2023年第53回 天文・天体物理若手夏の学校

素粒子・重力・宇宙論 分科会　集録集

■ 謝辞

2023年度天文・天体物理若手夏の学校は、基礎物理学研究所を始め、国立天文台、宇宙線研究者会議(CRC)からのご支援により成り立っております。事務局一同厚く御礼申し上げます。

素粒子・重力・宇宙論 分科会

■ index

重宇 a01	柏木 海翔	ポアンカレ対称性を持つ有質量場の量子マスター方程式
重宇 a02	富塚 祥伍	Large misalignment mechanism による axion のコンパクト構造の形成
重宇 a03	谷 将樹	連続変数に対する擬確率関数の定式化と応用
重宇 a04	牧野 耕輔	エネルギー条件から見る正則ブラックホールの妥当性
重宇 a05	田中 亜花音	正則ブラックホールは本当に正則か？
重宇 a06	菅原 啓太	Gravitational duals to the grand canonical ensemble abhor Cauchy horizons
重宇 a07	牧田 悠輔	4 次の共形 Weyl 重力とワームホール
重宇 a09	道脇 元紀	Dynamical Chern-Simons 重力における曲率ゆらぎ の 4 点関数とパリティの破れ
重宇 a10	島田 正顕	type II 原始ブラックホール
重宇 a11	谷口 彰	アクシオンドメインウォールを通過する重力波の円偏光
重宇 a12	山崎 優樹	原子重力波が干渉計に与えるノイズとその検出可能性の推定
重宇 a13	向野 杏	原始宇宙磁場によって生成される原始重力波のスペクトル
重宇 a14	西野 翔	Horndeski 理論におけるブラックホール準固有振動と観測可能性
重宇 a15	今福 隼斗	重力波観測で探る一般相対論を超えた偏光の自由度
重宇 a16	大城 斗輝	パルサー・タイミング・アレイによる背景重力波検出
重宇 a17	古澤 和也	重力波を用いた高赤方偏移 z=6 での $M_{\rm BH} - M_{\rm halo}$ 関係の制限
重宇 a18	三輪 拓真	Lite BIRD、CMB-S4 の観測によるパラメータへの制限可能性
重宇 a19	中野 新太朗	銀河赤方偏移サーベイ BOSS のバイスペクトルを用いた複数場インフレーションモデルの制限
重宇 a20	伊藤 圭汰	Multidimensional Vlasov-Poisson Simulations with High-order Monotonicity- and Positivity-preserving Schemes の紹介
重宇 a21	木原 健司	velocity-dependent Self-Interacting Dark Matter による宇宙論諸問題の解決
重宇 a22	大西 翔太	コンパクト連星からの重力波による宇宙論パラメータの推定
重宇 a23	島末 匠	すばる望遠鏡 HSC データを用いた弱重力レンズ質量マップで確認されたトラフ領域の視線構造
重宇 a24	手良脇 大誠	すばる HSC3 年間データの弱重力レンズ効果の精密測定による平坦な Λ CDM モデルの検証
重宇 a25	吉崎 允泰	SQLS からのエリスワームホールと負質量コンパクト天体の存在量に対する観測的な上限
重宇 a26	山下 由莉	初期宇宙における原始磁場の減衰機構

重宇 b01	宮内 侑	コンパクトなボゾンスターをどうやって作るか
重宇 b02	小野 瑞季	warm dark matter の mass function
重宇 b03	八木 大地	原始ブラックホールからの Hawking 放射のモンテカルロシミュレーション
重宇 b04	松尾 賢汰	ブラックホールの帯電と BZ 過程
重宇 b05	小塚 友裕	Quasinormal mode spectrum of the AdS black hole with the Robin boundary condition
重宇 b06	佐野 大志	ループ量子重力理論へのシンプルな道
重宇 b08	中馬 史博	重力波観測における赤方偏移の取り扱いと観測量からの宇宙論パラメータ決定の可能性
重宇 b09	覺 依珠美	背景重力波の円偏極モード検出を目指した重力波ラジオメトリ解析の開発
重宇 b10	湊 恵太	BipoSH を用いた宇宙の大規模構造における等方性の破れの検証
重宇 b11	石川 慶太朗	assembly bias の物理量パラメータ化に向けた研究
重宇 b12	川口 遼大	段差モデルインフレーションによる曲率ゆらぎの非対称的確率分布の生成
重宇 c01	下鶴 大輔	The core-halo structure of fuzzy dark matter
重宇 c02	山本 峻	球面重力波に対するパルサータイミング公式の導出に関するレビュー
重宇 c03	小林 元	ダークエネルギーを説明する低エネルギー有効理論 の強重力領域における検証可能性
重宇 c04	上道 恵也	5 次元回転ワームホールの解析
重宇 c05	水口 由莉乃	確率格子シミュレーション
重宇 c06	大橋 陸人	ブラックホール準固有振動における質量降着の影響
重宇 c07	谷田 幸貴	HSC 3 年目と BOSS のデータを用いた一般相対性理論の検証
重宇 c08	中野 貴臣	Creation of Fluctuations during Inflation and δ N Fomula
重宇 c09	末藤 健介	正則ブラックホールと情報損失問題
重宇 c10	野瀬 観見	次世代の銀河サーベイに向けた新しい銀河クラスタリング解析手法の確立
重宇 c11	村上 靖洋	重力波による原始ブラックホールの探索

———index へ戻る

重宇 a01

ポアンカレ対称性を持つ有質量場の量子マスター方程式

柏木 海翔

ポアンカレ対称性を持つ有質量場の量子マスター方程式

柏木 海翔 (九州大学大学院 物理学専攻 M1)

Abstract

「重力 (スピン 2 無質量場) を含むポアンカレ対称性を持つ量子マスター方程式の理論」は「重力は古典的である」とする立場、「重力は量子的である」とする立場、その両方の立場の理論を包含する理論的枠組みである。将来実験が可能となる日が来れば、この枠組み内にある理論に対して制限を課していくことで、「重力が従う理論」を手に入れることができると考えられる。我々はその前段階として「スピンレス有質量場のポアンカレ対称性を持つ量子マスター方程式の理論」を考える。本発表では、この理論から得られたスピンレス場の振る舞いと微視的因果律の結果について紹介する。

1 導入

現代物理学において、我々は「重力が量子力学に従うのか」という問に対する答えを出せていない。そのため重力の量子性に関しては「古典的である」とする立場と「量子的である」とする立場、2 つの立場に分かれている。例えば前者の立場からは Kafr-Taylor-Milburn 模型や Diósi-Penrose 模型が提唱され、後者の立場からは摂動的量子重力理論が提唱されているが、それらの実験検証は未だされていない。しかし、近年量子実験の発展により検証が可能となる日も近づきつつある。そこで両者の立場を包含する理論的枠組みを構築することができれば、その枠組内にある理論に対して実験による制限を課していくことで、「重力が従う理論」が持つべき性質が明らかになり、最終的に「重力が従う理論」を手に入れることができると考えられる。「重力を含むポアンカレ対称性を持つ量子マスター方程式の理論」はその枠組みとなる理論の 1 つである。ポアンカレ対称性は場の量子論や摂動的重力理論が持つ性質であり、量子マスター方程式を用いることで両者の立場を包含した記述をすることができる。

今回の研究ではその前段階の理論として「スピンレス有質量場のポアンカレ対称性を持つ量子マスター方程式の理論」を考える。この理論の下でスピンレスな有質量場の力学的挙動と微視的因果律を満たすかどうかについての研究結果と今後の展望について発表する。

2 研究手順

研究手順としては、相互作用のない量子マスター方程式の理論を用いて、次の 2 点について調べる:

1. スピンレスな有質量場の時間発展及び、その場が従う方程式を求める
2. この理論において、微視的因果律が満たされるかどうかについて計算する

上の 2 点について調べる前に、この理論における重要な事柄と研究に用いた量子マスター方程式について説明する。

2.1 量子マスター方程式とは

量子力学的半群の下では、量子系の密度演算子の時間発展は、初期時刻 $t = 0$ での状態を $\rho(0)$ とすると、

$$\rho(t) = e^{\mathcal{L}t}\left[\rho(0)\right] \tag{1}$$

と表すことができる。ここで、$\mathcal{L}$ は量子力学的半群の生成子と呼ばれる。(1) 式に対する微分方程式が、量子マスター方程式と呼ばれ、以下のように表される:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho(t) &= \mathcal{L}\left[\rho(t)\right] \\ &= \mathcal{H}\left[\rho(t)\right] + \mathcal{D}\left[\rho(t)\right]\end{aligned} \tag{2}$$

ここで、$\mathcal{H}\left[\rho(t)\right]$ と $\mathcal{D}\left[\rho(t)\right]$ は、

$$\mathcal{H}\left[\rho(t)\right] = -i\left[\hat{M}, \rho(t)\right] \tag{3}$$

$$\mathcal{D}\left[\rho(t)\right] = \sum_{\lambda}\left(\hat{L}_{\lambda}\rho(t)\hat{L}_{\lambda}^{\dagger} - \frac{1}{2}\left\{\hat{L}_{\lambda}^{\dagger}\hat{L}_{\lambda}, \rho(t)\right\}\right) \tag{4}$$

と表され、$\hat{M}$ は自己共役演算子、$\hat{L}_\lambda$ は Lindblad 演算子と呼ばれるものである。

2.2 ポアンカレ対称性

式 (1) の $\exp(\mathcal{L}t)$ にポアンカレ対称性を要請すると、

$$\frac{d}{dt}\left[\hat{U}_t(\Lambda,a)\rho(t)\hat{U}_t^\dagger(\Lambda,a)\right] = \mathcal{L}\left[\hat{U}_t(\Lambda,a)\rho(t)\hat{U}_t^\dagger(\Lambda,a)\right]$$

という微分方程式が得られる。この式が意味することは、「ある慣性系の $\rho(t)$ と別の慣性系の $\hat{U}_t(\Lambda,a)\rho(t)\hat{U}_t^\dagger(\Lambda,a)$ が同じ生成子 $\mathcal{L}$ で時間発展をする」ということである。この意味で、「ポアンカレ対称性を持つ」とする。上記の関係性を満たすような生成子 $\mathcal{L}$ の表式を探していくと、

$$\mathcal{H}[\rho(t)] = -i\left[\hat{H},\rho(t)\right] \tag{5}$$

$$\mathcal{D}[\rho(t)] = \gamma\int d^3\hat{a}(\boldsymbol{p})\rho(t)\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p}) - \gamma\int d^3p\,\frac{1}{2}\left\{\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p})\hat{a}(\boldsymbol{p}),\rho(t)\right\} \tag{6}$$

という結果になる。ここで、$\boldsymbol{p}$ は運動量、$\hat{a}(\boldsymbol{p})$ や $\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p})$ は生成消滅演算子を表し、

$$\left[\hat{H},\hat{a}(\boldsymbol{p})\right] = -E_{\boldsymbol{p}}\hat{a}(\boldsymbol{p})$$
$$\left[\hat{H},\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p})\right] = E_{\boldsymbol{p}}\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p})$$

を満たす。ただし、$E_{\boldsymbol{p}} = \sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}$ であり、ここでの m は場の質量である。

2.3 相互作用描像と Heisenberg 描像

ここでは、計算をする上で必要な相互作用描像と Heisenberg 描像について紹介する。本発表における目標の 1 つは、スピンレスな有質量場の時間発展の表式を求めることであり、これには Heisenberg 描像を用いることが有効である。ただ、本発表では計算の都合上、相互作用描像から間接的に Heisenberg 描像を求める方が便利であるため、両者の間にある関係について紹介する。これら 2 つの描像は、期待値が一致するという観点から、関係性を定式化でき、それは以下のようになる:

$$\hat{A}_H(t) = e^{\mathcal{D}^\dagger t}\left[\hat{A}_I(t)\right] \equiv \sum_n \frac{(\mathcal{D}^\dagger t)^n}{n!}\left[\hat{A}_I(t,\boldsymbol{x})\right] \tag{6}$$

ここで、$\hat{A}_H(t)$ と $\hat{A}_I(t)$ はぞれぞれ Heisenberg 描像、相互作用描像での演算子を表す。また、$\mathcal{D}^\dagger$ は $\mathcal{D}$ の共役な生成子であり、

$$\mathcal{D}^\dagger[\hat{A}_H(t)] = \sum_\lambda\left(\hat{L}_\lambda^\dagger\hat{A}_H(t)\hat{L}_\lambda - \frac{1}{2}\left\{\hat{L}_\lambda^\dagger\hat{L}_\lambda,\hat{A}_H(t)\right\}\right) \tag{7}$$

と与えられる。また、式 (6) で与えられる $\mathcal{D}$ の共役な生成子は

$$\mathcal{D}^\dagger\left[\hat{A}_H(t)\right] = \gamma\int d^3p\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p})\hat{A}_H(t)\hat{a}(\boldsymbol{p}) - \gamma\int d^3p\,\frac{1}{2}\left\{\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p})\hat{a}(\boldsymbol{p}),\hat{A}_H(t)\right\} \tag{8}$$

として与えられる。

2.4 スピンレス有質量場とその正準共役運動量

今回の研究で用いるスピンレス有質量場 $\hat{\Phi}(0,\boldsymbol{x})$ は以下で定義される:

$$\hat{\Phi}(0,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int\frac{d^3p}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}}\left(e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\hat{a}(\boldsymbol{p}) + e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p})\right)$$

また、この場の相互作用描像を $\hat{\Phi}_I(t,\boldsymbol{x})$ と表記すると、式 (5) での演算子 $\hat{H}$ を用いて、

$$\hat{\Phi}_I(t,\boldsymbol{x}) \equiv e^{i\hat{H}t}\hat{\Phi}(0,\boldsymbol{x})e^{-i\hat{H}t} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int\frac{d^3p}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}}\left(\hat{F}(t,\boldsymbol{p}) + \hat{F}^\dagger(t,\boldsymbol{p})\right) \tag{9}$$

と定義され、$\hat{F}(t,\boldsymbol{p}) \equiv e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-E_{\boldsymbol{p}}t)}\hat{a}(\boldsymbol{p})$ である。また、$\hat{\Phi}_I(t,\boldsymbol{x})$ の正準共役運動量を $\hat{\Pi}_I(t,\boldsymbol{x})$ と表記して、以下のように定義する。

$$\hat{\Pi}_I(t,\boldsymbol{x}) \equiv \frac{\partial}{\partial t}\hat{\Phi}_I(t,\boldsymbol{x}) = -\frac{i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d^3p\sqrt{\frac{E_{\boldsymbol{p}}}{2}}\left(\hat{F}(t,\boldsymbol{p}) - \hat{F}^\dagger(t,\boldsymbol{p})\right) \tag{10}$$

これらの定義式は、次で説明する微視的因果律の計算の時に用いる。

2.5 微視的因果律

微視的因果律とは、相対論的場の量子論などで要請される性質であり、その意味合いとしては「ある地点で起きた現象が、光速を超えた速さで別の地点において影響を与えることはない」ということである。相対性理論における最高速度が光速であることから由来する物理的な性質の 1 つである。この微視的因果律を定式化すると、

$$\left[\hat{A}(t,\boldsymbol{x}),\hat{B}(t',\boldsymbol{y})\right]=0,\ (t-t')^2-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2<0$$

という風に表すことができ、2 つ目の数式はこれら 2 つの演算子が、互いに空間的に離れていることを表す。今回の場合、$\hat{\Phi}_H(t,\boldsymbol{x})$ と $\hat{\Pi}_H(t,\boldsymbol{x})$ について調べるので、計算する交換関係は、$\left[\hat{\Phi}_H(t,\boldsymbol{x}),\hat{\Phi}_H(t',\boldsymbol{y})\right]$、$\left[\hat{\Pi}_H(t,\boldsymbol{x}),\hat{\Pi}_H(t',\boldsymbol{y})\right]$、そして $\left[\hat{\Phi}_H(t,\boldsymbol{x}),\hat{\Pi}_H(t',\boldsymbol{y})\right]$ の 3 つを計算する。添え字の H は Heisenberg 描像での演算子を表す。

3 計算結果

3.1 スピンレス有質量場の時間発展

スピンレス有質量場の Heisenberg 描像での表式 $\hat{\Phi}_H(t,\boldsymbol{x})$ を求める。これは式 (6) から計算ができ、すなわち $\hat{\Phi}_H(t,\boldsymbol{x})=\exp(\mathcal{D}^\dagger t)\left[\hat{\Phi}_I(t,\boldsymbol{x})\right]$ を計算すればよい。$\mathcal{D}^\dagger$ の作用は、式 (8) に式 (9) を代入すれば得ることができ、

$$\mathcal{D}^\dagger\left[\hat{\Phi}_H(t,\boldsymbol{x})\right]=-\frac{\gamma}{2}\hat{\Phi}_I(t,\boldsymbol{x})$$

となるから、n 回作用は

$$(\mathcal{D}^\dagger)^n\left[\hat{\Phi}_H(t,\boldsymbol{x})\right]=\left(-\frac{\gamma}{2}\right)^n\hat{\Phi}_I(t,\boldsymbol{x})$$

で与えられる。上記の結果から、式 (6) に立ち戻ってみると、

$$\hat{\Phi}_H(t,\boldsymbol{x})=\exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right)\hat{\Phi}_I(t,\boldsymbol{x})\qquad(11)$$

という結果を得る。Heisenberg 描像での正準共役運動量 $\hat{\Pi}_H(t,\boldsymbol{x})$ も同様の手順で、

$$\hat{\Pi}_H(t,\boldsymbol{x})=\exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right)\hat{\Pi}_I(t,\boldsymbol{x})\qquad(12)$$

と表すことができる。

次に、有質量場が従う方程式を式 (9) と先程求めた表式 (11) から求める。式 (9) の 2 階時間偏微分を行うと、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{\Phi}_I(t,\boldsymbol{x})=-\left[\hat{H},\left[\hat{H},\hat{\Phi}_I(t,\boldsymbol{x})\right]\right]\qquad(13)$$

を得る。左辺は、式 (11) から $\hat{\Phi}_I(t,\boldsymbol{x})=\exp\left(\frac{\gamma}{2}t\right)\hat{\Phi}_H(t,\boldsymbol{x})$ とすれば計算ができ、右辺は式 (9) を代入すれば計算ができる。したがって、式 (13) から

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\gamma\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\gamma^2}{4}\right]\hat{\Phi}_H(t,\boldsymbol{x})=(\nabla^2-m^2)\hat{\Phi}_H(t,\boldsymbol{x})\qquad(14)$$

という方程式を得ることができ、これがスピンレス有質量場の従う方程式である。

3.2 微視的因果律の結果

各々の交換関係に、式 (9)、(10)、(11)、(12) 代入して計算を行う。表記の簡略のために、$p^\mu=(E_{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{p})$、$x_\mu=(-t,\boldsymbol{x})$ とする。

1. $\left[\hat{\Phi}_H(t,\boldsymbol{x}),\hat{\Phi}_H(t',\boldsymbol{y})\right]$ について

$$\begin{aligned}&\left[\hat{\Phi}_H(t,\boldsymbol{x}),\hat{\Phi}_H(t',\boldsymbol{y})\right]\\&=\frac{1}{(2\pi)^3}e^{-\frac{\gamma}{2}(t+t')}\int\frac{d^3p}{2E_{\boldsymbol{p}}}\left[e^{ip^\mu(x_\mu-y_\mu)}-e^{-ip^\mu(x_\mu-y_\mu)}\right]\\&=\frac{1}{(2\pi)^3}e^{-\frac{\gamma}{2}(t+t')}\int\frac{d^3p}{2E_{\boldsymbol{p}}}\left[e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}-e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\right]\\&=0\end{aligned}$$

最後の等号は、2 項目の $\boldsymbol{p}$ を $-\boldsymbol{p}$ に変数変換することで得られる。

2. $\left[\hat{\Pi}_H(t,\boldsymbol{x}),\hat{\Pi}_H(t',\boldsymbol{y})\right]$ について

$$\begin{aligned}&\left[\hat{\Pi}_H(t,\boldsymbol{x}),\hat{\Pi}_H(t',\boldsymbol{y})\right]\\&=\frac{1}{(2\pi)^3}e^{-\frac{\gamma}{2}(t+t')}\int\frac{d^3p}{2E_{\boldsymbol{p}}}E_{\boldsymbol{p}}^2\left[e^{ip^\mu(x_\mu-y_\mu)}-e^{-ip^\mu(x_\mu-y_\mu)}\right]\\&=-2ie^{-\frac{\gamma}{2}(t+t')}\Lambda^0{}_0\Lambda^0{}_j\frac{\partial}{\partial x_j}\delta^3(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}')\\&=0\end{aligned}$$

3. $\left[\hat{\Phi}_H(t,\boldsymbol{x}),\hat{\Pi}_H(t',\boldsymbol{y})\right]$ について

$$\begin{aligned}
&\left[\hat{\Phi}_H(t,\boldsymbol{x}),\hat{\Pi}_H(t',\boldsymbol{y})\right]\\
&=\frac{i}{(2\pi)^3}e^{-\frac{\gamma}{2}(t+t')}\\
&\qquad\times\int\frac{d^3p}{2E_{\boldsymbol{p}}}E_{\boldsymbol{p}}\left[e^{ip^\mu(x_\mu-y_\mu)}+e^{-ip^\mu(x_\mu-y_\mu)}\right]\\
&=\Lambda^0{}_0\exp\left\{\frac{\gamma}{2}(t+t')\right\}\delta^3(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}')\\
&=0
\end{aligned}$$

3 つの積分に共通するのは、積分測度 $\frac{d^3p}{2E_{\boldsymbol{p}}}$ による積分になることである。この測度はローレンツ不変なので、$x_0-y_0=0$ となる座標系に移すローレンツ変換 Λ を選択できることを利用した。

4 議論

まずスピンレス有質量場が従う方程式 (14) について見てみると、$\gamma=0$ にすると Klein-Gordon 方程式と一致することが分かる。また、Klein-Gordon 方程式がスピンレスなスカラー場が従う方程式であることを考慮すると、スピンレス有質量場が従うべき方程式が (14) 式であるのは、妥当な結果だと言える。$\gamma\neq0$ の場合は、Klein-Gordon 方程式に余分な項が加わった方程式となる。時間発展の表式 (11) を見てみると、この理論において有質量場は散逸していくことが確認できるため、(14) に現れる γ を含む項は力学でいう所の摩擦項のような働きをする項だと考えられる。

次に、微視的因果律について考えてみると、前節の結果から、空間的に離れている $\hat{\Phi}_H(t,\boldsymbol{x})$ や $\hat{\Pi}_H(t',\boldsymbol{y})$ の任意の積も交換することが言える。また、任意の演算子 $\hat{O}$ が

$$\begin{aligned}
\hat{O}=&\sum_{N,M}\sum_{i'_1,\cdots,i'_N=1,2}\sum_{i_1,\cdots,i_M=1,2}\\
&\int d^3\boldsymbol{x}'_1\cdots d^3\boldsymbol{x}'_N d^3\boldsymbol{x}_1\cdots d^3\boldsymbol{x}_M\\
&\times C^{i'_1,\cdots,i'_N i_1,\cdots,i_M}(\boldsymbol{x}'_1,\cdots,\boldsymbol{x}'_N,\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_M)\\
&\times\hat{\xi}_{i'_1}(\boldsymbol{x}'_1)\cdots\hat{\xi}_{i'_N}(\boldsymbol{x}'_N)\hat{\xi}_{i_1}(\boldsymbol{x}_1)\cdots\hat{\xi}_{i_N}(\boldsymbol{x}_N)
\end{aligned}\tag{15}$$

$$\hat{\xi}_{i_k}(\boldsymbol{x_k})=\begin{cases}\hat{\Phi}_H(\boldsymbol{x}_k)\ (i_k=1)\\ \hat{\Pi}_H(\boldsymbol{x}_k)\ (i_k=2)\end{cases}.$$

と表せることを考慮すると、空間的に離れていれば任意の演算子も微視的因果律を満たすことが言える。

5 結論と今後の展望

今回、スピンレス有質量場のポアンカレ対称性を持つ量子マスター方程式の理論を考え、スピンレス有質量場の力学的挙動と理論の特徴を調べるために微視的因果律について調べた。その結果、場が従う方程式が Klein-Gordon 方程式に散逸項が加わった方程式となることが分かり、微視的因果律が満たされることが分かった。特に、空間的に離れている任意の演算子が微視的因果律を満たすという結果も得た。しかし、スピンを持つ場に対しての力学的挙動はまだ調べられていない。というのも、重力子は質量を持たず、スピン 2 を持つと考えられているため、スピンを持つ無質量場について調べることが望まれる。また将来重力の量子性の実験的検証に向けた理論を提案することを考えているので、この理論を 2 つの場の相互作用を扱うことができる量子マスター方程式の理論に拡張することが必要である。

6 参考文献

1. J. F. Donoghue, arXiv:1209.3511
2. D. Carney, P. C. E. Stamp, J. M. Taylor, arXiv:1807.11494
3. スティーブン・ワインバーグ (1997)「場の量子論 1 巻 粒子と量子場」(青木英明・有末宏明訳) 吉岡書店
4. 坂本眞人 (2014) 「場の量子論 不変性と自由場を中心にして 」裳華房

———index へ戻る

重宇 a02

Large misalignment mechanism による axion のコンパクト構造の形成

富塚 祥伍

Large misalignment mechanism による axion のコンパクト構造の形成

富塚 祥伍 (京都大学大学院 理学研究科)

