標系では、b 番目のパルサーの方向は $n_b = (\sin \gamma \cos \delta, \sin \gamma \sin \delta, \cos \gamma)$ と表記できる。

2.4 半球平均による相関

方向 Ω から到来する GW のプラスモードとクロスモードに対するアンテナ関数 ($A = a, b$) は、次のように書かれる。

$$R_A^+ = \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{n}_A \cdot \hat{\ell})^2 - (\mathbf{n}_A \cdot \hat{m})^2}{1 + \Omega \cdot \mathbf{n}_A} \quad (4)$$

$$R_A^\times = \frac{(\mathbf{n}_A \cdot \hat{\ell})(\mathbf{n}_A \cdot \hat{m})}{1 + \Omega \cdot \mathbf{n}_A}$$

(6) ここで、 $\hat{\ell} = (0, -1, 0)$ および $\hat{m} = (-1, 0, 0)$ は (x, y, z) 座標における GW の伝搬に垂直な平面上の直交基底であり、 $\hat{\ell}$ および \hat{m} はプラスモードとクロスモードの定義に使われている。したがって、プラスモードとクロスモードの両方による相関の総和は、

$$\Gamma_H(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\delta \int_H (R_a^+ R_b^+ + R_a^\times R_b^\times) d\Omega, \quad (5)$$

ここで、a 番目のパルサーは半球 $((1/2 \pi) R d \Omega)$ 上で平均され、b 番目のパルサーは円錐 $((1/2 \pi) R d \delta)$ 上で平均される。積分の前の分母は 2π (半球) $\times 2 \pi$ (δ 積分) $= (4 \pi)^2$ である。式 (4) を式 (5) に代入すると、積分は 6 つの角度 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \phi$ の関数となる。現在の半球での平均の場合、式 (5) は次のように表される。

$$\Gamma_H(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\delta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta (R_a^+ R_b^+ + R_a^\times R_b^\times). \quad (6)$$

本研究では、式 (6) の積分は半球に対して数値的に行う。

3 半球平均による結果

3.1 数値計算の結果

式 (8) を数値計算すると、角度相関曲線が得られる。この曲線は、GW の伝播方向を中心に対称であるため、 α には依存するが、 β には依存しない (数値プロットについては図 2 を参照)。半球の角度相関パターンは、半球の極軸を中心に対称である。したがって、図 6 の $\alpha = \pi/2$ のグラフは、半球のものと全天のものとのグラフが同じ形になっている。この一致の理由は、HD 曲線では、 $\alpha = \pi/2$ の場合にだけ、全天に対する北天と南天のパルサーの割合が半分ずつになるからである。 $\gamma=0$ の場合、 α が大きくなるにつれて相関は減少する。これは、半球が GW 軸に対してより傾くほど、その半球にあるパルサーの θ_a が大きくなり、それゆえ R_a が小さくなるからである。 α の値ごとの最大相関 Γ_{\max} は、 α の増加に伴い単調に減少する。一方で最小相関 Γ_{\min} は単調に増加する。最大相関と最小相関の差 ($\Delta \Gamma \equiv$

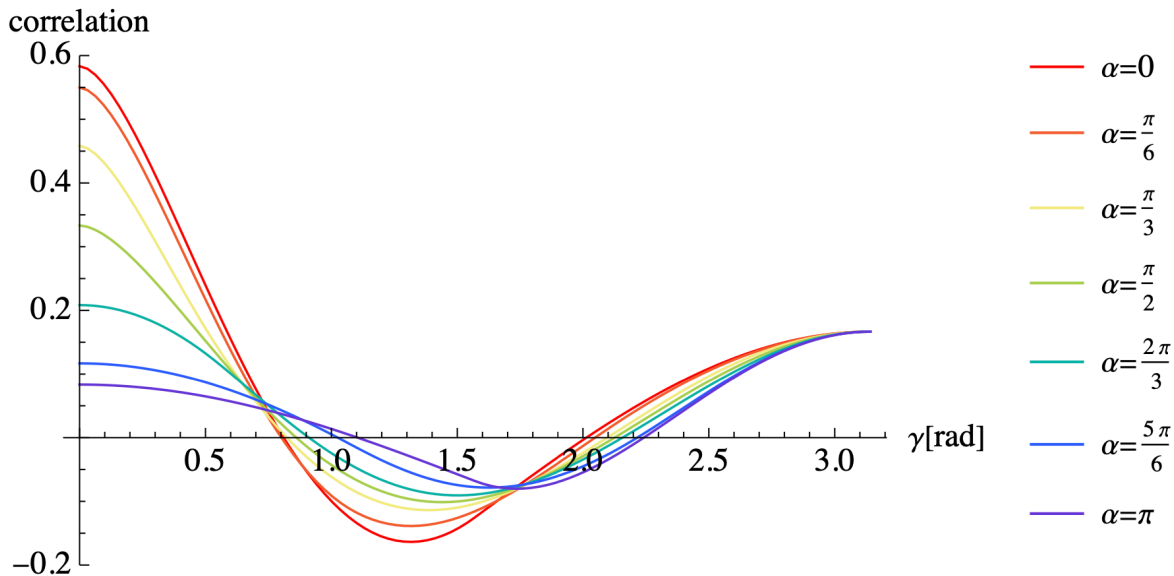


図 2 半球の向ける方向を変化させていった時の相関曲線

$\Gamma_{\max} - \Gamma_{\min}$) を利用して、GW の波源方向を特定する。

3.2 波源の特定

$\Delta \Gamma$ は天球上の GW 源の方向で最大となる ($\Delta \Gamma$ の等高線天体図は、図 3 を参照)。この図から、 $\Delta \Gamma$ の最大値が示す位置は、GW 天体の位置と完全に一致することがわかる。等高線は、前述のように半球ごとに平均化されているため、角度 β に依存しない。図 2 や図 3 のような観測データが将来得られた場合、許容される領域を持つ GW コンパクト源の存在を示唆する可能性がある。

半球平均を用いた GW 天体位置の推定精度はどの程度になるだろうか。ここでは、半球間相互相関法の測定精度を 10%程度と仮定する。これは、 $\Delta \Gamma$ の誤差がおおよそ 0.1 程度であることを意味する。図 6 によると、決定された緯度 (α に対応) の精度はほぼ 10-20 度である。これは、超巨大ブラックホールの連星のような関連 GW 源を含む可能性があるホスト銀河の方向を特定するには不十分である。

上記の議論では、事前に GW の方向を仮定している。将来の PTA 観測から GW 源の位置特定に半球平均相関を使うにはどうすればよいだろうか。例えば、12 の緯度と 24 の経度 (15 度ステップ) からな

る半球のセットを用意する。12 \times 24=288 の半球について $\Delta \Gamma$ を推定し、最大の $\Delta \Gamma$ が天球上の GW の位置を示唆するような方法を使えば、GW 源特定につながるかもしれない。

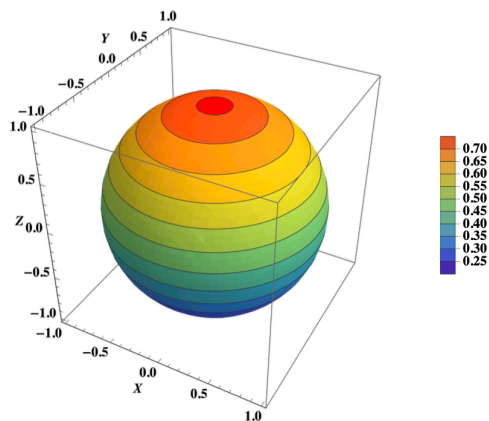


図 3 $\Delta \Gamma$ によってプロットされた等高線。今は z 軸方向から飛来する GW を仮定しているため、赤色のところが最も大きな $\Delta \Gamma$ となっている。

3.3 パルサーの個数と精度について

PTA 観測による重力波検出では、統計的に信号対雑音比を増加させるためにはパルサーペアの総数を増やす必要がある。ペアの最大数は全天 (4π)

に対して利用可能である。PTA で観測されるパルサーの総数を N_{pulsar} とすると、パルサーの等分布を仮定した場合、本手法におけるパルサーの数は N_{pulsar} の約半分となる。全天から半球に範囲を狭めると、ペア数は $(N_{pulsar})(N_{pulsar} - 1)/2$ から $(N_{pulsar}/2)(N_{pulsar}/2 - 1)/2$ に減少する。 $N_{pulsar} \gg 1$ の場合、これは $(N_{pulsar})2/2$ から $(N_{pulsar})2/8$ に減少することを意味する。つまり、4 分の 1 になり、統計誤差が 2 倍に増加する。現在の PTA の統計レベルでは、半球法は少し難しい。

3.4 推定される重力波の振幅と波源までの距離

半球法に関連する GW 振幅の大きさを推定するために、パルス信号ペアの相関を式 (1) を用いて求めると、

$$\langle z_a z_b \rangle \sim \Gamma_H \langle h^2 \rangle \quad (7)$$

ここで z_a と z_b はそれぞれ a 番目と b 番目のパルサーからのパルスの赤方偏移を表し、 $\langle \rangle$ は自己相関を表す。大まかに見積もると、 $z_a \sim \Delta t_a / T_{obs}$ となり、ここで Δt_a は期待される到着時刻からの遅延、 T_{obs} は観測期間を表す。PTA 観測では、 T_{obs} はおおよそ関連する GW 周波数 f_{GW} の逆数となる。したがって、 $z_a \sim z_b \sim (\Delta t_a / T_{obs}) \sim f_{GW} \Delta t_a$ となり、 N_{pair} 対のパルサーについて、相互相関 $\langle z_a z_b \rangle$ の分散は $[\sigma(\langle z_a z_b \rangle)]^2 \sim (N_{pair}) - 1 (\Delta t_a / T_{obs})^4$ となる。標準偏差は、おおよそ $\sigma(\langle z_a z_b \rangle) \sim (N_{pulsar}) - 1 (\Delta t_a / T_{obs})^2$ となります。半球相関の α 依存性は、 $\sigma(\langle z_a z_b \rangle) \leq (\delta_\alpha \Gamma_H) \langle h_2 \rangle$ 、 $\delta_\alpha \Gamma_H$ は α の変化に対する Γ_H の変化の大きさを表す場合に検出できる。したがって、GW 振幅は、半球平均相関を用いることで、現在の PTA と関連のある GW 振幅はおおよそ

$$h \sim \sqrt{\langle h^2 \rangle} \gtrsim 10^{-14} \left(\frac{10^2}{N_{pulsar}} \right)^{1/2} \left(\frac{f_{GW}}{1 \text{ yr}^{-1}} \right) \left(\frac{\Delta t_a}{1 \mu \text{ sec.}} \right) \left(\frac{0.1}{\delta_\alpha \Gamma_H} \right)^{1/2} \quad (8)$$

ここで $\delta_\alpha \Gamma_H$ は約 0.1 であり、時間残差測定の平均精度は $1 \mu \text{ sec}$ とした。四十極公式から、GW 源までの距離 D が $D \leq 10 \text{ Mpc}$ の場合、近傍の GW 源をわずかに検出できることが以下の見積もりからわ

かる。

$$D \lesssim 10 \text{ Mpc} \left(\frac{N_{pulsar}}{10^2} \right)^{1/2} \left(\frac{1 \mu \text{ sec.}}{\Delta t_a} \right) \left(\frac{\delta_\alpha \Gamma_H}{0.1} \right)^{1/2} \times \left(\frac{M}{10^9 M_\odot} \right)^{5/3} \left(\frac{1 \text{ yr}^{-1}}{f_{GW}} \right)^{1/3}, \quad (9)$$

ここで、連星系に対する四重極公式として、 $h \sim (MR^2)/(DT^2) \sim M5/3(f_{GW})2/3/D$ であり、ここで M は総質量、 R は軌道半径、 T は軌道周期である。近い将来、SKA によって数百のミリ秒パルサーが新たに発見され、PTA の感度が約 5 倍以上に大幅に向上することが期待されている。この時には半球法を用いることができると考えられる。

4 Conclusion

我々は、パルサーペアに対する半球平均角相関パターンについて議論した。我々の数値計算は、単一の GW 源が支配的である場合、半球平均角相関曲線の変動は、その半球の北極が GW 源の天空位置にあるときに最大になることを示した。半球平均相関を用いた現在の PTA に関連する可能な GW 振幅と源距離について調査した。近い将来に完成予定の SKA では、半球平均相関を用いた天体位置特定が可能になる。本論文で採用した半球条件は、パルサーペアの少なくとも 1 つのパルサーがその半球にあることである。もう一つの選択肢として、ペアを構成するパルサーが両方とも同じ半球にあるという条件も考えられる。このような選択肢を用いて、どちらの条件が天体の位置特定により適しているかを調べるのも興味深い。今後の課題である。

Reference

- R. W. Hellings, and G. S. Downs, *Astrophys. J. Lett.*, 265, L39 (1983).
- N. J. Cornish, and A. Sesana, *Class. Quantum Grav.* 30, 224005 (2013).
- Sasaki, Yamauchi, Yamamoto & Asada 2024, *Phys. Rev. D* 109, 024023, 2024

[indexへ戻る](#)

重宇 c02

静的ワームホール解の定常一般化

牧田 悠輔

静的ワームホール解の定常一般化

牧田 悠輔 (名古屋大学大学院 理学研究科 QG 研 M2)

Abstract

本発表は主に Volkov(2021)[1] のレビューである。2つの異なる宇宙、または同一の宇宙における離れた2つの場所を結ぶ“橋”の構造をワームホール (WH) という。特に古典粒子や光が往来しうるものを“通過可能”な WH といい、SF におけるワープやタイムトラベルなどのモデルとなっている。WH は“throat”というくびれた構造を持ち、この構造は通常の物質とは異なるエキゾチック・マターの仮定を必要とする(より正確には、光的エネルギー条件を破る物質の仮定が必要である)。その一方で、この構造の維持に WH 自身の回転も寄与するということが先行研究によって明らかにされている。そこで、回転する WH 解を“解析的に”得て、その時空の安定性を調べるのが目標となるのだが、静的 WH 解の定常一般化には様々な困難が伴う。特に時空全域で正則であるような解析解は未だに構成されていない。そこで、本発表では Volkov(2021) による、真空解に回転とスカラー場を付加する“dressing”の手法を紹介する。この操作によって、静的真空解である Ellis-Bronnikov WH に定常回転とスカラー場を付加することが可能である。これによって得られる解は、全域で正則とはならないまでも、かなり振る舞いのよい解である。その構成手法である dressing についての概略をレビューする。

1 Introduction

重力と couple したファントム・スカラー場を持つ理論において、回転するワームホール解の構成を考えよう。まず、通過可能 (traversable) なワームホールは Null エネルギー条件 (NEC) を破る負のエネルギー密度を必要とする。Ellis と Bronnikov による最もシンプルな解は

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + (r^2 + \mu^2) \underbrace{(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)}_{d\Omega^2} \quad (1.1)$$

と場

$$\Phi(r) = \arctan\left(\frac{r}{\mu}\right) \quad (1.2)$$

の組み合わせである。これを Ellis-Bronnikov(EB) ワームホールとよぶ。ここで r は $r \in (-\infty, +\infty)$ の値をとる空間座標であり、 $r = \pm\infty$ はワームホールが繋ぐ2つの漸近的平坦領域に対応する。また μ は throat の大きさを決める特徴長さである。

この理論のもとで構成されるワームホールは、軸対称な変形や、複数の軸対称ワームホール解の重ね合わせが可能である。しかし、変形を施した解は一般に singular である。また、EB ワームホールは static な解であるが、全域で regular であるようには一般化できないことが知られている。

しかしこれは stationary な一般化を制限するものではない。すなわち、回転する EB ワームホール解はまだ可能性が残されている。解析的に構成することができるだろうという予想とともに、回転する解は全域で regular となるだろうと考えられてはいるが、これまで解が発見されることはなかった。

EB ワームホールの発見以前、この系列の中にリングワームホール解

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{r^2 + \mu^2 \cos^2 \theta}{r^2 + \mu^2} [dr^2 + (r^2 + \mu^2) d\theta^2] + (r^2 + \mu^2) \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (1.3)$$

があることが知られていた。複雑に見えるが、 $r \in [0, +\infty)$ に制限すれば普通の Minkowski 時空である。このワームホールは、2つの Minkowski 時空を $r = 0$, $\theta = \pi/2$ の“リング”で貼り合わせた構造になっている。

EB ワームホール (1.1) はリングワームホール解 (1.3) から出発し、場 $\Phi = \Phi(r)$ を導入することによって得られる。結局この解は $\Phi(r) = \arctan(r/\mu)$ である。この場 Φ を導入することによって、計量の rr 成分と $\theta\theta$ 成分だけが影響を受ける。この操作を“dressing”とよぶことにしよう。

これと同じことが定常回転の場合にも行えるはずである。そこで、リングワームホール解 (1.3) の定

常回転版が必要となる。真空の Ernst 方程式は質量、角運動量を含む成分 $g_{tt}, g_{t\phi}, g_{\phi\phi}$ を決定するが、これらは場 Φ の影響を受けない。したがって、まずは Ernst 方程式を解き背景となる時空を構成し、続いて singularity を覆い隠せるスカラー場 Φ を構成するという手順を踏むことになる。

2 Fundamental theory

massless なファントム・スカラー場 Φ を導入すると、場の方程式は

$$R_{\mu\nu} = -2\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi, \quad \nabla_\mu\nabla^\mu\Phi = 0 \quad (2.1)$$

である。

軸対称な定常解として Papapetrou 形式

$$ds^2 = -e^{2U}(dt - w d\phi)^2 + e^{-2U}h_{ij}dx^i dx^j \quad (2.2)$$

から出発しよう。ここで U は Newton 重力ポテンシャル、 w_i は“回転場”、 h_{ij} は $g_{\mu\nu}$ の空間成分で空間座標 x^i にのみ依存する。ここでは、空間の座標を円筒座標 $x^i = (\rho, z, \phi)$ でとり、軸対称性から ϕ の依存性はないものとしよう。真空である場合、計量の空間成分は

$$dl^2 = h_{ij}dx^i dx^j = e^{2k}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2$$

となる。 w や k は ρ, z にのみ依存する関数である。

回転場 w から twist ポテンシャル $\chi = \chi(\rho, z)$ を

$$\partial_\rho\chi = \frac{e^{4U}}{\rho}\partial_z w, \quad \partial_z\chi = -\frac{e^{4U}}{\rho}\partial_\rho w$$

によって定義する。 χ が ϕ の依存性を持たないことは

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{e^{4U}} \nabla \chi \right) = 0$$

から保証される。この χ をもとに Ernst ポテンシャル \mathcal{E} を

$$\mathcal{E} = e^{2U} + i\chi$$

で定義すると、真空の Einstein 方程式は Ernst 方程式

$$\text{Re}(\mathcal{E})\Delta\mathcal{E} = (\nabla\mathcal{E})^2 \quad (2.3)$$

にまとまる [2]。計量 (2.2) 中の未知関数 U, w はここから定まり、残る k は Einstein 方程式の他の成分で

ある

$$\frac{1}{\rho}\partial_\rho k = (\partial_\rho U)^2 - (\partial_z U)^2 - \frac{e^{4U}}{2\rho^2} \left[(\partial_\rho w)^2 - (\partial_z w)^2 \right] - \left[(\partial_\rho \Phi)^2 - (\partial_z \Phi)^2 \right] \quad (2.4)$$

と

$$\frac{1}{2\rho}\partial_z k = \partial_\rho U \partial_z U - \frac{e^{4U}}{4\rho^2} \partial_\rho w \partial_z w - \partial_\rho \Phi \partial_z \Phi \quad (2.5)$$

の 2 本から決まる。

3 Dressing method

解の構成の流れをまとめておこう。

1. Ernst 方程式

$$\text{Re}(\mathcal{E})\Delta\mathcal{E} = (\nabla\mathcal{E})^2 \quad (2.3)$$

を解くことにより、関数 U, χ, w を決める。

Ernst 方程式は真空解を導く。そこで、式 (2.4), (2.5) で $\Phi = 0$ として得られる解 k を k_{I} とおこう。すなわち

$$\frac{1}{\rho}\partial_\rho k_{\text{I}} = (\partial_\rho U)^2 - (\partial_z U)^2 - \frac{e^{4U}}{2\rho^2} \left[(\partial_\rho w)^2 - (\partial_z w)^2 \right], \quad (2.4')$$

$$\frac{1}{2\rho}\partial_z k_{\text{I}} = \partial_\rho U \partial_z U - \frac{e^{4U}}{4\rho^2} \partial_\rho w \partial_z w \quad (2.5')$$

を解き、 k_{I} を求めることになる。これにより、真空解を構成することができる。ここにスカラー場 Φ を付加するためには、以下の手順を踏む。

2. Poisson 方程式

$$\Delta\Phi = 0 \quad (2.1')$$

を解くことにより、スカラー場 Φ を決める。

そして、この Φ から k_{II} を

$$\frac{1}{\rho}\partial_\rho k_{\text{II}} = -\left[(\partial_\rho \Phi)^2 - (\partial_z \Phi)^2 \right], \quad (2.4'')$$

$$\frac{1}{2\rho}\partial_z k_{\text{II}} = -\partial_\rho \Phi \partial_z \Phi \quad (2.5'')$$

によって構成しよう。これらは式 (2.4), (2.5) で Φ の項のみを取り出したものである。このようにして得られた $k_{\text{I}}, k_{\text{II}}$ はその和をとることで

$$k = k_{\text{I}} + k_{\text{II}}$$

なる“解の重ね合わせ”を実現する。以上の操作を、真空解にスカラー場を付加する“dressing”とよぶ。

1 章で紹介したように、リングワームホール解 (1.3) にスカラー場 Φ を付加することによって Ellis-Bronnikov ワームホール解 (1.1) が得られる。これと同様にして、Kerr 解を通じて Ellis-Bronnikov ワームホール解の定常一般化を目指そう。3 章で紹介したように、付加すべきスカラー場は Poisson 方程式だけから決まる。ここでは再び

$$\Phi = C \arctan(x)$$

の形を仮定しよう。この dressing の操作を通じて、背景時空 (Kerr 解) は rr 成分と $\theta\theta$ 成分だけが変更を受ける。それは式 (4.1) でみたように

$$\frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 \quad \rightarrow \quad e^{2K_{II}} \left[\frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 \right]$$

となる。この変更によって、新たな特異点が

$$e^{2K_{II}} = \frac{\Delta}{(r-M)^2 + (a^2 - M^2) \cos^2 \theta} = 0$$

すなわち $r = M$, $\theta = \pi/2$ に出現する。この特異点は曲率特異点である。したがって、EB ワームホール解の定常回転一般化は、もともとの Kerr 解からくるリング特異点に加え、新たなリング特異点を持つ解となっている。static なリングワームホール解のときには、dressing を通じて物質場の singularity を覆い隠すことができた。しかし、stationary な場合には物質場の singularity は隠せたとしても、新たな curvature singularity を生じさせてしまうのである。

6 Conclusion

本発表における紹介はここまでであるが、原論文 [1] では Taub-NUT 解などを用いた他の定常一般化を模索している。しかしながら、dressing による手法では

1. 定常で
2. 漸近的平坦であり
3. 全域において正則である

ような解はこれまでに発見・構成されていない。その一方で、Chew *et al.* [3] によれば、全域で正則な解が数値的に検証されているという。そのような解を解析的に得ることが Volkov (2021) の目標であった。

得られている解が dressing のクラスに含まれていないものなのか、その詳細を明らかにすることが求められる。

Reference

- [1] Mikhail S. Volkov. (2021). *Stationary generalizations for the Bronnikov-Ellis wormhole and for the vacuum ring wormhole*. Phys. Rev. D, **104**, 124064.
- [2] Frederick J. Ernst. (1968). *New formulation of the axially symmetric gravitational field problem*. Phys. Rev., **167**, 1175.
- [3] Xiao Yan Chew, Burkhard Kleihaus and Jutta Kunz. (2016). *Geometry of spinning Ellis wormholes*. Phys. Rev. D, **94**, 104031.