Abstract

今回は (A.Arvanitaki et al. 2020) に関してレビューをする。銀河の回転曲線の観測などから、この宇宙には未知の物質であるダークマター (DM) が必要であることが分かっており、その有力な候補として axion がある。axion の場は最初、宇宙膨張により凍結しており、well-defined な初期値 Θ_0 を持つ。$\pi - |\Theta_0| \sim O(1)$ のときには、misalignment mechanism という生成機構があり、これまで良く調べられてきた。(A.Arvanitaki et al. 2020) では、$\pi - |\Theta_0| \ll 1$ である、large misalignment mechanism という生成機構で作られる axion について調べている。そして、この場合には場に parametric resonance が起き、それが無いときに比べて高密度な halo が形成されることが分かった。また、こうした halo が観測可能な現象を引き起すことを調べている。このような現象を観測で探すことで、large misalignment mechanism による axion に対して制限をつけることができる。

1 Introduction

銀河の回転曲線の観測などから、我々の宇宙には未知の物質であるダークマター (DM) が存在することが知られている。現在、DM は宇宙のエネルギー密度の $\sim 1/4$ を占め、これの性質を理解することは我々の宇宙を理解していくうえで重要である。しかし、DM の性質は未だほとんど分かっておらず、現在では様々なモデルが提案されている。そうしたモデルの内、DM の有力な候補として axion がある。axion は元来、QCD における強い CP 問題を解決するために導入された未発見の粒子である。しかし同時に、axion は現在 matter として振る舞うことから、DM の候補としても有力視されており、その様々な性質が調べられてきた。(A.Arvanitaki et al. 2020) では、従来調べられてこなかったパラメータ領域での axion の性質を調べており、このとき axion の場に parametric resonance が起きることを示した。またそれにより、CDM に比べて高密度な halo が形成されることが示された。

本稿ではまず axion と強い CP 問題の関係を説明し、その後 axion の生成機構である misalignment mechanism を説明する。そして (A.Arvanitaki et al. 2020) に基づいて、従来はあまり考えられていなかったパラメータ領域を考慮に入れた large misalignment mechanism を提示し、このときには axion の場に parametric resonance が起きること、また、通常の misalignment mechanism や CDM と比べて高密度な halo が形成されることを見ていく。そして最後にそうした axion による halo の観測可能性について議論する。

2 強い CP 問題と axion

QCD において、ラグランジアンには無次元量 θ を用いて、$\mathcal{L}_\theta = \theta g_s^2/32\pi^2 G^a_{\mu\nu}\tilde{G}_{a\mu\nu}$ という項が一般に許されることが知られている。但し $\tilde{G}_{a\mu\nu}$ は Levi-Civita の記号 $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ を用いて $\tilde{G}_{a\mu\nu} = 1/2\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}G_a^{\rho\sigma}$ である。しかし中性子の電気双極子モーメントの観測などから、$|\theta| < 10^{-9}$ であることが分かっており、無次元量 $|\theta|$ がなぜこのような小さな値なのかという問題を強い CP 問題と呼ぶ。これを解決する有力な候補として Peccei-Quinn(PQ) 機構がある。PQ 機構では、理論に $U(1)_{\rm PQ}$ 対称性を追加で導入する。そしてこの $U(1)_{\rm PQ}$ が自発的に破れたときの NG boson を axion と呼ぶ。このとき axion の場を ϕ とすると、無次元量 θ は effective に、力学変数 $\theta - \phi/f$ となる。但し f は $U(1)_{\rm PQ}$ の破れるスケールに対応する、axion の decay constant である。この力学変数に対して有効ポテンシャルが最小となるのは $\theta - \phi/f = 0$ となる点であり、こうして強い CP 問題が解決される。

axion は NG boson であるため元々mass を持たないが、インスタントンなどの非摂動効果によりポテンシャル $V(\phi) = m^2 f^2(1 - \cos(\phi/f))$ を持ち、従ってそれに対応した mass m を獲得する。
次節ではこうした axion の生成機構である misalignment mechanism について説明する。

3 misalignment mechanism

axion は生成機構として misalignment mechanism という機構を持っている。
ここで、ポテンシャル $V(\phi)$ をもつ axion に対する一様等方時空における線形化した運動方程式は

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + m^2\phi = 0$$

である。但し、$\dot{\phi}$ は ϕ の時間微分を意味し、m は axion の mass、H はハッブルパラメータ $H \equiv \dot{a}/a$ である。この式の第二項は摩擦項となっており、従って $H \gg m$ の間場は凍結して、$H \ll m$ となると場は振動する (図 1)。場が振動し始めるとエネルギー密度 ρ は $\rho \propto t^{-3/2}$ となり、DM として振る舞うようになる。場が凍結している間の値は初期値として

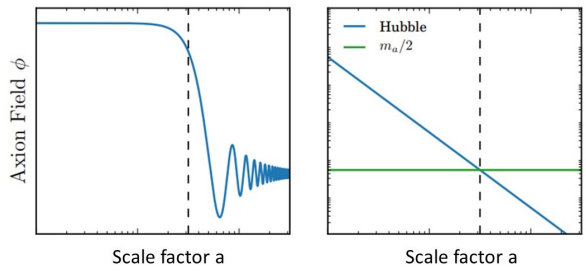


図 1: 場の振る舞いとハッブルパラメータの関係 (David J.E. Marsh 2016)

well-defined であり、これに対応する初期角度 ϕ/f を misalignment angle と呼び、以後 Θ_0 と書く。
この misalignment angle を決めるメカニズムは無く、通常は時空の因果関係を持つパッチごとに値を適当に割り振る。このときこの値がポテンシャルの極小にある必然性はなく、従ってこの misalignment angle によって axion は有限のエネルギー密度を持つ。また、適当に値を割り振るため、通常は $\pi - |\Theta_0| \sim O(1)$ となる。こうした axion の生成機構を misalignment mechanism と呼ぶ。

4 Large misalignment mechanism

前節では線形化した運動方程式を考えており、これは misalignment angle が小さい場合 ($\pi - |\Theta_0| \sim O(1)$) に相当する。(A.Arvanitaki et al. 2020) では misalignment angle が大きい場合 ($\pi - |\Theta_0| \ll 1$) を考えており、それによる axion の生成機構を large misalignment mechanism と呼ぶ。今節では、このときの axion の運動方程式から axion 場 ϕ に parametric resonance が起きることを見ていく。

まず計量は

$$ds^2 = -(1 - \Phi(t, \boldsymbol{x}))dt^2 + (1 + \Phi(t, \boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x}^2$$

とする。ここで $\Phi(t, \boldsymbol{x})$ は曲率揺らぎであり、$\Phi(t, \boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}} \Phi_{\boldsymbol{k}}(t) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot t}$ とする。
また、axion 場 ϕ を崩壊定数 f を用いて

$$\frac{\phi}{f} = \Theta(t) + \sum_{\boldsymbol{k}} \theta_{\boldsymbol{k}}(t) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot t}$$

とする。
ここで t_m を $t_m = m/2H$ とすると、zero mode Θ の運動方程式は

$$\Theta'' + \frac{3}{2t_m}\Theta' + \sin\Theta = 0 \tag{1}$$

となる。但し、$\Theta' = d\Theta/dt_m$ である。この運動方程式を摂動的に解いて

$$\Theta(t_m) = \bar{\Theta}(t_m)\cos(\bar{\omega}t_m) + \frac{\bar{\Theta}^3(t_m)}{192}[\cos(\bar{\omega}t_m) - \cos(3\bar{\omega}t_m)] \tag{2}$$

を得る。ここで、$\bar{\omega} = 1 - \bar{\Theta}^2/16$ である。
また、finite wavenumber mode $\theta_{\boldsymbol{k}}$ に関して、運動方程式は

$$\theta_{\boldsymbol{k}}'' + \frac{3}{2t_m}\theta_{\boldsymbol{k}} + \left(\cos\Theta + \frac{\tilde{k}^2}{t_m}\right)\theta_{\boldsymbol{k}} = S(\tilde{k}, t_m), \tag{3}$$

$$S(\tilde{k}, t_m) \equiv 2\left(\frac{t_k}{t_m}\frac{\mathrm{d}\Phi_{\boldsymbol{k}}}{\mathrm{d}t_k}\Theta' - \Phi_{\boldsymbol{k}}\sin\Theta\right)$$

となる。S は曲率揺らぎと axion 場 ϕ の結合に関する項である。ここで、(3) 式において $S = 0$ として、また、Θ に (2) 式を用いると、(3) 式は以下の Mathieu 方程式に書き直すことができる。

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta_{\boldsymbol{k}}}{\mathrm{d}\tau^2} + c\frac{\mathrm{d}\theta_{\boldsymbol{k}}}{\mathrm{d}\tau} + (\delta + \epsilon\cos\tau)\,\theta_{\boldsymbol{k}} = 0. \tag{4}$$

但し $\tau \equiv 2\bar{\omega} t_m$ で、

$$c = \frac{3}{2\tau}, \quad \delta - \frac{1}{4} = \left(-\frac{\bar{\Theta}^2}{32} + \frac{\tilde{k}^2}{2\tau} \right), \quad \epsilon = -\frac{\bar{\Theta}^2}{16} \tag{5}$$

である。この Mathieu 方程式は $\tilde{k}$ 依存の growth rate

$$\Gamma(\tilde{k}, t_m) = -\frac{3}{4t_m} + \frac{\bar{\Theta}^2}{16} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{8\tilde{k}^2}{t_m \bar{\Theta}^2} \right)^2}$$

を持ち、$\tilde{k}$ に依存した parametric resonance を引き起こす。実際に式 (1)、式 (3) に従って密度揺らぎ δ を計算すると図 2 のようになる。

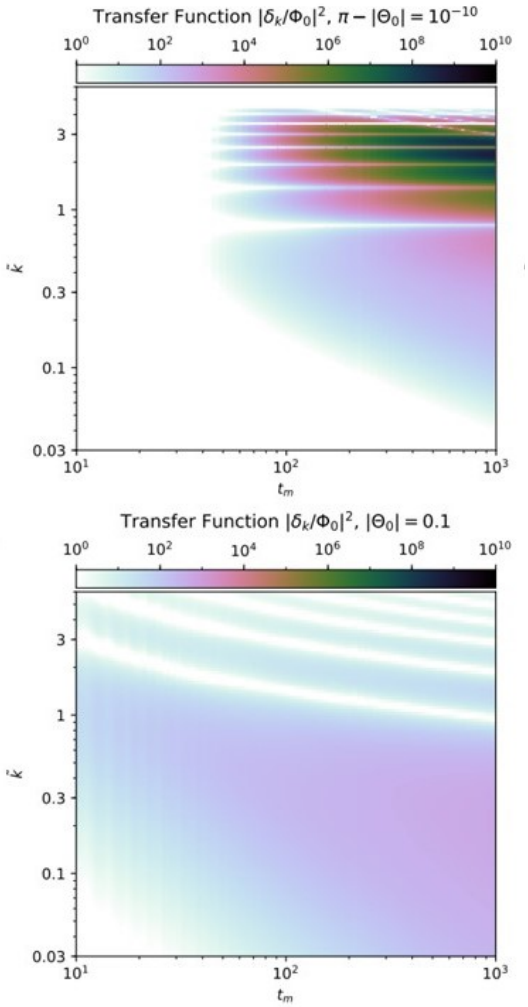


図 2: $\pi - |\Theta_0| = 10^{-10}$(左) と $|\Theta_0| = 0.1$(右) の場合に $|\delta_k/\Phi_0|^2$ を計算したもの (但し $\Phi_0 = \sqrt{2.1 \times 10^{-9}}$ とした).(A.Arvanitaki et al. 2020)

図 2 では、左が large misalignment mechanism に対応し、右が通常の misalignment mechanism に対応する。large misalignment mechanism では、通常の misalignment mechanism では起きない自己相互作用による parametric resonance が、$\tilde{k} \sim 1$ で起きていることが確認できる。

5 axion のコンパクト構造の形成

axion は自己重力により崩壊し halo と呼ばれる構造を形成する。自己重力による崩壊を考える上で本質的な量は $\delta(\boldsymbol{r}, R_S)$ である。ここで $\delta(\boldsymbol{r}, R_S)$ は密度揺らぎ $\delta(\boldsymbol{r})$、window function $W(\boldsymbol{r}, R_S)$ を用いて

$$\delta(\boldsymbol{r}, R_S) \equiv \int \mathrm{d}^3 r' W(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}', R_S) \delta(\boldsymbol{r}')$$

と定義される量である。これは各点における $\delta(\boldsymbol{r})$ を halo のスケール半径 R_S でならしたような量であり、今回はスケール半径 R_S 程度の構造を見るために window function を

$$\tilde{W}(\boldsymbol{k}, R_S) = \int \mathrm{d}^3 r W(\boldsymbol{r}, R_S) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{6}$$

$$\equiv N \exp\left(-\frac{(\ln(kR/\pi))^2}{4\tilde{\sigma}^2} \right) \tag{7}$$

となるようにとることにする。但し $\tilde{\sigma} = 1/2$ で、N は規格化 $\int \mathrm{d}\ln(k) |W(\boldsymbol{k}, R)|^2 = 1$ で決める。
この $\delta(\boldsymbol{r}, R_S)$ に対して、その分散 $\sigma(R_S)^2 \equiv < \delta(\boldsymbol{r}, R_S)^2 >$ が $\sigma(R_S) = \delta_c = 1.686$ となったとき重力崩壊が起きると仮定する (cf. Press-Schechter 理論)。このときスケール半径 R_S の halo に対してスケール massM_S、スケール densityρ_S が以下のように定義できる。

$$M_S = C_M \frac{4\pi}{3} \rho_{0,m} R_S^3, \tag{8}$$

$$\rho_S = C_\rho \rho_{0,m} a_{\mathrm{coll}}^{-3}. \tag{9}$$

但し $C_M \sim 1$,$C_\rho \sim 200$ で、a_{coll} は $\sigma(R_S) = \delta_c$ のときの scale factor a とする。この定義の下で axion によって作られる halo の spectra は図 3 のようになる。
図 3 において、黒の実線が CDM による halo の spectra で、他の実線が axion による halo の spectra である。例えば、青の実線では axion mass が 10^{-18}eV で $\pi - |\Theta_0|$ が 10^{-12} の場合で、large misalignment mechanism に対応する。またオレンジの実線は axion mass が 10^{-15}eV で、$|\Theta_0|$ が $\pi/2$ の場合で、通

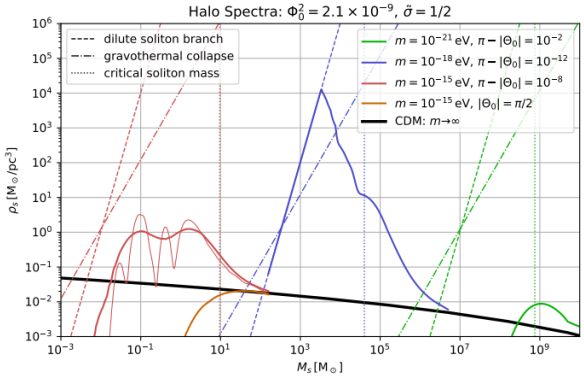


図 3: 様々な mass、misalignment angle に対しての halo の spectra(実線)(A.Arvanitaki et al. 2020)

常の misalignment mechanism に対応する。この図 3 から、large misalignment mechanism による axion は、CDM で形成されるものより高密度な halo が形成されることが分かる。

6　axion による halo の観測可能性

最後に、これまで見てきた axion による halo の観測可能性について簡単に議論する。axion による halo を観測するための手法はいくつか考えられるが、ここでは photometric microlensing による観測可能性について考えていく。photometric microlensing とは、遠方の source の見かけの明るさが、観測者と source の間にある halo によって変化する現象であり、それによって間接的に halo を観測することができる。具体的には、観測者と halo の間の距離を D_L、観測者と source の間の距離を D_S、halo と source の間の距離を D_{LS} とすると、convergence κ と呼ばれる量が halo の面密度 Σ を用いて

$$\kappa \equiv \frac{8\pi G D_L D_{LS} \Sigma}{D_S}$$

と定義される。κ は source の見かけの大きさがどのくらい変化するかを表す量であり、これの fluctuation Δ_κ が $\Delta_\kappa > 10^{-3}$ のとき観測可能とすると、photometric microlensing による観測可能性は図 4 のオレンジ色の線が lower boundary となる。
この図から、large misalignment mechanism による axion は CDM より高密度な halo を形成することから photometric microlensing などの観測に対して観測可能性があることが分かる。

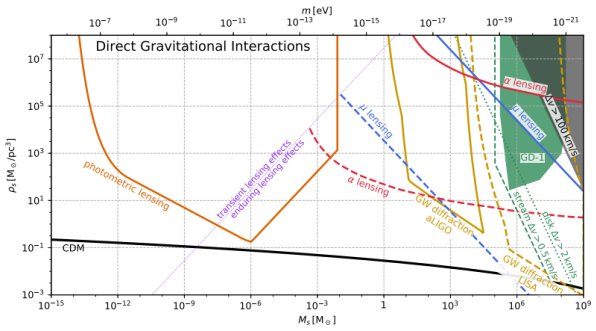


図 4: halo に対する観測可能性 (A.Arvanitaki et al. 2020)

7　まとめ

axion には misalignment mechanism と呼ばれる生成機構が存在するが、今まで調べられていなかった misalignment angle の大きい場合には、axion が CDM に比べて高密度な halo を形成することが示された。また、高密度な halo が形成されることから、CDM では観測不可能だった観測方法に対しても axion は観測可能性があることが示唆された。

Acknowledgement

お忙しい中、議論や助言に時間を割いてくださった基礎物理学研究所宇宙グループ、京都大学大学院天体核研究室の皆様と今回発表の機会を設けていただくにあたり尽力してくださったすべての方に御礼申し上げます.

Reference

A.Arvanitaki et al. 2020, Phys. Rev. D 101, 083014

David J.E. Marsh 2016, Phys. Rep. 643 1-79

———index へ戻る

重宇 a03

連続変数に対する擬確率関数の定式化と応用

谷 将樹

連続変数に対する擬確率関数の定式化と応用

谷 将樹 (九州大学大学院　量子宇宙理論研究室 M1)

Abstract

古典力学は、測定の有無にかかわらず物理量は一意に確定しているという実在性を前提として成立している。一方で量子力学においては、測定するまで物理量は確定しておらずこの実在性が成り立っていない。レゲットガーグ不等式は、量子力学における実在性の破れを検証する道具として用いられており、例えば超伝導磁束量子ビットといった巨視的量子系で実在性の破れが実証されている (G. C. Knee, K. et al., 2016)。重力の量子性を検証する方法の一つとしてもレゲットガーグ不等式を用いた研究がなされている (A. Matsumura et al 2022)。また、調和振動子に対するレゲットガーグ不等式による実在性の破れに関する研究も報告されている (S. Bose et al 2018; J. J. Halliwell at el 2021)。私たちは、連続変数に対して擬確率関数の新しい計算手法の定式化とレゲットガーグ不等式の破れへの応用について報告する。

1 Introduction

近年急速に発展してきた量子力学はニュートンの運動方程式やマクスウェル方程式といった古典物理学とは異なる性質がある。古典力学は、測定の有無にかかわらず物理量は一意に確定しているという実在性を前提として成立している。一方で量子力学においては、測定するまで物理量は確定しておらずこの実在性が成り立っていない。局所実在論の破れをテストする不等式としてベルの不等式が知られている。ベルの不等式は 2022 年のノーベル賞にも選ばれ量子力学の存在を確かなものとしたが、量子もつれ状態を維持する必要があり実験的な検証はいまだ容易ではない。同様な不等式として、レゲットガーグ不等式は量子もつれ状態にする必要なく、量子力学における実在論の破れを検証する道具として用いられており、例えば超伝導磁束量子ビットといった巨視的量子系で実在性の破れが実証されている (G. C. Knee, K. et al., 2016)。重力の量子性を検証する方法の一つとしてもレゲットガーグ不等式を用いた研究がなされている (A. Matsumura et al 2022)。また、調和振動子に対するレゲットガーグ不等式による実在性の破れに関する研究も報告されている (S. Bose et al 2018; J. J. Halliwell at el 2021)。私たちは、連続変数に対して擬確率関数の新しい計算手法の定式化とその方法を用いてスカラー場の量子性の検証へとレゲットガーグ不等式を応用することに成功したことを報告する。

2 Formulation

ここでは、レゲットガーグ不等式についてのレビューから始めていく。レゲットガーグ不等式では観測量 Q を ± 1 を取るように二値変数と設定し、時刻 t_i における Q の期待値を $\langle Q_i \rangle$ とする。また、Q_i と Q_j の相関を C_{ij} として

$$C_{ij} = \langle Q_i Q_j \rangle = \sum s_i s_j p(s_i, s_j) \tag{1}$$

と与えられる。ここで、時刻 t_i,t_j で s_i,s_j を取る確率を $p(s_i, s_j)$ とした。これらを用いて 2 時刻間のレゲットガーグ不等式は

$$\begin{aligned} &1 + s_1 \langle Q_1 \rangle + s_2 \langle Q_2 \rangle + s_1 s_2 \langle Q_1 Q_2 \rangle \\ &= \langle (1 + s_1 Q_1)(1 + s_2 Q_2) \rangle \geqq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

となる。この値は上で示したように常に 0 以上の値を取ることが分かる。同様に 3 時刻間、4 時刻間、$\cdots$ のレゲットガーグ不等式が存在する。これまでは古典の場合について言及したが量子力学に従う場合についても同様に示す。まず $Q(t) \to \hat{Q}(t)$ と量子化すると、$\hat{Q}(t)$ はハイゼンベルグ描像で書くことができ系のハミルトニアンを $\hat{H}$ として $\hat{Q}(t) = e^{i\hat{H}t}\hat{Q}e^{-i\hat{H}t}$ となる。これを用いると擬確率関数は、

$$q_{s_1,s_2}(t_1, t_2) = \frac{1}{8}\mathrm{Tr}[(1 + s_1 Q_1)(1 + s_2 Q_2)\rho_0] + (1 \leftrightarrow 2) \tag{3}$$

と書くことができる。ρ_0 は初期状態の密度演算子である。さらに射影演算子 $\hat{P}(t) = \frac{1+s\hat{Q}(t)}{2}$ を用いると、

$$q_{s_1,s_2}(t_1,t_2) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\hat{P}(t_1)\hat{P}(t_2)\rho_0] + (1 \leftrightarrow 2)$$
$$= \mathrm{ReTr}[\hat{P}(t_1)\hat{P}(t_2)\rho_0] \quad (4)$$

本研究では観測量を $Q = sgn(\hat{\bar{\phi}}(t))$ として、$P = \frac{1+sQ}{2} = \theta(s\hat{\bar{\phi}}(t))$ である。最終的に

$$q_{s_1,s_2}(t_1,t_2) = \mathrm{ReTr}[\theta(s_2\hat{\bar{\phi}}(t_2))\theta(s_1\hat{\bar{\phi}}(t_1))\rho_0] \quad (5)$$

となる。次に今回用いた場について、ミンコフスキー時空でのスカラー場は

$$\hat{\phi}(x,t) = \int d^3k \frac{e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega_k t)}}{\sqrt{2\omega_k}}\hat{a}_{\boldsymbol{k}} + \frac{e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega_k t)}}{\sqrt{2\omega_k}}(x,t)\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}} \quad (6)$$

と表される。これをガウシアンで平均化を行い

$$\hat{\bar{\phi}}(t) = \int d^3x\phi(x,t)e^{-\frac{|x|^2}{L^2}}$$
$$= \int d^3k u_k(t)\hat{a}_k + u^*_k(t)\hat{a}^\dagger \quad (7)$$

ここで、$u_k(t) = \frac{e^{-i\omega_k t}e^{-\frac{k^2L^2}{4}}}{\sqrt{2\omega_k}}$ である。ステップ関数は $\theta'(z-a) = \delta(z-a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-ip(z-a)}$ から

$$\theta(s(z-a)) = \int_{-\infty}^{\infty} dc \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{-i(s(z-a)-c)} \quad (8)$$

初期状態を $\rho_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ とすると

$$q_{s_1,s_2}(t_1,t_2) = \mathrm{Re}\langle\psi_0|\theta(s_2\phi(\hat{\bar{t}}_2))\theta(s_1\phi(\hat{\bar{t}}_1))|\psi_0\rangle,$$
$$= \mathrm{Re}\int_0^\infty\int_0^\infty dc_1dc_2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_1dp_2}{(2\pi)^2} \quad (9)$$
$$\langle\psi_0|e^{-ip_2s_2\hat{\bar{\phi}}(t_2)}e^{-ip_1s_1\hat{\bar{\phi}}(t_1)}|\psi_0\rangle$$
$$\times e^{ip_2c_2}e^{ip_1c_1} \quad (10)$$

ここで変位演算子を $\hat{D}_{\boldsymbol{k}}(\xi_{\boldsymbol{k}}) = \exp\left[\xi_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{\boldsymbol{k}} - \xi^*_{\boldsymbol{k}}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\right]$ と定義すると

$$e^{ip_2s_2\hat{\bar{\phi}}(t_2)}e^{ip_1s_1\hat{\bar{\phi}}(t_1)}$$
$$= \prod_{\boldsymbol{k}_2} D_{\boldsymbol{k}_2}(-ip_2s_2u^*_{\boldsymbol{k}_2}(t_2))\prod_{\boldsymbol{k}_1} D_{\boldsymbol{k}_1}(-ip_1s_1u^*_{\boldsymbol{k}_1}(t_1))$$
$$= \prod_{\boldsymbol{k}} D_{\boldsymbol{k}}(-ip_2s_2u^*_{\boldsymbol{k}_2}(t_2))D_{\boldsymbol{k}}(-ip_1s_1u^*_{\boldsymbol{k}}(t_1)). \quad (11)$$

となるので擬確率関数は

$$q_{s_1,s_2}(t_1,t_2) = \mathrm{Re}\int_0^\infty\int_0^\infty dc_1dc_2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_1dp_2}{(2\pi)^2}$$
$$\langle\psi_0|\prod_{\boldsymbol{k}} D_{\boldsymbol{k}}(-ip_2s_2u_{\boldsymbol{k}}(t_2))D_{\boldsymbol{k}}(-ip_1s_1u^*_{\boldsymbol{k}}(t_1))\,|\psi_0\rangle$$
$$\times e^{ip_2(c_2+\varphi(t_2))}e^{ip_1(c_1+\varphi(t_1))} \quad (12)$$

初期状態としてコヒーレント状態 $|\psi_0\rangle = \hat{D}_{\boldsymbol{l}}(\xi)|0\rangle$ とスクイーズドコヒーレント状態 $|\psi_0\rangle = \hat{D}_{\boldsymbol{l}}(\xi)\prod_{\boldsymbol{n}>0}\hat{S}_{\boldsymbol{n},-\boldsymbol{n}}(\zeta_{\boldsymbol{n}})|0\rangle$ の二つの場合で計算を行った。ここでスクイーズ演算子を

$$\hat{S}_{\boldsymbol{n},-\boldsymbol{n}}(\zeta_{\boldsymbol{n}}) = \exp\left\{(\zeta^*_{\boldsymbol{n}}a_{\boldsymbol{n}}a_{-\boldsymbol{n}} - \zeta_{\boldsymbol{n}}a^\dagger_{\boldsymbol{n}}a^\dagger_{-\boldsymbol{n}})\right\} \quad (13)$$

としている。本実験では簡単のためスクイージングパラメータ $\zeta_{\boldsymbol{n}} = r_{\boldsymbol{n}}e^{i\theta_{\boldsymbol{n}}}$ を $r_{\boldsymbol{n}} = r, \theta_{\boldsymbol{n}} = 0$ とモードによらず固定した。

3 Results

まずはコヒーレント状態にした場合の結果を示す。図 1 はコヒーレント状態の大きさを変えた場合のグラフで、図 2 は平均化のスケールを変えた場合のグラフである。図 1 からコヒーレント状態の大きさが小さいと破れが見えないことが分かる。これは真空状態では破れが見えないこととつじつまが合っている。逆に大きくしていくと古典的な状態に近づいていくことから破れがだんだん弱くなることが予想される。図 2 から破れが見える平均化のスケールには下限と上限があることが分かる。本実験で用いた場は式 (7) の様にガウシアンで平均化を行ったためモードの大きさが $|l| < \frac{1}{L}$ 程度でなければ影響しない。また L を小さくとりすぎると影響するモードが多くなりすぎてほぼ真空状態と同じようにふるまうことが予想される。このような理由から L に制限が付くと

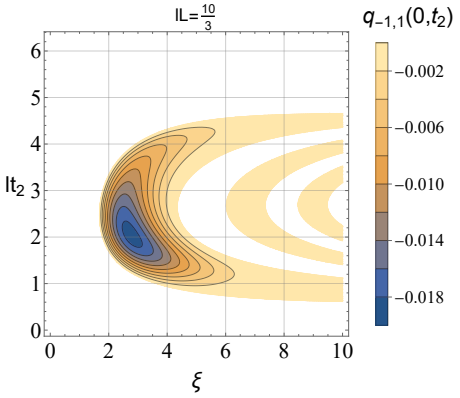


図 1: $lt_1 = 0, s_1 = -1, s_2 = 1, lL = \frac{10}{3}$ として平均化のスケールを固定しており、横軸はコヒーレント状態の大きさのパラメータ、縦軸は 2 回目の測定時刻である

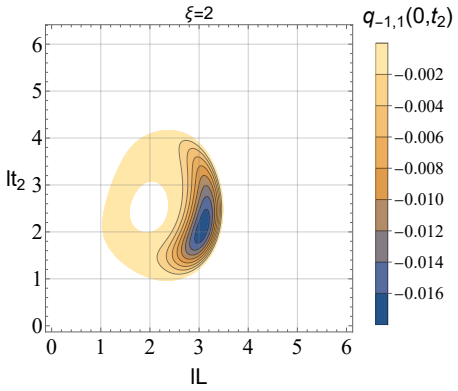


図 2: $lt_1 = 0, s_1 = -1, s_2 = 1, \xi = 2$ としてコヒーレント状態の大きさを固定しており、横軸は平均化のスケール縦軸は 2 回目の測定時刻である。

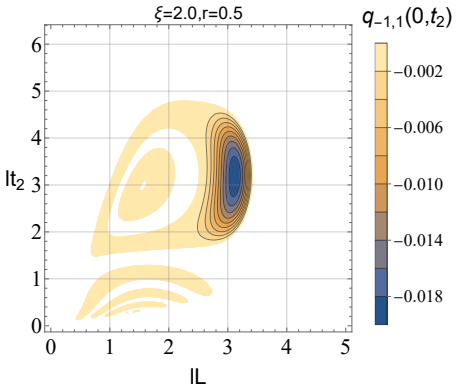


図 4: $r = 0.5, lt_1 = 0, s_1 = -1, s_2 = 1, \xi = 2$ として横軸は平均化のスケール、縦軸は 2 回目の測定時刻である

考えられる。
次にスクイーズドコヒーレント状態についてコヒーレント状態の時と同様に図 3 はコヒーレント状態の大きさを変えた場合のグラフで、図 4 は平均化のスケールを変えた場合のグラフである。破れが起きるコヒーレント状態の大きさの下限や平均化のスケールは変わらないが破れが起きる時刻が変わっていることが分かる。コヒーレント状態単体よりもスクイーズドコヒーレント状態にした方が破れの領域が広くなっていることが分かる。

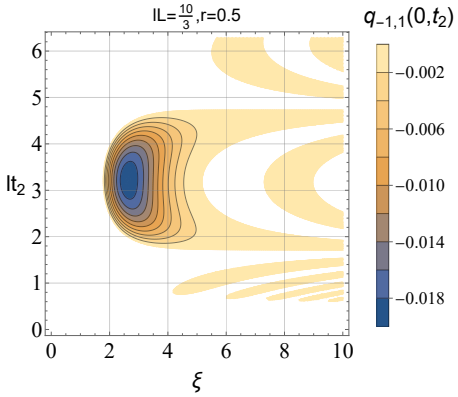


図 3: $r = 0.5, lt_1 = 0, s_1 = -1, s_2 = 1, lL = \frac{10}{3}$ として横軸はコヒーレント状態の大きさ、縦軸は 2 回目の測定時刻でプロットしている。

4 Conclusion

本研究では、スカラー場をコヒーレント状態にとスクイーズドコヒーレント状態にしてレゲットガーグ不等式の破れを検証した。結果として、コヒーレント状態では破れを見ることができ、スクイーズドコヒーレント状態にすると破れの領域が広がることが分かった。コヒーレント状態とスクイーズドコヒーレント状態で破れが見えることは先行研究で行われていた調和振動子で計算された場合と同じ結果である。しかしスクイージングの効果を入れると破れの領域が増えるのはスカラー場に見られる特有の結果であり、調和振動子と違いモードが無限にあることが関係しているのではないかと考えられる。また、基底状態であっても ± 1 を決める軸を周期的に動かすことでコヒーレント状態と同じ形になり破れが見えることが分かった。このことも調和振動子でも同じことがいえると知られておりこれも同様の結果であった。また、興味深いことにスカラー場を用いると擬確立が周期的になっていないことが分かった。コヒーレント状態の場合、二回目の測定時刻が早いと破れが見えるが、２回目の測定時刻を大きくとると破れが見えなくなる。これは窓関数で測定するモードを区切ったことが原因だと思われる。本研究では窓関数としてガウス関数を用いて平均化を行った。これが原因で、見ている領域とその外側の領域とがもつれ状態になってデコヒーレンスが起こっているのではないかと考えられる。

5 Disscussion

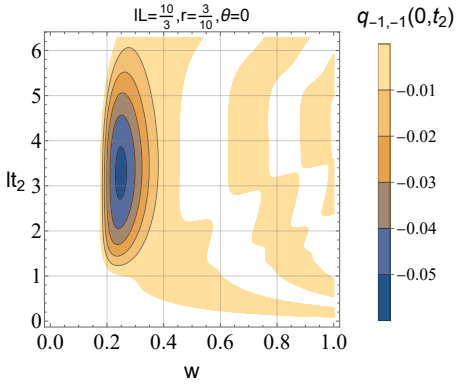


図 5: $Q = sgn(x-w) + sgn(-x-w) + 1$ としたときの擬確率関数のグラフ。$-w < x < w$ では -1 それ以外では 1 を取るように設定した。このときの最大破れは約 -0.05 で $Q = sgn(x)$ と撮るよりも大きくなっている。

本実験では物理量 Q として x 軸対称な $sgn(x)$ を用いたが、これを井戸の様に窪んだ $Q = sgn(x-w) + sgn(-x-w) + 1$ と取った場合についても同様に計算することができる。この場合初期状態 $|\psi_0\rangle = \hat{S}\,|0\rangle$ とコヒーレント状態を入れなくても破れが見え、最大破れの大きさがもとの $Q = sgn(x)$ のときでは -0.018 程度だったが、このような Q を取った場合最大破れが $-0,05$ と約 3 倍近く大きくなっていることが分かる。これはスクイージングによって位相空間での分布が引き延ばされた効果が見えるようになったためであると考えおり、同様に調和振動子の場合も $Q = sgn(x)$ から $Q = sgn(x-w) + sgn(-x-w) + 1$ と変えることで最大破れが増加した。これを使ってスクイージングを見極めることができるようになるのではないかと考えている。ここで、擬確率関数は

$$q(s_1, s_2) = \frac{1}{8}\left\langle (1 + s_1\hat{Q}_1 + s_2\hat{Q}_2)^2 - 1 \right\rangle \qquad (14)$$

と変形できるので最大破れとして $-\frac{1}{8}$ を取ることが知られている。今後の課題としてどのような Q を取れば最大破れである $q = -\frac{1}{8}$ を取るのかについても考えていきたい。

Reference

G. C. Knee, K. et al 2016, Nature Communications,13253

A. Matsumura, Y. Nambu, K. Yamamoto 2022, Phys. Rev. A 106 012214

S. Bose, D. Home, and S. Mal 2018, Phys. Rev. Lett. 120, 210402

J. J. Halliwell, A. Bhatnagar, H. Nadeem, V. Wimalaweera 2021, Phys. Rev. A 103, 032218

———index へ戻る

重宇 a04

エネルギー条件から見る正則ブラックホールの妥当性

牧野 耕輔

2023 年度 第 53 回 天文・天体物理若手夏の学校

エネルギー条件から見る正則ブラックホールの妥当性

牧野 耕輔 (近畿大学大学院 総合理工学研究科)

Abstract

極端に強い重力天体であるブラックホールはアインシュタインが発表した一般相対性理論の自然な帰結である. さらにここ近年ブラックホールの存在が観測によって確認されてきた. それに伴って一般相対性理論の検証や, 時空構造の解明が盛んに行われている. しかし, このブラックホールはその内部に物理量が発散され物理法則の予言性が失う特異点を持つ. そこでこの特異点は回避する方法として, 1968 年にバーデンが内部に特異点がない正則ブラックホールを提唱した. 今回の発表ではさらに磁荷や電荷を持つ物質によってこの正則ブラックホールが構築できるか確認するとともに, エネルギー条件を用いて物理的に妥当かを検証した.

1 Introduction

アインシュタインは 1915 年に時空の曲率として重力相互作用を記述する一般相対性理論を発表した. その自然な帰結として, 極端に重力の強い天体であるブラックホールの存在が予測された. 現在重力波やブラックホール・シャドウなどの観測成功によって様々な宇宙観測がより盛んになっている. そのためブラックホールの存在が確認され時空構造が急速に解明されるとともに, 一般相対性理論を検証する筆頭天体となっている.

この天体を深く理解するには内部構造を理解する必要がある. ブラックホールは通常, 光の脱出限界である事象の地平面とさらにその内部に特異点を持つ. これはホーキングとペンローズの研究から, エネルギー運動量テンソルがいくつかのエネルギー条件を満たす場合, 一般的かつ必然的に特異点が生じることが示されている [(Penrose 1965)]. 特異点では一般に物理量が発散するため物理法則の予言の観点から好ましくない. しかし現実的に存在するブラックホール全てに特異点が存在するのか疑問である. 従ってこのような特異点を回避するブラックホールモデルとしてバーデン (Bardeen) が提唱したのが正則ブラックホールモデルである [(Borde 1997)]. Bardeen の正則ブラックホールは内部には特異点がなく, そのため全時空領域が正則であるとともに, 物理的に妥当な弱いエネルギー条件 (WEC) も満たされている. 一方で, ブラックホール内部領域において時空のトポロジー変化が起きている. この様な Bardeen の正則ブラックホールの特徴から, 一般に時空のトポロジー変化を認めない場合には弱いエネルギー条件が破られなければならないことが, 先行研究 [(Borde 1997)] で示されている.

本発表では, Bardeen の正則ブラックホールを実際に作り出す物質を考察する目的として電荷がある状況で正則ブラックホールが再構築できるかを考え, その物理的妥当性をエネルギー条件の破れを見ることで検証した Rodrigues and Marcos de Silva. 2018 [(Rodrigues & Silva 2018)] の研究を紹介する. また, 論文に則して, 計量の符号は $(+,-,-,-)$, かつ $c = \hbar = G = 1$ の自然単位系を用いる.

2 磁化を持つ正則ブラックホール

Bardeen モデルの物理的解釈は Ayon-Beato と Garcia によって示され, この解は磁気単極子をもったブラックホールをアインシュタイン方程式と非線形電磁気学の統合によって表すことができる [(Ayon 2000)] . その場合の作用は曲率スカラーを R, マクスウェル・ファラデーテンソル $F_{\mu\nu}$ に依存した電磁場のラグランジアン密度を $\mathcal{L}(F)$ として以下によって記述できる.

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\,[R + 2\kappa^2\mathcal{L}(F)], \tag{1}$$

ここで $\kappa^2 = 8\pi$ である. 加えてこの作用のもとでゲージ場を考慮した場合のマクスウェル方程式はゲージポテンシャル A_μ に関して作用 (1) を変分を取ることで以下の様に得られる.

$$\nabla_\mu[F^{\mu\nu}\mathcal{L}_F] = 0, \tag{2}$$

ここで $\mathcal{L}_F = \partial\mathcal{L}/\partial F$. 上式が電磁気と異なる, 非線形磁気単極子のもとでのマクスウェル方程式である. 一方計量 $g_{\mu\nu}$ に関して作用 (1) を変分して得られるのがアインシュタイン方程式であり, リッチテンソルを $R_{\mu\nu}$, エネルギー運動量テンソルを $T_{\mu\nu}$ とすることで以下の様に表される.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa^2 T_{\mu\nu}, \tag{3}$$

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}(F)}{\partial F}F_{\mu}{}^{\alpha}F_{\alpha\nu}, \tag{4}$$

また, このモデルを作り出す物質を考えるためにエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ に合う様なラグランジアン密度 $\mathcal{L}(F)$ を, 磁荷 q として以下の様に与えることとする.

$$\mathcal{L}_F = \frac{3}{sq^2\kappa^2}\left(\frac{\sqrt{2q^2F}}{1+\sqrt{2q^2F}}\right)^{5/2}, \tag{5}$$

ここで, $s = |q|/2m$. アインシュタイン方程式から導かれる, 漸近平坦で静的球対真空解はシュヴァルツシルト時空として記述される. 一方正則ブラックホールはシュヴァルツシルト時空と異なり空間を満たす物質が存在するため真空ではない. ここで, Bardeen モデルの静的球対称な時空計量は一般に以下の様に表すことができる.

$$ds^2 = f(r)dt^2 - f(r)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \tag{6}$$

ここで,

$$f(r) = 1 - \frac{2M(r)}{r}. \tag{7}$$

シュヴァルツシルト時空計量で質量を表す定数部分を r の関数 $M(r)$ とし, 上記のラグランジアン密度 (5) を式 (3), (4) に整合するよう記述し直すことで Bardeen 正則ブラックホールが生み出す質量関数を求めることができる. それが以下である.

$$M(r) = \frac{mr^3}{(r^2+q^2)^{3/2}} \tag{8}$$

この質量関数を用いて, この正則ブラックホールの計量成分を具体的に記述すると,

$$f(r) = 1 - \frac{2mr^2}{(r^2+q^2)^{3/2}} \tag{9}$$

である. 実際に時空の振る舞いをみるために計量成分の漸近形を解析する. $r \to +\infty, r \to 0$ とすると以下の様に表される.

$$f(r) \approx 1 - \frac{2m}{r} + \frac{3mq^2}{r^3}, r \to +\infty, \tag{10}$$

$$f(r) \approx 1 - \frac{2mr^2}{q^3}, r \to 0, \tag{11}$$

アインシュタイン方程式の厳密解の一つである漸近平坦でで、静的球対称な荷電ブラックホールを表すライスナー・ノルドストローム解

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{G(Q^2+p^2)}{r^2}, \tag{12}$$

とは異なり, $r \to +\infty$, ではシュバルツシルト時空のように漸近平坦に振る舞い, $r \to 0$ では斥力を持つドジッター核があることがわかった.

3 電荷を伴う正則ブラックホール

前章では非線形磁気単極子を伴う正則ブラックホールを構築したが, この方法を追って電荷を源とする正則ブラックホールを構築していく. 電場を伴う場合のマクスウェル・ファラデーテンソルは F^{10} が残り, 式 (2) を $\nu = 0$ で積分することで以下の式が得られる.

$$F^{10}(r) = \frac{q}{r^2}\mathcal{L}_F^{-1}(r) \tag{13}$$

一方, アインシュタイン方程式の非ゼロ成分は以下のように質量関数 $M(r)$ と電磁場のラグランジアン $\mathcal{L}(F)$ との関係との関係によって表せる.

$$\frac{2M'(r)}{r^2} = \kappa^2\left[\mathcal{L} + \frac{q^2}{r^4}\mathcal{L}_F^{-1}(r)\right], \tag{14}$$

$$\frac{M''(r)}{r} = \kappa^2\mathcal{L} \tag{15}$$

このことから, 前章で得られた質量関数 (8) を仮定してマクスウェル方程式とアインシュタイン方程式に整合するラグランジアン密度は以下の様に導ける.

$$\mathcal{L}(r) = \frac{q^2m(6q^2-9r^2)}{9r^2}, \tag{16}$$

$$\mathcal{L}_F = \frac{\kappa^2(r^2+q^2)^{7/2}}{15mr^6} \tag{17}$$

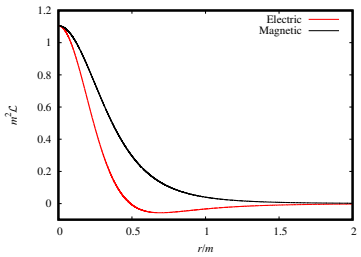


図 1: q＝0.6 における磁力的と電気的な場合におけるラグランジアンの振る舞い. 黒色の曲線が電荷を源とする場合, 赤色の曲線が磁荷を源とする場合の漸近的振る舞いを示し, どちらも同様の振る舞いをする.

以下の図は前章で導いた磁場を伴う場合と, 今回の電場を伴う場合のラグランジアン密度が漸近的に同様の振る舞いをすることを表している.
導いたラグランジアン密度 (16) から求まるマクスウェル・ファラデー非ゼロ成分 (13) と, 時空の正則性を真に評価する曲率不変量の漸近形の解析も行なっていく. F^{10} は,

$$F^{10}(r) = \frac{15qmr^4}{\kappa^2(r^2+q^2)^{7/2}} \tag{18}$$

のように求まり, $r \to +\infty, r \to 0$ において,

$$F^{10}(r) \propto 1/r^3, F^{10} \propto r^4$$

としてクーロン場とは異なる振る舞いをするが全時空で正則なことがわかった. また, 曲率不変量はクレッチマンスカラー $\mathcal{K} = R^{\mu\nu\alpha\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta}$ を見た. 以下が全時空のクレッチマンスカラーの値と振る舞いを表した図 2 である.

$$\mathcal{K} = \frac{12m^2}{(r^2+q^2)^7}(8q^2 - 4q^6r^2 + 47q^4r^4 - 12q^2r^6 + 4r^8) \tag{19}$$

結果として, $r \to 0$ でも定数で, $r \to +\infty$ でも漸近的平坦で正則であることを示した. 従って非線形電磁気学を組み合わせることで電場を伴うような物質があれば Bardeen モデルの正則ブラックホールが構築できた.

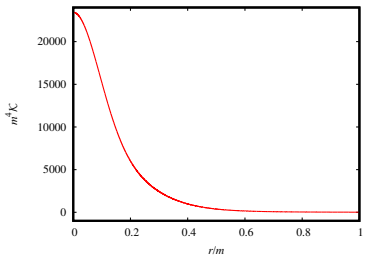


図 2: q＝0.6 におけるバーデンモデル計量から得られる Kretschmann scalar の振る舞い.

4 エネルギー条件

3 章では実際に電荷を伴う正則ブラックホールが構築でき, 曲率不変量からも全時空に対して正則であることを示せたが, 実際にその解が物理的に妥当であるかを調べる必要がある. そこで物理的な妥当性の基準として, 様々なエネルギー条件の成否を確かめる. エネルギー密度を ρ, 半径方向, 接方向の圧力をそれぞれ p_r, p_t とすることで, エネルギー運動量テンソルの成分は以下の様に与えられる.

$$T^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \rho & & & \\ & -p_r & & 0 \\ & & -p_t & \\ & 0 & & -p_t \end{pmatrix} \tag{20}$$

この時, 重力の引力性を要請する強いエネルギー条件 (SEC), 粒子のエネルギーが正であることを要請する弱いエネルギー条件 (WEC), エネルギー流の非光速超過性を要請する支配的エネルギー条件 (DEC) の定義は ρ と p を用いて以下の様に記述できる.

$$SEC(r) = \rho + p_r + 2p_t \geq 0, \tag{21}$$
$$WEC_{1,2}(r) = NEC_{1,2}(r) = \rho + p_{r,t} \geq 0, \tag{22}$$
$$WEC_3(r) = DEC_1(r) = \rho \geq 0, \tag{23}$$
$$DEC_{2,3} = \rho - p_{r,t} \geq 0. \tag{24}$$

前章で求めた, ラグランジアン (16), マクスウェル・ファラデーテンソルの非ゼロ成分 (18) を用いることでエネルギー運動量テンソル 4 から ρ と p を具体的な定数によって表記できる. 従って, 上記のエネルギー条件は以下によって記述し直すことができる.

$$SEC(r) = \frac{6mq^2(3r^2-2q^2)}{\kappa^2(r^2+q^2)^{7/2}}, \quad (25)$$

$$WEC_1(r) = 0, \quad (26)$$

$$WEC_2(r) = \frac{15mq^2r^2}{\kappa^2(r^2+q^2)^{7/2}}, \quad (27)$$

$$WEC_3(r) = \frac{6mq^2}{\kappa^2(r^2+q^2)^{5/2}}, \quad (28)$$

$$DEC_2(r) = \frac{12mq^2}{\kappa^2(r^2+q^2)^{5/2}}, \quad (29)$$

$$DEC_3(r) = \frac{3mq^2(4q^2-r^2)}{\kappa^2(r^2+q^2)^{7/2}}. \quad (30)$$

これらを r の関数として 1 つのグラフにまとめエネルギー条件の破れを確認することができるのが以下の図 3 である. 従って, この電場を伴った正則ブラックホールは元の Bardeen 正則ブラックホールが満たす WEC の破れはなく, SEC のみ大きく破れていた. これよりエネルギー条件からも中心で斥力的効果が働き特異点生成を解消することの確認ができ, さらに SEC が破れる領域は事象の地平面の内側に位置することが示された.

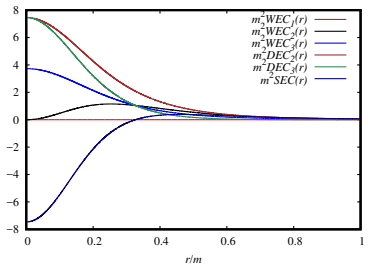


図 3: q＝0.4m における各エネルギー条件の符号の表れ.

5 まとめ

以上のことから, 古典的な理論のもとでブラックホールに存在する特異点を解消できる正則ブラックホールの中で, 電荷を伴うモデルを構築することができた. このモデルは全時空領域で正則で, 漸近平坦性を持ち合わせていた. このモデルは SEC のみ破り, 中心にはドジッターコアを生成することを示した.

仮に真空でない場合はホライズンの外部に, ゼロでないエネルギー運動量成分が現れるので, 今後観測技術の進歩によって正則ブラックホールの検証も可能である. いくつもある正則ブラックホールのモデルの分類や妥当性をエネルギー条件などから理論物理学の観点からも調べることができた. 量子重力理論から正則ブラックホールモデルを構成できるかどうかは今後の重要な課題の 1 つである.

6 参考文献

Reference

Arvind Borde, PhRvD, 55, 7615B, 1997

E. Ayon-Beato, A. Garcia, The Bardeen Model as a Nonlinear Magnetic Monopole, Phys. Lett. B 493 (2000) 149-152, gr-qc/0009077.

J. M. Bardeen, Non-singular general relativistic gravitational collapse, in Proceedings of the International Conference GR5, Tbilisi, U.S.S.R. (1968).

Manuel E. Rodrigues and Marcos V. de S. Silva, JCAP, 06, 025R, 2018

S. Hawking, R. Penrose, The Nature of Spacetime, Princeton University Press, Princeton (1996).

S. Hawking, R. Penrose, The Singularities of gravitational collapse and cosmology, Proc. Roy. Soc. Lond. A314 (1970) 529-548.

G. F. R. Ellis, S. Hawking, The Cosmic black body radiation and the existence of singularities in our universe, Astrophys.J. 152 (1968) 25.