重宇 c03

非反射対称性を持つブラックホールの観測的特徴

今福 隼斗

非反射対称性を持つブラックホールの観測的特徴

今福 隼斗 (東京大学大学院 理学系研究科 M2)

Abstract

一般相対論 (General Relativity, GR) に基づく予測の 1 つである Kerr 仮説によると、現在の宇宙に存在する孤立したブラックホール (Black Hole, BH) は Kerr 時空によって記述される。Kerr BH 時空は定常であり、かつ、質量とスピンのみで特徴づけられる。それらの特徴に加え、いくつかの対称性を持ち、その 1 つが \mathbb{Z}_2 対称性である。 \mathbb{Z}_2 対称性は、時空上に時空の対称面を表す赤道面が存在するというものである。この対称性の破れは Kerr 仮説の破れを意味する。したがって、孤立した BH の赤道面に関する対称性を調べることで、GR を超えた物理への示唆を得ることが可能となる。本発表では、赤道面に関する対称性を持たない BH の降着円盤が、どのような観測的特徴を持つのか調べた [1] のレビューを行う。対称性が破れると、一般に、BH の周りの光子や降着物質の円軌道が、赤道面から垂直方向に歪む。このような効果が、観測にどのように現れるかについて述べる。

1 Introduction

一般相対論 (General Relativity, GR) に基づくブラックホール (Black Hole, BH) に関する予測の 1 つに Kerr 仮説というものがある。Kerr 仮説では、現在の宇宙に存在する孤立した BH は Kerr 時空で記述されると考えられている。Kerr BH 時空は、定常であり BH のスピンによって定義される対称軸を持ち、さらに、BH の幾何学は質量とスピンによるみ特徴づけられる。

定常性と軸対称性に加え、Kerr BH 時空はいくつかの対称性を持つ。その 1 つが \mathbb{Z}_2 対称性であり、Kerr BH 時空は時空の対称面を表す赤道面を持つ。この赤道面は、GR では Boyer–Lindquist 座標 (t, r, θ, ϕ) における $\theta = \pi/2$ の軌道面を指す。孤立した BH に対する \mathbb{Z}_2 対称性の破れは、Kerr 仮説が破れていることの確固たる証拠となり、GR を超えた物理への足がかりとなり得る。したがって、 \mathbb{Z}_2 対称性が破れたときにどのような観測的特徴が現れるのかを理解する必要がある。

2 The NoZ Black Hole metric

ここでの目的は、 \mathbb{Z}_2 対称性が破れたときにどのような観測的特徴が現れるのかを理解することである。したがって、 \mathbb{Z}_2 対称性のみが破れ、Kerr 計量が持つその他の全ての対称性が保存している計量を考え

る。文献 [2] などでは考えられている現象論的なモデルを考えると、Boyer–Lindquist 座標 (t, r, θ, ϕ) を用いて NoZ BH の計量は以下のように表される。

$$g_{tt} = -1 + \frac{2Mr (r^2 + a^2 y^2)}{(r^2 + a^2 y^2)^2 + (r^2 - 2Mr + a^2 y^2) \tilde{\epsilon}(y)}, \quad (1)$$

$$g_{\varphi\varphi} = \frac{(1 - y^2) (r^2 + a^2 y^2 + \tilde{\epsilon}(y))}{(r^2 + a^2 y^2)^2 + (r^2 - 2Mr + a^2 y^2) \tilde{\epsilon}(y)} \times [r^4 + a^4 y^2 + r^2 (a^2 + a^2 y^2 + \tilde{\epsilon}(y)) + a^2 \tilde{\epsilon}(y) + 2Mr (a^2 - a^2 y^2 - \tilde{\epsilon}(y))], \quad (2)$$

$$g_{t\varphi} = -\frac{2Mra (1 - y^2) (r^2 + a^2 y^2 + \tilde{\epsilon}(y))}{(r^2 + a^2 y^2)^2 + (r^2 - 2Mr + a^2 y^2) \tilde{\epsilon}(y)}, \quad (3)$$

$$g_{rr} = \frac{r^2 + a^2 y^2 + \tilde{\epsilon}(y)}{r^2 - 2Mr + a^2}, \quad (4)$$

$$g_{yy} = \frac{r^2 + a^2 y^2 + \tilde{\epsilon}(y)}{1 - y^2}, \quad (5)$$

ここで、 M, aM はそれぞれ BH の質量とスピン、 $y = \cos \theta$ とした。Kerr 計量と異なる点は関数 $\tilde{\epsilon}(y)$ であり、 $\tilde{\epsilon}(y) = 0$ で Kerr 計量となる。

計量は漸近平坦であり、また、 t, φ が現れないため定常で軸対称である。Boyer–Lindquist 座標では、NoZ BH の event horizon は Kerr BH と同様に一定の半径を持ち、 $r^2 - 2Mr + a^2 = 0$ によって定められる。特に重要な点は、 $\tilde{\epsilon}(y)$ が $y = 0$ に関して対称でないときに時空の \mathbb{Z} 対称性が破れるという点であ

る。現象論的な構成のもと、無次元定数 ϵ を用いて $\tilde{\epsilon}(y) = \epsilon M a y$ とする [2, 3]。また、裸の特異点を回避するために、 $|\epsilon| \leq 2$, $|a|/M < 1$ を仮定する。以下では、massive particles を粒子と呼ぶ。

3 降着円盤と光子の円軌道

BH 時空の \mathbb{Z}_2 対称性が破れると BH の周りを運動する粒子の軌道にその影響が現れ、BH の北半球と南半球で異なる振る舞いをする可能性がある。このような軌道の存在により、BH の周りの降着円盤が曲面を持つようになる [3]。これは、降着円盤を構成する粒子の円軌道が、一般に、通常の赤道面 $y = 0$ 上にないためである。同様に、spherical photon orbit の空間分布も、光子の円軌道が $y = 0$ 上ではないことに付随して変形される。降着円盤と光子の軌道のような振る舞いは、降着円盤の形態や BH の撮像、輝線に新たな特徴として現れる。

3.1 降着円盤

動径方向の物質の降着が無視できるほど十分短い時間であれば、降着円盤は異なる半径の円軌道を持つ粒子の集まりだと見なすことができる。降着物質の回転軸が BH の回転軸と平行だと仮定する。それぞれの円軌道に対する条件は、半径 r 、緯度 y に対して、 $\dot{r} = \ddot{r} = \dot{y} = \ddot{y} = 0$ となる。この条件下で測地線方程式を解き、 ϵ と $a_* = a/M$ を定めることで、 $y = y(r)$ と $\Omega_\varphi = \Omega_\varphi(r)$ を得る。ここで、 Ω_φ は降着物質の軌道角速度である。図 1 がそれぞれの結果を表す。

図 1 上図は、いくつかの ϵ , a_* に対する y と r の関係、すなわち、各半径に対して円軌道が通常の赤道面 $y = 0$ からどのようにずれるのかを表している。 $a_* \neq 0$, $\epsilon \neq 0$ のとき、それぞれの円軌道は、通常の赤道面からずれた独自の平面上に位置することがわかる。漸近的平坦性により、半径が大きくなるにつれて円軌道は通常の赤道面に近づき、 $|y|$ は小さくなる。したがって、異なる半径の円軌道の集まりによって構成される降着円盤は表面が曲がったものになる。加えて、 $\epsilon > 0$ の軌道は $y < 0$ 、 $\epsilon < 0$ の軌道は $y > 0$ へずれる。図 1 下図は、各半径に対する軌道角速度 Ω_φ を表している。ここで、BH のスピンの方向

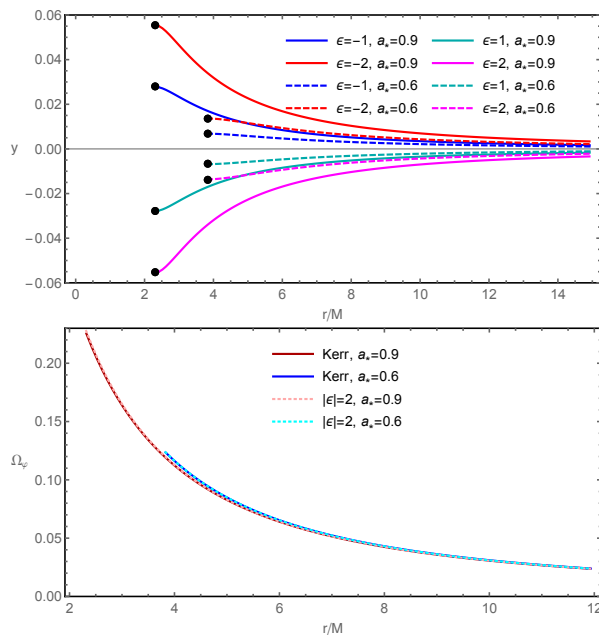


図 1: 上図：粒子の円軌道の半径 r に対する緯度 y 。各軌道の左端 (黒点) は inner most stable circular orbit (ISCO) を表す。下図：各半径 r に対する順行軌道角速度 Ω_φ 。

を正とした。降着物質の角速度は、 ϵ よりも BH のスピン a_* により強く依存していることがわかる。スピンを固定して異なる ϵ に対して比較した場合、ほとんど重なっている。したがって、 ϵ が変化したとき、降着物質の角速度 Ω_φ の変化よりも降着物質の赤道面からの位置の変化の方が、disk image に対して強い影響を与える。

3.2 Spherical photon orbits

光子に対する測地線方程式と BH 周りの spherical photon orbits を考える。Kerr BH の場合、spherical photon orbits はそれぞれの半径 r を持ち、その軌道は緯度方向へ振動する。さらに、光子の順行円軌道、逆光円軌道、それぞれの半径によって spherical photon orbits の半径は制限される。Kerr 時空が持つ赤道面に関する対称性により、それらの 2 つの円軌道は赤道面 $y = 0$ 上に存在する。 \mathbb{Z}_2 対称性が破れたとき、光子の円軌道は依然として存在するが、 $y = 0$ の軌道面からずれる。そこで、NoZ BH の 2 つの円軌道がどのように振る舞うのかを考える。こ

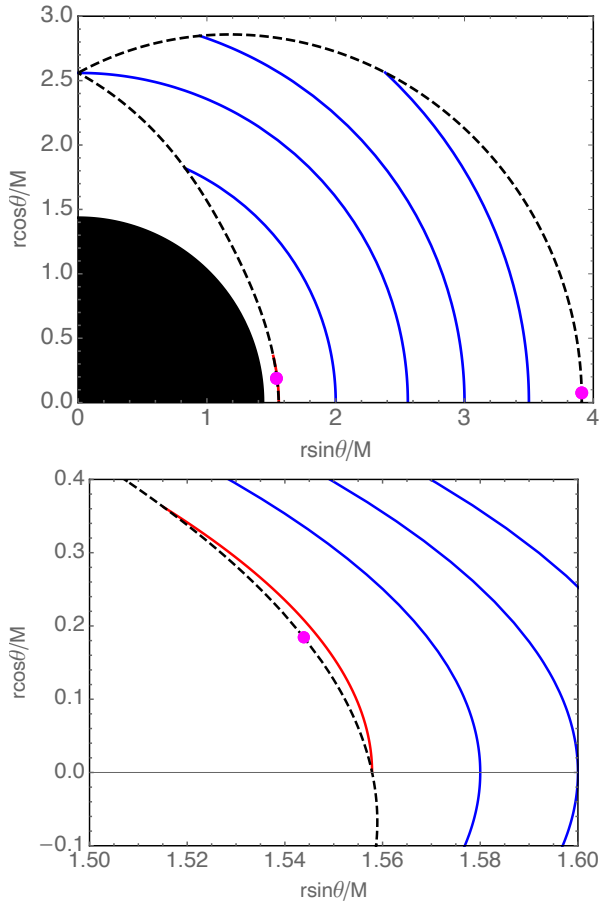


図 2: 上図: $a_* = 0.9$, $\epsilon = 2$ における NoZ BH の spherical photon orbits。青線は異なる半径のものである。紅紫色の点は順行円軌道、逆光円軌道である。下図: 順行円軌道近くの spherical photon orbit。赤線は $y = 0$ で転回点を持つものを表す。

こでも同様に、 $\dot{r} = \dot{\theta} = \dot{\varphi} = \dot{y} = 0$ を課して測地線方程式を解き、 ϵ , a_* を定めることで $y = y(r)$ を得る。

NoZ BH 周りの spherical photon orbits を図 2 に表した。ここで、 $a_* = 0.9$, $\epsilon = 2$ とした。黒色の領域は BH の内部である。赤線、青線で描かれているのは各軌道であり、異なる spherical photon orbits は異なる半径を持つ。また、それぞれの軌道には緯度方向の転回点が存在し、その集合が破線で描かれている。 \mathbb{Z}_2 対称性を持つ BH に対しては、各軌道の転回点が赤道面 $y = 0$ に関して対称となる [4]。しかし、一般に、 \mathbb{Z}_2 対称性が破れた場合には、spherical photon orbits の緯度方向の転回点は $y = 0$ に対称ではない。紅紫色の点で表した順行円軌道、逆光円軌道を見てわかるように、2 つの円軌道は赤道面上か

らずれる。図 2 下図は順行円軌道を表す紅紫色の点をアップしたものであり、赤線は、 $y = 0$ で転回点を持つ spherical photon orbit を表す。赤線と紅紫色の点の間の半径を持つ spherical photon orbit は、明らかにその軌道が北半球内に留まっている。

\mathbb{Z}_2 対称性が破れた場合、光子の円軌道も粒子の円軌道と同様に $y = 0$ の赤道面からずれる。興味深い違いは、粒子、光子、それぞれの円軌道は反対側の半球へずれるという点である。 $\epsilon > 0$ に対しては、光子の円軌道は $y > 0$ の半球に位置し、粒子の円軌道、つまり降着物質は $y < 0$ の半球に位置する。

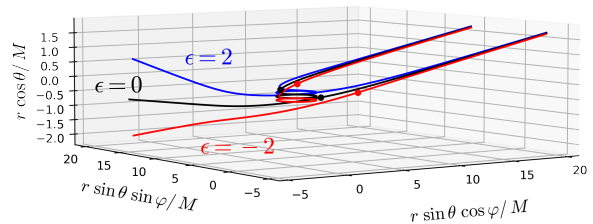
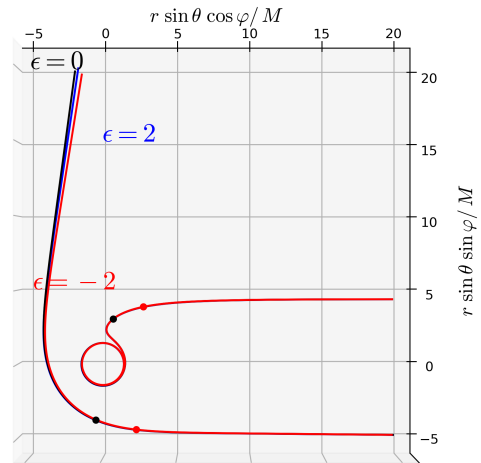


図 3: $i = 85^\circ$ にいる観測者が観測する、Kerr 時空 ($\epsilon = 0$) と NoZ 時空 ($\epsilon \pm 2$) における null 測地線を Boyer-Lindquist 座標で表したもの。各色の点は Keplerian disk の表面のどこから光線が放たれたのかを表す。 $\epsilon = 2$ のときは測地線は disk を通らない。

4 数値計算

Eqs. (1)-(5) で書かれる NoZ BH 時空に対する測地線方程式を数値的に計算する。原論文 [1] では、BH

shadow、Keplerian disk、輝線の特徴、それぞれについてまとめているが、ここでは紙面の都合上 Keplerian Disk にのみ着目する。

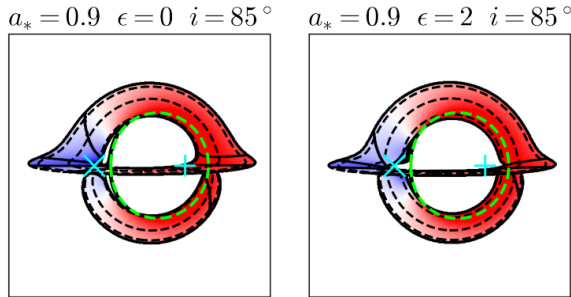


図 4: $a_* = 0.9$, $i = 85^\circ$, $\epsilon = 0, 2$ における順行円軌道の disk の image。 $\epsilon = 2$ のとき、左端に欠けた形状が見られる。

4.1 Keplerian Disk

NoZ BH 時空の測地線と Kerr 時空の測地線には様々な違いが現れる。その中でも、Keplerian Disk の構造を考えるとときに特に重要になるのは、NoZ BH 周りの円軌道は通常の赤道面上に存在しないという点である。例えば、図 1 上図からもわかるように、順行円軌道、 $a_* = 0.9$ のとき、Kerr BH ($\epsilon = 0$) の ISCO に比べ NoZ BH ($\epsilon = \pm 2$) のときの ISCO は小さくなる [2]。

$a_* = 0.9$, $\epsilon = \pm 2$ の場合、順行円軌道の Keplerian disk がどのように観測されるかを調べる。一般に、観測者の視線方向と BH の角運動量ベクトルがなす角 i によって観測に現れる特徴が異なる。ここでは、1 つの例として、観測的な特徴の違いが顕著である $i = 85^\circ$ に着目する。図 3 は、上記の条件下において、 $\varphi = 0$ にいる観測者に向かう null 測地線をいくつか選び Boyer–Lindquist 座標で表したものである。 $\epsilon = 0, -2$ の場合、測地線は Keplerian disk を横切る。よって、観測者は Keplerian disk の表面から放たれた光子を観測することが可能である。しかし、 $\epsilon = 2$ の場合、測地線は Keplerian disk を通らない。すなわち、観測者が Keplerian disk を光学的に観測することができない領域が存在する。これが現れているのが図 4 の disk の image である。 $\epsilon = 0$ の場合と比べ、明らかに disk の左端が欠けている。この特徴は、光子の測地線と降着物質の測地線が反対方向にずれ

ることによって見られるものである。sec. 3 の最後で述べたように、光子の測地線は $\epsilon > 0$ のとき $y > 0$ へずれるが、粒子の測地線は $\epsilon > 0$ のとき $y < 0$ へずれる。

5 Conclusion

Kerr BH 時空の基本的な対称性の 1 つである \mathbb{Z}_2 対称性は、孤立した BH で破れていれば GR に基づく Kerr 仮説の破れとなる。本稿では、 \mathbb{Z}_2 対称性を持たない BH の観測的特徴について述べた。sec. 3 では、粒子と光子の測地線方程式を解くことで \mathbb{Z}_2 対称性が破れたときにそれぞれの円軌道がどのように振る舞うのかを調べた。それぞれの円軌道は $y = 0$ に対して反対方向にずれる。その結果、disk の image に欠けた形状が見られた。ここでは深く述べられなかったが、この観測的特徴は a_* , $|\epsilon|$ が大きいとき、あるいは $i \neq 90^\circ$ のとき、より顕著になる。将来的な展望として、モデルに依存しない特徴や小さい a_* , i に対しても観測可能な特徴を調べられると面白い。

Acknowledgement

天文・天体物理若手夏の学校を企画・運営して下さったスタッフの皆様、ご支援いただいた皆様に心より感謝申し上げます。また、本稿を執筆するに当たって議論していただいた、Che-Yu Chen 氏、度會大貴氏、日頃から議論をしていただいている RESCEU の方々にこの場を借りて感謝を申し上げます。

References

- [1] Che-Yu Chen and Hung-Yi Pu. In: (Apr. 2024). arXiv: 2404.07055 [gr-qc].
- [2] Che-Yu Chen and Hsiang-Yi Karen Yang. In: *Eur. Phys. J. C* 82.4 (2022), p. 307. DOI: 10.1140/epjc/s10052-022-10263-7. arXiv: 2109.00564 [gr-qc].
- [3] Che-Yu Chen. In: *Phys. Rev. D* 106.4 (2022), p. 044009. DOI: 10.1103/PhysRevD.106.044009. arXiv: 2205.06962 [gr-qc].
- [4] V. Perlick. In: *Living Rev. Rel.* 7 (2004), p. 9. DOI: 10.12942/lrr-2004-9.

重宇 c04

extended Einstein-Maxwell-scalar 理論における磁荷と
微分結合の存在下でのヘアリーブラックホール解

谷口 喜太郎

extended Einstein-Maxwell-scalar 理論における 磁荷と微分結合の存在下でのヘアリーブラックホール解

谷口 喜太郎 (東京理科大学大学院 理学研究科)

Abstract

本発表は我々の研究成果 [1] に基づくものである。 $U(1)$ ゲージ不変スカラーベクトルテンソル理論のサブクラスに分類される extended Einstein-Maxwell-scalar 理論におけるブラックホール解について研究する。この理論は、Einstein-Hilbert 作用で記述される重力場に加えて、互いに結合したスカラー場とベクトル場を導入した作用で与えられる。特にベクトル場は電荷および磁荷をもつものとする。静的球対称時空において、微分結合を含む 3 種類のスカラー-ベクトル相互作用に着目し、Reissner-Nordström 解からの修正を調べる。ブラックホールのホライズン近傍と空間的無限遠という 2 つの漸近的領域において場の方程式を解析的に解き、ヘアリーブラックホール解の存在条件を明らかにする。また中間スケールでの解の振る舞いを理解するために、具体的なモデルに対して場の方程式を数値積分した。その結果、磁荷と微分結合の存在下において非自明なスカラー場の配位を伴う新たなヘアリーブラックホール解を発見した。さらに、スカラー場とベクトル場の結合が大きい極限において、3 種類の異なる相互作用から生じるヘアリーブラックホール解を区別できることを示す。

1 Introduction

太陽系における数々の重力実験によって、一般相対論 (GR) は弱重力を非常に精度良く記述できることが知られている。しかし強重力領域における GR の検証は道半ばであり、まだ十分に明らかになってはいない。近年、ブラックホール (BH) のような重力の非線形領域に関する観測が飛躍的な進歩を遂げている。例えば、LIGO-Virgo-KAGRA による重力波の直接検出や、Event Horizon Telescope による BH シャドウの撮像などが挙げられる。

一方で理論的な側面では、Einstein-Maxwell 理論において定常かつ漸近平坦という仮定の下では Kerr-Newman BH が唯一の真空解であることが知られており、これは無毛定理と呼ばれる。ここで、暗黒エネルギーや暗黒物質の問題から示唆されるような新たな自由度を導入した理論において、この定理が維持されるかどうかを調べることは興味深い。もし正準スカラー場を Einstein-Maxwell 理論に追加した場合、スカラー場は自明な定数解のみをもち、時空は依然として Kerr-Newman 計量で記述される。しかし、スカラー場が Maxwell 場と結合している場合、スカラー場は非自明なプロファイルをもつことができ、BH 解はスカラーヘアリーを獲得する。そのよう

なスカラー場とベクトル場の結合は様々な理論で現れ、ディラトン結合やアクシオン結合は典型的な例である。

このスカラー-ベクトル相互作用はスカラーベクトルテンソル (SVT) 理論の枠組みに従って拡張することができる。Horndeski 理論や generalized Proca 理論は、場の方程式が 2 階微分までとなることを要請することで得られる。さらに、これらの一般的な作用は SVT 理論として統一的に記述することができ、この理論はスカラー場とベクトル場の新たな相互作用項をもつ。特にベクトル場が $U(1)$ ゲージ対称性を満たす場合、そのサブクラスは $U(1)$ ゲージ不変 SVT 理論と呼ばれる。この理論における 2 次の Lagrangian は $f_2(\phi, \partial_\mu \phi, F_{\mu\nu}, \tilde{F}_{\mu\nu})$ のように書いて、上述したようなディラトンやアクシオンの相互作用は $\phi, F_{\mu\nu}, \tilde{F}_{\mu\nu}$ からの直接結合であるとみなすことができる¹。ここで $U(1)$ ゲージ不変 SVT 理論の文脈においては、直接結合だけでなくスカラー場の微分 $\partial_\mu \phi$ を含む結合も考慮することができる。そのような微分結合として、例えば $\partial_\mu \phi \partial^\nu \phi F^{\mu\alpha} F_{\nu\alpha}$ というスカラー積を構成できる。そこで我々は、スカラー場の微分とベクトル場の相互作用を導入した理論において新たなヘアリー BH 解が得られるかどうかを精査することを目的と

¹ $F_{\mu\nu}$ は Maxwell テンソル、 $\tilde{F}_{\mu\nu}$ はその双対テンソルである。

して研究を行う。また、ディラトン型やアクシオン型のような異なる種類の相互作用からくるヘアリー BH 解を区別する方法についても議論する。

2 Setup

$U(1)$ ゲージ不変 SVT 理論における 2 次の相互作用を含む Lagrangian は、

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_{\text{pl}}^2}{2} R + f_2(\phi, X, F, \tilde{F}, Y) \right], \quad (1)$$

で記述される。ここで $M_{\text{pl}} = 1/\sqrt{8\pi G}$ は換算 Planck 質量、 R は Ricci スカラーであり、 f_2 はスカラー場 ϕ とベクトル場 A_μ から構成される以下のスカラー量、

$$X = -\frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi, \quad F = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2)$$

$$\tilde{F} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad Y = \nabla_\mu \phi \nabla^\nu \phi F^{\mu\alpha} F_{\nu\alpha}, \quad (3)$$

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu, \quad \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \quad (4)$$

の函数である。また ∇_μ は共変微分、 $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ は完全反対称 Levi-Civita テンソルであり $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = +4!$ と規格化されている。我々は静的球対称時空に着目するため以下の線素、

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + h^{-1}(r) dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (5)$$

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (6)$$

を仮定する。時空の対称性に従って、スカラー場とベクトル場に対して次のような ansatz、

$$\phi = \phi(r), \quad A_\mu = (V(r), 0, 0, -P \cos \theta), \quad (7)$$

を課す。ここで P は磁荷である。このような配位においてそれぞれのスカラー量は、

$$X = -\frac{h\phi'^2}{2}, \quad F = \frac{hV'^2}{2f} - \frac{P^2}{2r^4}, \quad (8)$$

$$\tilde{F} = \frac{PV'}{r^2} \sqrt{\frac{h}{f}}, \quad Y = -\frac{h^2 \phi'^2 V'^2}{f}, \quad (9)$$

のように評価される。もし磁荷 P が存在しない場合、 $\tilde{F} = 0, Y = 4XF$ となるため、 \tilde{F} との結合は寄与せず、また Y による効果は XF の寄与と縮退する。先行研究において、ディラトン型相互作用 $g_1(\phi)F$ やアクシオン型相互作用 $g_2(\phi)\tilde{F}$ からヘアリー BH 解が生

じることが知られている。先駆的な研究は文献 [2–5] を参照。ここで我々は新たな相互作用として $\bar{g}_3 Y$ と書けるような項に着目し、また g_1, g_2, \bar{g}_3 に ϕ 依存性だけでなく X 依存性も含める。このようなスカラー場の微分を含む相互作用からくる BH 解について調べるために、次のような作用で与えられる extended Einstein-Maxwell-scalar 理論を考える。

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[(M_{\text{pl}}^2/2) R + F + X + g_1(\phi, X) F + g_2(\phi, X) \tilde{F} + \bar{g}_3(\phi, X) Y \right]. \quad (10)$$

ここで、 \bar{g}_3 は一般性を失うことなく、

$$\bar{g}_3(\phi, X) = g_3(\phi, X)/(4X), \quad (11)$$

のように規格化できる。Lagrangian がホライズンで正則となるように、 g_1, g_2, g_3 は X に関してゼロもしくは正の冪をもつと仮定する。

変数 f, h, V, ϕ に関して作用の変分をとることで、それぞれの場の方程式、

$$E_f = 0, \quad E_h = 0, \quad E_V = 0, \quad E_\phi = 0, \quad (12)$$

を得る。以下では上式を解析的・数値的に解いていく。

3 Asymptotic solutions

本節では 2 つの漸近的領域において式 (12) を解析的に解く。場の変数に対して、ホライズンで正則であることと、BH から十分離れた遠方で漸近的平坦であることを要請する。また結合の効果は質量 M 、電荷 Q 、磁荷 P をもつ Reissner-Nordström (RN) 解、

$$f_{\text{RN}} = h_{\text{RN}} = \left(1 - \frac{r_h}{r}\right) \left(1 - \mu \frac{r_h}{r}\right) \quad (13)$$

$$= 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2 + P^2}{2M_{\text{pl}}^2 r^2}, \quad (14)$$

に対する補正として働くと仮定する。ただし r_h は外側のホライズン、 μ は無次元定数である ($0 < \mu < 1$)。

3.1 Solutions around the horizon

ホライズン近傍で各変数は次のように展開できる。

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i (r - r_h)^i, \quad h = \sum_{i=1}^{\infty} h_i (r - r_h)^i, \quad (15)$$

$$V = V_0 + \sum_{i=1}^{\infty} V_i (r - r_h)^i, \quad \phi = \phi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i (r - r_h)^i. \quad (16)$$

上式を場の方程式 (12) に代入し、ホライズン近傍で展開する。そして $(r - r_h)$ に関するオーダーごとに方程式を逐次的に解き、展開係数 f_i, h_i, V_i, ϕ_i を求める。結果として、計量成分は 2 次の項から補正、

$$f_2 = f_{2,RN} + \Phi_{1,\phi}\phi_1/C, \quad (17)$$

を受けることが分かる。ここで、 $f_{2,RN}$ は RN 解をホライズン近傍で展開した時の 2 次の項である。 $\Phi_{1,\phi}$ は結合関数 g_i の ϕ に関する微分 $g_{1,\phi}, g_{2,\phi}, g_{3,\phi}$ からなる項のホライズンでの値であり、 C は定数とする。 $h(r)$ も 2 次の項から同様の形の補正を受ける。またスカラー場の展開係数 ϕ_i は $\Phi_{1,\phi}$ に比例する。そのため、もし結合関数が ϕ 依存性を持たないならば、計量は RN 解に帰着すると同時にスカラー場は定数解 $\phi = \phi_0$ をとるのでスカラーヘアは生じない。従って、ヘアリー BH 解を得るための条件として、結合関数 g_i の ϕ 依存性が不可欠であると分かる。

3.2 Asymptotically flat solutions

次に空間的無限遠での漸近的平坦解を求める。この領域において以下のように変数を展開する。

$$f = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{f}_i}{r^i}, \quad h = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{h}_i}{r^i}, \quad (18)$$

$$V = V_{\infty} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{V}_i}{r^i}, \quad \phi = \phi_{\infty} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{\phi}_i}{r^i}. \quad (19)$$

前節と同様の手順で解を求めると、結合関数は計量成分において $1/r^2$ のオーダーから現れることが分かる。ただし、2 次の係数である \tilde{f}_2 と \tilde{h}_2 は等しくない。RN 解は $f = h$ を満たすので、この計量差は RN 解からの逸脱を示している。さらに、その計量差は、

$$\tilde{h}_2 - \tilde{f}_2 = \tilde{\phi}_1^2/\tilde{C}, \quad (20)$$

のように表される。ただし \tilde{C} は定数。スカラー場の 1 次の係数である $\tilde{\phi}_1$ は電荷や磁荷とのアナロジーからスカラーチャージと呼ばれる。従って、スカラーチャージの存在が計量への補正を引き起こすと言える。

4 Concrete models

本節では、結合関数の形を定めた具体的なモデルにおいて数値解析を行う。3 種類それぞれの結合の基

本的な効果を調べるため、 ϕ に関して線形な関数を定める²。

$$g_i(\phi, X) = c_i\phi/M_{\text{pl}}. \quad (21)$$

4.1 Hairy solution arising from the derivative interaction

我々は微分相互作用 $\bar{g}_3 Y$ に起因する新たな BH 解に興味があるため、 $c_3 = 1, c_1 = c_2 = 0$ の場合を考える。上記のようなモデルにおいて場の方程式 (12) を数値積分した結果を図 1 に示す。ただし境界条件として、ホライズン近傍での解析解を用いた。