R. Penrose, Gravitational collapse and space-time singularities, Phys. Rev. Lett. 14 (1965) 57-59.

————index へ戻る

重宇 a05

正則ブラックホールは本当に正則か？

田中 亜花音

正則ブラックホールは本当に正則か？

田中 亜花音 (近畿大学大学院 総合理工学研究科)

Abstract

ブラックホールの内部にある特異点を解消するために、様々な特異点のない正則ブラックホールが提案されている。そこで文献 [1] では正則ブラックホールの測地線に焦点をあて、Hayward 時空と Culetu-Simpson-Visser 時空は最大拡張された時空で測地線が不完備であることが示された。さらに時空の修正を行うことで測地線が完備である時空の提案を行なっている。本稿では文献 [1] に基づいて、正則ブラックホールにおける測地線の不完備性について紹介する。

1 Introduction

Penrose の特異点定理 [2] によると、ブラックホール内部には一般に時空特異点が存在し、物理法則が破綻する。特異点の解消は、量子重力など一般相対論を超える重力理論を構築する大きな動機となっている。

1968 年に Bardeen によって特異点が存在しない正則ブラックホールが提唱されて以降、様々な種類の正則ブラックホールが考案されている。正則ブラックホールは、情報損失問題の解消へ向かう手掛かりを得る模型 [3] としても期待されており、近年盛んに研究されるようになった。

正則ブラックホールは人為的に与えた解であるので、時空のダイナミクスは明らかにされていない。また、時空が完全に正則であるかについても議論の余地がある。

特異点が存在するかを知るためには Kretschmann scalar などの曲率不変量が発散していないかを調べるだけでは不十分である。本当の意味で時空が正則であることを示すためには、最大拡張された時空で測地線が完備であること、つまり可能な限り延長した測地線の固有時間またはアフィンパラメータが無限の値になる必要がある。

そこで本稿では文献 [1] に基づいて解析的な Hayward 時空と非解析的な Culetu-Simpson-Visser 時空における測地線の完備性について紹介する。

2 Hayward 時空

2.1 Hayward 時空の測地線

球対称で静的な Hayward 計量は

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2 d\Omega^{(2)}. \quad (1)$$

ここで関数 $f(r)$ は

$$f(r) = 1 - \frac{2Mr^2}{r^3 + L^3}, \quad (2)$$

である。また M は質量、L は長さの次元を持つパラメータである。この計量は $r \to \infty$ で Schwarzschild 時空に近づき、$r \to 0$ で de Sitter core を持つ。

この時空で質量を持ったテスト粒子がブラックホールに落ちる状況を考える。この時の動径方向の測地線方程式は

$$\dot{r} = e^2 - 1 + \frac{2Mr^2}{r^3 + L^3}, \qquad e \equiv -g_{tt}\dot{t}. \quad (3)$$

ここで e は保存量である。また、有効ポテンシャルは

$$V \equiv 1 - \frac{2Mr^2}{r^3 + L^3}. \quad (4)$$

この時空ではエネルギーが $e > 1$ のところでポテンシャル障壁にぶつかることはない (参照：図 1)。また、$r = 0$ に到達する固有時間は有限である。よってこの測地線の拡張方法について次節で議論する。

2.2 測地線の拡張方法

Hayward 時空は解析的な計量を持つため、拡張方法は 2 つある。(i) 単純に測地線を $\theta \to \pi - \theta$ のよ

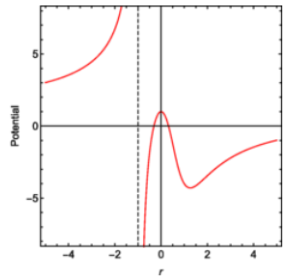


図 1: Hayward 時空の有効ポテンシャル

うに対蹠拡張を行う。(ii) 時空そのものを $r<0$ へ解析接続する。以下では Hayward 時空の拡張方法を (i) だと仮定した場合に測地線の解析性が壊れ、最終的に (ii) の拡張方法を選ばなくてはならないことを示す。

簡単のため、Hayward 時空における動径方向の null 測地線を考える。

$$-f(r)\dot{t}^2+f^{-1}(r)\dot{r}^2=0, f(r)=1-\frac{2Mr^2}{r^3+L^3}. \quad (5)$$

ドットはアフィンパラメータ λ の導関数を表す。保存量を $e\equiv -g_{tt}\dot{t}$ と定義し、(5) に代入すると

$$\dot{r}^2=e^2, \quad \dot{t}^2=e^2\Big(1-\frac{2Mr^2}{r^3+L^3}\Big), \quad (6)$$

となる。$\dot{r}$ は定数であるので、$\Delta\lambda\propto\Delta r$ である。アフィンパラメータは $r=0$ で有限の値をとる。

次に (6) でパラメトリック方程式 $t(\lambda)$ を考える。また直交座標でのパラメトリック曲線を $\{t(\lambda),x(\lambda),y(\lambda),z(\lambda)\}$ と表示する。これは λ について解析的な関数であれば、測地線は解析拡張可能である。ここで測地線方程式 (6) の $\dot{t}$ を $r=0$ 周りでテイラー展開すると

$$\dot{t}(r)=1+\frac{2M}{L^3}r^2+\frac{4M^2}{L^6}r^4-\frac{2M}{L^6}r^5+O(r^5). \quad (7)$$

簡単のため $e=1$ とした。テイラー展開 (7) は $\dot{t}$ の 5 階微分が 0 ではないこと、$r=0$ で符号が変化することを示している。実際

$$\Big(\frac{d}{d\lambda}\Big)^5\dot{t}(\lambda)=\dot{r}\Big(\frac{d}{dr}\Big)^5\dot{t}(r). \quad (8)$$

と表せるため、$r=0$ で関数 $\dot{r}$ の符号が変わることにより $\dot{t}(\lambda)$ の符号も変わる。よって関数 (8) の左右の極限は $r=0$ で異なる。$\dot{r}=-1\to+1$ となる点を $\lambda=\lambda_0$ とすると、左右の極限は

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\Big(\frac{d}{d\lambda}\Big)^5\dot{t}(\lambda)=\frac{240M}{L^6}, \quad \lambda<\lambda_0\text{のとき}.$$
$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\Big(\frac{d}{d\lambda}\Big)^5\dot{t}(\lambda)=-\frac{240M}{L^6}, \quad \lambda>\lambda_0\text{のとき}. \quad (9)$$

よって $t(\lambda)$ の 6 階微分で測地線の解析性が失われることが分かる。よって Hayward 時空の拡張は $r<0$ への解析接続を選択するべきであることが示された。

これまでの議論より、時空を $r<0$ へ拡張をする。拡張された時空で計量を見ると $r=-L$ で曲率特異点を持つことがわかる。実際、スカラー曲率 $R\sim(r^3+L^3)^{-3}$ は $r=-L$ で発散している。また、粒子が $r=-L$ に到達する場合の固有時間を計算する。固有時間は

$$\tau(r)=\int_r^{r_i}dr\frac{1}{\sqrt{\dot{r}^2}}, \quad (10)$$

と定義される。ここで r_i は粒子の初期位置であり、$r<r_i$ とする。(10) に従って timelike な粒子の固有時間を計算すると $r=0$ で有限の値になっており、測地線は不完備であることが言える。

3 Hayward 時空の一般化

この章では Hayward 時空の一般化を考え、測地線が完備である時空が構築できないかを検討する。

そのために関数 (2) を次式のように一般化する。

$$f(r)=1-\frac{2Mr^{n-1}}{r^n+L^n}, \qquad n\in\mathbb{N}, \qquad n\geq 3. \quad (11)$$

関数 $f(r)$ は $r\to\infty$ で Schwarzschild になり、$r\to 0$ では $f(r)\ 1-(2M/L^n)r^{n-1}$ になる。また Kretschmann scalar $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}\sim r^{2n-6}$ は $n\geq 3$ において $r=0$ で正則である。よって $r\geq 0$ では曲率特異点は存在しない。では今までと同様に動径方向の timelike な測地線を考えると

$$\dot{r}=e^2-1+\frac{2Mr^{n-1}}{r^n+L^n}, \quad (12)$$

となる。質量を持つ粒子は $e^2>1$ の条件で、$r=0$ に有限の固有時間で到達する。2.2 節の議論と同様に、一般の n に対して、n が偶数のときは n 階微分、n が奇数のときは $2n$ 階微分の時に測地線の解析性が壊れてしまうため、$r<0$ への拡張を考える。まず n が偶数の場合を議論する。$\dot{r}$ は至るところ正則であり、

粒子はエネルギーが十分大きい場合はポテンシャル障壁に跳ね返されることなく進むことができる。また計量は漸近的に平坦であり、粒子が $r=-\infty$ に到達する固有時間は無限の値にあるため測地線は完備であることが分かる。これは massless の場合も同様に言える。

次に n が奇数の場合を考える。この時、$\dot{r}^2$ は $r=-L$ に極を持ち、粒子が極に到達する時の固有時間は有限である。よって測地線は不完備である。

計量の時空の因果構造は図 2 に示した。n が奇数の場合、イベントホライズンは r_+, r_-, r'_+ の 3 つ現れる。領域 I は漸近平坦であり、r_+ はイベントホライズンである。$r<0$ に拡張した領域は IV に現れており、$r=-L$ で時空特異点を持つことがわかる。n が偶数の場合、領域 I と III は漸近平坦である。領域 II は 2 つの漸近平坦な時空をつなぐ役割を果たしている。また、この時空では時空特異点は存在せず、測地線は完備である。

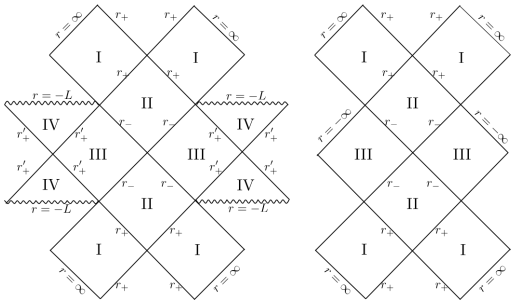


図 2: 一般化した Hayward 時空の Penrose 図。左図は奇数べきの場合、右図は偶数べきの場合を表している。

4 Culetu-Simpson-Visser 時空

Culetu-Simpson-Visser 時空の計量は次の関数 $f(r)$ で定義される。

$$f(r)=1-\frac{2M}{r}e^{-\frac{a}{r}}. \tag{13}$$

関数 $f(r)$ は $r\to 0^+$ で Minkowski core になり、曲率不変量は発散していない。しかし $r=0$ で計量は不連続である。

この時空における測地線の完備性を確認する。質量を持った粒子が落ちる時の動径方向の測地線方程式は

$$\dot{r}=e^2-1+\frac{2M}{r}e^{-\frac{a}{r}}, \tag{14}$$

である。また有効ポテンシャルは $V=f(r)$ である。この時の $r=0^+$ に到達する固有時間を見ると、エネルギーが $e^2>0$ で e^2-1 となるので有限時間で Minkowski core に到達することがわかる。よって時空の拡張を考えるべきである。

Culetu-Simpson-Visser 時空は測地線が非解析的であるため拡張方法は無数にある。そこで単純なものとして $r<0$ に拡張する方法を選ぶ。しかし、この時空では測地線方程式が $r=0$ で ill defined であるため $r<0$ への拡張は不可能である。よって測地線は不完備である。

5 Culetu-Simpson-Visser 時空の一般化

計量の修正を行い、測地線が完備である時空の構築を検討する。まず計量は次の関数 $f(r)$ で定義する。

$$f(r)=1-\frac{2M}{r}e^{-\frac{a^2}{r^2}}. \tag{15}$$

この計量は $r\to\infty$ で Shwarzschild になり、$r\to 0^+$ では Minkowski core になる。また、質量を持つ粒子が $r=0$ に到達する固有時間は有限であるため時空の拡張を考えるべきである。今回の計量では一般化する前の計量と比較すると、$r=0$ で連続的であるため $r<0$ への拡張を考える。$\dot{r}$ は至るところ正則であり、$r=-\infty$ に到達するときの固有時間は無限である。よってこの時空における測地線は完備である。時空の因果構造は図 3 に示した。これは a^2 の値によって場合分けされており、左図は $a^2<2M^2/e$ の場合である。これはイベントホライズンを 2 つ持ち、それぞれ r_+, r_- で表している。$r=0$ における Minkowski core は領域 III に存在する。一方で右図は $a^2=2M^2/e$ の場合を表しており、イベントホライズンは 1 つになっている。また 2 つの漸近平坦な領域で構成されている。

次により一般化した Culetu-Simpson-Visser 時空を考える。関数 $f(r)$ は

$$f(r)=1-\frac{2M}{r}e^{-\frac{a^{2n}}{r^{2n}}}, \qquad n\in\mathbb{N}, \qquad n\geq 1. \tag{16}$$

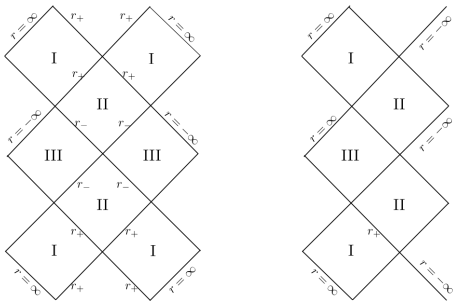


図 3: 一般化した Culetu-Simpson-Visser 時空の Penrose 図。

ここで関数 $f(r)$ は $r > 0$ と $r < 0$ で同じ形式をとると仮定する。ただし $f(r)$ が C^∞ だとすると、$f(r)$ の導関数は $r = 0$ で全て 0 になるため計量は一意ではない。よって計量の $r < 0$ への拡張は一意に定まらない、すなわち粒子の未来を予測できないことから測地線の不完備性へつながる。

このように非解析的な時空における拡張は一意に定めることができないため、時空は正則ではない。

6 Conclusion

Hayward 時空の $r < 0$ の領域への最大拡張を考えると $r = -L$ に曲率特異点が存在し測地線が不完備になることが分かった。しかし、Hayward 時空の一般化として偶数ベキを考えると特異点は存在せず測地線は完備であることが分かった。Culetu-Simpson-Visser 時空の場合は非解析的な時空であるために、時空の拡張方法が一意に定まらず測地線は不完備であることが分かった。今後は Hayward 時空の拡張した領域における安定性やエネルギー条件について詳しく調べていきたい。

Acknowledgement

天文・天体物理若手夏の学校を運営して下さったスタッフの方々、支援して下さった方々に心より感謝申し上げます。またこのレビューを行うにあたり、議論して下さった一般相対論・宇宙論研究室の方々に心より感謝申し上げます。

Reference

[1] T. Zhou and L. Modesto, Phys. Rev. D107, 044016 (2023).

[2] R. Penrose, Phys. Rev. Lett. 14, 57-59 (1965).

[3] S. A. Hayward, Phys. Rev. Lett. 96, 031103 (2006).

———index へ戻る

重宇 a06

Gravitational duals to the grand canonical ensemble abhor Cauchy horizons

菅原 啓太

Gravitational duals to the grand canonical ensemble abhor Cauchy horizons

菅原 啓太 (日本大学大学院 総合基礎科学研究科)

Abstract

本講演では、[arXiv:2006.10056] のレビューを行う (Hartnoll et al. (2020))。対称性の高い holography 理論では、共形場理論 (CFT) におけるグランドカノニカル分布は荷電ブラックホールに対応することが知られている。Reissner-Nordström 反ド・ジッター (RN-AdS) 時空では、事象の地平線以外に Cauchy horizon を持つ。Cauchy horizon はブラックホール内部にあり、内部の古典的な重力のダイナミクスを予測不可能にすることがある。RN-AdS 時空の boundary にスカラー場の歪みを与えると、ブラックホール内部の Cauchy horizon が形成されなくなることを示す。Cauchy horizon の消失は、Kasner 特異点が存在することに対応する。これにより Einsten-Rosen(ER) bridge は崩壊する。一方で、特定の歪みを与えたとき、Cauchy horizon はある特定の温度で存在することがある。特異点では、低温限界における Kasner 指数が固定指数となる。

1 Setup

ラグランジアン密度として

$$\mathcal{L} = R + 6 - \frac{1}{4}F^2 - g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - m^2\phi^2 \tag{1}$$

を考える。ここで、後の座標系で電磁場のテンソルは $F_{zv} = \Phi'(z)$ となる。右辺第 1,2 項が宇宙項 ($\Lambda = -3$) を含めた重力場、第 3 項が電磁場、第 4,5 項がスカラー場のラグランジアン密度を表す。作用の変分を計算し、変分原理を用いると運動方程式が導出できる。

運動方程式は

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - 3g_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\left(2F_{\mu\rho}F^{\rho}_{\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}F^2\right) \tag{2}$$

$$+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(\partial^\alpha\phi\partial_\alpha\phi + m^2\phi^2\right) - \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi = 0$$

$$D_\mu F^{\mu\nu} = 0 \tag{3}$$

$$\Box\phi = m^2\phi \tag{4}$$

の 3 つとなる。(2) は Einsten-Maxwell-Klein Gordon 方程式である。(3) は Maxwell 方程式である。(4) は Klein Gordon 方程式である。

背景時空として、horizon が flat な漸近 AdS 時空

$$ds^2 =$$

$$\frac{1}{z^2}\left\{-f(z)e^{-\chi(z)}dt^2 + \frac{1}{f(z)}dz^2 + dx^2 + dy^2\right\} \tag{5}$$

$$= \frac{1}{z^2}\left\{-fe^{-\chi}dv^2 - 2e^{-\chi/2}dvdz + dx^2 + dy^2\right\} \tag{6}$$

を考える[1]。radial 座標は $z \propto r^{-1}$ であるから、原点が $z = \infty$、AdS boundary が $z = 0$ となることに注意する。

AdS boundary へ漸近 ($z \to 0$) したとき

$$\phi \to \phi_{(0)}z^{3-\Delta}, \quad \Phi \to \mu, \quad \Phi' \to -\rho, \tag{7}$$

$$f(z) \to 1, \quad \chi(z) \to 0 \tag{8}$$

となる。スケーリング次元 Δ は

$$\Delta = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} + m^2} \tag{9}$$

となる。例えば、BFbound 内の値として $m^2 = -2$ と置くとき、$\Delta = 2$ となる (Breitenlohner and Freedman (1982))。

運動を決める方程式は

$$\Phi' = -\rho e^{-\chi/2} \tag{10}$$

$$z^2e^{\chi/2}\left(e^{-\chi/2}z^{-2}f\phi'\right)' = \left(\frac{m}{z}\right)^2\phi \tag{11}$$

$$4z^4\left(z^{-3}f\right)' = -12 + 2m^2\phi^2 + 2z^2f(\phi')^2 \tag{12}$$

$$+z^4e^{\chi}(\phi')^2$$

$$\chi' = z(\phi')^2 \tag{13}$$

の 4 つとなる。(10) は電磁場の constraint となる。(11) はスカラー場の運動を決める方程式である。(12) は重力場の運動を決める方程式である。(13) は重力

[1] toortoise coordinate は、$dr^* = -f^{-1}e^{-\chi/2}dz$ とおいた。

場の constraint となる。未知数は Φ, χ, f, ϕ の 4 つである。Φ, χ は constraint に関係するので、運動の様子を知るには (11), (12) を解き、f, ϕ を求めれば良い。

例えば、$\phi = \chi = 0$ のとき、(12) は $f(z)$ の微分方程式

$$(z^{-3}f)' = -3z^{-4} + \frac{\rho^2}{4} \tag{14}$$

になる。$f(z_H) = 0$ より

$$f_{RN}(z) = 1 + \frac{\rho^2}{4}z^4 - \left(\frac{z}{z_H}\right)^3\left(1 + \frac{\rho^2 z_H^4}{4}\right) \tag{15}$$

と求まる。こうして、運動を決める方程式から RN-AdS 計量を決定することができる。

2 Deformations

AdS boundary におけるスカラー場の摂動の振る舞いは、スケーリング次元 (9) に依存している。$\Delta \leq 3$ の時を Relevant deformations ($m^2 \leq 0$)、$\Delta > 3$ の時を Irrelevant deformations ($m^2 > 0$) と呼ぶ。

2.1 Relevant Deformations

Relevant Deformations ($m^2 \leq 0$) を与えると、Cauchy horizon が存在しなくなることを示す。

$$0 = \left[\frac{fe^{-\chi/2}\phi\phi'}{z^2}\right]_{z_H}^{z_I} = \int_{z_H}^{z_I}\left(\frac{fe^{-\chi/2}\phi\phi'}{z^2}\right)' dz$$
$$= \int_{z_H}^{z_I}\left\{\left(\frac{fe^{-\chi/2}\phi'}{z^2}\right)'\phi + \left(\frac{fe^{-\chi/2}\phi'}{z^2}\right)\phi'\right\}dz \tag{16}$$
$$= \int_{z_H}^{z_I}\frac{e^{\chi/2}}{z^4}\left\{m^2\phi^2 + z^2 f(\phi')^2\right\}dz \tag{17}$$

ここで、式 (16) から式 (17) への変形に式 (11) を用いた。今、$z_H < z < z_I$ の区間を考えているから、$f(z) < 0$ となる。よって、式 (17) の等号が成立するためには $\phi = 0$ が必要となる。しかし、$\phi \neq 0$ であるから、Cauchy horizon は取り除かれる。

2.2 Irrelevent Deformations

Irrelevant deformations ($m^2 > 0$) を与えると、Cauchy horizon が存在する場合があることを見る。ここでは線形問題に限って話をする。

RN-AdS 計量を背景時空とする。(11) は

$$\left(z^{-2}f_{RN}\phi'\right)' = \frac{m^2}{z^4}\phi \tag{18}$$

と表せる。これは線形化された固有値問題になっていて、固有値 m^2 を $\xi \equiv z_I/z_H (\geq 1)$ の関数として求めることができる。正則条件は $f_{RN}(z_H) = f_{RN}(z_I) = 0$ より

$$\phi'(z_H) = \frac{m^2\phi(z_H)}{z_H^2 f'_{RN}(z_H)}, \quad \phi'(z_I) = \frac{m^2\phi(z_I)}{z_I^2 f'_{RN}(z_I)} \tag{19}$$

となる。$z \in (z_H,\ z_I)$ において、$f_{RN} < 0$ より、(18) を満たすのは $m^2 > 0$ のときのみであることが確認できる。(18) が $z \in (z_H,\ z_I)$ で正則になるように数値的に解いた結果を図 1 に示す。

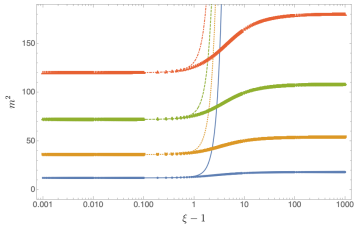


図 1: m^2 と $\xi - 1$ の関係。点線部は $\xi \sim 1$ のまわりで摂動論的に解いた結果となる。l は自然数で、m^2 の mode を分けるラベルとなっている。青：$l = 1$、黄：$l = 2$、緑：$l = 3$、赤：$l = 4$ という対応関係がある。

m^2 がどの ξ においても正則である場合が存在するので、パラメータを調整することで Irrelevant deformations では Cauchy horizon が存在する場合がある。

3 ER bridge の崩壊

Relevant deformations では Cauchy horizon が存在しないことを確認した。このとき、ER bridge が消失することを見る。$\delta z \equiv z - z_I \to 0$ 付近における

運動方程式は

$$\left(e^{-\chi/2}f\phi'\right)' = 0, \quad \chi' = z_I(\phi')^2$$
$$4z_I f' = 2z_I^2 f(\phi')^2 + z_I^4\rho^2 - 12 \tag{20}$$

となる。$\delta z \to 0$ 付近における漸近 AdS 時空 (5) の性質は $g_{tt} = -fe^{-\chi}z_I^{-2}$ に依存しているので、解のペアを $\{\phi,\ f,\ \chi\} \to \{g_{tt},\ c_1,\ c_2\}$ に変更する。運動方程式 (20) は g_{tt} の 2 階の微分方程式

$$\frac{g_{tt}''}{g_{tt}'} = \frac{c_1^2 g_{tt}'}{g_{tt}(c_1^2 + g_{tt})} \tag{21}$$

に集約できる。一般解は

$$c_1^2\log(g_{tt}) + g_{tt} = -\frac{z_I}{2}c_2^2\delta z \tag{22}$$

となる。簡単のため、追加の積分定数を $c_3 = 0$ とした。g_{tt} と z/z_H、c_1/c_2 と $\phi_{(0)}/\mu$ の関係を図 2 に示す。

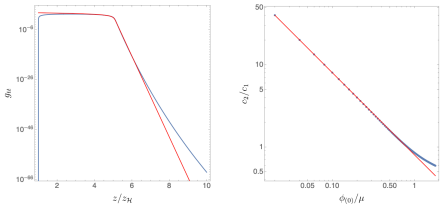


図 2: (左図) g_{tt} と z/z_H の関係。g_{tt} は ER bridge の長さと関係している。(右図) パラメータ c_1/c_2 と AdS boundary におけるスカラー場の deformation との関係。

g_{tt} は ER bridge の長さに関係しているので、would-be inner horizon を越えると ER bridge が指数関数的に崩壊していくことが分かる。

4 Kasner 特異点

背景時空を表す式 (5) は $z \to \infty$ で

$$f = -f_0 z^{3+\alpha^2}, \quad \phi = \alpha\sqrt{2}\log z = -\sqrt{2}p_\phi\log\tau,$$
$$\chi = 2\alpha^2\log z + \chi_0, \quad \Phi' = -\rho e^{-\chi_0/2}z^{-\alpha^2} \tag{23}$$

のように振る舞うとする。ここで、$\alpha > 1$ である。Kasner 指数を

$$p_t + 2p_x = 1, \quad p_\phi^2 + p_t^2 + 2p_x^2 = 1,$$
$$p_t = \frac{\alpha^2 - 1}{3 + \alpha^2}, \quad (0 < p_t \le 1) \tag{24}$$

とおけば、$z_I < z < \infty$ における解は Kasner 解

$$ds^2 = -d\tau^2 + c_t\tau^{2p_t}dt^2 + c_x\tau^{2p_x}(dx^2 + dy^2) \tag{25}$$

になる (Wald (1984); Belinski and Khalatnikov (1973); Kasner (1921))。

$\tau = 0$ が Kasner 特異点であることに注意する。

5 Penrose 図

outer horizon 以内の時空構造を調べる。まず、ingoing 座標系において AdS boundary から Kasner 特異点まで到達するような null 測地線を考える。AdS boundary における時刻を $t = 0$ とすると、Kasner 特異点における時刻 $(t = t_*)$ は

$$t_* = PV\int_0^\infty \frac{e^{\chi/2}}{f}dz \tag{26}$$

で与えられる。ここで、PV は $z = z_H$ で outer horizon を横切る時の主要な値である。$z_I < z < \infty$ において $f < 0$ だから、t は outer horizon の内部では空間座標と見て差し支えない。図 3 を見ると、$t_* > 0$ のときは、Kasner 特異点は”上に曲がる”。一方で、$t_* < 0$ のときは、Kasner 特異点は”下に曲がる”。

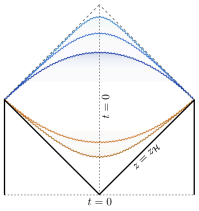


図 3: relevant deformations を与えた時の Penrose 図。破線は Cauchy horizon を、点線は spacial $t = 0$ を表す。Cauchy horizon が消失する代わりに、Kasner 特異点が現れる。

6 Conclusion

- AdS boundary における物理量を指定すると、bulk 時空は RN-AdS 時空となる。
- AdS boundary にスカラー場の Relevant deformation($m^2 \le 0$) を与えると、Cauchy horizon が存在しなくなる。

- Irrelevant deformation($m^2 > 0$) を与えると、特定の温度では Cauchy horizon が存在する。
- Cauchy horizon が存在しないときは、Kasner 特異点が存在する。
- Penrose 図（図 3）の特異点は、$\phi_{(0)}/\mu \ll 1$ または $T/\mu \ll 1$ で上に曲がり、$\phi_{(0)}/\mu \neq 0$ または $T/\mu \gg 1$ で下に曲がる。

Reference

V. A. Belinski and I. M. Khalatnikov. Effect of Scalar and Vector Fields on the Nature of the Cosmological Singularity. *Sov. Phys. JETP*, 36: 591, 1973.