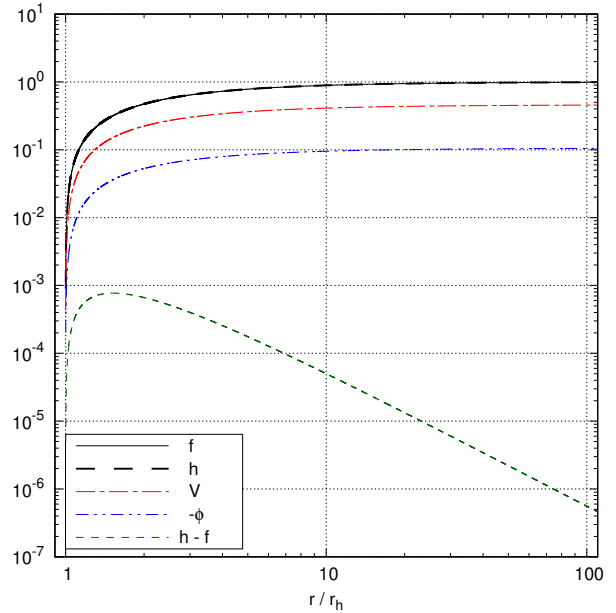


図 1: ホライズンの外側における $f, h, V, \phi, h - f$ の数値解。結合定数は $c_3 = 1, c_1 = c_2 = 0$ 。モデルパラメータは $\mu = 0.1, P = 0.1M_{\text{pl}}r_h$ 。境界条件として $r = 1.001r_h$ で $\phi_0 = -1.0 \times 10^{-4}$ とおいたホライズン近傍の解析解を用いた

図 1 より、ホライズン近傍と十分遠方での 2 つの漸近解が滑らかに接続することが確認できる。計量差 $h - f$ はホライズン近傍で最大値 $\mathcal{O}(10^{-3})$ 程度を取り、遠方に行くにつれて減少する。この結果は、微分結合からくる新たなヘアリー BH 解が存在することを示す。

²元の論文 [1] では結合関数に X 依存性も取り入れた議論を行なっているが、ヘアリー BH 解を引き起こすソースは結合関数の ϕ 依存性であるため、本発表では X 依存性の効果に関する議論は割愛する。

4.2 Large coupling limit of each interaction

さらに、3種類の結合 g_1, g_2, g_3 を区別する方法について議論する。RN 解からの逸脱を特徴づける計量差 $h-f$ は任意関数 $g_i(\phi, X)$ に対してホライズン近傍で次のように評価される。

$$\frac{|h-f|}{(r-r_h)^2} \simeq \left| \frac{\Phi_{1,\phi}^2}{2M_{\text{pl}}^2 r_h^2 (1-\mu)(2r_h^4 - \Phi_{1,X})} \right|. \quad (22)$$

ここで、 $\Phi_{1,X}$ は $\Phi_{1,\phi}$ と同様に $g_{1,X}, g_{2,X}, g_{3,X}$ からなる項のホライズンでの値である。モデル (21) における結合定数 c_1, c_2, c_3 の振る舞いの違いを見るため、結合が大きい極限を考える。 $|c_i| \gg 1$ の下で計量差 (22) を展開すると、リーディングオーダーの寄与は、

$$\frac{|h-f|}{(r-r_h)^2} \simeq \left| \frac{P^2 c_1 (2\mu M_{\text{pl}}^3 r_h^2 - P^2 c_1 \phi_0)}{(1-\mu)\phi_0 M_{\text{pl}}^4 r_h^6} - C_1 \right|, \quad (23)$$

$$\frac{|h-f|}{(r-r_h)^2} \simeq \frac{P^2 c_2^2 (2\mu M_{\text{pl}}^2 r_h^2 - P^2)}{(1-\mu)M_{\text{pl}}^4 r_h^6}, \quad (24)$$

$$\frac{|h-f|}{(r-r_h)^2} \simeq \left| C_3 + \frac{(2\mu M_{\text{pl}}^2 r_h^2 - P^2)^2}{2(1-\mu)c_3 \phi_0^3 M_{\text{pl}} r_h^6} \right|, \quad (25)$$

のように与えられる。ここで C_1, C_3 は定数である。式 (23) によると、 c_1 の増加に伴い計量差における支配的な寄与は c_1 の線形項から 2 乗項に切り替わると予想される。 c_2 の場合は、式 (24) より計量差は c_2^2 に比例して大きくなる。微分結合に関しては、式 (25) から c_3 が大きい極限で $h-f$ が定数項に収束し飽和することが分かる。特に微分結合 c_3 の場合について、 $h-f$ を数値積分した結果を図 2 に示す。図 2 における数値解の振る舞いは、式 (25) による解析的な予想と整合的である。今回選んだパラメータでは、 $c_3 \gtrsim \mathcal{O}(100)$ 程度で計量差の飽和が実現している。また本集録では割愛するが、 c_1, c_2 に関しても同様に数値解の振る舞いは式 (23), (24) における予想を支持する結果となった。従って、式 (23)-(25) や数値解析の結果から分かるように、結合定数の絶対値 $|c_i|$ が大きい極限における計量差 $h-f$ の振る舞いの違いによって 3 種類の結合を判別することができる。

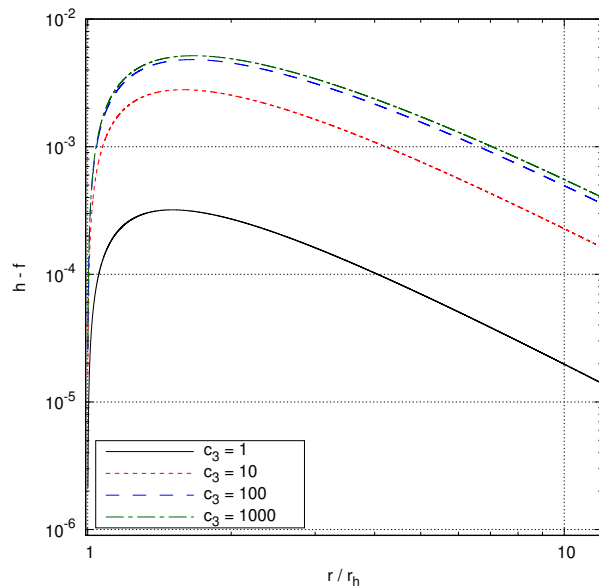


図 2: 異なる結合定数 $c_3 \in \{1, 10, 100, 1000\}$ に対する $h-f$ の数値解。モデルパラメータは $\mu = 0.1, P = 0.1M_{\text{pl}}r_h$ 。境界条件は $r = 1.001r_h$ で $\phi_0 = 0.5M_{\text{pl}}$ とおいたホライズン近傍の解析解を用いた。

5 Conclusion

我々はスカラー場の微分とベクトル場の相互作用を含む extended Einstein-Maxwell-scalar 理論において、新たなヘアリー BH 解の存在を示した。また、その存在条件として結合関数の ϕ 依存性が必要であることを発見した。さらに、結合が大きい極限における計量差の振る舞いによって、磁荷の存在下では 3 種類のヘアリー BH 解を区別できることを示した。

Reference

- [1] K. Taniguchi, S. Takagishi and R. Kase, Phys. Rev. D (in press) [arXiv:2403.17484 [gr-qc]].
- [2] G. W. Gibbons, Nucl. Phys. B **207**, 337-349 (1982)
- [3] G. W. Gibbons and K. i. Maeda, Nucl. Phys. B **298**, 741-775 (1988)
- [4] D. Garfinkle, G. T. Horowitz and A. Strominger, Phys. Rev. D **43**, 3140 (1991) [erratum: Phys. Rev. D **45**, 3888 (1992)]
- [5] K. M. Lee and E. J. Weinberg, Phys. Rev. D **44**, 3159-3163 (1991)

重宇 c05

TeVガンマ線バーストにおける円偏光を用いたアクションの検証可能性について

千葉 航

TeV ガンマ線バーストにおける円偏光を用いた アクシオンの検証可能性について

千葉 航 (神戸大学大学院 理学研究科)

Abstract

2022 年にガンマ線バーストが起源の数十 TeV のガンマ線を検出した。これは地球から 24 億光年はなれた銀河から放出されたものだった。標準物理では強い電磁波が銀河間空間を伝搬する時、電磁カスケードが起こるので、この観測事実を説明することができない。つまり、この観測結果は標準物理を超えた現象であることを示唆する。この問題を解決する 1 つのシナリオは理論に「アクシオン」を導入することであった。本研究では、このシナリオから計算されるガンマ線バーストの偏光について議論する。

1 Introduction

10TeV を超える光子の検出は重要な意味を持つ。それは、銀河間には EBL(Extragalactic Background Light) が存在するため VHE(Very High Energy, 100GeV 以上) 光子によって e^+e^- 対生成を起こす。さらに、対生成により生じた VHE 荷電粒子は EBL を叩き上げ高エネルギー光子が生じる。この高エネルギー光子が再び e^+e^- 対生成を起こす。この連鎖反応 (電磁カスケード) により VHE 光子束はエネルギーを失い銀河間ほど遠くまで伝搬できないと考えられている。なので、この観測事実が標準物理を超えた現象であることが示唆される。エネルギーの減衰により伝搬できないことを光学的深さ τ が大きくなったと解釈する。いったん EBL モデルが与えられるとこれが計算できて、エネルギー ε の光子束が銀河間を伝搬し生き残る確率 (割合) は $P(\varepsilon; \gamma \rightarrow \gamma) = e^{-\tau(\varepsilon)}$ で与えられる。TeV スケールでの確率は^[1] $P(18TeV; \gamma \rightarrow \gamma) = 1 \times 10^{-8}$, $P(100TeV; \gamma \rightarrow \gamma) = 3 \times 10^{-96}$, $P(251TeV; \gamma \rightarrow \gamma) = 0$ と計算される。では、この観測事実をどのように説明したら良いのだろうか?

ここで、理論にアクシオンを導入し、いわゆる”アクシオン-光子転換”を利用して VHE 光子の伝搬を説明する。さらに、光子束がアクシオン-光子転換により伝搬してきたのなら円偏光が生じることが期待される。通常、ガンマ線バーストの放射機構から偏光を作り出すことは難しいとされている。

2 Methods

2.1 混合行列 \mathcal{M} と転送行列 \mathcal{U}

ここでは光子束の生き残る確率をどのように計算するのか、また、伝搬してきた光子の偏光状態がどのように表されるのかを議論する。

アクシオンと光子の相互作用はアクシオン質量 m_a 、結合定数 $g_{a\gamma\gamma}$ を用いて

$$\mathcal{L}_{a\gamma\gamma} = -\frac{1}{4}g_{a\gamma\gamma}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}a = g_{a\gamma\gamma}\vec{E}\cdot\vec{B}a \quad (1)$$

で与えられる。今回のモデルパラメータは、[1] を参考に $m_a = 10^{-10}\text{eV}$ 、 $g_{a\gamma\gamma} = 4 \times 10^{-12}\text{GeV}^{-1}$ とした。連立運動方程式は、外磁場 B 中の y 軸方向の伝搬を考えることにより波動関数 $\psi(y) = (A_x(y), A_z(y), a(y))$ を用いて次の Schrödinger 型の方程式に帰着する。

$$\left(i\frac{d}{dy} + \varepsilon + \mathcal{M}(\varepsilon, y)\right)\psi(y) = 0 \quad (2)$$

混合行列 \mathcal{M} の成分は以下のよう。

$$\mathcal{M}(\varepsilon, y) = \begin{pmatrix} \Delta_{xx} & \Delta_{xz} & \Delta_{a\gamma}\sin\phi \\ \Delta_{zx} & \Delta_{zz} & \Delta_{a\gamma}\cos\phi \\ \Delta_{a\gamma}\sin\phi & \Delta_{a\gamma}\cos\phi & \Delta_a \end{pmatrix} \quad (3)$$

ここで、 ϕ は伝搬方向に垂直な x - z 平面内に射影された外磁場の角度である。

行列の成分については、

$$\Delta_{a\gamma}(y) = \frac{1}{2}g_{a\gamma\gamma}B(y) \quad (4)$$

は光子とアクシオンの外磁場を介した結合を表す。

$$\Delta_a(\varepsilon) = -\frac{m_a^2}{2\varepsilon} \quad (5)$$

はアクシオンの質量項に対応する。また、左上の 2×2 成分について、

$$\Delta_{diag} = \frac{i\tau_\gamma(\varepsilon, y)}{2} - \frac{\omega_{plasma}^2}{2\varepsilon} + \alpha \left(\frac{B(y)}{B_{cri}} \right)^2 \varepsilon \quad (6)$$

は光子の有効質量に対応する。第 2 項目はプラズマによる光子の有効質量である。プラズマ振動数 ω_{plasma} は電子も数密度 n_e 、電子の質量 m_e 、微細構造定数 α をもちいて $\omega_{plasma} = \frac{2\pi\alpha n_e}{m_e}$ で与えられる。また、第 3 項目は QED 効果 (Euler-Heisenberg 有効作用) による光子の 4 点結合に対応する。臨界磁場 $B_{cri} = 4.41 \times 10^{13} G$ である。重要なのは第 1 項目の光学的深さ τ_γ に関する項である。これは、

$$\tau_\gamma(\varepsilon) \sim \int_{\varepsilon_{th}}^{\infty} dE n_\varepsilon(E) \times \sigma_{\gamma\gamma}(E) \quad (7)$$

で与えられる。threshold $\varepsilon_{th} = 1 TeV$ である。また、 $n_\varepsilon(E)$ は EBL のモデルから与えられる [2]。この項の影響で光子のエネルギーが TeV 付近になると光学的深さが大きくなり急激に数が減衰し始める。しかしながら、 $\Delta_{a\gamma}$ が 0 でないために光子が全て消滅することなく”逃げられる”というシナリオである。

式 (2) の解は転送行列 U を用いて、

$$\psi(y) = e^{-i\varepsilon y} U(\varepsilon; y, y_0) \psi(y_0) \quad (8)$$

と書ける。ここで、

$$U(\varepsilon; y, y_0) = \exp(-i \int_{y_0}^y \mathcal{M}(\varepsilon, y') dy') \quad (9)$$

である。

2.2 生存確率

密度行列 $\rho(y) \equiv \psi(y) \otimes \psi(y)$ を用いて光子の確率は $P(\varepsilon; \gamma \rightarrow \gamma)$ は次のように書ける。

$$P(\varepsilon; \gamma \rightarrow \gamma) = Tr[\rho_f U(\varepsilon) \rho_i U^\dagger(\varepsilon)] \quad (10)$$

これは初期の偏光状態 ρ_i から転送行列 U で発展した末に、ある偏光状態 ρ_f として生き残った光子の割合を計算したものである。ただし、独立な光子の状態に対応するのは密度行列の (1,1) 成分と (2,2) 成分である。

2.3 偏光

次に偏光状態について議論する。

光子の密度行列 ρ_γ (左上の 2×2 行列に対応する) の各ユニットに次の Stokes パラメタを対応させると便利である。

$$\rho_\gamma = \begin{pmatrix} A_x A_x^* & A_x A_z^* \\ A_z A_x^* & A_z A_z^* \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I + Q & U - iV \\ U + iV & I - Q \end{pmatrix} \quad (11)$$

ここで、Stokes パラメタは以下のよう [2]。

$$\begin{aligned} I &\equiv |A_x|^2 + |A_z|^2 & Q &\equiv |A_x|^2 - |A_z|^2 \\ U &\equiv 2\text{Re}(A_x A_z^*) & V &\equiv -2\text{Im}(A_x A_z^*) \end{aligned} \quad (12)$$

これらを用いて偏光 Π は次のように定義される。

$$\Pi = \sqrt{\frac{Q^2 + U^2 + V^2}{I^2}} = \Pi_L + \Pi_C \quad (13)$$

ここで、 Π_L, Π_C はそれぞれ直線偏光と円偏光で

$$\Pi_L = \sqrt{\frac{Q^2 + U^2}{I^2}} \quad (14)$$

$$\Pi_C = \sqrt{\frac{V^2}{I^2}} \quad (15)$$

で与えられる。 $\Pi = 0$ のとき無偏光で、 $0 < \Pi < 1$ のとき部分偏光で、 $\Pi = 1$ のとき完全偏光しているという。

光子の偏光状態は、

$$\rho(y) = \begin{pmatrix} \rho_\gamma(y) & \# \\ \# & \# \end{pmatrix} = U(y, y_0) \rho(y_0) U^\dagger(y, y_0) \quad (16)$$

である。

こうして、光子の生存確率や偏光を計算したいのなら、式 (9) をもとに転送行列 U を求めることに帰着した。次の章で具体的なモデルをもとに混合行列 \mathcal{M} の成分を計算し、転送行列 U を求める手続きを行う。

2.4 モデルとセットアップ

今回は地球からおよそ 24 億光年 (赤方偏移 $z=0.151$) 離れた天体がターゲットで、ちょうど視線方向は天の川銀河のディスクに水平であった。ここで、区間を 3 分割し、それぞれの区間で転送行列 U を計算する。分割する区間とそこでの物理量を以下

表 1: 分割区間

	母銀河	銀河間空間	天の川銀河
区間の距離 [kpc]	25	80×10^3	20
磁場の大きさ [μG]	15	1×10^{-3}	10
電子数密度 [cm^{-3}]	1	6×10^{-9}	1.1×10^{-2}

の表 1 にまとめる。各区間の磁場はランダムな方向に生成されるモデルを用いた [1]。各区間で座標を母銀河 ($y_1 \rightarrow y_2$)、銀河間空間 ($y_2 \rightarrow y_3$)、天の川銀河 ($y_3 \rightarrow y_4$) のように対応させると全区間での転送行列 \mathcal{U} は、

$$\mathcal{U}(\varepsilon) \equiv \mathcal{U}(\varepsilon; y_4, y_1) = \prod_{i=1}^4 \mathcal{U}(\varepsilon; y_{i+1}, y_i) \quad (17)$$

と書ける。これを用いて光子の生存確率 $P(\varepsilon; \gamma \rightarrow \gamma)$ は、

$$P(\varepsilon; \gamma \rightarrow \gamma) = \sum_{i=x,z} \text{Tr}[\rho_i \mathcal{U}(\varepsilon) \rho_{ump} \mathcal{U}^\dagger(\varepsilon)] \quad (18)$$

と表せる。ここで、 $\rho_x \equiv \text{diag}(1, 0, 0)$ 、 $\rho_z \equiv \text{diag}(0, 1, 0)$ 、 $\rho_{ump} \equiv \text{diag}(0.5, 0.5, 0)$ とした。初期状態 ρ_{ump} は無偏光状態に対応する。

生存確率から TeV 光子の伝搬を説明する転送行列 \mathcal{U} が作れたのなら、これによって無偏光状態から変化した状態がわかり、偏光が計算できるというわけである。

3 Results

以下では計算結果を示す。

図 1 は光子の生存確率で式 (12) を用いた。

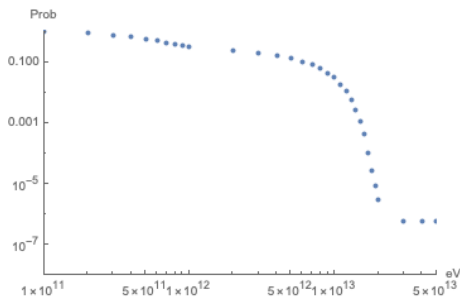


図 1: 生存確率 (横:eV, 縦: 確率)

図 2,3 は地球に到達した光子の偏光でそれぞれ式 (8),(9) を用いた。

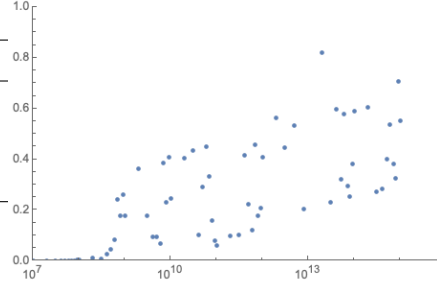


図 2: 直線偏光 Π_L (横:eV, 縦:%)

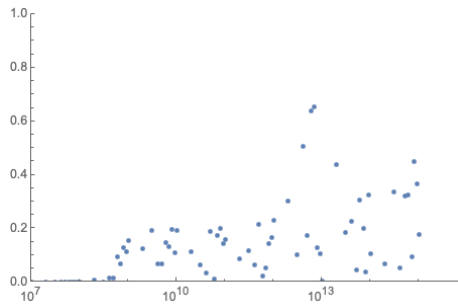


図 3: 円偏光 Π_C (横:eV, 縦:%)

4 Discussion

生存確率については、TeV スケールで 10^{-7} 程度に停滞させることに成功した。しかし、[1] の場合は 10^{-5} 程度で停滞していた。この差は光学的深さの計算精度に起因と考えられる。今回の計算では簡単のため赤方偏移の寄与を無視した。これはあまり大きな差にならないと考えられるが、指数関数の方に乗る分この差が敏感になる可能性がある。偏光については GeV スケールからじわじわ出てきていることから QED の効果が現れ始めていると考えられる。アクシオン-光子転換による偏光も含まれていると考えられるが、それほど見られていない理由は今回のターゲット天体は地球からそれほど遠くなかったことが考えられる。走る距離がさらに伸び、磁場のコヒーレント長も長い場合は効率的に転換が起き、偏光がもっと見られると期待される。また、アクシオンのパラメータを変えることでより偏光が生じやすくなるかもしれない。[3] によればガンマ線バーストの放射機構から円偏光作り出すのは難しく、0.6% の円偏光の観測が謎を残すほどである。なので、今後さらに遠くの銀河から TeV ガンマ線が観測されたのなら、このシナリオから円偏光を計算し、アクシオンのパ

ラムタ空間に制限が与えられるかもしれない。

5 Conclusion

理論にアクシオンを加えることにより TeV 光子の伝搬確率を残すことができた。また、アクシオンとの相互作用や QED 効果によりわずかな偏光が生じることが確認できた。今後は、最も変更が生じやすいアクシオンのパラメタを用いて解析を進めていきたい。また、走る距離とコヒーレント長を伸ばし、偏光がどれくらい生じるかも解析していきたい。

Reference

- [1] Giorgio Galanti et al.2022, arXiv:2210.05659
- [2]A.Saldana-Lopez et al. 2021,507,5144
- [3]Kawai Nobuyuki, Asano Katsuaki, 2019,
ガンマ線バースト 新天文学ライブラリー 第5巻

[indexへ戻る](#)

重宇 c06

ブラックホール磁気圏と帯電について

松尾 賢汰

ブラックホール磁気圏と帯電について

松尾 賢汰 (大阪公立大学大学院 理学研究科)

Abstract

近年の様々な観測結果は、ほとんどの銀河の中心には太陽質量の数億倍程度の超大質量ブラックホールが存在することを強く示唆している。また、いくつかの活動的な銀河の中心からは、細く絞られた光速に近いジェットが噴き出していることも分かっている。ジェットの生成機構には多くの未解明の問題が残されており、特にそのエネルギー源についても決着がついていない。エネルギー源の候補の一つとして、“Brandford-Znajek(BZ)過程”が有力視されている。Brandford と Znajek は今日 BZ split-monopole 解と呼ばれる近似解を解析的に構成し、BZ 過程が働く例を示した。BZ 過程がジェット生成に深く関わっているかどうか、現在活発に研究が進められている。また、先行研究では一様真空テスト電磁場 (Wald 解) 中でのブラックホールに片方の電荷を持つ荷電粒子が選択的に降着することが明らかにされている。そして近年、ブラックホールの帯電が BZ 過程を妨げる可能性が指摘され、現在も議論が続いている。本研究では、BZ split-monopole 解における帯電を解析することを目指して、まず split-monopole 磁場を伴う球対称ブラックホール時空における荷電粒子の運動を調べた。

1 Introduction

2019 年 4 月に EHT が BH シャドウの撮影に成功した M87 銀河中心には他の特徴として、銀河中心から噴き出している jet が存在している (Fig.1)。

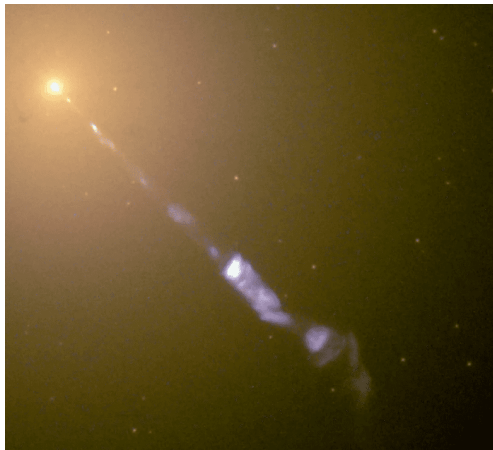


図 1: M87 銀河中心から噴き出す jet

jet は高エネルギー現象の一つであり、プラズマが光速に近い速度で細く絞られながら飛び出している。jet にはいくつかの謎が残されていて、例えばどのような機構で jet を細く絞りつつ遠方まで届かせているか、どのように光速に近い速度まで jet を加速させているのか、については現在まで解明されていない。

特に、jet を駆動する際のエネルギー源に関しても決着がついていない。エネルギー源の候補の一つに、BH の回転エネルギーを磁場を通して引き抜くという考えが、1977 年に Brandford と Znajek によって提案された [1]。二人の名をとって現在は“BZ 過程”と呼ばれている。ところで、先行研究の一つにキリングベクトルの線形結合から構成された Wald 解

$$A_\mu = \frac{B_0}{2}(m_\mu + 2ak_\mu) - \frac{Q}{2}k_\mu \quad (1)$$

で BH に片方の電荷を持つ荷電粒子が選択的に降着して帯電することが示唆されている [2]。

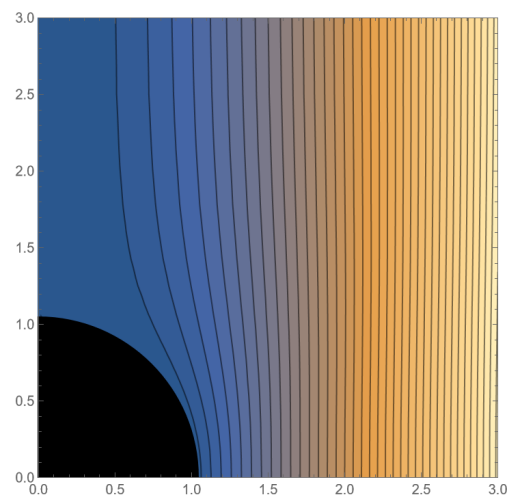


図 2: Wald 解での磁力線 ($Q = 0$)

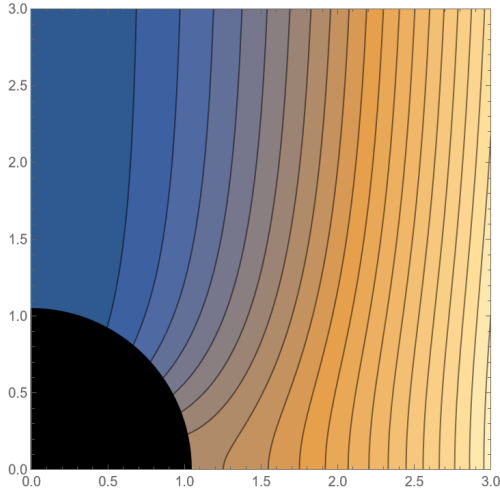


図 3: Wald 解での磁力線 ($Q = 2aB_0$)

さらに、この荷電降着による BH の帯電によって BZ 過程は jet を定常に引き起こすエネルギー源にはなりえないことが指摘されている [3]。

そこで、本研究では Blandford と Znajek が BZ 過程が起こることを理論的に示すときに用いた BZ split-monopole 解 (図 4) における荷電粒子の運動を明らかにすることを旨として、まず第 0 近似である split-monopole 磁場を伴う球対称 BH 時空中における荷電粒子の運動を調べた。

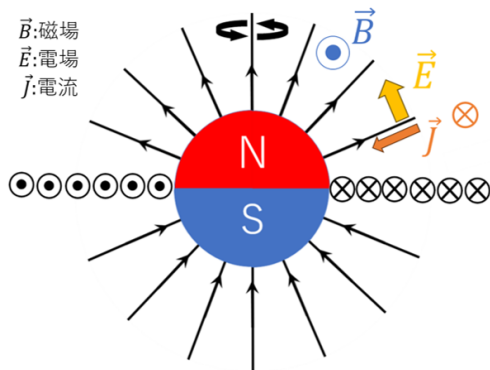


図 4: BZ split-monopole 解の概念図

2 Methods

split-monopole 解 (図 5) は、まずシュヴァルツシルト時空上に北極側を N 極、南極側を S 極として赤道面上に電流シートを置いた磁気圏であり、 A_μ は

$$A_\mu = \pm q_m (1 \mp \cos \theta) \delta_\mu^\varphi \quad (2)$$

となる。さらに、この split-monopole 解に対して時空と磁場を回転させることで BZ split-monopole 解が実現される。BZ split-monopole 解は Kerr 時空中に磁場とそれに垂直な電場、さらに磁力線に沿った電流があるような磁気圏である。

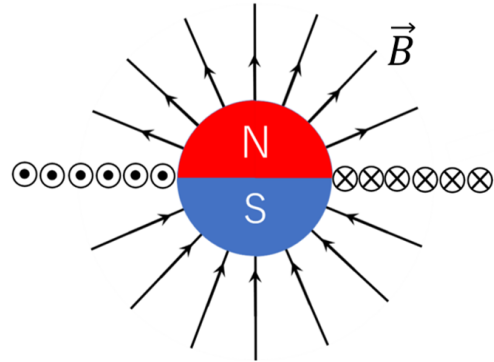


図 5: split-monopole 解の概念図

この split-monopole 解 (図 5) 上で荷電粒子、特に陽子と電子に対する運動を調べて BH の帯電を解析する。荷電粒子の運動方程式は

$$m u^\nu \nabla_\nu u_\mu = e F_{\mu\nu} u^\nu \quad (3)$$

であり、また初期条件として陽子と電子に

1. 無限遠方で静止 ($E = 1$)
2. 全角運動量はゼロ ($m_p L_p = -m_e L_e$)

を課す。

3 Results

まず、荷電粒子の運動方程式 (3) 式は時空の対称性から t 、 φ 成分は保存量が存在している。また θ 成分も変数分離して積分が可能で

$$\frac{1}{2} u_\theta^2 + \Theta(\theta) = K \quad (4)$$

となる。ここで、 $\Theta(\theta)$ は θ のみの関数であり、 K は任意の定数である。このとき (4) 式から、 $\theta = \text{一定}$ の解が存在しているので、まずはこの解に注目する。すると、残る r 方向の運動方程式を解析することで荷電粒子の運動は定まる。すなわち次元問題に帰着したことになる。 r 方向の運動方程式は

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 + V_{eff} = E \quad (5)$$

となる。ここで、 V_{eff} は有効ポテンシャル、 E は単位質量あたりのエネルギーである。有効ポテンシャルを書き下すと

$$V_{eff} = -\frac{M}{r} + \frac{\tilde{L}^2}{2r^2} - \frac{M\tilde{L}^2}{r^3} \quad (6)$$

となる。ここで、 \tilde{L} は角運動量に磁場の効果が入ったもの(有効角運動量)である。(6)式から有効ポテンシャルは磁場の無い赤道面上でのシュヴァルツシルト時空の粒子と同じ形状になる。

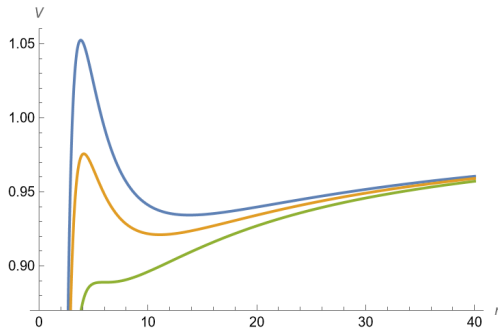


図 6: 動径方向の有効ポテンシャル

これらのことから荷電粒子は E, L, q を調整することで図7のように $\theta =$ 一定の磁力線の面 (cone) 上を運動することが分かる。

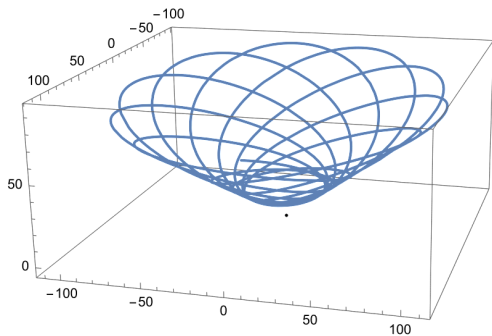


図 7: cone 上での荷電粒子の運動

次に荷電粒子の運動の解析で得られた結果を初期条件と共に陽子と電子の二粒子に当てはめる。ここで、有効ポテンシャルの形状から陽子と電子が BH に落下する条件は

$$m_p \left| \tilde{L}_p \right| < 2\sqrt{2}m_p M \quad (7)$$

$$m_e \left| \tilde{L}_e \right| < 2\sqrt{2}m_e M \quad (8)$$

となる。また、初期条件から全角運動量はゼロなので

$$2\sqrt{2}m_e M < m_e \left| \tilde{L}_e \right| = m_p \left| \tilde{L}_p \right| < 2\sqrt{2}m_p M \quad (9)$$

となる有効角運動量の範囲が存在する。上式は、陽子と電子の約二千倍の質量差によって陽子のみが BH に落下して電子は BH に落下しないことを意味している。すなわち、陽子の降着により BH は正に帯電することになる。

陽子による BH の帯電後の荷電粒子の有効ポテンシャルはブラックホールの電荷が生み出す電場によって

$$V_{eff} = -\frac{1}{r} \left(M \pm \frac{eQ}{m} \right) + \frac{1}{2r^2} \left\{ \tilde{L}^2 - \left(\frac{eQ}{m} \right)^2 \right\} - \frac{M\tilde{L}^2}{r^3} \quad (10)$$

と変化する。陽子による BH の帯電は最終的に電場によって陽子と電子の運動が同じ振る舞いになるまで続く。陽子によって最大帯電量は Sgr A*BH で

$$Q \approx 6 \times 10^8 \left(\frac{M}{4 \times 10^6 M_\odot} \right) [C] \quad (11)$$

となる。

4 Conclusion

split-monopole 磁場での陽子の最大帯電量は Sgr A*BH で約 $6 \times 10^8 [C]$ であることが分かった。さらに Sgr A*BH での最大帯電量は、観測による制限が設けられていて [4]、

$$Q \leq 3 \times 10^8 [C] \quad (12)$$

となっている。よって、今回の研究で得られた結果とは、オーダーで同じ値になることが分かった。

今後は、BZ split-monopole 磁場では帯電はどうなるか？さらに帯電するならば BZ 過程はどうなるのかを調べる。

Acknowledgement

本発表にあたり、ご指導いただいた宇宙物理・重力研究室の皆様、講演の機会を与えてくださった夏の学校の運営の皆様へ深く感謝申し上げます。

Reference

- [1] Roger D Blandford and Roman L Znajek. Electromagnetic extraction of energy from kerr black holes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 179, No. 3, pp. 433–456, 1977.
- [2] Robert M. Wald. Black hole in a uniform magnetic field. *Phys. Rev. D*, Vol. 10, pp. 1680–1685, 1974.
- [3] A. R. King and J. E. Pringle. Can the Blandford–Znajek Mechanism Power Steady Jets? *Astrophys. J. Lett.*, Vol. 918, No. 1, p. L22, 2021.
- [4] Michal Zajaček, Arman Tursunov, Andreas Eckart, and Silke Britzen. On the charge of the galactic centre black hole. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 480, No. 4, pp. 4408–4423, 2018.
- [5] Serguei S. Komissarov. Electrically charged black holes and the Blandford–Znajek mechanism. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, Vol. 512, No. 2, pp. 2798–2805, 2022.

[indexへ戻る](#)

重宇 c07

2次元量子ブラックホールにおける量子収束仮説

田中 亜花音

2次元量子ブラックホールにおける量子収束仮説

田中 亜花音 (近畿大学大学院 総合理工学研究科)

Abstract

量子収束仮説は量子効果を含む様々な状況で成り立つことが証明されている。しかしブラックホールの蒸発過程を考えた場合、Hawking 輻射のエンタングルメントエントロピーは Page time 以降減少することが知られている為、量子収束仮説は破れる可能性がある。そこで先行研究では island 形成を考慮した 4次元球対称動的ブラックホールにおいて量子収束仮説が成り立つことを証明した。しかし証明に使用されているモデルは近似的なモデルであり、正確に量子効果を取り込めていない。そこで本研究では半古典 Einstein 方程式が厳密に解ける 2次元量子ブラックホールにおいて量子収束仮説が成り立つことを証明する。

1 Introduction

収束定理は一般相対論における重力の基礎的な性質を理解するための大きな役割を担う。例えば特異点定理やブラックホール熱力学第二法則などの証明に用いられている。収束定理は Raychaudhuri 方程式とヌルエネルギー条件 (NEC) を組み合わせた expansion θ を用いて

$$\frac{d\theta}{d\lambda} \leq 0, \quad (1)$$

と表す。ここで λ はヌル測地線のアフィンパラメータとする。また expansion θ は

$$\theta \equiv \frac{1}{\mathcal{A}} \frac{d\mathcal{A}}{d\lambda}. \quad (2)$$

ここで \mathcal{A} は null congruence の断面積である。この \mathcal{A} をブラックホールの断面積と読み替え、相対論の大域的な操作をすると

$$d\mathcal{A} \geq 0 \quad (3)$$

となり、これは面積エントロピーの第二法則である。しかし、量子効果を取り入れると NEC は破れるため (3) は破れてしまう。そのため収束定理には修正が求められる。

そこで代替案として量子収束仮説 (QFC) [1] が提案された。QFC はベッケンシュタインの提案した一般化エントロピーを用いて定義される [2]。一般化エントロピーは

$$S_{\text{gen}} = \frac{\mathcal{A}}{4G_N} + S_{\text{out}}. \quad (4)$$

ここで S_{out} はブラックホール外側の輻射のフォンノイマンエントロピーである (正確には物質場のエントロピー)。(4) を用いて一般化エントロピーの第二法則 (GSL) は

$$dS_{\text{gen}} \geq 0. \quad (5)$$

これは S_{gen} が非減少であることを示す。この半古典的な一般化に対応して収束定理 (1) を QFC に一般化する。QFC は

$$\frac{d\Theta}{d\lambda} \leq 0. \quad (6)$$

ここで Θ は quantum expansion と呼び、expansion θ (2) を量子化したものであり次のように定義される。

$$\Theta = \frac{4G_N}{\mathcal{A}} \frac{dS_{\text{gen}}}{d\lambda}. \quad (7)$$

QFC は量子効果を含む様々な場合で成り立つことが証明されている。しかしブラックホールの蒸発過程を考えた場合は破れる可能性がある。Hawking 輻射のエントロピーをエンタングルメントエントロピーと捉えると、Page time [3] 以降、面積エントロピーも輻射のエントロピーも減少してしまう。したがって QFC は破れてしまう可能性がある。これに対して先行研究 [4] は island 形成 [5,6] を考慮した蒸発する 4次元球対称ブラックホールにおいて QFC が成り立つことを証明した。しかし先行研究 [4] のブラックホールモデルは近似解を採用しており、量子効果を正確に取り込めていない。そこで本研究では半古典 Einstein 方程式を厳密に解ける RST モデル [7] において QFC が成り立つことを証明する [8]。

2 2次元ブラックホールと island

この章では2次元ブラックホールである RST モデル [7] と一般化エントロピーを計算するための island [5,6] についてレビューする。

2.1 RST モデル

まず2次元ディラトン重力における古典作用である CGHS モデルを考える。作用は

$$I_{\text{CGHS}} = \frac{1}{2\pi} \int d^2x \sqrt{-g} e^{-2\phi} \{R + 4(\nabla\phi)^2 + 4\lambda^2\}. \quad (8)$$

ここで R はリッチスカラー、 ϕ はディラトン場、 λ は長さのスケールを持つパラメータである。また適切な座標変換により $\lambda = 1$ に設定することができる。また物質場も導入する。また簡単のため共形的なもののみを考える。量子効果を取り入れると、エネルギー運動量テンソルは曲がった時空では共形アノマリーを持つ：

$$\langle T^\mu{}_\nu \rangle = \frac{c}{12} R. \quad (9)$$

ここで c は central charge である。conformal gauge では、計量は次のようにとる。

$$ds^2 = -e^{2\rho} dx^+ dx^-, \quad (10)$$

ここで ρ は x^+ と x^- の関数である。この gauge では (9) は

$$T_{+-} = -\frac{c}{6} \partial_+ \partial_- \rho, \quad (11)$$

$$T_{\pm\pm} = \frac{c}{12} [2\partial_\pm^2 - 2(\partial_\pm \rho)^2 + t_\pm], \quad (12)$$

と表せる。ここで $t_\pm(x_\pm)$ は積分定数であり物理的な境界条件で決まる。ここで導入した量子エネルギー運動量テンソル (12) を再現する作用として非局所的な Polyakov 項を I_{CGHS} に追加する。

$$I_Q = -\frac{c}{12\pi} \int dx^+ dx^- \partial_+ \rho \partial_- \rho. \quad (13)$$

しかし、この項は古典作用 (8) の対称性:

$$\delta\phi = \delta\rho = \epsilon e^{2\phi}, \quad (14)$$

を壊してしまう。よって対称性を保つために次のような作用を追加する。

$$I_{\text{RST}} = -\frac{c}{48} \int d^2x \sqrt{-g} \phi R. \quad (15)$$

対称性 (14) を用いると、一般性を失わず $\rho = \phi$ とすることができる。また運動方程式を簡単に表すために新しい場の変数を導入する。

$$\Omega = e^{-2\phi} + \frac{c}{24} \phi. \quad (16)$$

場の変数 (16) を用いると、作用 $I_{\text{CGHS}} + I_Q + I_{\text{RST}}$ に対する運動方程式は

$$\partial_+ \partial_- \Omega + 1, \quad -\partial_\pm^2 \Omega = \frac{c}{24} t_\pm. \quad (17)$$

ここで t_\pm は以前に出てきた積分定数と同じものである。以降、蒸発する2次元量子ブラックホールについて議論する。liner dilaton vacuum に物質場の shock wave が入射し、ブラックホールが形成されるような状況を考える。この時、エネルギー運動量テンソルは次のように仮定する。

$$T_{++} = \frac{2M}{x_0^+} \delta(x^+ - x_0^+), \quad T_{--} = 0, \quad (18)$$

ここで無限の過去では時空は平坦であるとする。また x^\pm は null 座標であり、 x_0^+ で shock wave が入射すると仮定する。この時、解 Ω は

$$\Omega = -x^+ x^- - \frac{c}{48} \log(-x^+ x^-) - \frac{M}{x_0^+} (x^+ - x_0^+) \theta(x^+ - x_0^+), \quad (19)$$

となる。ここで M はブラックホールの質量であり、 $\epsilon = c/48M \ll 1$ とする。また座標 (u, v) を

$$x^+ = x_0^+ v, \quad x^- = \frac{M}{x_0^+} u, \quad (20)$$

と定義すると、 Ω は $v > 1$ の時

$$\Omega = M[1 - v(u + 1) - \epsilon(-Muv)], \quad (21)$$

であり、 $v < 1$ の時

$$\Omega = M[1 - v(u + 1) - \epsilon \log(-Muv)]. \quad (22)$$

となる。(21) はブラックホール解であり、(22) は linear dilaton vacuum 解である。

2.2 一般化エントロピー

この章では 2 次元ブラックホールにおける一般化エントロピー (4) を計算する。コーシー面を 2 つの領域に分割する点 A を考える。事象の地平面は 2 つの領域のうちの一つに存在し、もう一つの領域で一般化エントロピーを計算する。以降、点 A を anchor point と呼び、ブラックホールのある領域を A の内部と呼ぶ。island rule ではエンタングルメントエントロピーは次式で与えられる。

$$S_{\text{gen}} = \min \left\{ \text{ext} \left[\sum_{A,I} \frac{\text{Area}}{4G_N} + S_{\text{bulk}} \right] \right\}. \quad (23)$$

ここで S_{bulk} の外部と island と呼ばれる領域の結合におけるエンタングルメントエントロピーである。面積項は A と I の面積の和であり、 I は島の境界を表す。ここではエンタングルメントエントロピーが極大となる、単一の連結領域と空の 2 つのケースを考える。この 2 つのケースをそれぞれ island configuration、no-island configuration と呼ぶ。

island configuration における一般化エントロピーは

$$S_{\text{gen}} = \frac{\text{Area}(A)}{4G_N} + \frac{\text{Area}(I)}{4G_N} + S_{\text{bulk}}[\mathcal{S}_{AI}] \quad (24)$$

と表す。ここで第 1 項目は

$$\frac{\text{Area}}{4G_N} = 2(\Omega - \Omega_{\text{crit}}), \quad (25)$$

となる。また第 2 項目は island の境界項である。第 3 項目は island の境界 I と anchor point A をつなぐ spacelike surface \mathcal{S}_{AI} 上の CFT 物質場の von Neumann entropy である。bulk entropy S_{bulk} は

$$S_{\text{bulk}}[\mathcal{S}_{AI}] = \frac{c}{6} \log |d(A, I)^2 e^{\rho(A)} e^{\rho(I)}|_{t_{\pm}=0}, \quad (26)$$

と表される。

Island がない場合の一般化エントロピーは

$$S_{\text{gen}} = \frac{\text{Area}(A)}{4G_N} + S_{\text{bulk}}[\mathcal{S}_{A0}], \quad (27)$$

と表される。ここで \mathcal{S}_{A0} anchor curve と時空の inner boundary $\Omega = \Omega_{\text{crit}}$ をつなぐ surface である。island configuration、no-island configuration それぞれの状況を図 1 に示す。

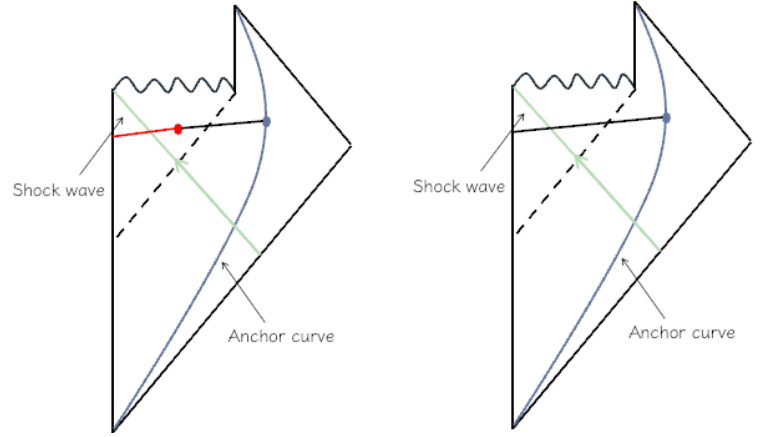


図 1: これは RST モデルの Penrose 図である。赤い線が island の端点であり、青い線は anchor curve を表す。

3 RST モデルにおける Quantum focusing conjecture

この章では 2 次元蒸発ブラックホールである RST モデルにおいて QFC が成り立つことを証明する。2 次元における quantum expansion は次のように定義する。

$$\Theta = \frac{1}{2\Omega} \frac{dS_{\text{gen}}}{d\lambda}. \quad (28)$$

また (24)(27) を用いて具体的に一般化エントロピー S_{gen} を計算すると

$$\begin{aligned} S_{\text{gen}}^{\text{island}} = & 2M \{1 - v_I(1 + u_I) - \epsilon \log(-Mv_Iu_I)\} \\ & + 2M \{1 - v_A(1 + u_A) - \epsilon \log(-Mv_Au_A)\} \\ & + \frac{c}{12} \log \left[\left(\log \frac{v_A}{v_I} \log \frac{u_A}{u_I} \right)^2 \frac{v_Au_A}{1 - v_A(1 + u_A)} \frac{v_Iu_I}{1 - v_I(1 + u_I)} \right], \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} S_{\text{gen}}^{\text{no-island}} = & 2M \{1 - v_A(1 + u_A) - \epsilon \log(-Mv_Au_A)\} \\ & + \frac{c}{12} \log \left[\left(\log \frac{v_A}{v_0} \log \frac{u_A}{u_0} \right)^2 \frac{v_Au_A}{1 - v_A(1 + u_A)} \right], \end{aligned} \quad (30)$$

となる。ここで island の位置を (u_I, v_I) 、anchor curve の位置を (u_A, v_A) とした。また 2 つのエントロピー $S_{\text{gen}}^{\text{island}}, S_{\text{gen}}^{\text{no-island}}$ の振る舞いを確認するにあたり、次の 3 つの場合に分けて計算する。(i) horizon 近傍 $\epsilon \ll -v_A(1 + u_A) \ll 1$, (ii) horizon の遠

方 $-v_A(1 + u_A) = O(1)$, (iii)horizon に十分近い $-v_A(1 + u_A) \sim \epsilon$ 。この 3 つの場合に対して

$$\frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{e^{-2\rho}}{\Omega} \frac{\partial}{\partial v} S_{\text{gen}}^{\text{island/no-island}} \right] \leq 0, \quad (31)$$

を示すことが目的である。詳細な計算は省くがすべての場合について QFC が成り立つことが証明できている (参照 [8])。

4 Conclusion

本研究では 2 次元量子ブラックホールである RST モデルにおいて、island 形成を考慮した上で QFC が成り立つことを証明した。RST モデルは Einstein 重力と高次元で一致する。球対称のみに注目すると D 次元の Einstein 重力は 2 次元 dilaton 重力に帰着する。また largeD limit をとると Schwarzschild black hole は CGHS モデルの eternal black hole と等価であるため、RST モデルの古典極限においても等価であると言える。よって本研究は Schwarzschild black hole においても当てはまることが期待できる。

また QFC から量子ヌルエネルギー条件 (QNEC) を導出することもできる。RST モデルにおける QFC の結果を用いると QNEC は

$$e^{-4\rho} T_{++} \geq \frac{d^2 S_{\text{out}}}{d\lambda^2}, \quad (32)$$

と表すことができる。これは 2 次元の QNEC に一致する。高次元ではいくつかの場合において QNEC が破れていることが確認されている。今後は 2 次元の場合にも QNEC が破れている可能性について研究していきたい。

Acknowledgement

本研究を行うにあたり、共同研究者である近畿大学 石橋明浩教授と松尾善典氏には多大なるご指導をいただきました。ありがとうございました。また、講演の機会を作っていただいた天文・天体物理若手夏の学校事務局の皆様にご心より感謝申し上げます。

Reference

[1]R. Bousso, Z. Fisher, S. Leichenauer, and A.C. Wall, Phys. Rev. D93 (2016) 064044

[2]J.D. Bekenstein, Phys. Rev. D7 (1973) 2333

[3]D.N. Page, Phys. Rev. Lett. 71 (1993) 3743

[4]Y. Matsuo, JHEP12 (2023) 050

[5]G. Penington, JHEP 09(2020)002,

[6]A. Almheiri, et al JHEP 12 (2019) 063

[7]J.G. Russo, L. Susskind, and L. Thorlacius, Phys. Rev. D46 (1992) R1005

[8]A. Ishibashi, Y. Matsuo, A. Tanaka, arXiv:2403.19136[hep-th].