Peter Breitenlohner and Daniel Z Freedman. Stability in gauged extended supergravity. *Annals of Physics*, 144(2):249–281, 1982. ISSN 0003-4916. doi: https://doi.org/10.1016/0003-4916(82)90116-6.

Sean A. Hartnoll, Gary T. Horowitz, Jorrit Kruthoff, and Jorge E. Santos. Gravitational duals to the grand canonical ensemble abhor Cauchy horizons. *JHEP*, 10:102, 2020. doi: 10.1007/JHEP10(2020)102.

Edward Kasner. Geometrical theorems on Einstein's cosmological equations. *Am. J. Math.*, 43: 217–221, 1921. doi: 10.2307/2370192.

Robert M. Wald. *General Relativity*. Chicago Univ. Pr., Chicago, USA, 1984. doi: 10.7208/chicago/9780226870373.001.0001.

————index へ戻る

重宇 a07

4次の共形Weyl重力とワームホール

牧田 悠輔

4 次の共形 Weyl 重力とワームホール

牧田 悠輔 (名古屋大学大学院 理学研究科 QG 研)

Abstract

本発表では主に論文 [1] のレビューを行う．この論文では，Weyl 作用に基づく 4 次の共形 Weyl 重力 (以下，共形重力とよぶ) について議論されている．

時空の局所的なスケール変換 $g_{\mu\nu} \to \hat{g}_{\mu\nu} = e^{2\alpha(x)} g_{\mu\nu}$ を共形変換といい，共形重力は共形変換のもとで作用が変化しない共形場である．これまで，Einstein の一般相対論に代わる様々な重力場の理論が提案されてきた．共形重力はそのうちの一つであり，プランクスケールの物理を理解する鍵になることが期待されている．共形重力の場の方程式は，4 階の微分を含む連立微分方程式である．このために 4 次の共形重力とよばれる．

一般相対論において，2 つの時空領域を結びつける構造をワームホールとよぶ．さまざまな時空構造が提案されてきたが，その多くはエネルギー条件 (エネルギー密度や圧力に関する制約) を破ってしまうために，通常の物質では実現できないことや不安定であることなどがわかっている．

本発表は，共形重力場の方程式を導出することから始まる．次いで標準的なワームホールがエネルギー条件を破ることを確認した上で，共形重力の場合について議論を進める．結果として，共形重力に基づけばこの問題を回避することが可能であることを紹介する．

1 共形重力理論

共形 Weyl 重力 (Conformal Gravity) とは，Weyl 作用：

$$I_W = -\alpha_g \int C_{\lambda\mu\nu\kappa} C^{\lambda\mu\nu\kappa} \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4x$$

に基づく重力の理論である．ここで $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$ であり[1]，α_g は共形重力の結合定数である．$C_{\lambda\mu\nu\kappa}$ は Weyl テンソルとよばれ, Riemann テンソル $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ から構成されるトレースフリーなテンソルである．I_W について $g^{\mu\nu}$ で変分をとることで，共形重力の場の方程式：

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{4\alpha_g} T_{\mu\nu} \tag{1}$$

が得られる．ここで $W_{\mu\nu}$ は Bach テンソルとよばれ, Weyl テンソル $C_{\lambda\mu\nu\kappa}$ から

$$W_{\mu\nu} = 2C^{\alpha}{}_{\mu\nu}{}^{\beta}{}_{;\beta;\alpha} + C^{\alpha}{}_{\mu\nu}{}^{\beta} R_{\beta\alpha} \tag{2}$$

で構成される (添え字の $_{;\alpha}$ は共変微分を表す)．また，$T_{\mu\nu}$ はエネルギー運動量テンソルである[2]．これが共形重力とよばれるのは，Weyl 作用 I_W が共形変換：

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow e^{2\alpha(x)} g_{\mu\nu}$$

のもとで不変であることからきている．Riemann テンソルは計量の高々 2 階微分で構成されるため，式 (2) で定義される Weyl テンソルは計量の 4 階微分を含む．場の方程式 (1) を Ricci テンソル $R_{\mu\nu}$ や Ricci スカラー R を用いて書き下すと

$$\begin{aligned}\frac{T_{\mu\nu}}{4\alpha_g} &= W_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{6} R^{;\alpha}{}_{;\alpha} g_{\mu\nu} + \frac{2}{3} R_{;\mu;\nu} + R_{\mu\nu}{}^{;\alpha}{}_{;\alpha} \\ &\quad - R_{\mu}{}^{\alpha}{}_{;\nu;\alpha} - R_{\nu}{}^{\alpha}{}_{;\mu;\alpha} + \frac{2}{3} R R_{\mu\nu} \\ &\quad - 2R_{\mu}{}^{\alpha} R_{\alpha\nu} + \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} - \frac{1}{6} R^2 g_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{3}$$

となる．これらの表式をもとに, 論文では Mathematica を用いて計算している．

[1] ここでは計量の符号として $(-,+,+,+)$ を採用している．

[2] ここではエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ として，cT_{00} がエネルギー密度 ρ となるように定義した．すなわち $T_{\mu\nu} = \frac{1}{c}[(\rho + p) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}]$ である．なお，この論文では明示しない限り $c = G = 1$ の単位系を用いている．

2　通過可能なワームホール

通過可能なワームホール (traversable wormhole) の計量は，固有半径 l を用いて

$$\mathrm{d}s^2 = -e^{2\Phi(l)}\,\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}l^2 + r^2(l)\,\mathrm{d}\Omega^2 \tag{4}$$

と書かれる．ここで $\mathrm{d}\Omega^2 \equiv \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2$ である．l は任意の値をとり，$l=0$ はワームホールの喉 (throat) に，$l=\pm\infty$ は漸近的平坦領域に対応する．$\Phi(l)$ は赤方偏移 (redshift) 関数とよばれ，有限の値をとることが求められる．例えば，H.Ellis により 1973 年に導かれたドレインホール計量は $\Phi(l)=0$ の解で

$$\mathrm{d}s^2 = -\,\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}l^2 + \left({b_0}^2 + l^2\right)\mathrm{d}\Omega^2$$

である．通過可能なワームホールの計量は，別の形式として

$$\mathrm{d}s^2 = -e^{2\Phi(r)}\,\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{1-b(r)/r} + r^2\,\mathrm{d}\Omega^2 \tag{5}$$

のように書かれることもある．これは $r\in[b_0,+\infty)$ を満たす 2 つの Schwarzschild 時空を結び付けている[3]．ここで $b(r)$ は形状 (shape) 関数とよばれる．計量 (5) からは変数変換：

$$l(r) \equiv \pm\int_{b_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{r/b(r)-1}} \tag{6}$$

によって計量 (4) へ移行することができる．式 (6) からは，$b(r)\le r$ の他に $l(r)$ がワームホールの喉 $r=b_0$ で最小値をとるための flare-out 条件：

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}l^2} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}l}\right)^2 = \frac{1}{2b(r)}\left[\frac{b(r)}{r} - b'(r)\right] > 0 \tag{7}$$

を喉近傍で満たすことが要請される．なお，しばしばワームホールのイメージ図として紹介されるもの (後に示す図 1,2) は，式 (**??**) を l 軸周りに回転させたものである．

3　エネルギー条件

適当な座標系をとることで，エネルギー運動量テンソルを対角形にすることができる．すなわち，エネルギー密度 ρ と各座標軸方向の圧力 p_i により

$$T^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \mathrm{diag}(\rho, p_1, p_2, p_3)$$

と書ける．このとき，各成分 ρ, p_i には数学的要請であるエネルギー条件 (energy condition; EC)：

$$\begin{aligned}
\text{Null EC} &\iff \rho + p_i \ge 0 \\
\text{Weak EC} &\iff \rho + p_i \ge 0 \ \&\ \rho \ge 0 \\
\text{Strong EC} &\iff \rho + p_i \ge 0 \ \&\ \rho + \sum p_i \ge 0 \\
\text{Dominant EC} &\iff \rho \ge |p_i|
\end{aligned} \tag{8}$$

が課せられる．一般相対論の範囲では，通過可能なワームホール解は喉を含むある領域で NEC を破ってしまう．ワームホール解を実現するためには，標準的な NEC や WEC を破るような exotic matter を導入しなければならない．一方で，共形重力では場の方程式が Einstein 方程式ではなく式 (1) で与えられるために，エネルギー条件の問題を回避できる可能性がある．

論文中では，NEC を null 測地線 $\Gamma=\Gamma(\lambda)$ 上で積分した Averaged NEC(ANEC)：

$$I_\Gamma = \int_\Gamma T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu\,\mathrm{d}\lambda \ge 0 \tag{9}$$

についても検討している箇所がある (後述)．ここで k^μ は測地線 Γ の接ベクトルで $k^\mu \equiv \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\lambda$ である．

4　特殊解とエネルギー条件の関係

ここからがこの論文の主題である．計量 (5) 中の関数 $\Phi(r)$ と $b(r)$ を適当に決めることで，ワームホールの喉近傍でエネルギー条件を破らないような解を探す．$b(r=b_0)=b_0$ と $\Phi(r\ge b_0)<+\infty$ に加えて flare-out 条件 (7) を満たし得る解として，比 b_0/r の冪級数解：

$$b(r) = b_0\left[(1+\gamma)\left(\frac{b_0}{r}\right)^l - \gamma\left(\frac{b_0}{r}\right)^m\right] \tag{10}$$

$$\Phi(r) = \left[(1-\delta)\left(\frac{b_0}{r}\right)^p - \delta\left(\frac{b_0}{r}\right)^q\right] \tag{11}$$

を仮定する．ここで γ,δ,l,m,p,q は独立なパラメーターである．原論文では，エネルギー条件 (8) を満たすようなパラメーターを Mathematica のプログラムにより計算し，以下に記述するような解を得ている．

[3] b_0 は $b_0=b(r=b_0)$ によって定義される．また，一般には結び付ける 2 つの時空で $\Phi(r)$ や $b(r)$ が同一である必要はない ($\Phi=\Phi_\pm, b=b_\pm$) が，ここでは結び付ける 2 つの時空は対称的であるものとする．すなわち単一の $\Phi(r), b(r)$ を用いる．

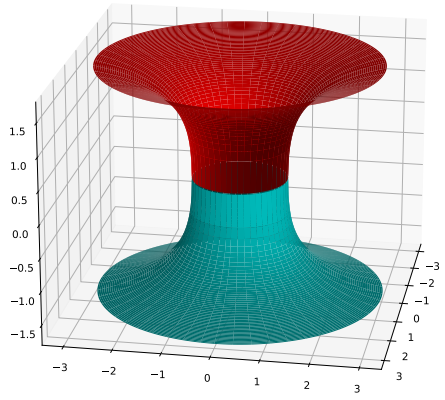


図 1: $\Phi = 0,\ \gamma = 1,\ l = 3,\ m = 6.5$ のワームホール解の概観．この図では $b_0 = \alpha = 1$ としている．

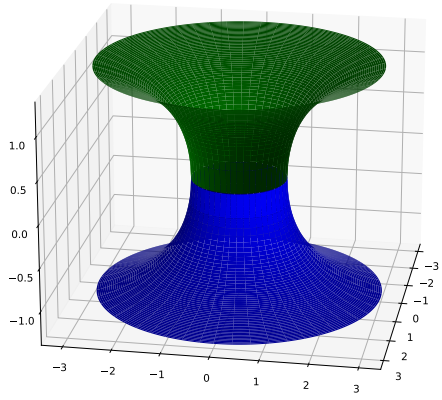


図 2: $\delta = (p =)q = 1$ $(\Phi \neq 0)$, $\gamma = 1,\ l = 3,\ m = 5$ のワームホール解の概観．図 1 と同様に $b_0 = \alpha = 1$ としている．ワームホールの概観自体は $\Phi = 0$ の場合とほとんど見分けがつかないが，測地線に沿って ANEC を満たすことができるというところが最大の違いである．

4.1 $\Phi = 0$ の解

$\Phi = 0$ の解は潮汐力のない (zero-tidal-force) 解とよばれ, 式 (11) で決まるパラメーターは $\delta = 1/2,\ p = q = 0$ である．$-1 \leq \gamma \leq 0$ の範囲ではエネルギー条件や flare-out 条件に反し不適であり，各条件を満たせるものは $\gamma < -1,\ 0 < \gamma$ に限られる．このうち，$\gamma = 1,\ l = 3,\ m = 6.5$ の解の概観を図 1 に示す．

この解では，エネルギー条件を喉近傍で満たし，かつ全域で flare-out 条件も満たしている．すなわち，一般相対論のもとでのワームホール解と異なり，共形重力のもとでは exotic matter の存在を仮定する必要がない．

ただし，真空解や漸近的平坦解へ適切に結び付けられるかは別の話である．ワームホール解と漸近的平坦解を結び付ける境界には接続条件 (junction condition) が存在し，式 (10) で仮定した関数 $b(r)$ はこれを満たすことができない．すなわち，境界において exotic matter の存在を仮定することが必要となる．$b(r)$ として他の解を仮定することも可能であるが，エネルギー条件を満たせない解や式 (10) と類似の解が得られるばかりであったようである．

式 (9) に示した ANEC 積分について見てみよう．計量 (5) の場合では

$$I_\Gamma = \int_{l=-\infty}^{l=+\infty} \big[\rho(l) + p_l(l)\big] e^{-\Phi(l)}\, \mathrm{d}l = 2\int_{r=b_0}^{r=+\infty} \frac{\big[\rho(r) + p_r(r)\big] e^{-\Phi(r)}}{\sqrt{1 - b(r)/r}}\, \mathrm{d}r$$

であって[4]，$\Phi = 0$ のもとでは負の値をとるという．すなわち，$\Phi = 0$ の解は一般的に ANEC を満たすことができない．

4.2 $\Phi \neq 0$ の解

$\Phi \neq 0$ の解は，全部で 6 つあるパラメーターによって決まる．論文では可能なパラメーターの組み合わせを徹底的に検証したという．しかし，期待に反して全く新しい解は得られなかったようである．計量 (5) に存在する $\Phi(r)$ は, $\Phi = 0$ の解にわずかな補正を加えるのみであり，エネルギー条件については大差ないのである．一例として，$\delta = q = 1,\ \gamma = 1,\ l = 3,\ m = 5$ の単純な解を図 2 に示す．

[4] 原論文との表記の違いに注意．ここでは l 方向の圧力を $p_l(l)$ としているが，これは radial 方向の圧力であるため，原論文では $p_r(l)$ $(= -\tau)$ と表記されている．また $p_\theta,\ p_\phi$ は角度方向すなわち lateral 方向の圧力であるため，原論文では p_l と表記されている．球対称解であるため $p_l = p_\theta = p_\phi$ である．

これは喉近傍でエネルギー条件や flare-out 条件を満たす解である．ただし $\Phi = 0$ の解と同様に，漸近的平坦解との接続条件から，境界には exotic matter の存在を仮定することが必要になる．

$\Phi \neq 0$ の解の特徴は，式 (9) の ANEC を満たすことができるところにあり，図 2 に示した解はこの条件をも満たす解である．

5 Conclusion

この論文では，共形 Weyl 重力におけるワームホール解について解析されている．一般相対論のもとではエネルギー条件を破ってしまうために，ワームホールの喉近傍に exotic matter の存在を仮定する必要があった．しかし共形重力のもとでは，通過可能なワームホールの計量 (5) に含まれる 2 つの関数 $\Phi(r)$, $b(r)$ を適当に定めることによって，各エネルギー条件を満たす解を見つけることができた．特に $\Phi \neq 0$ の解が ANEC を満たすことが可能であったことからもわかるように，通過可能なワームホールを構成することは，一般相対論に基づくよりも共形重力に基づいた方が容易である．ただし，ワームホール解と漸近的平坦解を結び付ける境界においては，接続条件から依然として exotic matter が必要となる．

共形重力の場の方程式に基づくと，式 (3) からエネルギー運動量テンソルの各成分を計算することが可能である．これは計量の 4 階微分からなる非常に複雑な方程式である．原論文 [1] の Appendix には，Mathematica を用いて計算された各成分の表式が載せられている．

Reference

[1] Gabriele U. Varieschi & Kellie L. Ault. (2016) *Wormhole geometries in fourth-order conformal Weyl gravity.* arXiv:1510.05054 [gr-qc]

[2] M. Visser. (1995) *Lorentzian Wormholes. From Einstein to Hawking.* American Institute of Physics, Woodbury, N.Y., USA.

[3] Gabriele U. Varieschi. (2009) *A Kinematical Approach to Conformal Cosmology.* arXiv:0809.4729 [gr-qc]

———index へ戻る

重宇 a09

Dynamical Chern-Simons 重力における曲率ゆらぎ の 4 点関数とパリティの破れ

道脇 元紀

Parity-Violating 4-point correlation function from Dynamical Chern-Simons Gravity

Masaki Michiwaki (Rikkyo University)

Abstract

This presentation is a review of [1]. First, we introduce dCS gravity in the context of inflation and compute the primordial power spectrum. We then compute a four-point function of the curvature fluctuations in dCS gravity.

1 Introduction

The distribution of galaxy clusters in the universe has a net-like structure. This is referred to as the large-scale structure of the universe (LSS), and it is believed that LSS originated from quantum curvature fluctuations that existed during the inflationary period and were stretched by the accelerated expansion of space, creating the seeds for the LSS.

Recently, it was reported that a parity violation was observed in the four-point function of the distribution of galaxy clusters [2]. In order to explain this result in terms of inflation, an interaction that causes parity breaking is needed.

The dynamical Chern-Simons gravity (dCS gravity) is known as a parity-breaking gravity theory. This theory combines a scalar field that causes inflation and a Chern-Simons term that includes parity breaking. Since parity breaking appears from a four-point function of curvature fluctuation, we focus on the four-point function of curvature fluctuation in dCS gravity in this presentation.

2 dCS Inflation

The dynamics of standard dCS inflation are obtained through its vacuum action S,

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\Big[-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi) - V(\phi) + \frac{M_{\rm Pl}^2}{2}R - \frac{\phi}{4f}{}^*RR\Big].$$

We work in a perturbed flat FLRW spacetime using conformal time τ and parameterized and tensor (graviton) perturbations h_{ij},

$$g_{\mu\nu} = a^2(\tau)\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & \delta_{ij}+h_{ij}\end{pmatrix}.$$

3 4-point Correlation Functions

We compute both the lowest-order contribution to the parity-odd 4-point functions and the dCS corrections to the graviton-mediated parity-even functions. In order to perform this calculation, we follow the Schwinger-Keldysh(SK)diagrammatic rules. Roughly speaking, and adapted to our specific calculation, the setting is following:

a) Label each external leg by one of four momenta$\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4$and consider the set of all distinct (in the sense that they obey the symmetries of the diagram) labelings.There are three such diagrams in this set and each diagram we refer to as a channel.Explicitly, let $\mathrm{K}_s = \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4, \mathrm{K}_t = \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_4, \mathrm{K}_u = \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_4, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2$ be three ordered lists of vectors, each corresponding to one of these channels.

b) We use two simplifying assumptions. First,we reassert that we assume a small chemical potential, for the same reasons as the graviton mode functionsand primordial power spectra(We call this collapsed limit).Second, we assume that the effect of dCS is only to modify the amplitude of the GE 4-point function, while retaining the same shape.

Then, we evaluate the collapsed limit in a straightforward fashion,

$$\mathrm{Im}\langle\zeta(\mathbf{k_1})\zeta(\mathbf{k_2})\zeta(\mathbf{k_3})\zeta(\mathbf{k_4})\rangle|_{I-\mathrm{collapsed}} = \frac{9}{16}\Pi_{\rm circ} r\sin(2\chi_I)\sin^2(\theta_I^1)\sin^2(\theta_I^3)P_\zeta(\mathrm{k}_I)P_\zeta(\mathrm{K}_I^1)P_\zeta(\mathrm{K}_I^3).$$

(※ Refer to the slides for definitions and a schematic understanding of each character.)

4 Conclusion

The calculations reveal that the imaginary part of the four-point function of the curvature fluctuation has the value.

Future prospects include mapping the 4-point function of curvature fluctuations to the 4-point function of galaxies, which is a direct observable.

Acknowledgement

The author would like to thank all the graduate students of the Theoretical Physics Group at Rikkyo University, especially Jin Saito, who has been a great help to me. The author is also grateful to his supervisors Tsutomu Kobayashi and Tomohiro Harada for their helpful advice.

1. C. Creque-Sarbinowski, S. Alexander, M. Kamionkowski, and O. Philcox, arXiv：2303.04815[astro-ph.CO]

2. O. Philcox, Phys. Rev. D **106**, 063501 (2022)

———index へ戻る

重宇a10

type II 原始ブラックホール

島田 正顕

type II 原始ブラックホール

島田 正顕 (名古屋大学大学院 理学研究科 QG 研)

Abstract

本紙は Michael Copp (2011) のレビューである．平坦 FLRW に囲まれた球対称過密領域の固有半径が大きくなりすぎると, 閉じて離れた宇宙 (SU) になるため, 任意の大きさになることはできないことが示されていた．このことから NO-SU condition が導かれていた．しかし, 本紙で NO-SU condition は幾何的に既に破られることがなく, SU となるのは物理的パラメータが発散するという起き得ない条件であることを示す．最後に typeII 揺らぎに関してのシミュレーションを行い, 埋め込み図を作成した結果を示す．埋め込み図では時間発展に伴い親宇宙と子宇宙に分裂する様子を見る．

1 Introduction

一般相対論では全くの情報が脱出できることのできない領域が形成されることが認められている．そのような領域をブラックホール領域 (BH) と呼ぶ．球対称時空では面積半径 R が質量 $2M$ より小さくなると BH になるがこれはかなり強い条件で圧力によって妨げられる場合がほとんどである．

初期宇宙内で原始密度揺らぎから形成される BH は原始ブラックホール (PBH) と呼ばれる．PBH はさらに条件が強く, ハッブル半径より小さい揺らぎ ($R < H^{-1}$) のみ崩壊することができる．図 [1] は理想揺らぎの模式図である．PBH の形成の研究は様々行われており, その中で最大膨張時間 t_m では揺らぎの内側は正の曲率しか取れないということから NO-SU condition $R_m \leq \rho_m^{-1/2}$ と揺らぎの振幅に制約を与えた研究もある. これは $R_m \leq \rho_m^{-1/2}$ では PBH にはならずに離れた宇宙 (SU) になるというものである．

本発表での目標は大きく 2 つある．1 つ目は NO-SU condition は PBH 形成に制約を与えるようなものではないことを導出することである．2 つ目は type II 揺らぎで PBH が形成される様子をシミュレーションで埋め込み図を描き, 理解することである．

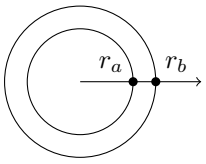


図 1: 理想揺らぎの模式図:$r > r_b$ で平坦 FLRW 宇宙, $r < r_a$ で閉じた FLRW

2 Basic Equation And NO-SU Condition

ラプス関数 N, $n^\mu = 1/Ne^\mu_{(t)}$ で, 完全流体 $T^{\mu\nu} = (\rho + p) + pg^{\mu\nu}$ で満たされた球対称時空間の計量は

$$ds^2 = -N^2dt^2 + \frac{R'}{1+E}dr^2 + R^2d\Omega^2. \quad (1)$$

ここで $'r'$ は r での微分を表し t, r, Ω は全て共動座標である．式 [1] と Einstein 方程式から半径 r 内の重力質量である Misner-Sharp 質量は

$$M \equiv= 4\pi \int_0^r \rho R^2 R' dr \quad (2)$$

で定義され, また Misner-Sharp 方程式はそれぞれ

$$\dot{R}^2 = N^2\left(\frac{2M}{R} + E\right) \ : \text{Hamiltonian constraint} \quad (4)$$

$$\dot{E} = -2\frac{1+E}{\rho+p}\frac{p'}{R'}\dot{R} \ : \text{momentum constraint} \quad (5)$$

$$\dot{M} = -4\pi p R^2 \dot{R} \ : \text{evolution equation} \quad (6)$$

$$(\ln N)' = -\frac{p'}{\rho+p} \ : \text{Euler equation} \quad (7)$$

仮定として状態方程式 $f(\rho, p) = 0$ と初期時刻 t_i において $t =$ 定数 になるようなスライスを取る;

$$R(t_i, r) = a_i r, \ \rho(t_i, r) \ and \ \dot{\rho}(t_i, r) = \text{constant} \quad (8)$$

平坦 FLRW 宇宙 ($r > r_b$) と球対称過密領域 ($r < r_a$) が遷移領域で経由される宇宙を考える (図 1). $r > r_b$ 領域で

$$N = 1,\ E = 0,\ and\ R = b(t)r \tag{9}$$

また初期揺らぎはハッブル半径よりもかなり大きい, すなわち $R_i \gg H_i^{-1}$ と仮定する. この仮定の下で $r < r_a$ で

$$N \simeq 1,\ E \simeq -r^2\ and\ R \simeq a(t)r \tag{10}$$

となる. $\dot{R}_m = 0$ となる時間を t_m と定義し, 式 [4] より

$$E = -\frac{2M_m}{R_m}. \tag{11}$$

揺らぎの内側で ρ は空間定数であるから $M = 4\pi\rho R^3/3$ で式 [11] より,

$$16\pi\rho_m = \frac{6}{a_m^2} \tag{12}$$

ここで新たな共動動径座標 χ を次のように定義する;

$$d\chi = \frac{dr}{\sqrt{1+E}} \tag{13}$$

閉じた FLRW 宇宙,$E = -r^2$ に対して

$${}^{(3)}ds^2 = a^2\left(\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\Omega^2\right) = a^2\left(d\chi^2 + \sin^2\chi d\Omega^2\right) \tag{14}$$

$r = 1$ は単に座標特異点となっていることが分かる.

過密領域の固有半径 $L \equiv a\chi_a$ について考える;

$$L < L_{\rm SU} \equiv a\pi \tag{15}$$

式 [12] より $t = t_m$ では

$$L_{\rm SU} = \sqrt{\frac{3\pi}{8\rho_m}} \tag{16}$$

で $L_{\rm m} = L_{\rm SU}$ は SU を意味する. したがって式 [15] が NO-SU condition となる. さらに正の曲率の場合

$$R < L \tag{17}$$

でしたがって,

$$\text{NO-SU condition} : R_m < \sqrt{\frac{3\pi}{8\rho_m}} \tag{18}$$

と言える. 一方で幾何的に

$$R < R_{\rm max} = a \tag{19}$$

で時間 t_m に対して

$$R_m \leq \sqrt{\frac{3}{8\pi\rho_m}} \tag{20}$$

が成り立つ. よって幾何的に NO-SU condition が破られることは無い.

3 Curvature And Density Fluctuation

この章では SU となると考えられていた $\zeta_{\rm max}$と $\delta_{\rm max}$ は SU を表すものでは無いことを示す.

type Ⅱ 揺らぎを形成することができる物理的なメカニズムは single field inflation のみである. そこで新しい動径座標 s を導入して曲率揺らぎ ζ を次のように定義する;

$${}^{(3)}ds^2 = b^2(t)e^{2\zeta(s,t)}\left(ds^2 + s^2 d\Omega^2\right). \tag{21}$$

inflation の終わりを slow roll condition が破れる瞬間であるとして, その瞬間に

- ϕ が空間的に定数である slice を取る ($\phi_r -$slice)
- 膨張率が近似的に定数

とする. また局所 e-folds を

$$\lambda(s,t_r) \equiv \ln b(t_r) + \zeta(s,t_r).$$

と定義し, これは局所体積要素

$$\sqrt{\gamma(s,t_r)} = e^{3\lambda(s,t_r)}s^2\sin\theta$$

と関係付けされている. ここで体積揺らぎを求める. 過密領域の体積である固有体積 $V_3(\chi)$ と揺らぎがない場合の体積である平均平坦空間体積 $V_B(\chi)$ の比で与えられ, それぞれ

$$V_3(\chi) = 2\pi b^3\left(\chi - \sin\chi\cos\chi\right) \tag{22}$$

$$V_B(\chi) = \frac{4\pi}{3}b^3\sin^3\chi \tag{23}$$

これらを用いて平均曲率揺らぎ $\bar{\zeta}$ と,Hubble 半径よりも大きいような中心体積の曲率揺らぎの近似はそれぞれ

$$\bar{\zeta} \equiv \frac{1}{3} \ln \frac{V_3(\chi)}{V_B(\chi)} \tag{24}$$

$$\zeta(0,t) \sim -2 \ln \cos\left(\frac{\chi}{2}\right) \tag{25}$$

$\zeta, \bar{\zeta}$ の両方とも $\chi \to \pi$ で発散するため, 揺らぎが SU となるのは

$$\zeta > \infty = \zeta_{\mathrm{SU}} \tag{26}$$

のみで物理的に起こることは無いことが分かる.

密度揺らぎ δ に関しての議論は省略するが, δ の式は近似的に

$$\delta \sim \frac{1}{16} \sin^2 \chi \left(8 + \sin^2 \chi\right) \tag{27}$$

と求められて

$$\delta_{\mathrm{SU}} = \delta(\chi = \pi) = 0 \tag{28}$$

$$\delta_{\max} = \delta(\chi = \pi/2) \sim 0.6 \tag{29}$$

であることから $\chi \to \infty$ となる時 SU になり,$\delta_{\max}$ は SU を表すものでは無いことが確かめられた.

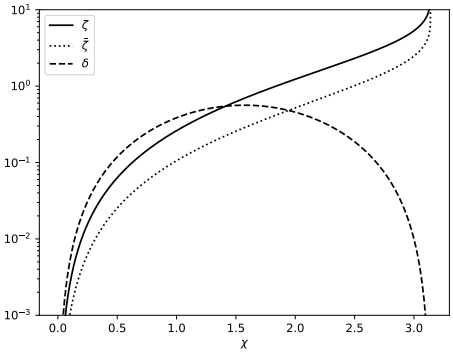


図 2: $\zeta, \bar{\zeta}, \delta$ の比較図.$\chi = \pi$ で $\zeta \to \pi, \delta \to 0$ となることが分かり, これが SU を表している.

4 Simulation

この節では typeⅡ 揺らぎによる PBH 形成のシミュレーションについて議論する.

4.1 Initial Condition

今回のシミュレーションでは完全流体 $p = 0$ で考えた. 式 [5],[6] から E, M は時間非依存であることが分かり, 式 [2] の解は $R(t_i, r) = 0$ とすると,

$$R(r,t) = \begin{cases} \frac{M}{E}(\cos\eta - 1) & E(r) < 0 \\ \left(\frac{9M}{2}\right)^{1/3} t^{2/3} & E(r) = 0 \end{cases} \tag{30}$$

と求められここで η は共形時間であり $\sin\eta - \eta = -(|E|^{3/2}/M)t$ と与えられている.

初期条件を E, M に対して与える. 座標系 χ を用いて $r(\chi) \equiv \Phi(\chi)$ と定義して

$$E(\chi) = \Phi'^2 - 1$$

とする. 図 [3] から [5] はそれぞれ M, Φ, E の初期値を描いたものである. 制約条件に関してはを Michael Copp (2011) を参照した.

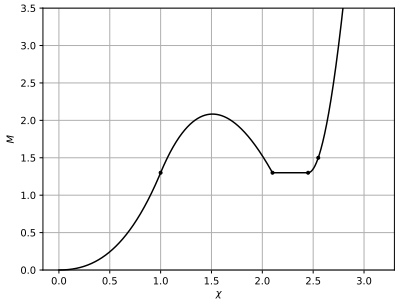


図 3: M の初期値

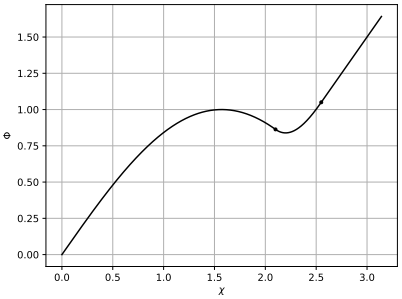


図 4: Φ の初期値

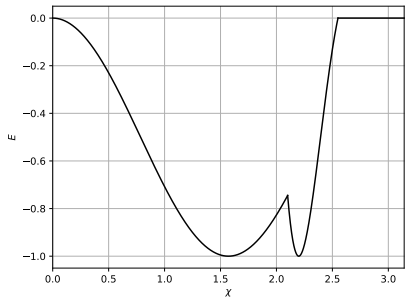


図 5: E の初期値

4.2 Embedding diagram

次の図 [6] から [6] は前小節の初期条件と式 [30] を下にシミュレーションして書いた埋め込み図である. 時間が経過するにつれて遷移領域が閉じて行き, 最終的に親宇宙と子宇宙に分裂することが分かる.

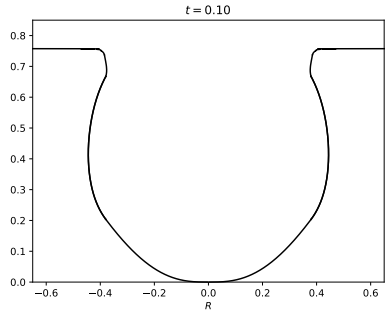


図 6: $t = 0.1$ の埋め込み図

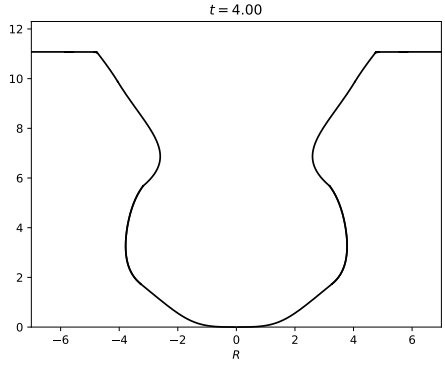


図 7: $t = 4.0$ 埋め込み図

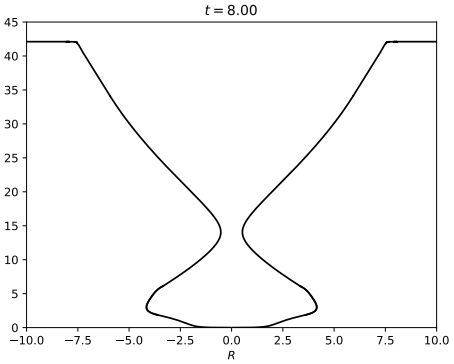


図 8: $t = 8.0$ の埋め込み図

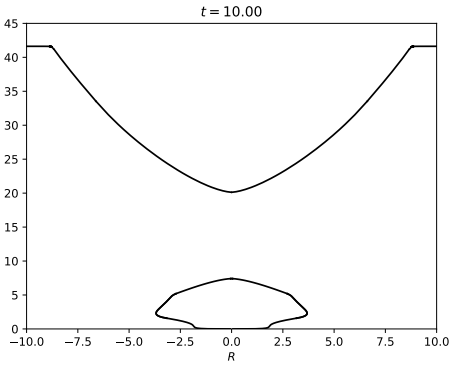


図 9: $t = 10.0$ の埋め込み図

5 Conclusion

3 節までで NO-SU condiion は幾何的に破られることが無いこと,SU となるのはパラメータが無限に発散するという物理的に起きない状況であることを示した. 4 章では typeⅡ 揺らぎの時間発展を表す埋め込みについて議論した. 最終的には親宇宙と子宇宙に分かれた. しかし今回の私のシミュレーションでは時間が経つにつれて揺らぎの球対称性が破られるなど様々な問題点が挙げられる. 今後修正した上でより精密な議論ができるようにしたいと考える.

Reference

Michael Kopp,stefan Hofmann and Jochen Weller 2011,Separate Universe Do Not Constrain Primordial Black Hole Formation

———index へ戻る

重宇a11

アクシオンドメインウォールを通過する重力波の円偏光

谷口 彰

アクシオンドメインウォールを通過する重力波の円偏光

谷口 彰 (九州大学大学院 理学府 物理学専攻)

Abstract

近年，重力波天文学が目覚ましく発展しており，重力波観測によって新しい物理が見出されることが期待されている．そこで私たちの研究 [1] では，重力波観測を用いて，axion-like-particles(以下，アクシオンと呼ぶ) や Chern-Simons(CS) 重力について新しい発見を得る方法を調べた．その結果，特定の周波数を持つ重力波がアクシオンドメインウォールを通過すると，観測可能な大きさの円偏光が生じることが分かった．この特定の周波数は，アクシオンと CS 重力の結合定数および，ドメインウォールのエネルギーの大きさによって決まる．さらに，現在の宇宙にドメインウォールが残存している場合，重力波の円偏光の観測によってアクシオンと CS 重力の結合定数に現在よりも強い制限を与える方法を構築することに成功した．本講演では，この研究成果を説明する．

1 Introduction

2015 年の LIGO による重力波の初観測によって，重力波天文学が幕開けた．今後，重力波観測によって，様々な新しい物理が発見されることが期待されている．本研究では，axion-like-particles(以下，アクシオンと呼ぶ) や Chern-Simons(CS) 重力について新しい発見を得る方法を調べた．アクシオンの存在は，超弦理論によって予言されている．また，アクシオンは暗黒物質の候補の１つでもある。したがって，アクシオンについての理解を深めることは、超弦理論や暗黒物質の検証につながる．

アクシオンは擬スカラーであるため，CS 項を通して重力と結合する．そして，この項は重力波に円偏光を生じさせるため，重力波の円偏光を観測することは， アクシオンや CS 重力についての新しい情報を得るために有意義である．先行研究では，一様なアクシオンダークマター背景を伝搬する重力波に生じる円偏光についての研究が行われてきた．しかし，この場合に生じる円偏光の大きさは観測可能な大きさにならないことが判明している．そこで私たちは異なる背景としてアクシオンドメインウォールを考え，アクシオンドメインウォールを通過する重力波に生じる円偏光について調べる．

現在の宇宙に残存できるドメインウォールのエネルギー密度 σ は，CMB の観測によって制限されており，標準的な Λ-CDM モデルにおいて，95%の精度で $\sigma < (0.93\mathrm{MeV})^3$ でなければならない [2]．このような $(\mathrm{MeV})^3$ スケールのエネルギー密度をもつドメインウォールの形成シナリオは，[3] や [4] で提案されている．

理論的には，アクシオンと CS 重力の結合定数は自由なパラメータである．一方で，観測的には，地球を周回する天体のフレーム・ドラッギング効果や二重パルサー連星の観測によって結合定数の大きさを制限することができる．現在，アクシオンと CS 重力の結合の強さを特徴づける定数 ℓ (式 (6) 参照) に対する上限は，Gravity Probe B と LAGEOS 衛星による地球周りのフレーム・ドラッギング効果の測定から得られており，$\ell \lesssim 10^8$ km である [5].

本研究では，宇宙の地平線内にアクシオンドメインウォールが存在すると仮定し，重力波がアクシオンドメインウォールを通過するときの円偏光の大きさを評価する．そして，円偏光が観測可能かどうかを議論し，アクシオンと CS 重力の結合定数に対する制限を与える方法を議論する．

2 アクシオンドメインウォール

アクシオン場の作用は

$$S = -\int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi + V(\phi)\right] \tag{1}$$

書ける．ここで，$V(\phi)$ は，$\phi = \pm\eta$ に極小を持つ double-well ポテンシャルであり，

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - \eta^2)^2 \tag{2}$$

と表される．ただし，λ は自己結合定数である．ここで，ドメインウォールが静的かつ平面的であり，その面が $x-y$ 平面内にあると仮定する．この場合，ポテンシャル (2) に対応するドメインウォールの解は，

$$\phi(z) = \eta \tanh\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\eta z\right) \tag{3}$$

である．また，ドメインウォールのエネルギー密度は

$$\sigma = \int dz \phi'^2(z) \sim \sqrt{\lambda}\eta^3 \tag{4}$$

と計算される．

3 CS 重力における重力波の方程式

この章では，z 方向に伝播している CS 重力における重力波の運動方程式を導出する．Minkowski 時空からのテンソル摂動 h_{ij} を用いると，計量は

$$ds^2 = -dt^2 + (\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j \tag{5}$$

と書ける．ここで，δ_{ij} は Kronecker デルタである．h_{ij} にはトランスバース・トレースレスゲージ条件 $h^i{}_{j,i} = h^i{}_i = 0$ を課す．次に，CS 重力の作用は，

$$\begin{aligned} S &= \frac{M_{\rm p}^2}{2}\int d^4x\sqrt{-g}R \\ &\quad + \frac{M_{\rm p}\ell^2}{8}\int d^4x\sqrt{-g}\,\phi\, R\tilde{R} \end{aligned} \tag{6}$$

と表される．ここで，$R\tilde{R} = 1/2\,\varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta}R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}R_{\nu\mu\rho\sigma}$ である．$M_{\rm p}$ はプランク質量で $M_{\rm p}^2 = 1/(8\pi G)$，ℓ は長さスケールの定数であり，アクシオン場と重力の結合の強さ特徴づける．ここで，4 次元 Levi-Civita テンソル $\varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta}$ は，$\varepsilon^{0123} = -1/\sqrt{-g}$ と定義している．

$$\begin{aligned} \overset{(2)}{S} &= \frac{M_{\rm p}^2}{8}\int d^4x\Big[\dot{h}^{ij}\dot{h}_{ij} - h^{ij,k}h_{ij,k} \\ &\quad - \frac{\ell^2}{M_{\rm p}}\varepsilon^{izk}\phi'\left\{\ddot{h}^m{}_i\dot{h}_{km} + \dot{h}_{im,\ell}\left(h^\ell{}_k{}^{,m} - h^m{}_k{}^{,\ell}\right)\right\}\Big] \end{aligned} \tag{7}$$

ここで，$\dot{h} = \partial_t h$，$\dot{\phi} = \partial_z\phi$ であり，ε^{ijk} は 3 次元の Levi-Civita テンソルである．作用 (7) において h_{ij} に関する変分をとると，CS 重力における重力波の運動方程式が次のように得られる．

$$\begin{aligned} \Box h^{ij} &= \frac{\ell^2}{2M_{\rm p}}\varepsilon^{zik}\left[\phi'\Box + \phi''\partial_z\right]\dot{h}^j{}_k \\ &\quad + \frac{\ell^2}{2M_{\rm p}}\varepsilon^{zjk}\left[\phi'\Box + \phi''\partial_z\right]\dot{h}^i{}_k \end{aligned} \tag{8}$$

右巻きと左巻きの偏極テンソル $e_{ij}^{(R)}, e_{ij}^{(L)}$ を次のように導入する．

$$e_{ij}^{(R)} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_{ij}^{(L)} = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

この偏極テンソルを用いると，重力波を 2 つのモードの重ね合わせとして

$$h_{ij}(t,z) = h_R(t,z)e_{ij}^{(R)} + h_L(t,z)e_{ij}^{(L)} \tag{10}$$

と表せる．ここで，$h_R(t,z)$，$h_L(t,z)$ はそれぞれ右巻きと左巻きの偏極モードの振幅である．式 (10) を式 (8) に代入することで，

$$\Box h_{R/L}(t,z) = \pm i\frac{\ell^2}{M_{\rm p}}\left[\phi'\Box + \phi''\partial_z\right]\dot{h}_{R/L}(t,z) \tag{11}$$

が得られる．符号の $\pm$ は，それぞれ右巻きと左巻きのモードに対応している．重力波は z 方向に伝搬していると仮定しているため，波数ベクトルは $k^\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$ とおける．したがって，式 (11) における時間並進対称性により，Fourier モードで $h_{R/L}(t,z) = H_{R/L}(z)\,e^{i\omega t}$ と書ける．よって，運動方程式 (11) は，

$$\begin{aligned} &\left(1 \pm \frac{\omega\ell^2}{M_{\rm p}}\phi'\right)H''_{R/L} \pm \frac{\omega\ell^2}{M_{\rm p}}\phi''H'_{R/L} \\ &\qquad + \omega^2\left(1 \pm \frac{\omega\ell^2}{M_{\rm p}}\phi'\right)H_{R/L} = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

となる．運動方程式から，右巻きと左巻きのモードが従う運動方程式が異なっていることが分かる．つまり，ドメインウォールを通過した後の重力波には円偏光が生じていることが予想される．

4 重力波の円偏光の評価

運動方程式 (12) を解析的に解くことは難しい．そこで，ポテンシャルによる散乱問題として数値的に解くことで，円偏光の大きさを計算する．

4.1 有効ポテンシャル

運動方程式 (12) を変形するために以下の関数を導入する．

$$F(z) \equiv 1 \pm \frac{\omega\ell^2}{M_{\rm p}}\phi'(z),\ H_{R/L}(z) \equiv \frac{f_{R/L}(z)}{\sqrt{F(z)}} \tag{13}$$

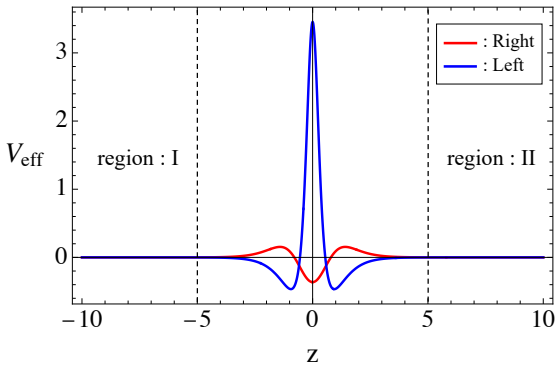


図 1: 右巻きと左巻きのそれぞれのモードの有効ポテンシャル $V_{\rm eff}(z)$ を示している．パラメータは，$\eta = 0.9$, $\lambda = 2$, and $\omega\ell^2/M_p = 1$ である．有効ポテンシャルが消える領域を region:I，region:II とした．

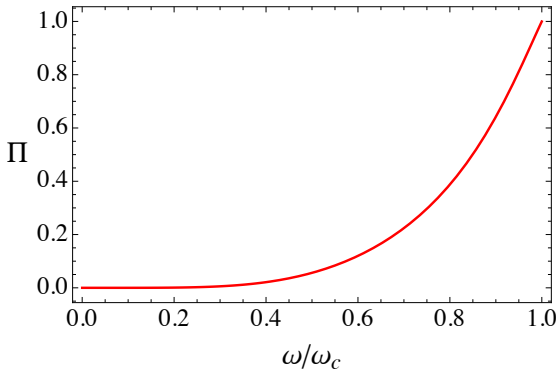


図 2: 円偏光の割合の周波数依存性を示している．ただし，周波数は臨界周波数で規格化されている．パラメータは，$M_{\rm p} = 10^{18}$ GeV，$\ell = 10^8$ km，$\eta = 1$ MeV，$\lambda = 2$ であり，このとき $\omega_{\rm c} = 10^{-21}$ eV である．$\omega/\omega_{\rm c}$ が 1 に近づくにつれて円偏光が大きくなることが分かる．

これらを運動方程式 (12) に代入することで，

$$\left[-\frac{d^2}{dz^2} + V_{\rm eff}(z)\right] f_{R/L} = \omega^2 f_{R/L} \tag{14}$$

が得られる．ここで，$V_{\rm eff}(z)$ が有効ポテンシャルで，

$$V_{\rm eff} = -\frac{1}{4}\left(\frac{F'}{F}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{F''}{F} \tag{15}$$

である．右巻きと左巻きのそれぞれのモードの有効ポテンシャルの概形を図 1 に示した．

4.2 透過係数と円偏光

有効ポテンシャル $V_{\rm eff}(z)$ の下で，reion:I から入射する重力波の散乱問題を考える．region:I と region:II ではポテンシャルは消えるので，それぞれの領域での解は，z 方向に伝搬する平面波として次のようにおける．

$$f_{R/L}(z) = \begin{cases} \dfrac{e^{i\omega z}}{\sqrt{2\omega}} + \mathcal{R}_{R/L}\dfrac{e^{-i\omega z}}{\sqrt{2\omega}} & \text{(region:I)} \\ \mathcal{T}_{R/L}\dfrac{e^{i\omega z}}{\sqrt{2\omega}} & \text{(region:II)} \end{cases} \tag{16}$$

ここで，$\mathcal{R}_{R/L}$，$\mathcal{T}_{R/L}$ はそれぞれ反射係数と透過係数である．円偏光の割合 Π は，透過係数を用いて，

$$\Pi \equiv \frac{|\mathcal{T}_R|^2 - |\mathcal{T}_L|^2}{|\mathcal{T}_R|^2 + |\mathcal{T}_L|^2} \tag{17}$$

と定義できる．したがって，方程式 (14) を数値的に解き，右巻きと左巻きのそれぞれの透過係数 $\mathcal{T}_{R/L}$ を求めることで，円偏光の大きさを評価できる．

4.3 重力波に生じる円偏光の大きさ

運動方程式 (12) より，Einstein 重力に対する CS 項による補正は $\omega\ell^2\phi'/M_{\rm p}$ で表されることが分かる．CS 項による補正は Einstein 重力より小さくなければならないことから，

$$\begin{aligned} \frac{\omega\ell^2}{M_{\rm p}}\phi' &= \frac{\ell^2}{M_{\rm p}}\omega\eta^2\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\,\mathrm{sech}^2\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\eta z\right) \\ &\le \frac{\ell^2}{M_{\rm p}}\omega\eta^2\sqrt{\frac{\lambda}{2}} < 1 \end{aligned} \tag{18}$$

が成り立つ．したがって，臨界周波数 $\omega_{\rm c}$ を以下で定義する．

$$\omega_{\rm c} = \frac{M_{\rm p}}{\ell^2\eta^2}\sqrt{\frac{2}{\lambda}} \tag{19}$$

円偏光の割合 Π の数値計算の結果を図 2 に示した．図 2 より，重力波の周波数 ω が臨界周波数 ω_c に近いとき，大きな円偏光が生じ，特に $\omega = \omega_{\rm c}$ のとき最大になる．つまり，CS 項による補正が Einstein 重力と同じ程度になるとき，大きな円偏光が生じる．

5 アクシオンと Chern-Simons 重力の結合定数に対する制限

CMB の観測からドメインウォールのエネルギー密度は $\sigma \lesssim (1\ \text{MeV})^3$ である [2]．したがって，現在の宇宙に $\sigma \sim (1\ \text{MeV})^3$ のドメインウォールがあると

仮定すると，式 (4) より $\eta \sim 1$ MeV となる．このとき，$\lambda \sim \mathcal{O}(1)$, $M_{\rm p} = 10^{18}$ GeV を用いると，式 (18) の制限は，

$$\omega \ell^2 < 10^{15}\ \mathrm{eV}^{-1} \tag{20}$$

となる．現在，結合定数 ℓ に対する最も強い制限は，Gravity Probe B と LAGEOS 衛星による地球周りのフレーム・ドラッギング効果の測定によって与えられており，$\ell \lesssim 10^8$ km $\sim 10^{18}$ eV^{-1} である [5].