重宇 c08

Analogue Gravity を用いた裸の特異点を持つ時空のモデル化

埴 正之

Analogue Gravity を用いた裸の特異点を持つ時空のモデル化

埴 正之 (東京学芸大学大学院教育学研究科)

Abstract

ブラックホールの性質を、何らかの物理現象との類推から探ろうとする、Analogue Gravity という分野が発展している。Unruh らが Klein-Gordon 方程式と流体の関係づけを提案してから [1]、様々なセットアップで重力の効果をモデル化する提案がなされ、実験も行われてきた。Schwarzschild 時空をはじめ、いくつかのブラックホール時空を流体と対応付ける方法は Oliveira らによって開発されており [2,3]、本稿では、この方法に倣って、裸の特異点を持つ JNWW 時空のモデル化を行った。

1 Introduction

ブラックホールは非常に高密度な天体であり、光すら脱出できないホライゾンと呼ばれる境界を持つ。そのためブラックホール内部は直接観測できない。こうした中、ブラックホールを直接観測しようとするのではなく、何らかの物理現象との類似性からブラックホールの性質を探ろうとする、Analogue Gravity と呼ばれる分野が発展している。例えば、光と音の類似性を利用してブラックホール時空を再現するモデルには、ラバール管に空気を流し超音速流を作り出すというものがある。ラバール管は太さが一定でない管で、細い部分では空気の流れが速くなる。そして、空気の流れが音速を超え超音速流になると、上流域に音が伝播しなくなり、音にとっての「ブラック」ホールになる。特に、1981 年に Unruh が Klein-Gordon 方程式と流体の関係づけを提案してから [1]、様々なセットアップで重力の効果をモデル化する提案がなされ、実験も行われてきた。この流れの中、Oliveira らによって、静的球対称なブラックホールに対応する Schwarzschild 時空をはじめ、いくつかのブラックホール時空を流体と対応づける方法が開発された [2,3]。この方法は従来からわかっていたブラックホール周りでの光の軌跡だけでなく、粒子の運動もモデル化できる方法である。本研究では Oliveira らの方法に倣い、JNWW 時空を流体でモデル化することを考え、Schwarzschild 時空の場合と比較した。JNWW 時空は静的球対称な時空であるが、同じく静的球対称なブラックホールを表す Schwarzschild 時空とは違い、裸の特異点を持つ。特異点とは密度や圧力などの物理量が発散する点であり、通常はホライゾンの内側に隠されていると考えられている。裸の特異

点とは、この特異点がむき出しになったものである。この時空を流体でモデル化するために必要な流体の密度や速度場などを求め、その正当性を確かめるため、流速と光速の大小関係や潮汐力に注目した。

2 Acoustic Black Hole

まず、Unruh が提案した、流体と Klein-Gordon 方程式との対応についてまとめる。この流体による「ブラック」ホールは Acoustic (音響) ブラックホールと呼ばれる。流体力学より、粘性のない、圧力が密度のみに依存する渦無し流体は、以下の連続の方程式、オイラーの方程式および渦無しの条件に従う。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right\} = -\nabla P - \rho \mathbf{F}_{\text{ex}} \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0 \quad (3)$$

ここで、 ρ は密度、 \mathbf{v} は速度場、 P 、 \mathbf{F}_{ex} はそれぞれ流体素片に加わる圧力と外力を表す。いくつかの式変形の後、密度や流速、圧力について摂動を考えれば、 \mathbf{v} と $\mathbf{v} = \nabla \Phi$ で結ばれる流速ポテンシャル Φ の摂動 $\delta \Phi$ が従う方程式は

$$\frac{1}{\sqrt{-s}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-s} s^{\mu\nu} \frac{\partial \delta \Phi}{\partial x^\nu} \right) = 0 \quad (4)$$

$$s = \det s_{\mu\nu} \quad (5)$$

$$(s_{\mu\nu}) = \frac{\rho}{c_s} \begin{pmatrix} -(c_s^2 - v^2) & -v^i \\ -v^j & \delta^{ij} \end{pmatrix} \quad (6)$$

となる。ここで、音速を $c_s = \sqrt{\partial P / \partial \rho}$ とした。この式は重力場中の波動方程式である Klein-Gordon 方程式

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \right) = 0 \quad (7)$$

と同じ形をしている。これはすなわち、音についての波動方程式で、重力場中の波動方程式を模倣することができたということの意味している。

Acoustic ブラックホールの計量 $s_{\mu\nu}$ を求めることができたので、今度は特定の時空をモデル化するために Oliveira らの論文で使われている線素を計算する。(1+2) 次元の、流速が直交座標系を用いて

$$\mathbf{v}(x, y) = v(x) \mathbf{e}_x \quad (8)$$

で表される流体を考える。連続の方程式より密度は、積分定数 k を用いて

$$\rho(x) = \frac{k}{v(x)} \quad (9)$$

で表せるので、Acoustic ブラックホールの線素は

$$\begin{aligned} ds^2 &= s_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= \frac{k^2}{c_s^2 v^2} \left[- (c_s^2 - v^2) dt^2 - 2v dt dx + dx^2 + dy^2 \right] \end{aligned} \quad (10)$$

となる。ここからさらに時空を限定していくことで、特定の時空をモデル化することができる。実際に、これを JNWW 時空の線素と同一視していく。

3 Analogue model for JNWW spacetime

Oliveira らに倣い、JNWW 時空と Acoustic ブラックホールを対応させていく。JNWW 時空を表す線素は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} ds^2 &= -f^\gamma(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f^\gamma(r)} + r^2 f^{1-\gamma}(r) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\ f(r) &= 1 - \frac{r_g}{r} \end{aligned} \quad (11)$$

γ は Schwarzschild 時空との違いを表す量で、 $\gamma = 1$ のとき Schwarzschild 時空に一致する。この線素を、Acoustic ブラックホールの線素 (10) と同一視していく。以下、JNWW 時空の線素を $\theta = \pi/2$ で固定し、比較する。また、音速 c_s は c として記す。

まず、2つの式を見比べ、クロスターム $dt dx$ をなくすために、新たな時間座標

$$T = t + \int \frac{v(x')}{c^2(x') - v^2(x')} dx' \quad (12)$$

を用いれば、線素 (10) 式は、

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{k^2}{c^2(x)v^2(x)} \left\{ - [c^2(x) - v^2(x)] dT^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{c^2(x)}{c^2(x) - v^2(x)} dx^2 + dy^2 \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

となる。次に、 dy^2 と $d\phi^2$ とを比較する。新たな角度座標 $\Theta = y/L \pmod{2\pi}$ を用いれば (L は典型的な長さであるとし、今は 1 とおいた。極座標の角度方向座標 ϕ と直交座標 y とを同一視するために、 y を無次元化し、周期境界条件を持つようにしている。)、その係数が等しくなるように、動径座標 $R(x)$ を用いて

$$R^2(x) f^{1-\gamma}(R) = \frac{k^2}{c^2(x)v^2(x)} \quad (14)$$

という条件が得られる。したがって、音速は

$$c(x) = \frac{k}{R(x)v(x)f^{(1-\gamma)/2}(R(x))} \quad (15)$$

ときまる。音速 c を線素に代入して消去し、 $R'(x) = dR(x)/dx$ であることに注意すれば、線素は、以下の形になる。

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(R^2 v^2 f^{1-\gamma}(R) - \frac{k^2}{v^2} \right) dT^2 + \frac{dR^2}{\frac{R'^2}{R^2 f^{1-\gamma}} - \frac{R'^2 v^4}{k^2}} \\ &\quad + R^2 f^{1-\gamma}(R) d\Theta^2 \end{aligned} \quad (16)$$

次に、JNWW 時空の線素は、 g_{tt} と g_{rr}^{-1} が同じ形をしていることから、その条件を課せば、

$$\left(R^2 v^2 f^{1-\gamma}(R) - \frac{k^2}{v^2} \right) = \frac{R'^2}{R^2 f^{1-\gamma}} - \frac{R'^2 v^4}{k^2} \quad (17)$$

となり、 v が

$$v(x) = \pm \frac{kR(x)f^{(1-\gamma)/2}(x)}{R'(x)} \quad (18)$$

と定まる。こうして得られた、 v を代入するなどすれば、最終的に Acoustic metric が、座標変換や課した制約条件により、

$$\begin{aligned} ds^2 &= - \left(\frac{R'^2}{R^2 f^{1-\gamma}} - \frac{k^2 R^4 f^{2(1-\gamma)}}{R'^2} \right) dT^2 \\ &\quad + \frac{dR^2}{\frac{R'^2}{R^2 f^{1-\gamma}} - \frac{k^2 R^4 f^{2(1-\gamma)}}{R'^2}} + R^2 f^{1-\gamma} d\Theta^2 \end{aligned} \quad (19)$$

となる。 $f(R)^\gamma$ の形が JNWW 時空と同様になれば JNWW 時空と全く同じ線素の形になるので、

$$\frac{R'^2}{R^2 f^{1-\gamma}} - \frac{k^2 R^4 f^{2(1-\gamma)}}{R'^2} = f^\gamma(R) \quad (20)$$

となるから、

$$R'^4 - R^2 R'^2 f - k^2 R^6 f^{3(1-\gamma)} = 0 \quad (21)$$

という条件を得る。ここで、 $k = r_g = 1$ という単位系をとり、具体的に $f(R) = 1 - r_g/R$ を代入すれば、

$$R'(x)^4 - R(x)^2 R'(x)^2 \left(1 - \frac{1}{R(x)}\right) - R(x)^6 \left(1 - \frac{1}{R(x)}\right)^{3(1-\gamma)} = 0 \quad (22)$$

という微分方程式を得る。この微分方程式を満たすような $R(x)$ であれば、JNWW 時空の線素と Acoustic ブラックホール時空の線素とが同じ形で表現される。したがって、その時、JNWW 時空のモデル化ができたと考えられる。

なお $R(x)$ がわかれば、 $v(x)$ や $c(x)$ 、 $\rho(x)$ の形も式 (18) や (15)、(9) より定まる。また、圧力 P も、定義に従い、

$$\frac{dP}{dx} = c^2(x) \frac{d\rho}{dx} \quad (23)$$

を積分すれば得られる。

以上の $R(x)$ 、 $v(x)$ 、 $c(x)$ をプロットしたグラフが図 1 である。この図から Schwarzschild 時空のモデルとは違い、JNWW 時空のモデルでは常に $c(x) > v(x)$ となり、裸の特異点時空にホライズンがなく、光が閉じ込められないことへの対応になっていることがわかる。ここから、光に関するモデル化は正当性があると考えられる。

4 Tidal forces

前節で得られた JNWW 時空の流体モデルにおける更なる正当性を確かめるため、今度は光ではなく、粒子に関する現象、特に潮汐力に注目する。潮汐力とは、重力源の方向に向かって物体を引き伸ばそうとする力のことである。ブラックホールの周りではその重力の強さから、潮汐力も大きくなる。我々は、潮汐力に対する流体の対応として、流速 v の速度勾

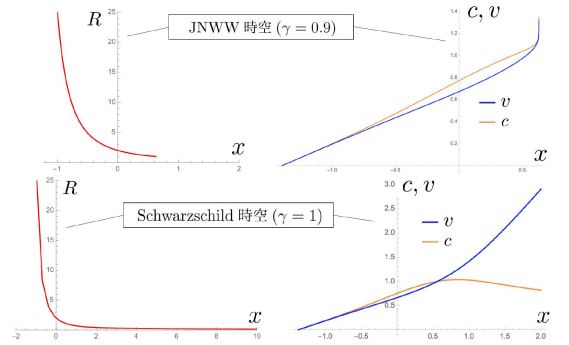


図 1: 上図: JNWW 時空赤道面でのモデル。 $R(x) = 1$ が裸の特異点に対応。下図: Schwarzschild 時空赤道面でのモデル。 $R(x) = 1$ がホライズン、 $R(x) = 0$ が特異点に対応。左図: 初期条件を $R(0) = 2$ として解いた式 (22) の数値解の 1 つ。右図: (15) 式、(18) 式のグラフの 1 つ。

配を考えた。これは、重力によって物体が引き伸ばされる現象と、流体の流れによって例えば何らかの煙が伸ばされる現象が対応しているのではないかと考えたためである。

JNWW 時空における潮汐力については先行研究で考察されており [4]、角運動量のない自由落下する粒子が受ける動径方向の潮汐力は

$$\frac{\gamma r_g}{r^3} f^{\gamma-2} \left(1 - \frac{1 + \gamma r_g}{2} \frac{r_g}{r}\right) \quad (24)$$

に応じて大きくなる。式 (24) のグラフと流速勾配のグラフを並べると図 2 となる。これらは概形は一致しているものの、 γ の変化に対する定性的振舞いが一致していない。この理由はこのモデルにおける潮汐力の対応物が、 $|dv/dR|$ ではないか、もしくは JNWW 時空中の粒子の運動については、このモデル化が適当ではないことが原因だと考えられる。

5 Conclusion

裸の特異点を持つ JNWW 時空のモデル化を行った。光に関する現象はこの流体モデルで表現できたが、粒子については少なくとも潮汐力において定性的な不一致が見られた。今後は、裸の特異点まわりの粒子の運動まで含め、流体でモデル化するための研究を進めていく。

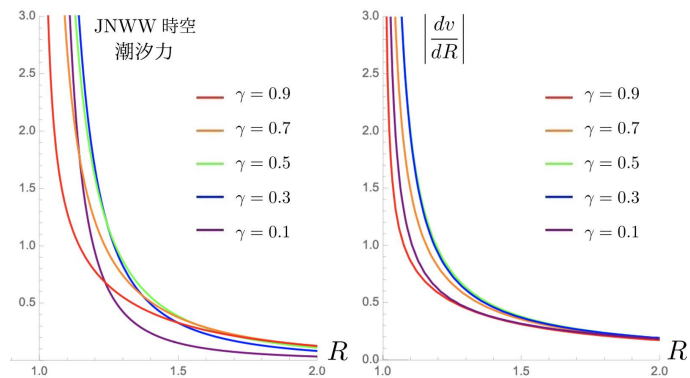


図 2: 潮汐力と流速勾配の図。左図：式 24 のグラフ。右図：流速勾配 $|dv/dR|$ を表す。どちらも $r_g = 1$ とした。

Acknowledgement

今回発表の場として、天文・天体物理若手夏の学校を設営・運営して下さったスタッフの方々、そして支援して下さった方々に心より感謝申し上げます。またこの研究を進めるにあたり、手厚いご指導をくださった東京学芸大学 小林晋准教授、納得がいくまで議論に付き合ってくださいました研究室の先輩方・同期の皆様に深く感謝申し上げます。

Reference

- [1] W. Unruh, “Experimental Black-Hole Evaporation?”, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 1351 (1981).
- [2] C. Oliveira *et al.*, “Analogue models for Schwarzschild and Reissner-Nordstrom spacetimes”, *Phys. Rev.* **104**, 024036 (2021).
- [3] C. Oliveira and R. Mosna, “Analog model for the BTZ black hole” *Phys. Rev.* **106**, 064030 (2022).
- [4] 太田溪介, 東京学芸大学教職大学院専門学術論文 (2021).

重宇 c09

宇宙項を持つ $(1 + 1)$ 次元ブラックホールの準固有振動について

鬼澤 宥人

宇宙項を持つ (1+1) 次元ブラックホールの準固有振動について

鬼澤 宥人 (東京学芸大学教職大学院 教育学研究科)

Abstract

ブラックホールの性質を調べる方法としてブラックホール背景時空に摂動を加え、境界条件を課すことで得られる準固有振動 (Quasinormal mode) を調べるというものがある。この振動はブラックホールの内部構造の情報を持っていると考えられ、ブラックホールの安定性を調べることができる。これまで様々なブラックホールについて様々な方法で調べられているが、本研究では宇宙項をもつ (1+1) 次元のブラックホールの準固有振動を解析的に求めた。結果として、振動数が純虚数で得られ、過減衰の振動が得られた。また、宇宙項が準固有振動に与える影響について分析し、その結果、宇宙項が振動数を小さくする方向に働き、振動の周期を小さくする働きを持つことが分かった。

1 Introduction

ブラックホールは宇宙に存在する、高密度で重力が非常に強い天体である。そのため光も脱出することができない領域が存在し、その境界を事象の地平面 (horizon) と呼ぶ。また、ブラックホールの中心には特異点 (singularity) と呼ばれる点が存在すると考えられている。特異点は物質の密度や時空の曲がり具合を表す曲率が無限大に発散してしまっている点で、そこでは一般相対性理論などに基づく物理法則が破綻してしまうと考えられている。こうしたブラックホールの内部構造を直接視覚から観測することは難しい。なぜなら、事象の地平面の内部から電磁波 (光) が出てくることはできないため、事象の地平面の外に内部の情報を伝えることができず、直接ブラックホール内部を観測することができないからである。

この問題を解決する方法の一つとしてブラックホールの準固有振動 (quasinormal mode) を用いる方法がある。準固有振動とはブラックホールに微小な揺らぎ (摂動) を加えた時に生じる波の一種であり、ブラックホールの安定性などを調べることができる。具体的には摂動を加えて生じる波にブラックホールの horizon に向かって内向き (ingoing)、無限遠方に向かって外向き (outgoing) に伝わるという境界条件を課すことで得られる。準固有振動はブラックホール内部の様子に応じて変化するため内部の構造を知ることができる可能性があり、近年盛んに研究されている。

こうした流れの中で、Bhattacharjee らは (1+1) 次元ブラックホールの準固有振動を求めた [1]。一般相対性理論から、重力の本質は時空の曲がりであるこ

とが分かっているが、(1+1) 次元時空はその効果が現れる最も次元の低い時空である。そのため (1+1) 次元ブラックホールは通常の (3+1) 次元ブラックホールに関連する情報を引き抜くために有効なケーススタディになると期待されている。

本研究では、(1+1) 次元で宇宙項が時空に存在する場合に注目した。宇宙項は宇宙論的観測から存在が示唆されている量で、真空のエネルギーとして働くと考えられている。その量が (1+1) 次元ブラックホールの準固有振動に与える影響を解析した。以下、本稿では $c = 1$ の単位系を用いる。

2 1+1 dimensional black hole

(1+1) 次元時空における重力理論は (3+1) 次元時空に比べて計算が容易であり、重力の本質的な効果がみやすいと期待される。しかし (1+1) 次元では時空の曲がり具合を表すアインシュタインテンソルがゼロになるため、適当な物質場 (スカラー場) を導入することでブラックホール解を得ることができる。そこで (1+1) 次元時空における重力場の作用としてディラトン場 ψ を導入した

$$S[g_{\mu\nu}, \psi] = \int d^2x \sqrt{-g} \times \left[\frac{1}{16\pi G_2} \left(\psi R + \Lambda + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi \right) + \mathcal{L}_m \right] \quad (1)$$

が考えられた [2]。ここで $g^{\mu\nu}$ や R はそれぞれ時空の曲がりを表す計量とリッチスカラー、 G_2 は 2 次元

の万有引力定数、 Λ は宇宙項、 \mathcal{L}_m は物質のラグランジアン密度である。また $g = \det(g_{\mu\nu})$ である。宇宙項 Λ は物理的には真空のエネルギーに相当し、宇宙の加速膨張を引き起こすダークエネルギーの候補とも考えられている。この作用の変分をとると、一般相対性理論の基本方程式である Einstein 方程式に相当する式が得られる。

この作用 (1) 式の右辺にある物質のラグランジアンとして質量 M の質点が $x = 0$ に依存している状況

$$\rho = \left(\frac{M}{2\pi G} \right) \delta(x) \quad (2)$$

を考え、変分によって求められた式を解くと、時空の歪みを表す線素 ds^2 が以下のように得られる。

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -f(x) dt^2 + f^{-1}(x) dx^2$$

$$f(x) = -\frac{1}{2} \Lambda x^2 + 2M|x| - C \quad (3)$$

ここで C は任意定数である。以下ではホライゾンが 2 つ存在する場合に相当する $2M^2 - \Lambda C > 0$ について考える。この条件下ではこの解はブラックホール解である。

3 Quasinormal modes of 1+1 dimensional black hole

本研究では宇宙項を含んだ (1+1) 次元ブラックホールに摂動という微小な揺らぎを加え、どのような振る舞いをするのか先行研究と比較した。(1+1) 次元で摂動の準固有振動を求めるには波動方程式の拡張である Klein-Gordon 方程式をさらに一般化した

$$\frac{1}{\sqrt{-gh(\phi)}} \partial_\mu (\sqrt{-gh(\phi)} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Psi) = 0 \quad (4)$$

を解き、無限遠方で $\Psi = 0$ という境界条件を課せば良い。ここで $g^{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ の逆行列であり、(3) 式の $f(x)$ は $|x| - 2M/\Lambda$ を改めて x とおいた

$$f(x) = -\frac{1}{2} \Lambda x^2 + \frac{2M^2}{\Lambda} - C \quad (5)$$

を表す。ここで (4) 式を満たす波動関数 Ψ を

$$\Psi(x, t) = \frac{R(x)}{\sqrt{h(x)}} e^{-i\omega t} \quad (6)$$

と変数分離し、

$$x_* = \int \frac{dx}{f(x)} \quad (7)$$

で定義される座標 (tortoise coordinate) を用いて (4) 式を変形すると $R(x)$ は

$$\frac{d^2 R(x)}{dx_*^2} + [\omega^2 - V(x)] R(x) = 0 \quad (8)$$

$$V(x) = \frac{3}{16} \Lambda^2 x^2 - \frac{2M^2 - \Lambda C}{4} - \frac{(2M^2 - \Lambda C)^2}{4\Lambda^2 x^2}$$

に従う。(8) 式は Regge-Wheeler 方程式と呼ばれる方程式である。ここで $V(x)$ は有効ポテンシャルであり、このポテンシャルを考えることで光や粒子の運動の定性的振る舞いについて考えることができる。

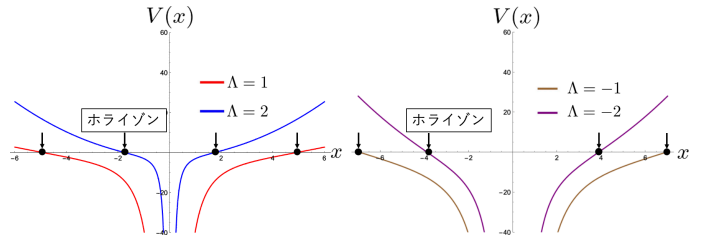


図 1: 有効ポテンシャルの図。 $M = 3, C = 5$

左図: Λ が正の場合 右図: Λ が負の場合

$\Lambda = 1$ (赤), $\Lambda = 2$ (青), $\Lambda = -1$ (茶), $\Lambda = -2$ (紫)

図 1 の有効ポテンシャルの形から、宇宙項 Λ の絶対値が増加するほどポテンシャルが屹立することが分かる。また、どの宇宙項の値に対しても光のエネルギーの大きさに関係なくブラックホールの中へと進んでいくことが分かる。

さらに (8) 式を解くために無限大の値を有限の値とする座標変換

$$y = \frac{1}{\cosh^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{4M^2 - 2\Lambda C} x_* \right)} \quad (9)$$

そして $R(y)$ の展開として

$$R(y) = (y-1)^A y^B F(y)$$

$$A = \frac{3}{4}, B = \frac{-i\omega}{\sqrt{4M^2 - 2\Lambda C}} \quad (10)$$

とおくと、 $F(y)$ について超幾何微分方程式

$$y(1-y)\frac{d^2F(y)}{dy^2} + [c - (1+a+b)y]\frac{dF(y)}{dy} - abF(y) = 0 \quad (11)$$

$$a = b = 1 - \frac{i\omega}{\sqrt{4M^2 - 2\Lambda C}}, \quad c = 1 - \frac{2i\omega}{\sqrt{4M^2 - 2\Lambda C}}$$

が得られる。この超幾何微分方程式については係数と解についての関係が知られている。

$${}_2F_1(a, b; c; x) = (1-x)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b; c; x)$$

$${}_2F_1(c-a, c-b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \quad (12)$$

ここで、準固有振動を得るための境界条件として $y = 1$ (無限遠方) で $F(y) = 0$ という条件を課す。つまり分母のガンマ関数が発散する条件から準固有振動の振動数は

$$\omega = -i\sqrt{4M^2 - 2\Lambda C}(n+1) \quad (13)$$

と求められる。ただし、 $n = 0, 1, 2, \dots$ をとる。本研究では $2M^2 - \Lambda C > 0$ を考えているため ω は純虚数であり、(6) 式より $\Psi(t)$ の時間依存部分は

$$e^{-\sqrt{4M^2 - 2\Lambda C}t} = e^{-2M\sqrt{1 - \frac{2\Lambda C}{4M^2}}t} \quad (14)$$

となる。これより振動の様子は過減衰に相当することが分かる。これは先行研究 [1] や宇宙項 $\Lambda = 0$ の場合と同様の結果である。

次に、無次元化したパラメータ $a = 2\Lambda C/4M^2$ を変化させ、波動関数の時間依存性について宇宙項 Λ の効果について議論する。

図 2 から、宇宙項を大きくしていくと、減衰の時定数が大きくなるためゆっくりと減衰するようになることが分かる。これは正の宇宙項が空間を膨張させる働きがあり、空間が引き伸ばされることで光の波長が伸びることによるものと考えられる。なぜなら光速は $c = \lambda/T$ かつ一定であることから、波長が伸びることで周期 T が大きくなったと解釈できるからである。よってこれは物理的にも妥当な結果であると考えられる。また、この結果は (3+1) 次元の de-Sitter シュバルツシルトブラックホールの準固有振動の宇宙項の影響とも一致している [3]。

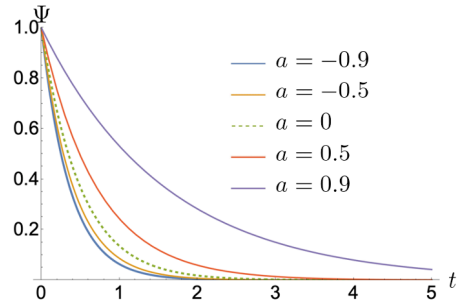


図 2: パラメータ a を変化させた時の図。 $a = -0.9$ (青)、 $a = -0.5$ (橙)、 $a = 0$ (緑)、 $a = 0.5$ (赤)、 $a = 0.9$ (紫)

4 Conclusion

宇宙項がある場合の (1+1) 次元ブラックホールでの準固有振動を求め、宇宙項がない場合と同様に過減衰に相当する振動になることが分かった。また正の宇宙項について、宇宙項の影響によって減衰の時定数が変化することが分かった。

今後は、負の宇宙定数の場合や特異点を回避した Regular ブラックホールの準固有振動について低次元のものから高次元のブラックホールまで調べていきたいと考えている。

Acknowledgement

今回発表の場として、天文・天体物理若手夏の学校を設営・運営して下さったスタッフの方々、そして支援して下さった方々に心より感謝申し上げます。またこの研究を進めるにあたり、手厚いご指導をくださった東京学芸大学 小林晋准教授、納得がいくまで議論に付き合ってくださいました研究室の先輩方・同期の皆様に深く感謝申し上げます。

Reference

- [1] S. Bhattacharjee (2021), Phys. Rev. D103, 024008
- [2] J. Mureika, & P. Nicolini (2011), Phys. Rev. D84, 044020
- [3] A. Zhidenko (2003), Class. Quantum Grav. 21 273 280

重宇 c10

非整数階微積分のフラクタル図形との関係および物理
現象へのその応用

小林 弘太郎

非整数階微積分のフラクタル図形との関係および物理現象へのその応用

小林 弘太郎 (東京学芸大学大学院 教育学研究科 物理学研究室)

Abstract

非整数階微積分は通常の微積分を拡張した定義を持つ新たな演算である。近年、この非整数階微積分は物理現象が起こる空間の有効的な次元と対応付けされ、様々な現象の解析に用いられており、その有効性が明らかになりつつある。また現在は、ブラックホール時空の特異点付近での物質の運動や初期宇宙の発展の様子を精密に記述するために活用されている。しかし非整数階微積分は、実に多くの定義が考えられており、一般にどの定義が正しいか、どの定義を物理現象へ適用すべきかなどは分かっていない。そこで本研究では、特に conformable 微分と呼ばれる非整数階微積分の定義について、フラクタル図形との関係性を示した。また物理現象への適用し、通常の微積分と比較を行い、conformable 微分の特性を示した。

1 Introduction

非整数階微積分は $1/2$ 階の微分や $\sqrt{2}$ 階の積分など、整数ではない任意の実数階で微積分を行えるようにしたものである。この非整数階微積分は数学の分野ではライプニッツの時代から約 300 年研究されている歴史ある計算であるが、物理現象への応用は約 30 年ほどの短い歴史しかない。近年急速に様々な適用が進んだ背景には、フラクタル幾何学の発展により非整数次元との関係が見つかったことにある。そして現在、非整数階微積分は人間の皮膚への薬物の浸透の解析や大気汚染の広がりの解析など、様々な分野で活用され、その有効性が明らかになりつつある [1,2]。

また量子重力理論では、微視的なスケールで時空は最小の構造を持ち、そのスケールより小さいスケールでは時空の有効次元が低下することが示唆されている [3]。そしてブラックホール時空の特異点付近での物質の運動や初期宇宙の発展の様子を精密に記述するために非整数階微積分が活用されている [4,5]。

しかし非整数階微積分の定義はいくつも存在しており、どの定義をどの現象へ適用すべきかは自明ではない [6]。これは定義ごとに演算の性質が異なることに由来している。例えば通常の微分で成り立つ積の微分則や合成関数の微分則が成り立たないタイプの非整数階微積分も存在し、既に解が知られている現象に非整数階微積分を適用したとしても解析解を得られるかも定かではない。このような問題に対して、通常の微積分が持つ法則を多く残した非整数階微積分として、conformable 微分が提案された [7]。

本研究ではこの conformable 微分と次元の関係をフラクタル図形と関連付けて調べた。また conformable 微分を物理現象へ適用し、通常の微分の場合と比較することで、conformable 微分の特性を調べた。

2 Background “philosophy” of fractional calculus

微分は連続で滑らかな関数に関して無限小の微小量に対する変化を考えることで定義される。しかしながら実際の自然現象をモデル化する場合は、注目するスケールに応じて粗視化の様子が異なる。

例えば図 2.1 のように障害物のある空間中を進む物体の運動を考えてみる。図 2.1 の左のように微視的な過程を無視する粗視化をすれば、運動を連続で滑らかに繋げることができ、通常の微分を使用することができる。一方で図 2.1 の右のようにゴール地点

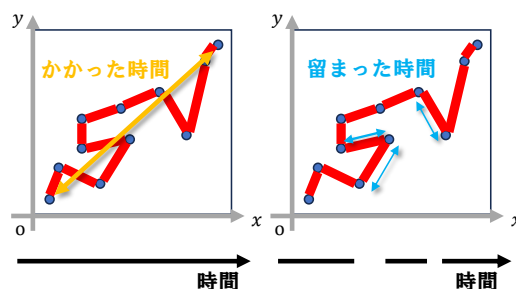


図 2.1: 粗視化のスケールが異なる微分のイメージ図

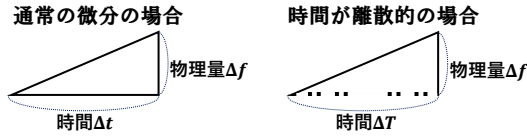


図 2.2: 離散的な微分のイメージ図

までの距離が変化していない短い時間に着目し、その間物体の時間は「進んでいない」と見る粗視化もある。この場合は、同じ図の下の時軸に表現されているように、時間が離散化されたことに相当する。このような離散的な時間では、通常の微分の定義は適用することができない。しかし時間の離散性に規則性がないときは、この時間 ΔT による微分を考えることは難しい。一方で時間の離散性に規則性があるとき、すなわち時間がフラクタル性を持つときは、物理現象のモデル化が可能な微分を定義できる。