そこで，$\ell \sim 10^8$ km とすると，式 (19) より

$$\omega_c \sim 10^{-21}\ \mathrm{eV} \sim 1\ \mu\mathrm{Hz} \tag{21}$$

が得られる．したがって，$\omega_{\rm c} \sim 1\ \mu$Hz の重力波に円偏光が生じる．このとき，もし円偏光が観測されなければ，結合定数 ℓ は 10^8 km よりも小さいことが分かる．同様にして，ℓ を小さくしながら円偏光が観測されるかどうかを調べることで，ℓ にさらに厳しい制限を与えることができる．ここで，ℓ を小さくするということは，$\omega_{\rm c}$ を大きくすることに対応する．つまり，周波数を大きくしていきながら重力波を観測して円偏光がなければ，ℓ により厳しい制限を与えることができる．そして，円偏光が観測されれば，結合定数の値が判明し，アクシオンの存在も示唆される．

さらに，ドメインウォールによる重力波の散乱が宇宙初期に起こった可能性がある．この場合，ドメインウォールを通過した後の重力波には赤方偏移が生じ，過去になるほど重力波の周波数が高くなることを考慮しなければならない．したがって，式 (20) を用いて，ℓ にさらに強い制限を与えることができる．

6 Conclusion

本研究では，アクシオンドメインウォールを通過する重力波に生じる円偏光について調べた．Chern-Simons(CS) 重力における重力波の運動方程式を，散乱問題として数値的に解いた結果，円偏光の割合は重力波の周波数に依存することが分かった．円偏光の大きさは，臨界周波数の重力波を観測したときに最大になる．また，臨界周波数はアクシオンと CS 重力の結合定数 ℓ および，ドメインウォールのエネルギーで決まり，CS 項による補正の効果が Einstein 重力と同程度になる周波数を表している．もし，円偏光が観測されれば，アクシオンや CS 重力に関する新しい探索手段となり得る．

重力波の円偏光が大きな立体角で観測された場合，ドメインウォール由来の円偏光である可能性がある．ただし，CMB の観測と矛盾しないためには，ドメインウォールのエネルギー密度は $\sigma \lesssim (1\ \mathrm{MeV})^3$ でなければならない．$\sigma \sim (1\ \mathrm{MeV})^3$ のドメインウォールが存在するとき，10^{-6} Hz 以上の重力波に円偏光が生じているかを調べ，もし円偏光が観測されなければ，アクシオンと CS 重力の結合定数 ℓ が現在の制限 $\ell \lesssim 10^8$ km よりも強く制限されることを示した．また，この方法では重力波の周波数を高くしていく必要があるため，高周波重力波の観測方法の構築が重要である．

Acknowledgement

本講演は，指導教員の菅野優美准教授と，神戸大学の早田次郎教授との共同研究に基づくものです．日々の議論を通して多大なご指導を頂いていることに，感謝を申し上げます．

Reference

[1] S. Kanno, J. Soda, and A. Taniguchi, "Circularly polarized gravitational waves in Chern-Simons gravity originated from an axion domain wall," arXiv:2304.03944 [hep-th], (2023).

[2] A. Lazanu, C.J.A.P. Martins and E. P. S. Shellard, "Contribution of domain wall networks to the CMB power spectrum," Phys. Lett. B **747**, 426-432 (2015).

[3] E. Babichev, D. Gorbunov, S. Ramazanov and A. Vikman, "Gravitational shine of dark domain walls," JCAP **04**, no.04, 028 (2022).

[4] H. B. Nielsen and C. D. Froggatt, "Domain Walls of Low Tension in Cosmology," arXiv:2305.18645 [astro-ph.CO], (2023).

[5] Y. Ali-Haimoud and Y. Chen, "Slowly-rotating stars and black holes in dynamical Chern-Simons gravity," Phys. Rev. D **84**, 124033 (2011)

————index へ戻る

重宇 a12

原子重力波が干渉計に与えるノイズとその検出可能性の推定

山崎 優樹

原始重力波が干渉計に与えるノイズの推定と検出可能性

山崎 優樹 (九州大学大学院 量子宇宙物理理論研究室 M1)

Abstract

本稿では先行研究 [1] に基づき、原始重力波の質点系への影響を推定し、その検出可能性を議論する。Feynman-Vernon influence action を用いると、量子開放系にこにおいて、環境がシステムに与える影響を、確率的な有効作用として記述することができる。今回は質点系をシステム、重力波を環境にとることで、質点が従う Langevin equation を有効作用から導出し、さらにそこから質点系の相対位置の分散を導出した。最後に、この分散を様々な量子状態で計算し、原始重力波の検出可能性を議論した。

1 Introduction

一般相対性理論は、重力を記述する理論であり、ブラックホールの存在や宇宙の進化においてよく観測と一致している。一般相対性理論から予言される重力波は、2015 年に LIGO,Virgo が初めて検出してから、多くのイベントが観測されており、現時点で一般相対論と観測とに明確な矛盾はない。一方で、一般相対性理論で記述される重力が量子力学に従うか否かは、現在に至るまで全く検証がなされていない。重力波を量子的に扱った時、重力波が質点に与える影響の検出可能性を議論することは、量子力学と重力理論を統一的に理解するうえで重要だといえる。

本稿では、まず 2 章で計算の方法論を確認する。具体的には Feynman-Vernon influence action を考えることで、重力波が質点系 (干渉計) に与える影響を、確率的な有効作用として記述できることを見る。3 章では計算結果を与え、4,5 章で物理的解釈や実際の観測との違いについて議論する。

2 Methods

2.1 Gravitational wave action

Minkowski 空間まわりでの計量の摂動を考える。

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu} \tag{1}$$

ここで、$\kappa = \sqrt{16\pi G}, G$ は万有引力定数

TT ゲージ $h_{0\mu} = 0, h^{\mu}_{\mu} = 0, \partial^{\mu} h_{\mu\nu}$ の下で、Einstein-Hilbert action を h の二次まで取ると、重力波の作用は

$$S_g \simeq -\frac{1}{4}\int d^4x (\partial_\alpha h_{\mu\nu})(\partial^\alpha h^{\mu\nu}) \tag{2}$$

と書け、さらに偏極の自由度ごとに分けて、

$$S_g \simeq -\frac{1}{2}\int d^4x \sum_s \partial_\alpha h^{(s)}(x)\partial^\alpha h^{(s)}(x) \tag{3}$$

と書くことができる。

2.2 matter action

質量 m の質点の作用は

$$S_m = -m\int \sqrt{-ds^2} \tag{4}$$

と書ける。座標系として Fermi normal coordinate を選び、質点の座標を $(t, \vec{z})$ とすると、(4) は

$$S_m \simeq \int dt \left[\frac{m}{2}\delta_{ij}\dot{z^i}\dot{z^j} + \frac{m\kappa}{4}\ddot{h_{ij}}z^i z^j\right] \tag{5}$$

と書くことができる。ここで、(5) の第 1 項は運動項、第 2 項は重力と質点の相互作用項とみなせる。

また、$h_{\mu\nu}$ を偏極の自由度ごとに分けると、

$$\int dt \frac{m\kappa}{4}\ddot{h_{ij}}z^i z^j = \alpha \int d^4x \sum_s h^{(s)}(x)X^{(s)}(x) \tag{6}$$

$$X^{(s)}(x) = \int d^3\vec{k} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \frac{d^2}{dt^2}(\epsilon_i^{(s)*}(\vec{k})z^i(t))^2 \tag{7}$$

と書くことができる。ここで、$\epsilon_i^{(s)}(\vec{k})$ は偏極ベクトルを表し、$\alpha = \sqrt{2}m\kappa/(4(2\pi)^3)$ である。

2.3 Stochastic effective action

一般に、システムと環境から構成される開放系を考えたとき、システムが従う実効的な作用が

$$S_{\rm SEA} = S_{\rm S} + S_{\rm IF} \tag{8}$$

と書けるとする ($S_{\rm S}$ はシステムの action)。つまり、環境からシステムへの影響が全て含まれるような作用である $S_{\rm IF}$ を考える。この $S_{\rm IF}$ を Feynman-Vernon influence action と呼ぶ。

今、システムに質点系を取り、環境に重力波を取る。このとき、$S_{\rm IF}$ は計算できて、

$$\Sigma^{ij}(t) = \frac{1}{2}\left[z_+^i(t)z_+^j(t) + z_-^i(t)z_-^j(t)\right] \tag{9}$$

$$\Delta^{ij}(t) = z_+^i(t)z_+^j(t) - z_-^i(t)z_-^j(t) \tag{10}$$

と変数を定義すると、

$$S_{\rm IF} = \int dtdt' \Delta^{ij}(t) D_{ijkl}(t,t') \Sigma^{kl}(t') + \frac{i}{2}\int dtdt'' \Delta^{ij}(t) N_{ijkl}(t,t') \Delta^{kl}(t') \tag{11}$$

と書ける。計算の都合上、いま、z_+ と z_- という二つの変数 (質点の位置) が現れている。しかし、これは Langevin equation を求める際に $z_+ = z_- = z$ という条件を取るため、最終的には座標 $(t, \vec{z})$ にある質点のダイナミクスが得られる。

D_{ijkl} はシステムから環境への散逸、N_{ijkl} は環境からシステムへのノイズを表しており、それぞれ

$$D_{ijkl}(t,t') = \alpha^2 \frac{d^2}{dt^2}\frac{d^2}{dt'^2}\int d^3\vec{k}d^3\vec{k'}\int d^3\vec{x}d^3\vec{x'} \times e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}e^{i\vec{k'}\cdot\vec{x'}}\sum_s \epsilon_{ij}^{(s)}(\vec{k})\epsilon_{kl}^{(s)}(\vec{k'})G_{ret}(x,x') \tag{12}$$

$$G_{ret}(x,x') = i\theta(t-t')\langle[h^{(s)}(x), h^{(s)}(x')]\rangle \tag{13}$$

$$N_{ijkl}(t,t') = \frac{\alpha^2}{2}\frac{d^2}{dt^2}\frac{d^2}{dt'^2}\int d^3\vec{k}d^3\vec{k'}\int d^3\vec{x}d^3\vec{x'} \times e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}e^{i\vec{k'}\cdot\vec{x'}}\sum_s \epsilon_{ij}^{(s)}(\vec{k})\epsilon_{kl}^{(s)}(\vec{k'})G^{(1)}(x,x') \tag{14}$$

$$G^{(1)}(x,x') = \langle\{h^{(s)}(x), h^{(s)}(x')\}\rangle \tag{15}$$

と書ける。ここで、$\epsilon_{ij}^{(s)}(\vec{k})$ は偏極ベクトルを表す。

また、$N_{ijkl}(t,t')$ は確率的なテンソル力 $\xi_{ij}(t)$ を用いて、

$$N_{ijkl}(t,t') = \langle\xi_{ij}(t)\xi_{kl}(t')\rangle \tag{16}$$

と書くこともできる。つまり、N_{ijkl} は確率的な力の二時刻相関だと解釈することもできる。

2.4 Langevin equation

前節までの議論より、$S_{\rm SEA}$ は

$$S_{\rm SEA} = \frac{m}{2}\int dt\delta_{ij}\left[\dot{z}_+^i(t)\dot{z}_+^j(t) + \dot{z}_-^i(t)\dot{z}_-^j(t)\right] + \int dtdt' \Delta^{ij}(t) D_{ijkl}(t,t') \Sigma^{kl}(t') - \int dt \xi_{ij}(t)\Delta^{ij}(t) \tag{17}$$

と書ける。$z_+ = z_- = z$ という条件のもと、$S_{\rm SEA}$ の z での変分を取ると、最小作用の原理からシステムが従う Langevin equation を求めることができる:

$$m\ddot{z}^i(t) + 2\delta^{im}\int dt' D_{mnkl}(t,t') z^n(t) z^k(t') z^l(t') - 2\delta^{ik}\xi_{kl}(t) z^l(t) = 0 \tag{18}$$

ここで、δ^{im} は Kronecker delta である。この方程式を $z^i = z_0^i + \delta z^i$ として摂動的に解く。ここで $z_0^i(t)$ を背景時空での測地線の運動であるとして $m\ddot{z}_0^i(t) = 0$ が成り立つとする。このとき、δz^i はノイズによる測地線の運動であると解釈でき、摂動的な運動方程式はノイズの項のみ取ればよい。$\delta z^i(0) = \dot{z}^i(0) = 0$ という初期条件の下では、

$$\delta z^i(t) = \frac{2}{m}\int_0^t dt'(t-t')\delta^{ik}\xi_{kl}(t') z_0^l(t') \tag{19}$$

という解が求められ、したがって質点の位置の揺らぎの二時刻相関は、

$$\langle\delta z^i(t)\delta z^j(t')\rangle = \frac{4}{m^2}\delta^{ik}\delta^{jl}\int_0^t dt''\int_0^{t'} dt'''(t-t'')(t'-t''') \times z_0^m(t'')z_0^n(t''')N_{kmln}(t'',t''') \tag{20}$$

と N_{ijkl} を使って書ける。

様々な量子状態で (15) の期待値を取り、運動量の積分をある値 Λ カットオフをして計算すると、それぞれの状態での質点の位置の二時刻相関が計算できる。干渉計はその長さよりはるかに短い波長には感度を持たないことから、$\Lambda = 1/z_0$ として、さらに $t' \to t$ の同時極限をとることで、(20) から質点の位置の揺らぎの大きさを評価できる。

3 Results

計算結果を以下に示す。

・Minkowski vacuum

$$\sqrt{(\delta z)^2} \sim \kappa \tag{21}$$

・Thermal state (low twmperature limit)

$$\sqrt{(\delta z)^2} \sim \kappa \left(\frac{z_0}{\beta}\right)^3 \tag{22}$$

・Thermal state (high twmperature limit)

$$\sqrt{(\delta z)^2} \sim \kappa \left(\frac{z_0}{\beta}\right)^{5/2} \tag{23}$$

・Coherent state

$$\sqrt{(\delta z)^2} \sim \hat{\alpha}\kappa \tag{24}$$

$\hat{\alpha}$ は coherent parameter でコヒーレントの強さを表す。

・Squeezed state

$$\sqrt{(\delta z)^2} \sim e^{\zeta}\kappa \tag{25}$$

ζ は squeezu parameter でスクイージングの強さを表す。

4 Discussion

計算結果から、Minkowski vacuum においては、位置の分散は $\kappa = \sqrt{16\pi G}$ 程度であると分かる。これはプランク長 $l_{Pl} \sim 10^{-35}$m 程度の大きさであり、現在の測定の限界を超えている。

Thermal state の低温極限では $z_0/\beta \ll 1$ であるので、分散を大きくする効果はない。高温極限では $z_0/\beta \gg 1$ に比例して分散が大きくなるが、現在の宇宙ではこのような状況は実現していない。

Coherent state では $\hat{\alpha}$ に比例して分散が大きくなるが、コヒーレントが強い時、古典的な波と見分けがつかなくなってしまう。

Squeezed state では e^{ζ} で分散が大きくなる。よって、ζ が十分大きい時、重力波によるノイズが検出できるほど大きくなる可能性がある。インフレーション時代に生成された原始重力波は、大きな ζ を持つスクイーズ状態にある可能性がある。つまり、この結果は原始重力波によるノイズが検出できる可能性を示唆している。

本稿では、座標 $(t, \vec{z})$ に存在する質量 m の粒子に対して重力波が与える影響を計算して、その分散の大きさを単純に量子揺らぎと比較して検出可能性を議論した。これを干渉計での重力波観測実験と対応付けて考えると、干渉計の鏡の位置の分散を議論したことになる。しかし、実際の実験では干渉計の中を移動する光の光路差を考える必要があり、実験と正確に対応した理論はまた別に必要となる。

5 Conclusion

今回、Feynman-Vernon influence action を用いて重力波が質点系に与える影響を評価した。計算の結果、十分スクイージングされた重力波、すなわち原始重力波によるノイズが検出できる可能性が示唆された。

Acknowledgement

研究発表の場を設けていただいた夏の学校スタッフの皆様、ご支援いただいた全ての関係者の皆様に心より感謝申し上げます。また、お忙しい中議論や助言をしてくださった研究室の皆さまにもこの場を借りて心より感謝申し上げます。

Reference

1. H. T. Cho, B. L. Hu, Phys. Rev. D 105, 086004, 2022

———index へ戻る

重宇 a13

原始宇宙磁場によって生成される原始重力波のスペクトル

向野 杏

原始宇宙磁場存在下に生成される原始重力波のスペクトル

向野　杏 (神戸大学大学院 理学研究科)

Abstract

将来の原始重力波探査を考える上で、環境による原始重力波の変化を知ることは非常に重要である。 近年のガンマ線観測により、現在の宇宙には 10^{-17} ガウスから 10^{-9} ガウス程度の大きさで、コヒーレンス長がメガパーセクを超える磁場の存在が示唆されている。磁場の構造のスケールはおおよそ磁場を発する物体の大きさに比例するため、このような大スケールの磁場を生成する機構としては、インフレーションに関わるものが有力であると思われる。

もしインフレーション期に背景磁場が存在した場合、重力波と電磁場の間には背景磁場を介した相互作用 (graviton-photon conversion) が生じると考えられる。そこで本研究では、背景磁場存在下における原始重力波のスペクトルを計算した。その結果、背景磁場により誘導されるタキオニック不安定性により、特有のピークが現れることを確認した。

1 Graviton-photon interaction in the early universe

インフレーション中に背景磁場が存在するモデルとして、インフラトンと U(1) ゲージ場がカップルしている以下の作用を考える。

$$
\begin{aligned}
S &= S_g + S_\phi + S_A \\
&= \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{M_{\rm pl}^2}{2}R - \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - V(\phi)\right. \\
&\left. -\frac{1}{4}f^2(\phi)F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right], \qquad (1)
\end{aligned}
$$

ここで、$M_{\rm pl} = 1/\sqrt{8\pi G}$ である。ゲージ場 A_μ はフォトンであり、$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ である。また、インフラトント U(1) ゲージ場の相互作用関数 $f[\phi(\eta)]$ について、

$$
f(\eta) = a(\eta)^{-2c}, \qquad (2)
$$

であると仮定する。ただし c は定数パラメータである。背景磁場を $B_m = \varepsilon_{mj\ell}\,\partial_j A_\ell = \text{constant}$ であると仮定する。ただし、物理的な磁場は B ではなく、fB であることに注意する。本研究では、$c = -1/2$ を仮定する。また、背景時空は一様等方であると仮定する。

$$
ds^2 = a^2(\eta)\left[-d\eta^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j\right], \qquad (3)
$$

運動方程式は、正準変数である $y_{\boldsymbol{k}}(\eta) = a\,h_{\boldsymbol{k}}(\eta)$ 及び $x_{\boldsymbol{k}}(\eta) = f\,A_{\boldsymbol{k}}(\eta)$ を定義すると

$$
y_{\boldsymbol{k}}'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right)y_{\boldsymbol{k}} = -\lambda\,k\,f\,\frac{x_{\boldsymbol{k}}}{a}\,, \qquad (4)
$$

$$
x_{\boldsymbol{k}}'' + \left(k^2 - \frac{f''}{f}\right)x_{\boldsymbol{k}} = -\lambda\,k\,f\,\frac{y_{\boldsymbol{k}}}{a}\,. \qquad (5)
$$

である。$c = -1/2$ を反映すると

$$
y_{\boldsymbol{k}}'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right)y_{\boldsymbol{k}} = -\lambda\,k\,x_{\boldsymbol{k}}\,, \qquad (6)
$$

$$
x_{\boldsymbol{k}}'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right)x_{\boldsymbol{k}} = -\lambda\,k\,y_{\boldsymbol{k}}\,. \qquad (7)
$$

グラビトン $h_{\boldsymbol{k}}$ とフォトン $x_{\boldsymbol{k}}$ をそれぞれ

$$
h_{ij}(\eta, x^i) = \frac{2}{M_{\rm pl}}\sum_P \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\,h_{\boldsymbol{k}}^P(\eta)\,e_{ij}^P(\boldsymbol{k})\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\,, \qquad (8)
$$

$$
A_i(\eta, x^i) = \sum_P \frac{\pm i}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\,A_{\boldsymbol{k}}^P(\eta)\,e_i^P(\boldsymbol{k})\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\,, \qquad (9)
$$

と定義した。$e_i^P(\boldsymbol{k})$ は $\boldsymbol{k}$ モードに対する偏極ベクトルであり、$e^{iP}(\boldsymbol{k})e_i^Q(\boldsymbol{k}) = \delta^{PQ}$ で規格化する。$P, Q = +, \times$ である。また、 $e_{ij}^P(\boldsymbol{k})$ は $\boldsymbol{k}$ モードに対する偏極テンソルであり、$e^{ijP}(\boldsymbol{k})e_{ij}^Q(\boldsymbol{k}) = \delta^{PQ}$ で規格化する。今、ゲージ場はクーロンゲージ $A_0 = 0$ 及び $A^i{}_{,i} = 0$ をとる。偏極ベクトル e^{i+}、$e^{i\times}$ とベクトル k^i/k は直交基底を成すとする。この時、偏極テンソ

ルは

$$e_{ij}^{+}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{e_i^{+}(\boldsymbol{k})e_j^{+}(\boldsymbol{k}) - e_i^{\times}(\boldsymbol{k})e_j^{\times}(\boldsymbol{k})\right\}, \quad (10)$$

$$e_{ij}^{\times}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{e_i^{+}(\boldsymbol{k})e_j^{\times}(\boldsymbol{k}) + e_i^{\times}(\boldsymbol{k})e_j^{+}(\boldsymbol{k})\right\}. \quad (11)$$

と展開できる。また、グラビトンと光子の相互作用を表す変数として

$$\lambda \equiv \frac{\sqrt{2}}{M_{\rm pl}}\varepsilon^{i\ell m}\, e_i^{+}\, \frac{k_\ell}{k}\, B_m\,. \quad (12)$$

を定義した。

ここで新しく

$$Y_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(y_{\boldsymbol{k}} + x_{\boldsymbol{k}}\right), \quad (13)$$

$$X_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(y_{\boldsymbol{k}} - x_{\boldsymbol{k}}\right). \quad (14)$$

を定義すると式 (6),(7) は対角化できる。

$$Y_{\boldsymbol{k}}'' + \left(k^2 + \lambda k - \frac{a''}{a}\right) Y_{\boldsymbol{k}} = 0\ , \quad (15)$$

$$X_{\boldsymbol{k}}'' + \left(k^2 - \lambda k - \frac{a''}{a}\right) X_{\boldsymbol{k}} = 0\,. \quad (16)$$

2 Generation and evolution of primordial GWs

インフレーション期から瞬間的な再加熱を経て放射優勢期に移行した宇宙を考える [図 1]。

$$a(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{-H(\eta - 2\eta_1)} & \text{for} \quad \eta < \eta_1\,, \\ \frac{\eta}{H\eta_1^2} & \text{for} \quad 0 < \eta_1 < \eta\,. \end{cases} \quad (17)$$

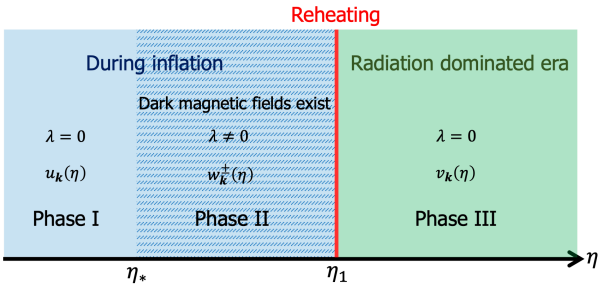


図 1: Cosmological setup

インフレーション期のある時点 η_* に相互作用が開始され λ がノンゼロの値をとり、放射優勢期は相互作用は無視できると仮定する。各 Phase における運動方程式は

(Phase I)　インフレーション期 (背景磁場なし)

$$Y_{\boldsymbol{k}}'' + \left(k^2 - \frac{2}{(\eta - 2\eta_1)^2}\right) Y_{\boldsymbol{k}} = 0\,, \quad (18)$$

$$X_{\boldsymbol{k}}'' + \left(k^2 - \frac{2}{(\eta - 2\eta_1)^2}\right) X_{\boldsymbol{k}} = 0\,. \quad (19)$$