3 Relationship between fractal geometry and effective dimension

コッホ曲線やシェルピンスキーのギャスケット (図 3.1) はフラクタル図形の代表例であり、どの部分を拡大しても元の図形と相似な図形が現れるという特徴を持っている。これらにはハウスドルフ次元 (分割したときに小さい相似図形がいくつできるかで定義された次元) を定義することができ、これを使用すると、コッホ曲線は約 1.26 次元、シェルピンスキーのギャスケットは約 1.58 次元となる。

一般に図形の次元 α と、図形の長さや面積や体積など、図形の特徴を表す量 X には、 x を長さの次元を持つ量として

$$X = Ax^\alpha \tag{1}$$

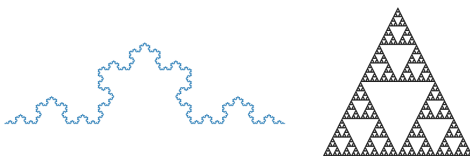


図 3.1: コッホ曲線とシェルピンスキーのギャスケット

という関係がある (A は比例定数)。たとえば 2 次元の平面図形は、 $\alpha = 2$ であるから x^2 に比例した量が図形の特徴的な量 (面積) となる。このように考えると、コッホ曲線やシェルピンスキーのギャスケットについては $x^{1.26}$ や $x^{1.58}$ という量が図形の特徴的な量となるが、明らかにこれは長さや面積ではなくなる。

微分についても、離散的な時間がフラクタル性を持つならば、微分の微小変位を Δt という量で表すのではなく、次元 α を用いた時間の長さの特徴的な量 Δt^α で考えることが必要になる。すると時間がフラクタル性を持つときの微分は

$$\frac{df}{dT} = \frac{1}{A} \frac{df}{dt^\alpha} \tag{2}$$

となる。仮に物理量が $f = t^2$ であれば、この式に従って微分すると $df/dT = 2t^{2-\alpha}/\alpha A$ となる。よって時間がフラクタル性を持つときには非整数階の微分が現れる。

4 Conformable derivative and results

非整数階微積分は通常の微積分に連続する自然な定義が考えられている。導関数や重積分、Fourier 変換など既存の様々な演算の定義が拡張され、演算の性質や計算結果の異なる非整数階微積分が存在している。そのうちの一つである ν 階の conformable 微分は

$$D_t^\nu f(t) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \epsilon t^{1-\nu}) - f(t)}{\epsilon} = t^{1-\nu} \frac{d}{dt} f(t) \tag{3}$$

で定義される非整数階微積分である。例えば $f(t) = t^2$ のとき、定義式に代入すると、 $f(t)$ の ν 階微分は

$$D_t^\nu f(t) = t^{1-\nu} \frac{d}{dt} t^2 = 2t^{2-\nu} \tag{4}$$

となる。この結果は conformable 微分が微小変位をフラクタル図形にしたときの微分と t の冪が一致していることを表す。また conformable 微分は表 4.1 のように通常の微積分が持つ法則を多く残している。本研究では conformable 微分を使用し、時間がフラクタル性を持つ離散的な状態での物理現象の解析を行った。そして通常の微分で表される運動と比較を行った。

表 4.1: 通常の微分と conformable 微分の法則の比較

名称	通常の微分	conformable 微分
定数の微分	$\frac{d}{dt}A = 0$	$D_t^\nu A = 0$
積/商の微分 ライプニッツ則	$\frac{d}{dt}\{f(t)g(t)\} = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$	$D_t^\nu\{f(t)g(t)\} = D_t^\nu f(t)g(t) + f(t)D_t^\nu g(t)$
合成関数の微分 チェーンルール	$\frac{d}{dt}\{f(g(t))\} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dt}$	$D_t^\nu\{f(g(t))\} = \frac{df}{dg} D_t^\nu g$
冪関数 t^α の微分	$\frac{d^n}{dt^n} t^\alpha = A t^{\alpha-n}$	$D_t^\nu t^\alpha = A t^{\alpha-\nu}$
固有関数	$\frac{d}{dt}f(t) = f(t),$ $f(t) = \exp(t)$	$D_t^\nu(t) = f(t),$ $f(t) = \exp\left(\frac{1}{\nu}t^\nu\right)$

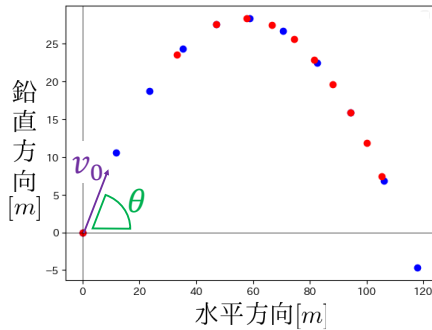


図 4.1: 非整数階微積分を用いた斜方投射: 青点は $\nu = 1$ で微分、赤点は $\nu = 0.5$ で微分をしている。このとき $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $v_0 = 120 \text{ km/h}$, $\theta = 45^\circ$, 0.5 s 間隔でそれぞれ 10 打点している。

斜方投射に非整数階微積分を導入すると、水平方向・鉛直方向それぞれの運動方程式の 1 階微分を ν 階微分に取りかえると

$$\begin{cases} D_t^\nu\{D_t^\nu x(t)\} = 0 \\ D_t^\nu\{D_t^\nu y(t)\} = -g \end{cases} \quad (5)$$

となる。ここで g は重力加速度である。そして初期条件として、 $x(0) = y(0) = 0$, $D_t^\nu \mathbf{r}(x, y)|_{t=0} = v_0$, 打ち上げ角度 θ を用いると

$$\begin{cases} x = \frac{v_0}{\nu} t^\nu \cos \theta \\ y = -\frac{g}{2\nu^2} t^{2\nu} + \frac{v_0}{\nu} t^\nu \sin \theta \end{cases} \quad (6)$$

が得られる。これを横軸を水平方向、縦軸を鉛直方向としてグラフにしたものが図 4.1 である。

5 Conclusion and Future work

conformable 微分を用いた運動は、物体は通常の運動と同じ軌道となる。一方、方程式の解は、時間 t が t^ν/ν ($0 < \nu < 1$) に変換したものになり、微分の階数 ν が小さくなるほど、物体の運動の時間発展が遅くなる。このとき微分の階数が 1 より下がることは、障害物による運動の遅延に対応している。

今回、数多くある非整数階微積分のなかで conformable 微分を使用して、時間がフラクタル性を持つときの物理現象について考えた。したがって非整数階微積分の一般的な性質を表せているとは限らない。今後は、この結果が適用できる実際の物理現象が存在しているかを突き止めたい。

Acknowledgement

今回発表の場として、天文・天体物理若手夏の学校を設営・運営して下さったスタッフの方々、そして支援して下さった方々に心より感謝申し上げます。またこの研究を進めるにあたり、手厚いご指導をくださった東京学芸大学 小林晋准教授、納得がいくまで議論に付き合ってくださいました研究室の先輩方・同期の皆様へ深く感謝申し上げます。

Reference

- [1] H. Zhou *et al.*, “Conformable derivative approach to anomalous diffusion”, *Physica A* 491 (2018) 1001-1013.
- [2] 島本憲夫, “非整数階微積分による異常拡散のモデル化について (その 1)”, *数理解析研究所講究録*, 第 1810 巻, 59-84 (2012).
- [3] G. Calcagni, “Multifractional theories : an conventional review”, *Journal of High Energy Physics*, 1703 (2017) 138.
- [4] A. Di Teodoro and E. Contreras, “A vacuum solution of modified Einstein equations based on fractional calculus”, *Eur. Phys. J. C* 83 (2023) 434.

- [5] M A. Garcia Aspeitia, “Cosmology under the fractional calculus approach ”, MNRAS 517, 4813–4826 (2022).
- [6] D. Valerio *et al.*, “How many Fractional Derivatives Are There?”, Mathematics, 10 (2022), 737.
- [7] R. Khalil *et al.*, “A new definition of fractional derivative”, J. Comput. Appl. Math. 264 (2014) 65-70.

重宇 c11

ベクトルテンソル理論の低エネルギー有効理論における
ブラックホール摂動

富塚 祥伍

ベクトルテンソル理論における低エネルギー有効理論

富塚 祥伍 (京都大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙の加速膨張を一般相対論で説明するにはダークエネルギーが必要であるが、代わりにベクトルの自由度を足すことで加速膨張を説明するベクトルテンソル理論と呼ばれるものがある。しかしこれだけでは多くのモデルがあり、観測との比較からモデルを峻別する必要がある。低エネルギー有効理論の方法では、これら多くのモデルを統一的に扱うことができる。本稿では、(K. Aoki 2024) に基づいて一般の背景時空の下での低エネルギー有効理論の構築方法についてレビューする。

1 Introduction

重力を記述する理論としての一般相対論は様々な観測に対して大きな成功を収めている。しかし、一般相対論がいかなるスケールでも成り立っている保証はない。一般相対論は太陽系程度のスケールではよく検証されているが、例えばミクロの世界や、逆に宇宙論的なスケールではよく検証されているとは言えない。現在、我々の宇宙は加速膨張していることが知られているが、一般相対論でこれを説明するにはダークエネルギーと呼ばれる未知の成分が必要であり、このダークエネルギーは多くの難題 (e.g. 微調整の問題) を抱えている。しかし、一般相対論におけるダークエネルギーの存在は、重力理論が宇宙論的なスケールで修正されることを示唆している可能性も考えられる。重力理論の修正に関して、多くのモデルが提案されており、その大半のモデルでは、一般相対論に対して自由度を追加することで、一般相対論からの修正を行っている。本発表では、一般相対論に対して、時間的なベクトル場を一つ追加する、ベクトルテンソル理論を考えることにする。ベクトルテンソル理論と言っても、様々なモデルが考えられ、どのモデルがこの世界をよく記述するかは、観測から制限をかけるしかない。しかし、観測から制限をかける際には、それぞれのモデルで観測量を導出することが必要である。ここで、低エネルギー有効理論 (EFT) の方法が役に立つ。EFT では、背景時空と背景ベクトル場を固定することで、それらを解としてもつ様々なモデルを統一的に扱うことができる。従って、モデルに依らずに観測量などを導出することができ、これにより、モデルの峻別が容易になる。本発表では (K. Aoki 2024) に基づいて、ベ

クトルテンソル理論における EFT についてレビューする。2 節において、EFT の構築方法について説明し、3 節では静的球対称背景時空の下での EFT について議論する。本発表では、時間的なベクトル場を考えることにする。

2 ベクトルテンソル理論における低エネルギー有効理論の構築

今節では、ベクトルテンソル理論における低エネルギー有効理論の構築方法について解説する。まず 2.1 においてベクトル場による対称性の破れについて議論し、その後、残った対称性のもとでどのような lagrangian が許されるかを 2.2、2.3、2.4 で見ていく。

2.1 ベクトルテンソル理論におけるベクトル場

今回はベクトルテンソル理論を考えるので、時間的なベクトル v_μ が存在するとする。するとこのベクトル場により、理論の 4 次元一般座標変換に対する不変性が破られる。ベクトル場 v_μ を、スカラー場 $\tilde{\tau}$ と、U(1) ゲージ場 A_μ を用いて、

$$v_\mu = \partial_\mu \tilde{\tau} + g_M A_\mu \quad (1)$$

とする。このとき、ベクトル場 (1) は時間に関する一般座標変換と U(1) 変換を組み合わせたもの

$$\tilde{\tau} \rightarrow \tilde{\tau} + g_M \chi, \quad (2)$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \chi \quad (3)$$

に関して不変となっている。以下、これを residual U(1) と呼ぶことにする。この自由度を使い \bar{t} を時間座標と同一になるように取ると、ベクトル場 (1) は

$$\mathbf{v}_\mu = \delta_\mu^\tau + g_M A_\mu \equiv \delta_\mu^\tau \quad (4)$$

とかける。このようなゲージを unitary ゲージと呼び、このゲージの下でのベクトル場を δ_μ^τ と書くことにする。

ベクトル場 δ_μ^τ は各点で時間的な方向を決めるため、それに伴う射影テンソルを自然に定義することができる。まず、ベクトル場 δ_μ^τ が決める時間方向の単位ベクトル \mathbf{n}_μ を

$$\mathbf{n}_\mu \equiv -\frac{\delta_\mu^\tau}{\sqrt{-g^{\tau\tau}}} \quad (5)$$

とする。但し $g^{\tau\tau}$ は、計量 $g_{\mu\nu}$ を用いて、 $g^{\tau\tau} = g^{\mu\nu} \delta_\mu^\tau \delta_\nu^\tau$ である。このとき、射影テンソル $\mathbf{h}_{\mu\nu}$ を

$$\mathbf{h}_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} + \mathbf{n}_\mu \mathbf{n}_\nu \quad (6)$$

と定義できる。¹このとき、この射影された空間における 3 次元一般座標変換に対して理論は不変である。

従ってまとめると、この理論は 3 次元一般座標と、residual U(1) の対称性を持っている。

2.2 EFT における building blocks

以下、unitary ゲージにおける EFT を考えることにする。上述の通り、この理論は 3 次元一般座標変換と、residual U(1) に関して不変であり、従って、この理論の lagrangian は原則として、これらの変換の下で不変な項は全て含まなくてはならない。今節では、計量 $g_{\mu\nu}$ 、射影テンソル $\mathbf{h}_{\mu\nu}$ 、ベクトル場 δ_μ^τ から、どのような量が許されるかを考える。以下、許される構成要素を building block と呼ぶことがある。

まず自明に、4 次元一般座標変換と、元々の U(1) に対して不変な量が許される。これは、計量 $g_{\mu\nu}$ 、4 次元共変微分 ∇_μ 、4 次元曲率テンソル $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ 、場の強さ $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ から作ることができる。

次に、3 次元一般座標変換と、residual U(1) に対して不変な非自明な量を考えることにする。(2),(3)

¹但し、任意の時間的なベクトル場 δ_μ^τ に対しては、これで空間的な超曲面が定義できるとは限らない。これは、ベクトル場の vorticity のためであり、vorticity が無いベクトル場の場合にはベクトル場に伴う自然な超曲面を定義できる。

で示したように、ベクトル場 δ_μ^τ は residual U(1) に対して不変であり、更に、3 次元一般座標変換に対して共変である。従って、このベクトル場 δ_μ^τ の大きさ $g^{\tau\tau}$ が building block として許される。

また、射影テンソル $\mathbf{h}_{\mu\nu}$ や単位ベクトル場 \mathbf{n}_μ は、ベクトル場 δ_μ^τ と計量 $g_{\mu\nu}$ から作られているので、これらは building block として許される。特に、これらから作られる量

$$\mathbf{K}_{\mu\nu} \equiv \mathbf{h}_{[\mu}^\alpha \nabla_\alpha \mathbf{n}_{\nu]}, \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\mu\nu} \equiv \mathbf{h}_{[\mu}^\alpha \nabla_\alpha \mathbf{n}_{\nu]} \quad (8)$$

は building block となる。ここで、 $()$ と $[\]$ はそれぞれ、対称化、反対称化を意味する。²更に、射影テンソルを用いて自然に、空間的な曲率テンソルを定義することができる。これは Gauss 方程式から、4 次元曲率テンソルと

$$\mathbf{h}_\mu^\alpha \mathbf{h}_\nu^\beta \mathbf{h}_\rho^\gamma \mathbf{h}_\sigma^\delta R_{\alpha\beta\gamma\delta} = {}^{(3)}\mathbf{R}_{\mu\nu\rho\sigma} + 2\mathbf{W}_{[\rho|\mu} \mathbf{W}_{|\sigma]\nu} \quad (9)$$

という関係にある。但し、 $\mathbf{W}_{\mu\nu} = \mathbf{K}_{\mu\nu} + \boldsymbol{\omega}_{\mu\nu}$ とした。このとき、3 次元曲率テンソルのトレース部分を

$${}^{(3)}\mathbf{R}_{\mu\nu} = {}^{(3)}\mathbf{R}_{\mu|\alpha|\nu}^\alpha \quad (10)$$

と定義すると、これは building block となる。³

また微分作用素としては、4 次元共変微分を射影したもの

$$\mathbf{D}_\mu \equiv \mathbf{h}_\mu^\alpha \nabla_\alpha \quad (11)$$

と、 \mathbf{n}_μ 方向の Lie 微分 \mathcal{L}_n が許される。

最後に、ゲージ場に対する非自明な building block を考える。場の強さ $F_{\mu\nu}$ を用いて、electric part と magnetic part を

$$\mathbf{E}_{\mu\nu} \equiv \epsilon_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \mathbf{n}_\rho F_{\sigma\alpha} \mathbf{n}^\alpha, \quad (12)$$

$$\mathbf{B}_{\mu\nu} \equiv \mathbf{h}_\mu^\alpha \mathbf{h}_\nu^\beta F_{\alpha\beta} \quad (13)$$

と定義する。但し、 $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \sqrt{-g} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ は完全反対称テンソルで、 $\epsilon_{0123} = 1$ とする。このとき、これらの量はそれぞれ building block となる。

²任意のテンソル $A_{\mu\nu}$ に対して、 $A_{(\mu\nu)} \equiv 1/2(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu})$ 、 $A_{[\mu\nu]} \equiv 1/2(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu})$ である。

³ここで定義した 3 次元曲率テンソルは通常の超曲面に対するものと異なり、トレース部分の反対称成分は一般に消えない。しかしこの反対称成分は $\mathbf{W}_{\mu\nu}$ でかけるので、building block としては考えなくてもよい。

従って、以上の building block を用いて、unitary ゲージにおける EFT の lagrangian は

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}(\mathbf{g}^{\tau\tau}, {}^{(3)}\mathbf{R}_{\mu\nu}, \mathbf{K}_{\mu\nu}, \mathbf{E}_{\mu\nu}, \mathbf{B}_{\mu\nu}, \mathcal{L}_n, \mathbf{D}_\mu) \quad (14)$$

とかける。⁴

2.3 Consistency relations

以下、高階微分の項は無視するとし、従って、 $\mathcal{L}_n, \mathbf{D}_\mu$ は Lagrangian に含まれないとする。このとき作用は

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}(\mathbf{g}^{\tau\tau}, {}^{(3)}\mathbf{R}_{\mu\nu}, \mathbf{K}_{\mu\nu}, \mathbf{E}_{\mu\nu}, \mathbf{B}_{\mu\nu}) \quad (15)$$

とかける。building block に関して、背景量からの摂動を

$$\delta \mathbf{g}^{\tau\tau} \equiv \mathbf{g}^{\tau\tau} - \bar{\mathbf{g}}^{\tau\tau}(\tau, \vec{x}) \quad (16)$$

$$\delta \mathbf{Z}_\nu^{I\mu} \equiv \mathbf{Z}_\nu^{I\mu} - \bar{\mathbf{Z}}_\nu^{I\mu}(\tau, \vec{x}) \quad (17)$$

と定義する。但し、バーがついているものは背景量を意味し、また、 $\mathbf{Z}_\nu^{I\mu}$ は $I = 1, 2, 3, 4$ がそれぞれ ${}^{(3)}\mathbf{R}_{\mu\nu}, \mathbf{K}_{\mu\nu}, \mathbf{E}_{\mu\nu}, \mathbf{B}_{\mu\nu}$ を意味する。Lagrangian を背景解周りで Taylor 展開すると、摂動の 1 次までで

$$S_{(1)} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\bar{\mathcal{L}} + \bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{g}^{\tau\tau}} \delta \mathbf{g}^{\tau\tau} + \bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{Z}_\nu^{I\mu}} \delta \mathbf{Z}_\nu^{I\mu} \right) \quad (18)$$

となる。⁵ Lagrangian は 3 次元一般座標変換と residual U(1) に関して不変であるが、一般の背景時空のもとでは、Taylor 展開の各項はこの対称性を破っている。これは、Taylor 展開の各項が τ, \vec{x} に依存しているからである。従って、残った対称性を尊重するように、各項はある関係で結ばれている。これを consistency relation と呼ぶ。例えば、摂動の 1 次のレベルで 3 次元一般座標変換に関する consistency relation は

$$\frac{\partial}{\partial \vec{x}} (\bar{\mathcal{L}})_\tau(\tau, \vec{x}) = \bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{g}^{\tau\tau}} \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}^{\tau\tau}}{\partial \vec{x}} + \bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{Z}_\nu^{I\mu}} \frac{\partial \bar{\mathbf{Z}}_\nu^{I\mu}}{\partial \vec{x}} \quad (19)$$

⁴ $\omega_{\mu\nu}$ は $\mathbf{B}_{\mu\nu}$ を使って書けるので、building block としては外した。

⁵また摂動の 2 次に関しては

$$S_{(2)} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} \bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{g}^{\tau\tau} \mathbf{g}^{\tau\tau}} (\delta \mathbf{g}^{\tau\tau})^2 + \bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{g}^{\tau\tau} \mathbf{Z}_\nu^{I\mu}} \delta \mathbf{g}^{\tau\tau} \delta \mathbf{Z}_\nu^{I\mu} + \frac{1}{2} \bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{Z}_\nu^{I\mu} \mathbf{Z}_\beta^{J\alpha}} \delta \mathbf{Z}_\nu^{I\mu} \delta \mathbf{Z}_\beta^{J\alpha} \right)$$

となる。同様に、residual U(1) に関しては

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\bar{\mathcal{L}})_{\vec{x}}(\tau, \vec{x}) = \bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{g}^{\tau\tau}} \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}^{\tau\tau}}{\partial \tau} + \bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{Z}_\nu^{I\mu}} \frac{\partial \bar{\mathbf{Z}}_\nu^{I\mu}}{\partial \tau} \quad (20)$$

が consistency relation となる。摂動の高次に関しても同様である。これら (19)、(20)、また、高次の consistency relation のもとで、作用が各次数で 3 次元一般座標変換と residual U(1) の対称性を持つことが保障される。

2.4 EFT action

以上の準備の下で、EFT における作用を

$$S_{\text{EFT}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{M_*^2}{2} f(x) \mathbf{R} - \Lambda(x) + (\mathbf{g}^{\tau\tau}, \mathbf{Z}_\nu^{I\mu} \text{ の 1 次の項}) + (\text{摂動の 2 次の項}) + \dots \right) \quad (21)$$

とかける。但し、 \mathbf{R} は 4 次元リッチスカラーから全微分項を引いたものである。⁶ このとき、EFT での作用の係数は完全に独立ではなく、2.3 節で示した Consistency relation で結ばれている。また、背景場の運動方程式は摂動の 1 次までで出てくるので、摂動の 1 次に関する係数、つまり、 $f(x), \Lambda(x)$ と、 $\mathbf{g}^{\tau\tau}, \mathbf{Z}_\nu^{I\mu}$ の係数は、背景場の運動方程式で関係しあっている。

3 静的球対称背景時空のもとでの EFT

今節では、前節で用意した EFT を、静的球対称背景時空に適用する。静的球対称時空は関数 $A(r), B(r)$ を用いて一般に、

$$ds^2 = -A(r) dt^2 + \frac{1}{B(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (22)$$

とかける。ここで Lemaître 座標⁷をとると、

$$ds^2 = -d\tau^2 + (1 - A(r)) d\rho^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (23)$$

となる。但し r は、 $r = r(\tau, \rho)$ であり、

$$\partial_\rho r = -\dot{r} = \sqrt{\frac{B(1-A)}{A}} \quad (24)$$

⁶これは、 $\mathbf{R} = {}^{(3)}\mathbf{R} + \mathbf{K}_\nu^\mu \mathbf{K}_\mu^\nu + \omega_\nu^\mu \omega^\nu \mu - \mathbf{K}^2$ とかける。

⁷Lemaître 座標は、無限遠から速度 0 で自由落下する観測者の固有時間を時間座標にとるような座標系である。

を満たす。今回は、EFT の 1 次までの作用として、

$$S_{\text{EFT}}^{\text{stadvpole}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{M_*^2}{2} \mathbf{R} - \Lambda(r) - c(r) \mathbf{g}^{\tau\tau} - \tilde{d}(r) \mathbf{K} - \alpha^I(r) \bar{\mathbf{Z}}_\nu^{I\mu} \mathbf{Z}_\mu^{I\nu} \right) \quad (25)$$

というものを仮定する。⁸また、背景ベクトル場は

$$\bar{A}_\mu = \delta_\mu^\tau q \quad (26)$$

と仮定する。但し、 q は定数である。これら背景量のもとで、EFT action の係数は背景時空の運動方程式を通して関係している。例えば背景時空として

$$A(r) = B(r) = 1 - \frac{r_s}{r} - \frac{\Lambda_{\text{eff}}}{3} r^2 \quad (27)$$

というものを考えると、運動方程式から

$$\Lambda = M_*^2 \Lambda_{\text{eff}} \quad (28)$$

$$c = 0 \quad (29)$$

$$\alpha^{I=2'} = 0 \quad (30)$$

$$\bar{\mathbf{K}}' \alpha^{I=2} + \tilde{d}' = 0 \quad (31)$$

となる。但し、 $'$ は r に関する微分である。この EFT action を用いて、静的球対称時空における低エネルギー有効理論での摂動論を考えることができる。

4 Conclusion

本稿では、まず 2 節において、一般の背景時空のもとでの、ベクトルテンソル理論における EFT の構築方法について解説した。ベクトルテンソル理論ではベクトル場により対称性が自発的に破れるが、その際に残った対称性を尊重する項を用いて EFT の作用を記述することができた。摂動量に関する Taylor 展開では、残った対称性を保証するように consistency relation が課され、それにより一般の背景時空での EFT の記述が可能となった。3 節では、EFT を静的球対称背景時空に対して適応し、その際の EFT action や、運動方程式を通じた係数間関係などを見た。この EFT を用いることで、本ポスター発表では、静的球対称背景時空のもとでの EFT におけるブラックホール摂動論に関して議論する。特に、摂動量に関するマスター方程式の導出などを行う。得ら

⁸異なる I の $\mathbf{Z}_\nu^{I\mu}$ 間の cross term も一般にはあってもよい。

れたマスター方程式を用いることで、QNM や tidal Love number などの計算が可能となり、これによりモデルと観測との比較などを行うことができると期待される。

Acknowledgement

お忙しい中、議論や助言に時間を割いてくださった基礎物理学研究所宇宙グループ、京都大学大学院天体核研究室の皆様と今回発表の機会を設けていただきにあたり尽力してくださったすべての方に御礼申し上げます。

Reference

K. Aoki et al. 2024, JCAP 03 (2024) 012

重宇 c12

帯電した球対称シェルのライスナーノルドシュトロム
時空上での運動

山崎 幹太

RN 時空上における charged shell の運動

山崎 幹太 (大阪公立大学大学院 理学研究科)

Abstract

BH に関する問題の 1 つとして、自然界に存在する BH は帯電するのか、という問題がある。ここでは、解析的に考える方法の 1 つとして物質を無限に薄い球殻 (shell) と見なすことを考える。BH 周りに陽子や電子で構成された球対称 shell をそれぞれ置くことで、2 枚の shell がどのように運動するのか、BH が帯電するのかを解析的に調べられると期待される。今回は、shell を複数置いた解析には踏み込まず、RN (Reissner - Nordström) 時空上における球対称な charged shell の運動について [1] に基づいて紹介する。

1 Introduction

BH に関する問題として、自然界に存在する BH は帯電するのか、もし帯電するならばどの程度であるか、どのような影響があるか、といった問題がある。帯電に関して、例えば BH まわりに同じオーダーの動径座標に位置している陽子と電子をテスト粒子として考えてみる。2 つの粒子が同じオーダーの運動エネルギーを持つとき、陽子と電子の速度の 2 乗の比が質量の逆数の比になることから、陽子の方が速度は小さくなる。このことから、陽子の方が角運動量が小さくなり、より BH に落ちやすくなるのではないかと考えられる。しかし、クーロン相互作用を考慮すると、BH に落ちる陽子に引きずられて電子も落ちるのではないかと考えられるため、BH の帯電に関してはより深く議論する必要がある。

ここでは、BH の帯電について解析的に考える方法の 1 つとして、物質を無限に薄い球殻 (shell) と見なすことを考える。球対称 BH のまわりに球対称な shell を置くことで、動径方向の 1 次元問題に帰着する。また、今回は複数の shell を置いた解析には踏み込まず、RN 時空上の球対称 charged shell の性質や運動を紹介する。

2 shell の性質

RNBH の周りに物質が shell 状に分布している状況を考える。shell の時空図は図 1 のようになり、 $r = R(\tau)$ の時間的超曲面を表す。すると、時空計量は shell

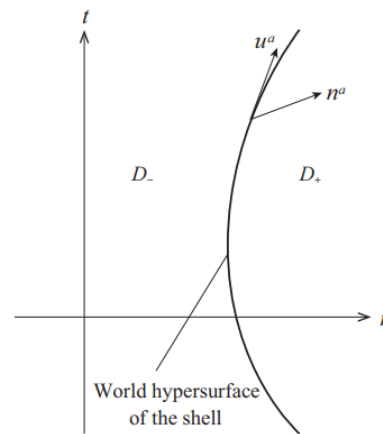


図 1: shell の世界超曲面

の内側と外側の領域で異なり、

$$ds^2 = -f_{\pm} dt_{\pm}^2 + f_{\pm} dr^2 + r^2 d\Omega^2 = d\lambda^2 + h_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (1)$$

$$f_{\pm} = 1 - 2M_{\pm}/r + Q_{\pm}^2/r^2 \quad (2)$$

と表される。式の 2 行目の形はガウス正規座標と呼ばれ、 λ を超曲面直交方向の固有長とした。ガウス正規座標は超曲面近傍であれば常に取ることができ。また、shell は無限に薄い球殻であることから、エネルギー運動量テンソルは

$$T_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} \delta(\lambda - \lambda_s) \quad (3)$$

$$S_{\mu\nu} = \sigma u_{\mu} u_{\nu} + P(h_{\mu\nu} + u_{\mu} u_{\nu}) \quad (4)$$

となる。 σ はエネルギー面密度、 P は圧力を表し、 λ_s は定数とした。このとき、球対称性より $S_{\mu\nu}$ の形は

完全流体型に限られる。

次に、shell の運動を調べるため、アインシュタイン方程式から得られる接続条件の 1 つである

$$K_{\mu\nu}^+ - K_{\mu\nu}^- = 8\pi G(S_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}S_\rho^\rho) \quad (5)$$

を用いる。 $K_{\mu\nu}$ は超曲面の外的曲率である。この式に対して、今考えている状況を当てはめると、

$$\dot{R}^2 + U(R) = 0 \quad (6)$$

$$U(R) = 1 - E^2 + \frac{1}{r} \left(-2M_- + \frac{Q_+^2 - Q_-^2}{m} E - mE \right) - \frac{1}{r^2} \left(\left(\frac{Q_+^2 - Q_-^2}{2m} \right)^2 - \frac{Q_+^2 + Q_-^2}{2} + \frac{m^2}{4} \right) \quad (7)$$

$$m := 4\pi\sigma R^2, \quad E := \frac{M_+ - M_-}{m}$$

を得る。 m は shell の固有質量、 E は shell の単位固有質量あたりの全エネルギーである。上式の通り 1 次元問題に帰着する。運動可能領域は $U(R) < 0$ であり、 $U(R)$ のグラフから shell が BH に落ちるかどうかが分かる。

ここで、 m や E が shell の運動に対して定数かどうかを調べたい。今考えている状況では、時空の質量パラメータは変化しないため、 m のみ調べれば良い。接続条件などを用いると、熱力学第一法則に相当する式

$$\frac{d(\sigma R^2)}{d\tau} + P \frac{dR^2}{d\tau} = 0 \quad (8)$$

を得る。この式から、shell を構成する粒子がダストである場合 ($P = 0$)、 m は固有時 τ に沿って定数であることが分かる。逆に、ダストでなく一般の場合は、 m や E は shell の運動に対して定数ではないことに注意する必要がある。

3 collisionless particles から構成される shell

m や E が定数でない場合、すなわち shell を構成する粒子がダストでない場合を考える。shell を構成する粒子が N 体系の collisionless particles であるとして考えてみる。N 体系のエネルギー運動量テンソルは粒子の質量を ϵ 、4 元速度を U^μ とすると

$$T^{\mu\nu} = \sum_{j=1}^N \epsilon \int \frac{1}{\sqrt{-g}} U^\mu U^\nu \delta^4 \{x^\rho - x_j^\rho(\tau)\} d\tau \quad (9)$$

と表される。このとき、エネルギー運動量テンソルは重力場中のテスト粒子の作用を変分して得られるものであるが、電磁相互作用項を含んでいても同じ形になる。また、この形は一般の N 体系で成り立つ。

この形を shell 状に分布した粒子に当てはめてみて考える。球対称性より、それぞれの粒子の角運動量は同じ値 l を取り、球面上を運動している。そのため粒子の 4 元速度に関して、RN 時空のテトラッド成分で考えると、

$$\begin{aligned} U^{(0)} &= \sqrt{1 + \frac{l^2}{r^2}} \\ U^{(1)} &= 0 \\ (U^{(2)})^2 + (U^{(3)})^2 &= \frac{l^2}{r^2} \end{aligned} \quad (10)$$

を得る。よって、エネルギー運動量テンソルに粒子の角運動量が影響することが分かる。球対称性より角度平均を取るなどして整理すると、 $S_{\mu\nu}$ のテトラッド成分を求めることができる。それを用いると、shell のエネルギー面密度や圧力、固有質量は

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\kappa}{4\pi r^2} \sqrt{1 + \frac{l^2}{r^2}} \\ P &= \frac{l^2}{2(r^2 + l^2)} \sigma \\ m &= \kappa \sqrt{1 + \frac{l^2}{r^2}} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\kappa := N\epsilon \quad (12)$$

となる。 κ は定数なので、上式の形から角運動量が 0、または動径座標に比べて無視できる場合、shell を構成する粒子をダストと見なして良いことが分かる。

4 Discussion

ここまで、shell の性質や運動をまとめてきた。また、有効ポテンシャルに含まれている shell の固有質量に、shell を構成する collisionless particles の角運動量が影響することが分かった。ポスターでは、shell が BH に落ちていく状況で角運動量がどの程度影響するかについても紹介、議論する予定である。

Reference

- [1] K.Nakao et al 1999, Progress of Theoretical Physics, Vol. 101, No. 1, January 1999

重宇 c13

ハッブル宇宙望遠鏡による近赤外撮像データから探る 宇宙背景放射の起源

當銘 優斗

ハッブル宇宙望遠鏡による近赤外撮像データから探る宇宙背景放射の起源

當銘 優斗 (九州工業大学大学院 工学府)

Abstract

可視・近赤外背景放射の空間的なゆらぎには、既知の銀河では説明できない未知の成分が存在する。ハッブル宇宙望遠鏡を用いた過去の研究では、10 秒角以上の空間スケールにおいて既知の天体では説明できない過剰な成分を発見した。先行研究では、Hubble eXtream Deep Field を用いて可視域におけるゆらぎが観測され、過去の研究に比べ、より高い過剰成分が検出された。しかし、XDF 画像生成時における地球照補正の過程でゆらぎが消失したとして、近赤外域では解析がなされなかった。本研究では、XDF 画像を構成する元データに立ち返り解析を行うことで、近赤外域 (1.05, 1.25, 1.40, 1.60 μm) における最も深いゆらぎを測定した。その結果、これまでの研究で報告された 10 秒角以上の未知成分を観測し、そのスペクトル形状が明らかとなった。

1 Introduction

EBL(Extragalactic Background Light) とは、銀河系外のあらゆる光の積算であり、宇宙初期に関する重要な情報を含む。宇宙初期に誕生した初代天体は、非常に強い紫外線を放射し、後の銀河等の天体形成に大きな影響を与えた。この放射は宇宙膨張に伴う赤方偏移により、可視光-近赤外域の波長に伸びているため、可視・近赤外 EBL は天体形成史の解明に重要な観測量である。

宇宙望遠鏡によって、近赤外 EBL には既知の銀河の 5 倍程度の絶対輝度、既知の銀河の 10 倍程度の空間ゆらぎ (Thompson 2007; Mitchell-Wynne 2015; Matsumoto 2019) が観測されており、未知天体の存在が示唆される。過去の研究により、遠方宇宙の初代天体、近傍宇宙の銀河合体時に銀河外に投げ出された星々による IHL(Intra Halo Light) が未知成分の主な候補天体である。

先行研究 (Matsumoto 2019) では、WFC3(Wide Field Camera 3) による深部観測、XDF(Willingworth 2013) を用い、0.4 - 0.85 μm の 4 つのバンドでゆらぎ解析が行われた。その結果、10-20 秒角の空間スケールに、これまでの研究に比べ高い強度の過剰成分を観測し、近傍の非常に暗い天体である FCO(Faint Compact Object) が起源であると推定した。しかし、近赤外域のゆらぎ解析は行われていない。近赤外域では、XDF を作成する際の地球照を校正する処理によってゆらぎが消失した可能性があり、その強度が著しく低かったため、解析は行わなかったとしている。

本研究では、XDF を構成する近赤外域の 4 バンドの元データに立ち返り、これまでの研究で報告されたゆらぎの過剰成分が観測できるか検証する。また、過去の HST によるゆらぎ解析による結果と比較し、近赤外域にみられる既知の銀河では説明できない、過剰なゆらぎ成分の起源天体を考察する。

2 Methods

2.1 Data

本研究では、XDF を構成する近赤外撮像データの内、総露光時間の多い F105W、F125W、F140W、F160W の 4 バンドを使用する。XDF の生成に使用された 19 の HST 観測プログラムのうち、WFC3 にて同天域 (赤経 = 53.2, 赤緯 = - 27.8) を観測した 2 プログラム (Program ID:11563,12498/HST Cycle: 17,19) のデータを取得した。迷光等により質の悪いデータを除き、各バンドのデータを合成した。F105W で総露光時間 18.8 万秒、F125W で 8.9 万秒、F140W で 6.6 万秒、F160 で 18.3 万秒の合成データを解析した。

2.2 Mask

ゆらぎを解析するため、画像内の星々をマスクする。全データの合成画像である IR 画像を作成した (図 1 左)。この画像に対しマスク処理を行い、以下

の 4 つの手順で IR マスク画像を作成した (図 1 右)。マスクされる画素は IR 画像の 70% である。

- Step1 全画素値の分散を σ とし、平均値から $\pm 10\sigma$ に含まれない画素をマスクする。この処理により、桁溢れ、デッド画素やホット画素による、画素値が異常に高い、または低い画素がマスクされる。その後、再度全画素値の平均、分散を求め、 $\pm 3\sigma$ に含まれない画素をマスクする。
- Step2 広がった星の影響を除去するため、各画素の周辺を 3×3 画素で区切って、合計 9 画素を比較し処理を行う。9 画素のうち、4 画素以上が 1σ より明るい場合、9 画素全てをマスクする。
- Step3 9 画素のうち、6 画素以上がマスクされている場合、9 画素全てをマスクする。
- Step4 もう一度 Step3 を繰り返し、マスクを拡張する。

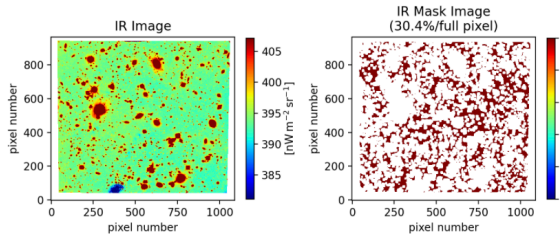


図 1: 左: IR 画像、右: IR マスク画像

2.3 Power Spectrum Estimation

本研究で扱うデータが見込む視野は、 $2.27' \times 2.05'$ と非常に小角度であるため、平面と近似し、2次元フーリエ変換からパワースペクトルを導出する。パワースペクトルは2次元フーリエ展開係数の2乗をフーリエ輝度の方位角 ϕ_l に渡って平均したものと定義される。

$$C_l \equiv \int_0^{2\pi} \frac{d\phi_l}{2\pi} a_l a_l^* \quad (1)$$

本研究では、ゆらぎを輝度の標準偏差とし、以下で定義する。

$$C(0) = \sqrt{\frac{l^2}{2\pi} C_l} \quad (2)$$

まず、各バンド画像にマスクを適応し、平均値を差し引くことで、偏差画像を作成した。偏差画像を2

次元フーリエ変換し、パワースペクトルを導出した (図 2 左)。

2.4 Power Spectrum Correction

導出した生のパワースペクトルには、検出器、マスクによる影響が含まれる。

検出器による影響は PSF によって現れ、主に、微小な空間スケールに影響を及ぼす。本研究において、マスクにより、PSF の影響は除かれていることがわかった。

マスクによる影響は、マスク部が0であるため、架空のゆらぎ、ゆらぎの低下を引き起こす。ゆらぎ模擬画像を作成し、マスクの有無による影響を評価した。生のパワースペクトルに補正関数 (図 2 右) をかけることで、マスクによる影響を補正した。

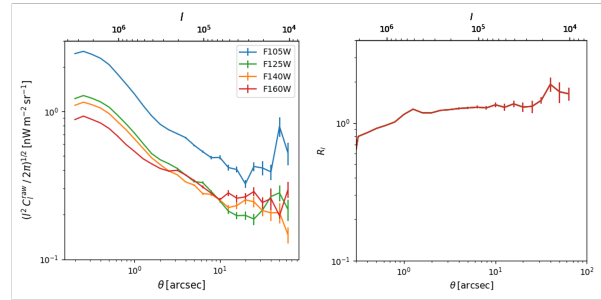


図 2: 左: 生のパワースペクトル、右: 補正関数

3 Results

本研究で導出したゆらぎ (図 3) 強度には以下の成分が含まれる。

$$C_l = C_l^{noise} + C_l^{ZL} + C_l^{ISL} + C_l^{DGL} + C_l^{IGL} + C_l^{crnk} \quad (3)$$

まず、ノイズ成分を見積もる。ノイズは空間スケールが大きくなるに連れ指数的に減少する。よって、直線成分にフィッティングし、ノイズ成分とした (図 3)。次に、限界等級以下の IGL (Integrated Galactic Light) を見積もる。銀河カウント (Koushan 2021) を外挿し、29-36 等の系外銀河模擬画像を作成した。模擬画像をゆらぎ解析し、IGL ゆらぎ強度とした (図 3)。ISL (Integrated Star Light) は暗い等級において IGL に比べカウント値が非常に少ないため考慮

しない。ZL (Zodiacal Light) は、本研究のような小さい空間スケールにおいて、ゆらぎに寄与しない (Pyo 2012)。DGL (Diffuse Galactic) の成分については見積もる方法を模索している。

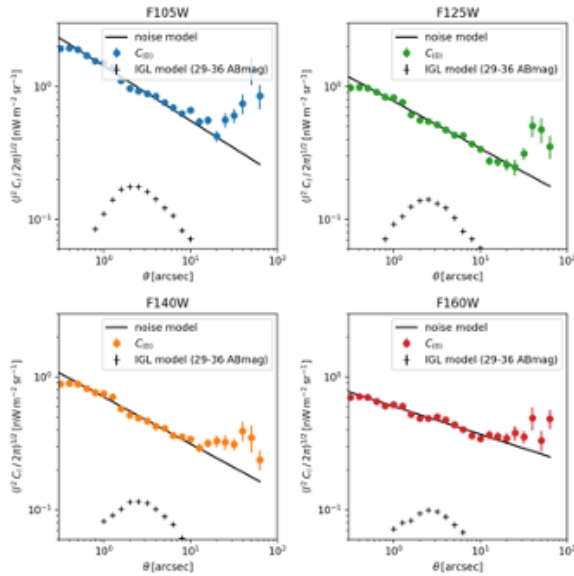


図 3: 近赤外域 4 バンドのゆらぎ強度

4 Discussion

近赤外 EBL のゆらぎ過剰成分は (Mitchell-Wynne 2015) で $20'' - 65''$ に観測されており、未知成分の起源は IHL が支配的という示唆を得た。本研究における、結果も同様に IHL の寄与を示唆するゆらぎ強度となっている (図 4)。しかし、F105W のみ起源天体モデルを上回る強度を観測した。4 バンドの結果によるスペクトルは DGL のスペクトルと形状が類似していること (図 5) から、DGL の寄与が支配的である可能性がある。よって、DGL によるゆらぎ強度を推定、観測することが重要である。

5 Conclusion

本研究では、XDF 元データを用い、近赤外域 4 バンドでゆらぎを導出した。その結果、F105W は、未知成分の候補天体モデルを上回る強度が観測され、F125W、F140W、F160W は IHL が未知成分であると示唆する結果となった。しかし、そのスペクトル

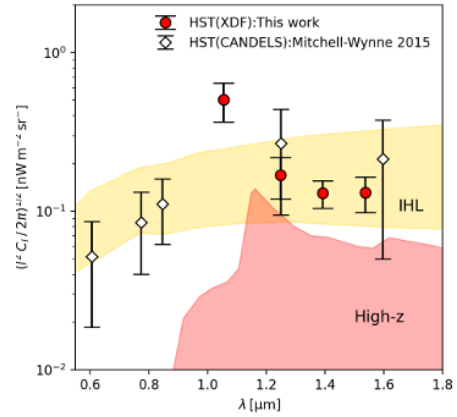


図 4: 本研究の結果と未知天体のモデル

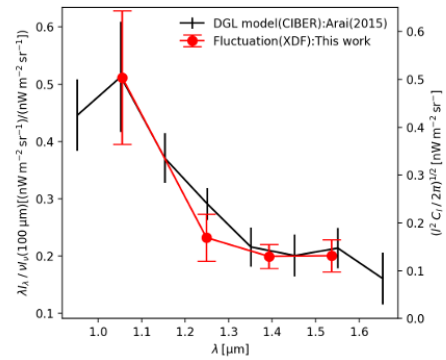


図 5: DGL のスペクトル形状との類似性

形状から DGL による寄与が支配的である可能性を発見した。未知成分は存在するのか、また、その候補天体について示唆を得るため、今後、DGL ゆらぎ強度の推定を行う。

Reference

Thompson 2007, apj
 Mitchell-Wynne 2015, Nature Communications
 Matsumoto 2019, pasj
 Illingworth 2013, apjs
 Koushan 2021, mnras
 Pyo 2012, apj

重宇 c14

蒸発しきらない正則ブラックホールの時空構造について

末藤 健介

特異点のないブラックホールについて

末藤健介 (大阪公立大学大学院 理学研究科)

Abstract

We study spacetime structures of non-singular black holes that evaporate spending an infinite period of time due to Hawking radiation. Such evaporating black holes can be classified into two types according to whether the radius of the inner apparent horizon increases or decreases, which we call Case 1 and Case 2 respectively. All known models, such as the Bardeen and Hayward black holes are classified as Case 1. In this paper, we present the spacetime structures of Case 1 and Case 2 without assuming any specific model.

1 Introduction

The information loss problem is one of the long-standing problems in black hole physics. To solve this problem, many studies have been done so far, such as AdS/CFT, island formula, black hole remnant and so on. The non-singular black hole is a candidate to solve the above problem since the curvature singularity plays a central role in the information loss problem. Many good reviews report the history and the properties of non-singular black holes [1, 2].

Some research suggests that there is no information loss problem in non-singular black hole spacetimes that completely evaporated [3, 4, 5]. On the other hand, the possibility that the non-singular black holes do not completely evaporate has been suggested [6]. The essence of this suggestion is that the non-singular black holes have at least two horizons, and these horizons intersect spending an infinite amount of the advanced time. Then the final state of evaporation is an extremal black hole with finite mass. They suggested a would-be Penrose diagram in the above article. However, another Penrose diagram for a remnant model was proposed in Figure 5 of [7]. Like this, the spacetime structure of the remnant model has no consensus. Therefore, in this paper, we present that spacetime can be classified into some patterns.

2 Settings

We assume the dynamically spherically symmetric spacetime described by the ingoing Eddington-Finkelstein coordinates i.e.

$$ds^2 = -f(r, v)A(r, v)dv^2 + 2A(r, v)drdv + r^2d\Omega^2, \quad (1)$$

where $d\Omega^2$ refers to the unit sphere. We only consider the asymptotically flat spacetime which means $\lim_{r \rightarrow \infty} f(r, v) = 1 = \lim_{r \rightarrow \infty} A(r, v)$. The regularity conditions in which the spacetime does not have the curvature singularity are $f(0, v) = 1$, $\partial_r f(r, v)|_{r=0} = 0$ and $\partial_r A(r, v)|_{r=0} = 0$. These conditions imply that the equation $f(r, v) = 0$ generally has an even number of solutions. $f(r, v) = 0$ means the position of the apparent horizon since the expansion of the outgoing null rays is proportional to $f(r, v)$. Therefore, the asymptotically flat non-singular spacetimes generally have even number of apparent horizons. In this paper, we assume that there are only two apparent horizons and denote these as $r_{\pm}(v)$ ($r_+(v) > r_-(v)$). We henceforth refer to them simply as the outer horizon and the inner horizon. From this, the function $f(r, v)$ can always be expressed using the positive-valued function $h(r, v)$ as

$$f(r, v) = h(r, v)(r - r_+(v))(r - r_-(v)). \quad (2)$$

Since the normal vector to the apparent horizons is

$$n \propto df = \partial_v f dv + \partial_r f dr, \quad (3)$$

the norm of this vector is

$$g^{-1}(n, n) \propto \frac{2}{A} \partial_r f \partial_v f. \quad (4)$$

The sign of $\partial_r f$ is positive (negative) on the outer (inner) horizon. Therefore, the characteristic of the apparent horizon is determined by the sign of $\partial_v f$ and we can easily evaluate it as

$$\begin{cases} \partial_v f|_{r_+} &= -h(r_+, v)(r_+ - r_-) \partial_v r_+ \\ \partial_v f|_{r_-} &= h(r_-, v)(r_+ - r_-) \partial_v r_-. \end{cases}$$

The result of these calculations is that the outer horizon and the inner horizon are timelike (space-like) if and only if $\partial_v r_{\pm} < 0$ ($\partial_v r_{\pm} > 0$).

Since we are interested in the evaporation phase, we impose the following conditions (1) $\partial_v r_+ < 0$; (2) $\lim_{v \rightarrow \infty} r_{\pm} = r_c$; (3) The characteristic of each apparent horizon is never changed; and (4) $A(r, v) = 1$. The first condition is based on the physical assumption that the radius of the outer horizon decreases during the evaporation phase. The second condition is a representation of the assumption that non-singular black holes have infinite evaporation time and asymptote extremal black holes. The third and fourth conditions are imposed for simplicity; they can be discarded when considering more complex evaporation scenarios.

From the above discussions, we can classify the evaporation spacetime into the following two types;

Case 1: $\partial_v r_+ < 0, \partial_v r_- > 0$, that is the timelike outer horizon and the spacelike inner horizon.

Case 2: $\partial_v r_+ < 0, \partial_v r_- < 0$, that is the timelike outer horizon and the timelike inner horizon.

Known models such as the Bardeen or Hayward black holes are classified as Case 1.

In the following sections, we will draw the Penrose diagram of these spacetimes. Since we expand a general method, we would not calculate the retarded time to do this. Instead, the behavior of the outgoing null rays can be discussed in a general way, and we can draw the Penrose diagram with

this method. From the metric, the outgoing null rays satisfy

$$\frac{dr}{dv} = \frac{1}{2} f(r, v). \quad (5)$$

It will turn out that the gross behavior of the solutions to this equation can be clarified by focusing attention on their relative positions to the two horizons.

3 The spacetime structure of non-singular black holes with infinite evaporation time: Case 1

We shall analyze the behavior of the radial outgoing null rays for Case 1 spacetimes focusing attention to the apparent horizons. We consider the behavior of outgoing null rays in the cases where its initial position is (1) outside and on the outer horizon; (2) inside and on the inner horizon; and (3) between these horizons. To do this, we assume $h(r, v)$ to (a) $h(r, \infty) = \lim_{v \rightarrow \infty} h(r, v)$ behaves as an analytic function of r and (b) $h(r, v)$ is a positive valued function in $v_0 \leq v \leq \infty$ and $0 \leq r < \infty$. Where v_0 is the time at which evaporation starts.

First, we examine the behavior of outgoing null rays whose initial positions are outside the outer horizon.

Proposition 1. Outgoing null rays whose initial position is outside the outer horizon never intersect it and reach the future null infinity \mathcal{I}^+ .

Secondly, we consider the behavior of the outgoing null rays inside the inner horizon.

Proposition 2. Outgoing null rays whose initial position is inside the inner horizon never intersect it and reach $r = r_c$ with infinite advanced times.

Finally, we examine the behavior of the outgoing null rays between two horizons.

Theorem 1. There is a region J such that the outgoing null rays starting there do not intersect the

apparent horizons in finite time, even though they lie in the region between these two horizons.

Thus we obtained the relationships between the outgoing null rays and the apparent horizons. The figure of this is drawn in my poster.

4 The spacetime structure of non-singular black holes with infinite evaporation time: Case 2

In this chapter, we will analyze the relations between the apparent horizons and the radial outgoing null rays for Case 2 spacetimes using the same procedure as for Case 1.

The outgoing null rays outside the outer horizon satisfy Proposition 1.

Proposition 3. If outgoing null rays are between the inner and outer horizons, they will not intersect the inner horizon.

Finally, the relationship between the outgoing null inside the inner horizon and the inner horizon is examined. It is obvious that the outgoing null rays in $r_c < r(v) < r_-$ intersect the inner horizon in finite time since $\partial_v r > 0$ and $\partial_v r_- < 0$. However, it also depends on the detail of the function $f(r, v)$ whether the outgoing null rays in $r(v) < r_c$ intersect $r = r_c$.

From the above discussions, there are 4 patterns

- The relations with the outer horizon
 1. All outgoing null rays that are between the inner and outer horizons intersect the outer horizon.
 2. Some outgoing null rays that are between the inner and outer horizons do not intersect the outer horizon.
- The relations with the inner horizon
 - A. All outgoing null rays that are inside the inner horizon intersect the inner horizon.

- B. Some outgoing null rays that are inside the inner horizon do not intersect the inner horizon.

The figure of these are drawn in my poster.

5 Conclusions and discussions

In this paper, we classified the spacetime structure of non-singular black holes with infinite evaporation time. The spacetime structure depends on whether the outer and inner apparent horizons are timelike or spacelike. For this classification, we divided the cases into Case 1 and Case 2 according to whether the radius of the inner apparent horizon increased or decreased with advanced time. For Case 1 spacetime, only one structure exists due to the relationship between the outgoing null ray and the apparent horizon. On the other hand, for the Case 2 spacetime, the relationship between the outgoing null ray and the apparent horizon depends largely on the function $f(r, v)$, and four types of spacetime structures are allowed.

Reference

- [1] Chen Lan, Hao Yang, Yang Guo, and Yan-Gang Miao. Regular black holes: A short topic review. *International Journal of Theoretical Physics*, Vol. 62, No. 9, p. 202, September 2023.
- [2] Hideki Maeda. Quest for realistic non-singular black-hole geometries: Regular-center type. *Journal of High Energy Physics*, Vol. 2022, No. 11, p. 108, November 2022.
- [3] Sean A. Hayward. Formation and Evaporation of Nonsingular Black Holes. *Physical Review Letters*, Vol. 96, No. 3, p. 031103, January 2006.
- [4] Valeri P. Frolov. Information loss problem and a ‘black hole’ model with a closed apparent horizon. *Journal of High Energy Physics*, Vol. 2014, No. 5, p. 49, May 2014.

- [5] Kensuke Sueto and Hirotaka Yoshino. Evaporation of a nonsingular Reissner–Nordström black hole and the information loss problem. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, Vol. 2023, No. 10, p. 103E01, October 2023.
- [6] Raúl Carballo-Rubio, Francesco Di Filippo, Stefano Liberati, Costantino Pacilio, and Matt Visser. On the viability of regular black holes. *Journal of High Energy Physics*, Vol. 2018, No. 7, p. 23, July 2018.
- [7] Sabine Hossenfelder and Lee Smolin. Conservative solutions to the black hole information problem. *Physical Review D*, Vol. 81, No. 6, p. 064009, March 2010.

重宇 c15

一様磁場中のシュバルツシルトブラックホールにおける帯電有質量スカラー場の Quasi-normal mode 不安定性について

大西 翔太

一様磁場中の Schwarzschild BH における 荷電有質量スカラー場の Quasi-normal mode 不安定性

大西 翔太 (大阪公立大学大学院 理学研究科 M2)

Abstract

アインシュタインの一般相対性理論から予言されるブラックホールや、そのリングダウン重力波の候補とされる Quasi-normal mode の研究は、ブラックホールの形質や性質をはじめ宇宙の成り立ちや様々な天体現象の解明にも寄与すると考えられている。今回レビューを行う先行研究では、Schwarzschild BH を一様磁場中においた際の荷電有質量スカラー場について研究している。これを WKB 近似や Leaver の方法を用いて近似的に解析した結果、ある多重極数 l に対して $2l+1$ のゼーマン効果によるモードが存在することや、Quasi-normal mode がある有効質量の閾値を超えると消滅、または磁場の強度とそれに対応する方位数 m との大小関係によって不安定性が発生することがあるとしている。私の研究では上記の結果についてのレビューと、近似を用いたこのような事象の妥当性について疑問が存在するため、これを二次元シミュレーションを用いて解析した結果と比較し検討していく。

1 Introduction

アインシュタインの一般相対性理論で予言された、「時空の歪みが光速で伝播する」という重力波は 2015 年に LIGO で初めて直接観測されその存在が証明された。現在、重力波の発生源の候補として考えられているのは、超新星爆発・中性子星連星 (BNS)・原始ブラックホールからの背景重力波、そして今回取り上げる連星ブラックホール (BBH) などがある。重力波は電磁波と異なり、物質との相互作用が極めて小さいため、今後観測の精度向上が達成されるにつれ重力波観測から初期宇宙の様子や宇宙で起こる様々な天体現象の解明につながると期待されている。

今回考える Schwarzschild BH の合体後には減衰振動するリングダウン重力波が発生すると考えられており、これをブラックホールの準固有振動 (Quasi-Normal Mode) という。QNM 振動数はブラックホールの質量 (及び角運動量) のみに依存することが知られているため、QNM の観測ができればブラックホールの物理量の直接的な測定が可能であることを意味しており、その意義は大きいと考える。

今回レビューする論文は漸近的一様な背景磁場がある Shwarzschild 時空中に荷電有質量スカラー場を置いたときの QNM が不安定性を示す可能性を論じたものである。これについて私はその解析手法に疑問が存在するため、二次元シミュレーションを用い

て解析した結果と比較し考察を行う。

2 Quasi-normal mode 不安定性 (Review)

2.1 状況設定

- ・静的・球対称時空 (Schwarzschild 時空)

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (1)$$

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} \quad (2)$$

- ・漸近的一様な背景磁場 B が z 軸方向に存在
このベクトルポテンシャルは

$$A_\mu = \frac{1}{2} B r^2 \sin^2 \theta (0, 0, 0, 1) \quad (3)$$

※この背景磁場は試験磁場と見なし時空の構造への影響はない

この状況で荷電有質量スカラー場をこの時空においたときの dynamics を研究する。

2.2 Regge-Wheeler 方程式

出発は電磁場中の荷電有質量スカラー場 Klein-Gordon 方程式

$$g^{\alpha\beta}(\nabla_\alpha - iqA_\alpha)(\nabla_\beta - iqA_\beta)\Phi - \mu^2\Phi = 0 \quad (4)$$

これに (1)-(3) を代入すると

$$0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 f \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) - \left(\frac{L^2}{r^2} + \mu^2 - qBL_z - \frac{1}{4} q^2 B^2 r^2 \sin^2 \theta \right) \Phi - \frac{1}{f} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (5)$$

$$L^2 = - \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad (6)$$

$$L_z = -i \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (7)$$

となるが、 $-\frac{1}{4}q^2B^2r^2\sin^2\theta$ の項は先行研究論文では B が小さいとして無視している。この正当性を後に議論する。

この Φ は変数分離できて球面調和関数 $Y_{lm}(\theta, \phi)$ を用いて、(l: 多重極数、m: 方位量子数)

$$\Phi(t, r, \theta, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega t} \sum_l \frac{R_{lm}(r, \omega)}{r} Y_{lm} \quad (8)$$

とすると時間 (周波数) -動径関数についての K-G 方程式は

$$\left(\frac{d^2}{dr_*^2} + \omega^2 - V_{eff}(r) \right) R_{lm}(r, \omega) = 0 \quad (9)$$

$$V_{eff}(r) = f(r) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{f'(r)}{r} + \mu_{eff}^2 \right] \quad (10)$$

となり、(9) を Regge-Wheeler 方程式という。また、 $\mu_{eff}^2 = \mu^2 - mqB$ は有効質量である。

これは 1 次元 Schrödinger 方程式 (波動方程式) の散乱問題と類似しており同様に解くことができる。

2.3 有効質量・有効ポテンシャルのゼーマン効果

以上より、有効質量は下図のように方位量子数 m によって分離することになる。また、同様に有効ポテンシャルも m によって分離し、 $mqB < 0$ で $V_{eff} < 0$ となる領域が出現することが下図より読み取れる。このように、磁場による Zeeman 効果で有効質量・有効ポテンシャルは分離する。

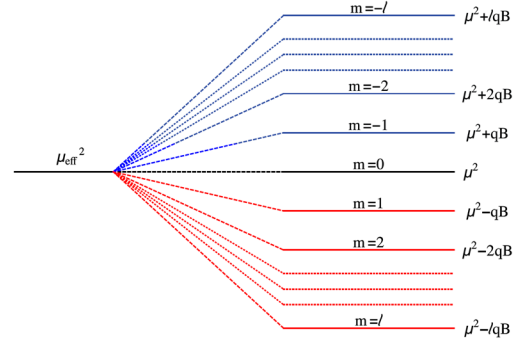


図 1: 有効質量の Zeeman 効果

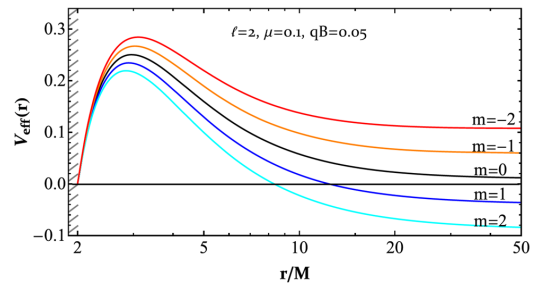


図 2: 有効ポテンシャルの Zeeman 効果

2.4 Quasi-normal mode 不安定性

2.3 節で、ある条件によって $V_{eff} < 0$ となる領域が出現したが、実際

$$V_{eff}(r \rightarrow \infty) \rightarrow \mu_{eff}^2 = \mu^2 - mqB \quad (11)$$

であるから、有効ポテンシャルが負であると不安定性が生じる原因となり、無限遠方で負であると実際に QNM は不安定になると考えられる。

また定性的特徴として、

- l が大 $\Rightarrow V_{eff}$ の高さは大きくなり、負の部分の深さは変化しないが、 V_{eff} が負となる境界値 r_n が大きくなる。

- μ_{eff} が負の部分の深さを決める唯一のパラメータとなっている。

ここまでが、先行研究で述べられた QNM の不安定性であるが、2.1 節で変数分離が実行できる形にするため無視した $-\frac{1}{4}q^2B^2r^2\sin^2\theta$ の項は $r \rightarrow \infty$ で発散するため、この近似の物理的妥当性は疑わしい。したがって、次のセクションで実際に不安定性は現れるのか二次元シミュレーションを行って検証してみたい一つの例を紹介する。

3 数値シミュレーション

Schwarzschild 時空、一様磁場中のスカラー場の方程式（再掲）

$$g^{\alpha\beta}(\nabla_\alpha - iqA_\alpha)(\nabla_\beta - iqA_\beta)\Phi - \mu^2\Phi = 0 \quad (12)$$

から亀座標 $r_* = r + 2M \log\left(\frac{2M}{r} - 1\right)$ を導入して整理すると、

$$\begin{aligned} \partial_t^2\Phi &= \partial_{r_*}^2\Phi + \frac{2f}{r}\partial_{r_*}\Phi \\ &+ \frac{f}{r^2}\left(\partial_\theta^2\Phi + \cot\theta\partial_\theta\Phi + \frac{\partial_\phi^2\Phi}{\sin^2\theta}\right) \\ &- iqBf\partial_\phi\Phi - \frac{q^2B^2}{4}fr^2\sin^2\theta\Phi - \mu^2f\Phi \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、軸対称な背景磁場より、 ϕ は方程式に陽に依存しないため

$\Phi(t, r, \theta, \phi) = e^{im\phi}\Psi(t, r, \theta)$ と変数分離可能

さらに、 $\Psi(t, r, \theta) = \sin^{|m|}\theta\varphi(t, r, \theta)$ とすると、 Z 軸上 ($\theta = 0$) で φ は $\varphi \neq 0$ かつ、偶関数的に振る舞うことから最終的に方程式は、

$$\begin{aligned} \partial_t^2\varphi &= \partial_{r_*}^2\varphi + \frac{2f}{r}\partial_{r_*}\varphi \\ &+ \frac{f}{r^2}(\partial_\theta^2\varphi + (2|m| + 1)\cot\theta\partial_\theta\varphi - |m|(|m| + 1)\varphi) \\ &+ mqBf\varphi - \frac{q^2B^2}{4}fr^2\sin^2\theta\varphi - \mu^2f\varphi \end{aligned} \quad (14)$$

$\theta = 0$ では $\cot\theta$ が発散するので $\cot\theta\partial_\theta\varphi \rightarrow \partial_\theta^2\varphi$ とすると

$$\begin{aligned} \partial_t^2\varphi &= \partial_{r_*}^2\varphi + \frac{2f}{r}\partial_{r_*}\varphi \\ &+ \frac{f}{r^2}(|m| + 1)(2\partial_\theta^2\varphi - |m|\varphi) + mqBf\varphi - \mu^2f\varphi \end{aligned} \quad (15)$$

のように整理できる。

このようにして Runge-Kutta 法でスカラー場の時間発展をシミュレーションしたのが右図である。 $m = 0, \mu = 0, qB = 0.1$ でシミュレーションした。

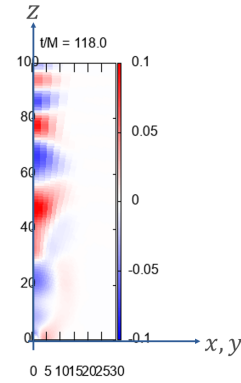


図 3: 数値シミュレーション

先行研究で述べられていた QNM 不安定性は Minkovski 時空では存在しないことを証明した。

Schwarzschild 時空、一様磁場中のスカラー場の dynamics を数値的に解析していきたい。

Reference

- Bobor Turimov et al.2019, Physical Review D 100,084038
- Schutz and Will 1985, The Astrophysical Journal 291;L33-36

4 まとめ・今後の展望

一般相対論的 Klein-Gordon 方程式から定常 Schrödinger 型の方程式を得た。QNM は分離する。(Zeeman 効果)

[indexへ戻る](#)

重宇 c16

回転ワームホールとブラックホールの関係

上道 恵也

回転ワームホールとブラックホールの関係

上道 恵也 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

ワームホールとは時空の 2 つの領域を直接つなぐトンネルのような時空構造であり、アインシュタイン方程式の解である。また、ワームホールのいちばんくびれている部分を「喉」と呼ぶ。この喉を広げるためにありふれた古典的な物質に備わっている条件 (エネルギー条件) を破る物質が必要になるので、喉が広がった通過可能なワームホール解を構成するのは難しい [1]。本研究では喉を広げるために回転の効果を用いて、エネルギー条件の破れ方を軽減するようなワームホール解の構成を試みる。しかし、任意の角速度の効果を入れると非球対称となり、この低い対称性からアインシュタイン方程式は偏微分方程式を解かなければいけないことになる。そこで、[2] では角運動量が等しい 5 次元空間における定常回転ワームホール解を構成し、4 次元時空ワームホール解の構成のときと同じ自由度を保ちながらアインシュタイン方程式を常微分方程式にすることができた。本研究では漸近平坦な境界条件を課し、[2] では考えられてなかったワームホールの喉付近における「非対称性」の自由度を考慮し、より一般的な解を構成する。そして、任意の角速度の効果について議論する。

1 Introduction

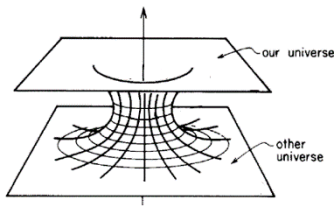


図 1: WH の模式図 ([1] 参照)

WH(WH) とは時空の 2 つの領域を直接つなぐトンネルのような時空構造である (図 1 参照)。WH は一般相対性理論における時空の曲がりと物質分布を関連付けたアインシュタイン方程式の解 (=時空構造) として与えられる。WH はワープ航法やタイムトラベルなどの空想上の技術と関連する興味深い時空構造として研究されているが、一般に通過可能な WH 解を得ることは古典的な物質では難しいとされている。

なぜならば、そのような WH 解を構成するにはありふれた古典的な物質に備わっている条件 (エネルギー条件) を破る物質 (エキゾチック物質) を用いてトンネルを広げる必要があるからだ。よって、通過可能 WH の実現可能性は困難とされてきた。

なるべくエネルギー条件を破らない通過可能な WH

を構成するために本研究では回転する WH を扱う。なぜならば、角運動量による遠心力によってエキゾチック物質に頼らなくても WH のトンネルを広げることが期待されるからである。実際、遅い回転に限定した WH ではエネルギー条件の破れ方が軽減されることが解析的に示されている [2]。さらに速い回転を求める場合、一般に回転時空は 4 次元のまま数値的に解くと計算コストがかかる。そのため [3] では 5 次元等角運動量時空で計算を簡略化し、WH 解を構成しその安定性を解析している。[3] で得られた解は制限されたものであり、解をより一般的に拡張することに気付いた。そして WH の 5 次元回転 WH のより一般的な解を構築することを目指す。[2, 3] での限定的なモデルで見たエネルギー条件の破れの軽減の証拠をより確実なものにする。

2 Ansatz と方程式

2.1 Ansatz

今回考える作用としてはエネルギー条件が破れているファントムスカラー場を用いた 5 次元 Einstein 重力を考える。

$$S = \int \left[\frac{1}{16\pi G} R + \mathcal{L}_{\text{ph}} \right] \sqrt{-g} d^5x \quad (1)$$

ラグランジアン \mathcal{L}_{ph} はファントムスカラー場 ϕ を用いて

$$\mathcal{L}_{\text{ph}} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \quad (2)$$

と表される。本研究で扱う 5 次元等角運動量定常回転 WH は以下の計量である。

$$ds^2 = -e^{2a} dt^2 + pe^{-a} \{ e^{a-q} [dl^2 + hd\theta^2] + e^{q-a} h [\sin^2 \theta (d\varphi - \omega dt)^2 + \cos^2 \theta (d\psi - \omega dt)^2] + (e^{a-q} - e^{q-a}) h \sin^2 \theta \cos^2 \theta (d\psi - d\varphi)^2 \} \quad (3)$$

なお、計量関数 $h(l)$ は以下の通りであり、 r_0 は喉の半径を表している。

$$h(l) = l^2 + r_0^2 \quad (4)$$

ここで、 t は時間座標で、座標 l は WH の動径固有座標で、範囲は $-\infty < l < \infty$ である。よって、 $l \rightarrow \pm\infty$ が漸近領域となる (図 2)。 θ, φ, ψ は角度座標で、 $\theta = \pi/2$ の時赤道面を表し、 φ, ψ に関する角運動量が一致する (=等角運動量) ようにしている。このような 5 次元等角運動量座標をとっているのので、すべての計量関数は動径固有座標 l のみに依存するようにしても、4 次元非球対称時空の自由度と変わらない解析ができる。よって、ここで出てきたラプス関数 $e^a(l)$ 、非球対称性の歪み度 $q(l)$ 、角速度 $\omega(l)$ 、共形空間因子 $p(l)$ はすべて l のみに依存する形となる。また、ファントムスカラー場 $\phi(l)$ も l のみに依存する。なお、これ以降 $'$ は d/dl としている。

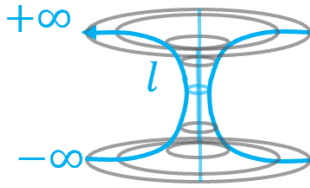


図 2: l の説明図

2.2 ファントム場の方程式と Einstein 方程式

ここからは上で仮定したファントムスカラー場と計量関数を求めるために必要な微分方程式を説明す

る。ファントム場の方程式は (1) から

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi = 0 \Leftrightarrow (p\sqrt{h^3}\phi')' = 0 \quad (5)$$

よって、定数 Q を使って

$$\phi' = \frac{Q}{p\sqrt{h^3}} \quad (6)$$

と置くことができ Q のことをスカラーチャージと呼び、微分方程式の解を決定するパラメータである。

残りの計量関数は p, q, a, ω の 4 つなので、必要な 4 つの方程式を Einstein 方程式から導くと以下のようになる。Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} = 0 (\mu, \nu \neq l) \quad (7)$$

を用いて、4 つの方程式が求められる。

$$p'' + \frac{5h'}{2h} p' + \frac{h'^2 - 4h}{2h^2} p = 0, \quad (8)$$

$$\omega' = \frac{c_\omega}{h^{5/2} p^2 e^{q-4a}}, \quad (9)$$

$$\frac{3a'h'}{2h} + \frac{a'p' + pa''}{p} - \frac{c_\omega^2 e^{4a-q}}{2p^3 h^4} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{3q'h'}{2h} + \frac{q'p' + pq''}{p} - \frac{4(e^{2(q-a)} - 1)}{h} = 0 \quad (11)$$

なお、(8) から求められる解の積分定数は座標変換の自由度に含めることができるので、適当な値をとると

$$p(l) = \frac{l^2 + r_0^2/2}{l^2 + r_0^2}. \quad (12)$$

よって、(9-11) の微分方程式を使えば、解 p, a, q, ω を求めることができるが、Einstein 方程式として R_{ll} に関する方程式が残っている。

$$R_{ll} = -8\pi G \frac{Q^2}{h^3 p^2} \quad (13)$$

これはファントムスカラー場の情報であるスカラーチャージ Q と計量を繋げることができる。これを constraint として求める。左辺を計量関数を用いて計算すると、

$$\begin{aligned} -8\pi G \frac{Q^2}{h^3 p^2} = & -\frac{3p''}{2p} + \frac{q''}{2} - \frac{3h''}{2h} + \frac{3h'^2}{4h^2} + \frac{3p'^2}{2p^2} \\ & - 2a'^2 - \frac{q'^2}{2} + a'q' - \frac{p'}{p} \left(\frac{q'}{2} - a' \right) \\ & - \frac{h'}{4h} \left(q' + \frac{3p'}{p} - 4a' \right) + \frac{1}{2} e^{q-4a} h p \omega'^2. \end{aligned}$$

(11) で q'' を消去して、(8) で p'' を消去すると、

$$4\pi GQ^2 = -\frac{e^{4a-q}c_w^2}{4ph} + \frac{h^3}{4}[(4a'^2 - 2a'q' + q'^2)p^2 - 2(a' - q')pp' - 3p'^2] + h^2p^2(4 - e^{2(q-a)}) + h^2p[p(q' - a') - 3p']l - 3hp^2l^2 \quad (14)$$

となり、右辺は正の定数になることが constraint となる。

2.3 境界条件とパラメータ

(10,11) を解くためには c_w の値を決めて、2階微分方程式を2つ解く必要があるため、さらに4つの自由度が存在する。そのうち1つは線素(3)の1項目から

$$-e^{2(a+a_+\infty)}dt^2 = -e^{2a}d(e^{a_+\infty}t)^2 \quad (15)$$

のように時間座標 t の変換に入れることができる。よって、今回は

$$a_{+\infty} = 0 \quad (16)$$

とする。また、境界条件を漸近平坦条件

$$\begin{aligned} a(+\infty) &= q(+\infty) = 0, \\ a(-\infty) &= q(-\infty) = a_{-\infty} \end{aligned} \quad (17)$$

と課すことで自由度をさらに2つ減らすことができる。なお、 c_w を含めて5つあった自由度はこれで2つに減り、微分方程式(10,11)を解くためには2つのパラメータ $c_w, a_{-\infty}$ が必要である。

また、他の1解微分方程式(6,9)の自由度は $l \rightarrow +\infty$ での境界条件

$$\begin{aligned} \omega(+\infty) &= 0, \\ \phi(+\infty) &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

で減らす。そして、これらのパラメータは質量 M と角運動量 J に関連づけることができる。適当にスケールを変えた座標 $\bar{t}, \bar{\varphi}$ を使って、5次元時空の場合計量は $l \rightarrow \pm\infty$ で漸近的に

$$g_{tt}dt^2 \rightarrow -\left(1 - \frac{8GM}{3\pi l^2}\right)d\bar{t}^2, \quad (19)$$

$$g_{t\varphi}dtd\varphi \rightarrow -\frac{4GJ \sin^2\theta}{\pi l^2}d\bar{t}d\bar{\varphi} \quad (20)$$

と展開される。(19,20)に伴って、 a, ω は

$$\begin{aligned} l \rightarrow +\infty \\ a &= -\frac{8GM_+}{3\pi l^2} + O(l^{-4}), \\ \omega &= \frac{4GJ}{\pi l^4} + O(l^{-6}), \\ l \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= a_{-\infty} - \frac{8GM_- e^{a_{-\infty}}}{3\pi l^2} + O(l^{-4}), \\ \omega &= \omega_{-\infty} + \frac{4GJ e^{2a_{-\infty}}}{\pi l^4} + O(l^{-6}) \end{aligned}$$

のように展開される。ただし、質量は $l > 0$ 側と $l < 0$ 側で2つあるのでそれぞれ M_+, M_- としたが、 ω の漸近展開形を(9)から解析的に求めると、 $l \rightarrow \pm\infty$ で l^{-4} の係数は同じになるため、角運動量 J は $J_+ = J_- = J$ とする。これよりパラメータ c_w と J の関係は

$$J = \frac{\pi}{16G}c_w. \quad (21)$$

また、パラメータ $c_w, a_{-\infty}$ を決めると計量関数 a が決まり、その展開形で M_{\pm} も決めることができる。よって、2つのパラメータを $c_w, a_{-\infty}$ の代わりに M_+, J としてもよい (M_- と M_+ は独立ではない)。

3 結果

3.1 ワームホール構造

上記をもとに数値的に微分方程式を解いた結果が以下の図である。 $l \rightarrow \pm\infty$ の範囲をコンパクト化するため以下では $l = \tan(\frac{\pi}{2}x)$ ($x \in (-1, 1)$) と座標変換したものを扱う。

図3は縦軸にWHの面積 A をスロート面積 A_{th} で割ったものであり、横軸の x によって面積の空間的な変化を表したものである。パラメータとしては $a_{-\infty} = 0$ で、 c_w (または J) を変化させたものである。 A が中央でいちばん小さくなっているため、WHの構造を表している。

また、角運動量を大きくすることで、スロート付近の面積がほぼ一定となっていく、WHが伸びていくことが確認できる。また、図4は横軸、横軸はそれぞれ角運動量 J 、 $l > 0$ 側の質量 M_+ を A_{th} で無次

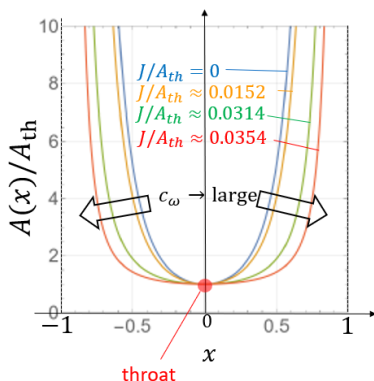


図 3: WH の面積

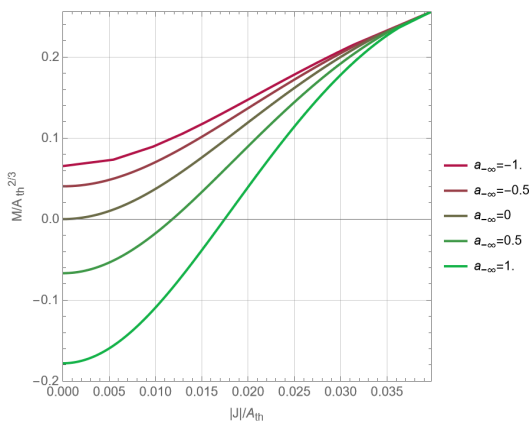


図 4: M_+ と J の相図

元化したもので、 $a_{-\infty}$ を変化させた相図である。なお、 $|J|$ が大きい部分は外挿している。角運動量を大きくすることで質量は増加するが、最終的に図の右上の点に漸近することが確認できる。この漸近点は 5 次元等角運動量時空での臨界 Myers-Perry ブラックホール (MPBH) 解の値である。MPBH 解の計量は

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & -dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \frac{\Sigma}{r^2} d\theta^2 \\
 & + (r^2 + \alpha^2) \sin^2 \theta d\varphi^2 + (r^2 + \alpha^2) \cos^2 \theta d\psi^2 \\
 & + \frac{\mu r^2}{\Sigma} (dt + \alpha \sin^2 \theta d\varphi + \alpha \cos^2 \theta d\psi)^2,
 \end{aligned} \tag{22}$$

ただし、

$$\Sigma = r^2 (r^2 + \alpha^2), \quad \Delta = (r^2 + \alpha^2)^2 - \mu r^2. \tag{23}$$

と表され、回転ブラックホールが高次元時空で一般化されたものである。パラメータは α, μ と 2 つあ

り、 $\mu = 4\alpha^2$ のとき臨界 MPBH 解と呼ばれる。臨界 MPBH 解はホライズン付近で面積が一定となり、時空が伸びるような構造を持つ。このことから図 4 の角運動量を大きくして、時空が伸びていき、高速回転極限では時空が無限に伸びて臨界 MPBH 解と一致することが示唆される。

[3] ではこの漸近性は述べられていたが、臨界 MPBH 解に WH 解が一致するという示唆の域を出ていない。また、臨界 MPBH 解は真空解なので、もし WH 解と臨界 MPBH 解が一致すれば、エネルギー条件を破らない WH 解を構成できるという意味になる。実際 (22) を (3) に適切な座標変換を加えて、計量を解析的に比較すると、

$$r_0^4 = 4\alpha^2 - \mu \tag{24}$$

を満たしていれば計量が一致することがわかった。この条件は臨界 MPBH 解がホライズンを持つならば、右辺は 0 以下となり、左辺は 0 以上であるため、右辺=左辺=0 すなわち臨界 MPBH 解しか満たさないことになる。

4 結論

高速回転極限では WH 解は数値的に臨界 MPBH に漸近することが示唆されたが、解析的に比較することで臨界 MPBH 解のみ一致することがわかった。

Acknowledgement

私のこの研究をサポートしていただいた、共同研究者の古賀泰敬さん、斎藤大生さん、柳哲文さん、吉田大介さん並びに QG 研の皆様には厚く感謝を申し上げます。

Reference

- [1] M. S. Morris, & K. S. Thorne 1988, Am. J. Phys. 56, 395.
- [2] P. E. Kashargin, & S. V. Sushkov 2008, Grav. Cosmol. 14, 80.
- [3] V. Dzhunushaliev et al. 2013, Phys. Rev. D 88, 124028.