(Phase II)　インフレーション期 (背景磁場あり)

$$Y_{\boldsymbol{k}}'' + \left(k^2 + \lambda k - \frac{2}{(\eta - 2\eta_1)^2}\right) Y_{\boldsymbol{k}} = 0\,, \quad (20)$$

$$X_{\boldsymbol{k}}'' + \left(k^2 - \lambda k - \frac{2}{(\eta - 2\eta_1)^2}\right) X_{\boldsymbol{k}} = 0\,. \quad (21)$$

(Phase III)　放射優勢期

$$Y_{\boldsymbol{k}}'' + k^2\, Y_{\boldsymbol{k}} = 0\,, \quad (22)$$

$$X_{\boldsymbol{k}}'' + k^2\, X_{\boldsymbol{k}} = 0\,. \quad (23)$$

Bogoliubov 変換を用い放射優勢期での粒子数 N を計算し、原始重力波スペクトルのエネルギー密度パラメータ Ω_g を求めた。

$$\Omega_g(f) = \frac{k^4}{2\pi^2\rho_c} N\,, \quad (24)$$

その結果を以下に示す。

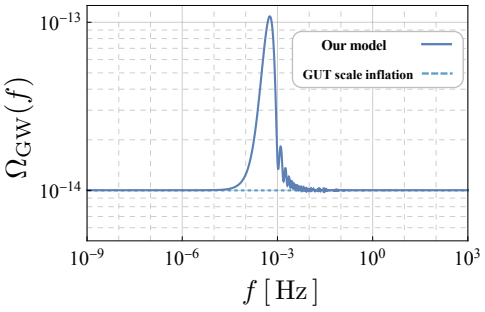


図 2: 原始重力波のスペクトル
$H = 10^{14}\,\mathrm{GeV}$, $B_0 = 2\sqrt{3}\times 10^{-16}\,\mathrm{G}$, $\eta_* = -1\,\mathrm{GeV}^{-1}$, $\eta_1 = 10^{-14}\,\mathrm{GeV}^{-1}$, $\lambda = 2\sqrt{3}\,\mathrm{GeV}$
また、GUT スケールのインフレーションが予測するスペクトル $\Omega_{\rm GW} = 10^{-14}$ がベースラインである。

3 Tachyonic instability and the PGW power spectrum

ピークの生成の原因を探るため、$X_{\boldsymbol{k}}$ と $Y_{\boldsymbol{k}}$ の運動方程式を書き直す。

$$X_{\boldsymbol{k}}'' + \left(\left(k - \frac{\lambda}{2} \right)^2 - \frac{\lambda^2}{4} - \frac{2}{(\eta - 2\eta_1)^2} \right) X_{\boldsymbol{k}} = 0 \,, \quad (25)$$

$$Y_{\boldsymbol{k}}'' + \left(\left(k + \frac{\lambda}{2} \right)^2 - \frac{\lambda^2}{4} - \frac{2}{(\eta - 2\eta_1)^2} \right) Y_{\boldsymbol{k}} = 0 \quad (26)$$

$X_{\boldsymbol{k}}$ の運動方程式では、$k \simeq 2/\lambda$ あたりで λ によるタキオニック不安定性が最も現れると考えられる。相互作用の強さは

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}B}{M_{\rm pl}} \sin\theta \,, \quad (27)$$

で与えられており、相互作用は背景磁場の大きさに比例している。$\sin\theta = 1$ と最大値で概算すると、エネルギー密度に対する相互作用の寄与は

$$\begin{aligned} \Omega_k \quad &\simeq 10^{-14} \left(\frac{H}{10^{-4} M_{pl}} \right)^2 e^{\lambda \eta_0} \\ &= 10^{-14} \left(\frac{H}{10^{-4} M_{pl}} \right)^2 \exp\left[\frac{\sqrt{2}B}{M_{\rm pl}} \eta_0 \right] \end{aligned} \quad (28)$$

オーダー評価

観測により、現在の宇宙磁場は $10^{-17}\,\mathrm{G} < B_0 < 10^{-9}\,\mathrm{G}$ であることが知られている。インフレーション後の放射の減衰速度は $T \propto 1/a$ に比例しているので、$a_0/a_{\rm reh} = T_{\rm reh}/T_0$ である。磁場の減衰速度は $B \propto 1/a^2$ に比例しているので、$B_{\rm ref}/B_0 \propto (a_0/a_{\rm reh})^2 \propto (T_{\rm reh}/T_0)^2 \sim 10^{54}$ である。最後の等式について、再加熱温度は簡単にハッブルスケールと見積り、$T_{\rm reh} = H = 10^{-4} M_{\rm pl}$ とした。また現在の宇宙の温度は $T_0 \sim 3\mathrm{K} \sim 10^{-4}$ eV であることを用いた。以上より、インフレーション後の磁場の大きさは簡単に見積もることができて

$$10^{37} \left(\frac{H}{10^{-4} M_{\rm pl}} \right)^2 \mathrm{G} < B < 10^{45} \left(\frac{H}{10^{-4} M_{\rm pl}} \right)^2 \mathrm{G} \quad (29)$$

であり、エネルギー密度に直すと

$$10^{-30} \left(\frac{H}{10^{-4} M_{pl}} \right)^2 < \frac{\rho_B}{M_{pl}^2 H^2} < 10^{-14} \left(\frac{H}{10^{-4} M_{pl}} \right)^2 \quad (30)$$

相互作用の強さは λ が最大をとる $\sin\theta = 1$ のとき

$$10^{-1} \left(\frac{H}{10^{-4} M_{pl}} \right)^2 \mathrm{GeV} < \lambda_{\rm max} < 10^{7} \left(\frac{H}{10^{-4} M_{pl}} \right)^2 \mathrm{GeV} \quad (31)$$

したがって、現在の振動数に換算すると

$$f_0 = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{a_1}{a_0} = 10^{-5} \sin\theta \left(\frac{B_0}{10^{-17}\mathrm{G}} \right) \left(\frac{H}{10^{-4} M_{pl}} \right) \ \mathrm{Hz} \,. \quad (32)$$

a_0 は現在のスケール因子、a_1 はインフレーション終了時のスケール因子で $a_1 = 1$ とおいた。磁場の値を現在の観測に合わせると、$10^{-17}\mathrm{G} < B_0 < 10^{-9}\mathrm{G}$ なので

$$10^{-5} \left(\frac{H}{10^{-4} M_{pl}} \right) \mathrm{Hz} < f_0 < 10^{3} \left(\frac{H}{10^{-4} M_{pl}} \right) \mathrm{Hz} \quad (33)$$

ピークの高さは

$$\Omega_{\rm GW}(f_{\rm peak}) = 10^{-14} \left(\frac{H}{10^{-4} M_{\rm pl}} \right)^2 \frac{1}{2} \exp\left[-\lambda \eta_* \right] \quad (34)$$

$$-\lambda_{\rm max} \eta_* = -\frac{\sqrt{2}B}{M_{\rm pl}} \eta_* = -2\sqrt{3} \frac{B/\sqrt{2}}{\sqrt{3} M_{\rm pl} H} \frac{\eta_*}{\eta_1} = 2\sqrt{3} \sqrt{\frac{\rho_{B*}}{\rho_{\rm inf}}} \,, \quad (35)$$

ピークの高さは、$\rho_{B*} \simeq \rho_{\rm inf}$ の時が最大で $\exp[-\lambda\eta_*]/2$ により 16 倍程度となる。

4 Conclusion

現在観測されている宇宙磁場がインフレーション中に存在していたと仮定すると、原始重力波のスペクトルにピークが見られる可能性があることがわかった。また、ピークの起源はグラビトン-フォトン変換によるタキオニック不安定性によるものであることがわかった。ピークの振動数は GUT インフレーションの場合、10^{-5} から 10^{3}Hz であり、将来観測できる可能性があることがわかった。

Reference

"A peak in the power spectrum of primordial gravitational waves induced by primordial magnetic fields" Sugumi Kanno, Ann Mukuno, Jiro Soda & Kazushige Ueda JCAP05(2023)052

———index へ戻る

重宇 a14

Horndeski 理論におけるブラックホール準固有振動と観測可能性

西野 翔

Horndeski 理論におけるブラックホール準固有振動と観測可能性

西野　翔 (京都大学大学院 理学研究科 M1)

Abstract

宇宙の加速膨張やダークエネルギーの起源など一般相対性理論 (GR) の問題を解決する方法として GR の修正理論が研究されている．修正重力理論には GR の比較理論としての役割もあり，ブラックホール (BH) 連星合体の最後に放射される重力波のリングダウンなどに対応する BH 準固有振動 (QNM) を用いることが考えられている．本稿では GR にスカラーの自由度を含めたスカラーテンソル理論の一種である Horndeski 理論における QNM について [2] のレビューを行う．

1 Introduction

一般相対性理論 (GR) は様々な検証実験をパスしており，現在重力の標準的な理論となっている．一方でくりこみが不可能であることや，宇宙の加速膨張を説明するダークエネルギーの起源といった問題があり，重力を修正することでこれらを解決しようとする試みが行われている．基本的な修正重力理論であるスカラー・テンソル理論は GR の計量の自由度にスカラーの自由度を加えるものであり，その中で運動方程式が 2 回微分になる一般的な理論は Horndeski 理論と呼ばれる．

修正重力理論には GR を検証する際の比較相手になるという動機もあり，検証を提供する現象としてブラックホール準固有振動 (QNM) がある．QNM とはブラックホールに摂動が与えられたときに起きる減衰振動のことであり，コンパクト連星合体などから生じる重力波では合体後の波形（リングダウン）に対応する．そのような振動数はブラックホールのパラメータに依存して離散的な値を取るが，GR では無毛定理から（電荷を持たないブラックホールを仮定すると）スピンと質量によって決定される．一方で修正重力理論では他のパラメータにも依存するため GR の QNM からズレが生じることが期待される．このような性質から複数の QNM の観測を GR の検証や修正重力理論への制限に用いることが提案されており，BH spectroscopy と呼ばれる．

本稿では [2] に基づいて，まず Schwarzshild ブラックホール上の摂動を Horndeski 理論の枠組みで解析し，GR とは異なる QNM がスカラー場の “有効質量” 新たなパラメータとして現れることを確認する．その後観測からの有効質量への制限について，Fisher Matrix 解析に基づいて議論し，必要な信号雑音比 (SNR) を推定する．

2 Horndeski 理論

Horndeski 理論とは 4 次元のスカラーテンソル重力理論であり，運動方程式が 2 階の微分方程式になるような一般的な理論である．ラグランジアンは

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\sum_{n=2}^{5} L_n, \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
L_2 &= G_2(\phi, X),\\
L_3 &= -G_3(\phi, X)\Box\phi,\\
L_4 &= G_4(\phi, X)R + G_{4X}(\phi, X)((\Box\phi)^2 - \phi^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu}),\\
L_5 &= G_5(\phi, X)G_{\mu\nu}\phi^{\mu\nu} - \frac{1}{6}G_{5X}(\phi, X)((\Box\phi)^3\\
&\quad - 3\phi^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu}\Box\phi + 2\phi_{\mu\nu}\phi^{\mu\sigma}\phi^{\nu}_{\sigma}),
\end{aligned} \tag{2}$$

で与えられる．ここで ϕ はスカラー場，$X = -\phi_\mu\phi^\mu/2 = -\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi$ は運動項，$G_{\mu\nu}$ はアインシュタインテンソル，$G_i(\phi, X)$ は ϕ と X の任意関数であり下付き添字 X は X での偏微分を表している．$G_4 = M_{Pl}^2/2$ で他の $G_i = 0$ のとき GR に一致する．

3 Schwarzschild 計量，定スカラーへの摂動

Horndeski 理論としてリッチ平坦 $R_{\mu\nu} = R = 0$ な計量 $\bar{g}_{\mu\nu}$，自明なスカラープロファイル $\phi = \phi_0 =$

const が背景解となるようなものを考える．この背景解に対し摂動を加えた

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{3}$$

$$\phi = \phi_0 + \delta\phi \tag{4}$$

を考える．摂動量 $h_{\mu\nu}, \delta\phi$ の 1 次まで考えると作用の変分から摂動場の満たす方程式は

$$G^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{G_{4\phi}}{G_4}(\nabla_\mu\nabla_\nu\delta\phi - \bar{g}_{\mu\nu}\Box\delta\phi), \tag{5}$$

$$\Box\delta\phi = \mu^2\delta\phi \tag{6}$$

となる．ここで $G^{(1)}\mu\nu$ はアインシュタインテンソルの $h_{\mu\nu}$ の 1 次の部分であり，定数

$$\mu^2 = \frac{-G_{2\phi\phi}}{G_{2X} - 2G_{3\phi} + 3G^2_{4\phi}/G_4} \tag{7}$$

は式 (6) で有効質量として振る舞う．ただし関数 G_i は背景での値 $\phi = \phi_0$ で評価している．背景計量として Schwarzshild 計量をとり，計量とスカラーの摂動を (球面) 調和関数分解する．$e^{-i\omega t}$ の時間依存を仮定すると次の方程式が成り立つ．

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}r_*^2} + \left[\omega^2 - V_{\mathrm{RW}}(r)\right]Q = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}r_*^2} + \left[\omega^2 - V_{\mathrm{Z}}(r)\right]\Psi = \frac{G_{4\phi}}{G_4}S_\varphi(\varphi,\varphi'), \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}r_*^2} + \left[\omega^2 - V_{\mathrm{S}}(r,\mu^2)\right]\varphi = 0. \tag{10}$$

ここで φ は $\delta\phi$ の動径成分

$$\delta\phi = \sum_{lm}\frac{\varphi_{lm}(r)}{r}e^{-i\omega_{lm}t}Y^{lm}$$

であり lm の添字は省略している．$Q(r), \Psi(r)$ はそれぞれ奇パリティ，偶パリティの重力の摂動に対応した関数である．$r_* = r + 2M\ln(\frac{r-2M}{2M})$ は亀座標で，$r \to 2M + 0$ が $r_* \to -\infty$ に対応する．式中のポテンシャルは

$$V_{\mathrm{RW}}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3}\right), \tag{11}$$

$$V_{\mathrm{Z}}(r) = 2\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \times \frac{\lambda^2r^2\left[(\lambda+1)r + 3M\right] + 9M^2(\lambda r + M)}{r^3(\lambda r + 3M)^2}, \tag{12}$$

$$V_{\mathrm{S}}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} + \mu^2\right) \tag{13}$$

で与えられる．ここで $\lambda = (l+2)(l-1)/2$ である．式 (9) の右辺に現れるソース S_φ は

$$S_\varphi(\varphi,\varphi') = -\frac{1 - 2M/r}{2r^2(\lambda r + 3M)^2} \times \left[\left(4M(3M + (2l(l+1) - 1)r) + 2r^3(3M + \lambda r)\mu^2\right)\varphi + 12Mr(r - 2M)\varphi'\right] \tag{14}$$

である．重力波の奇パリティ自由度 Q について，式 (8) は完全に φ と分離しており，GR の Regge Wheeleer 方程式と一致する．偶パリティ Ψ について式 (9) の左辺は GR の Zerilli 方程式に一致するが，右辺に φ によるソース項が現れている．これらの方程式 (8)-(10) に対して BH のホライゾンで内向き，無限遠で外向きに伝搬するという境界条件を課すことにより QNM 周波数 ω が得られる．ω は複素数になり，境界条件の下で減衰振動を表す．偶パリティの計量の摂動には Ψ と φ の両方が現れるため [1]，QNM の周波数としては式 (9) による GR と同じモードと式 (10) によるスカラーの新しいモードが現れる．

ここで背景解が GR での BH と同じ (Schwarzshild 計量，自明なスカラープロファイル) にも関わらず，スカラー場の摂動により GR と異なる QNM が現れることに注意する．すなわち，重力波が修正されるために，GR での無毛定理を破り GR で現れない BH を用意する必要はない．[1]

4 パラメータ推定

放射される重力波が式 (9)-(10) に従う重力とスカラーのモードのそれぞれの最も主要なモードの重ね合わせで表されると仮定する．

$$h = h_g + h_s \tag{15}$$

ノイズパワースペクトル密度 $S_h(f)$ が与えられたとき，周波数領域において波形の内積を

$$(h_1|h_2) = 2\int_0^\infty \frac{\tilde{h_1^*}\tilde{h_2} + \tilde{h_2^*}\tilde{h_1}}{S_h(f)}\mathrm{d}f \tag{16}$$

と定義する．このとき h の信号雑音比 ρ は

$$\rho^2 = (h|h) = 4\int_0^\infty \frac{\tilde{h^*}\tilde{h}}{S_h(f)}\mathrm{d}f \tag{17}$$

[1] [6] ではスカラーヘアを持つ Horndeski 理論についての QNM が調べられている．

で与えられる．また波形がパラメータ θ^a に依存するとしてフィッシャー情報行列と呼ばれる行列を

$$\Gamma_{ab} = \left(\frac{\partial h}{\partial \theta^a} \middle| \frac{\partial h}{\partial \theta^b} \right) \tag{18}$$

で定義する．フィッシャー情報行列の逆行列 $\Sigma_{ab} = \Gamma^{-1}_{ab}$ はパラメータの分散共分散行列を与え，特に対角成分はパラメータ決定における誤差評価 $\sigma_a = \sqrt{\Sigma_{aa}}$ を与える．[2] では重力とスカラーの振幅 A_g, A_s,BH 質量 M, スカラー有効質量 μ について誤差推定を行っており，特に $A_s/A_g \ll 1, l = 2, \mu = 0$ のとき

$$\rho\sigma_{\mu^2} \sim 2 \times 10^{-7} \left(\frac{A_s}{A_g} \right)^{-1} \left(\frac{M_\odot}{M} \right)^2 \mathrm{m}^{-2} \tag{19}$$

と推定している．この σ_{μ^2} をスカラー粒子の有効質量 m_s への検出可能限界と考えると観測による m_s への制限として

$$\sqrt{\rho} m_s \sim 5 \times 10^{-10} \left(\frac{A_s}{A_g} \right)^{-1/2} \left(\frac{M_\odot}{M} \right) \mathrm{eV}c^{-2} \tag{20}$$

が得られる．

図 1 は $\sqrt{\rho} m_s$ をスカラーの相対振幅 A_s/A_g と BH 質量 M で表したときのカラープロットであり，LIGO/VIRGO,LISA の感度に対応する質量レンジが上下の図に対応している．

複数のモードの重力波形を GR のテストに用いるためにはノイズを含む信号の中からそれぞれを区別できなければならず，それに必要な SNR を考える．QNM の周波数を f，減衰時間を τ とすると

$$\begin{aligned} |f_g - f_s| &> \max(\sigma_{f_g}, \sigma_{f_s}), \\ |\tau_g - \tau_s| &> \max(\sigma_{\tau_g}, \sigma_{\tau_s}) \end{aligned} \tag{21}$$

が基準となる．ここから周波数と固有時間の 2 つのモードを分解するために必要な SNR $\rho^f_{\mathrm{crit}}, \rho^\tau_{\mathrm{crit}}$ は

$$\begin{aligned} \rho^f_{\mathrm{crit}} &= \frac{\max(\rho\sigma_{f_g}, \rho\sigma_{f_s})}{|f_g - f_s|}, \\ \rho^\tau_{\mathrm{crit}} &= \frac{\max(\rho\sigma_{\tau_g}, \rho\sigma_{\tau_s})}{|\tau_g - \tau_s|} \end{aligned} \tag{22}$$

となりこれより大きい SNR が必要とされる．[2] ではこれをフィッシャー行列解析を用いて計算しておりスカラーの相対振幅 A_g/A_s を横軸として図 2 のようになる．

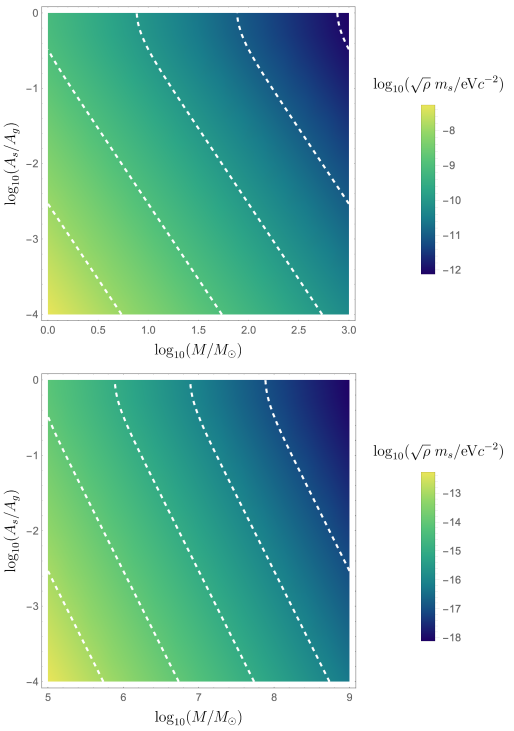


図 1: m_s をスカラーの相対振幅 A_s/A_g と BH 質量 M で表したときのカラープロット．上下はそれぞれ LIGO/VIRGO と LISA の感度に対応する質量レンジを取っている．

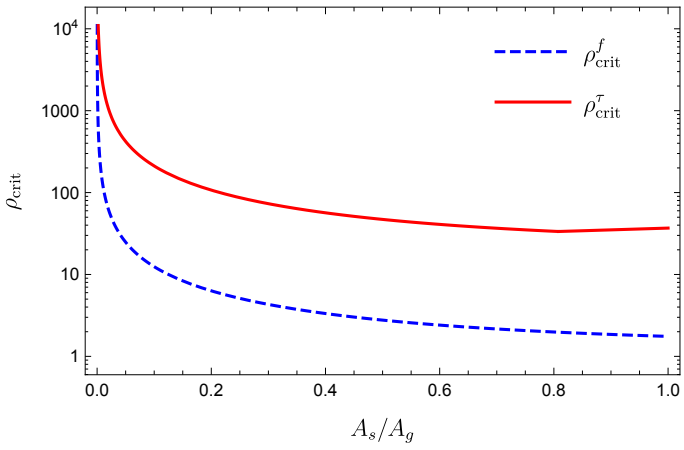


図 2: QNM の周波数，減衰時間を分解するのに必要な SNR．横軸はスカラーの相対振幅 A_g/A_s．$l = 2, \mu = 0$ を仮定．

5 Conclusion

本稿では [2] のレビューを行った．Schwarzshild 計量，定スカラーの背景解に対する摂動を考え境界条

件の下 GR とは異なる QNM が現れることを確認した．そしてリングダウン波形が重力とスカラーの主要なモードの 2 つの重ね合わせで記述されると仮定し，スカラー粒子の有効質量の推定について考えた．その際 2 つのモードが区別できる必要があるが，それに必要な SNR が式 (22) のような形で与えられ，スカラーの相対振幅 A_g/A_s の関数として図 2 のようになることを見た．具体的には $\rho \sim 10^2$ 程度の検出器の場合 $A_s/A_g \gtrsim 0.2$ 程度のスカラーモードの振幅が必要となる．

Acknowledgement

今回の論文のレビュー発表についてゼミで議論・助言してくださいました基礎物理学研究所の先輩方に感謝申し上げます．

Reference

1. Tattersall, O. J., and Ferreira, P. G. (2018). “Quasinormal modes of black holes in Horndeski gravity.” Physical Review D, 97(10), 104047.
2. Tattersall, O. J., and Ferreira, P. G. (2019). “Forecasts for low spin black hole spectroscopy in Horndeski gravity.” Physical Review D, 99(10), 104082.
3. Tattersall, O. “Testing Gravity with Black Holes.” University of Oxford, 2019.
4. Berti, E., Cardoso, V., and Will, C. M. (2006). “Gravitational-wave spectroscopy of massive black holes with the space interferometer LISA.” Physical Review D, 73(6), 064030.
5. 中野, 寛., 佐合, 紀. (2022). “重力波・摂動論.” 朝倉書店.
6. Tattersall, O. J. (2020). “Quasi-normal modes of hairy scalar tensor black holes: odd parity.” Classical and Quantum Gravity, 37(11), 115007.

————index へ戻る

重宇a15

重力波観測で探る一般相対論を超えた偏光の自由度

今福 隼斗

重力波観測で探る一般相対論を超える偏極モード

今福　隼斗 (東京大学大学院 理学系研究科物理学専攻 M1)

Abstract

一般相対論 (GR) を拡張した理論では、複数の偏極モードが考えられている。本稿では GR において重力波はどのように表されるのか、そして連星コンパクト合体 (CBC) のインスパイラルを源とした重力波において、GR を拡張した理論ではどのような補正が加わるのかを [1]、[2] に基づいて述べる。また、テンソルモードとスカラーモードに対して検証を行った先行研究 [3] で得られた結果のレビューし、将来の展望について議論する。

1　導入

一般相対論 (GR) では重力波は 2 つのテンソル自由度のみを持つ。しかし、GR 以外の重力理論において、重力波は GR の 2 つのモードに加えて新たな複数のモードが加わる。例えば、スカラーテンソル理論や f(R) 重力理論では、スカラー場を介して重力波にスカラー自由度が導入される。これらは暗黒物質やダークエネルギーを導入せずに宇宙の構造形成や加速膨張を説明する可能性があり、注目されている。より一般に、計量重力理論における重力波は最大で 6 つの偏極モードを持つ。具体的には、GR のテンソルの 2 つのモードに加え、スカラーモード、ベクトルモードがそれぞれ 2 つのモードを持つと考えられている。これらの重力理論を絞り込み新たな重力理論への足掛かりを得るために、解析的な波形を作成し観測データとの相関を取ることで、波形のパラメータに制限を与える研究が現在行われている。

一方で、コンパクト連星合体 (CBC) を源とする重力波は強重力領域の情報を豊富に含んでおり、強重力領域における GR や他の重力理論の検証の良い機会となっている。CBC は一般に、インスパイラル、合体、リングダウンの 3 つの段階から成る。インスパイラルは 2 つのコンパクト天体が準定常な円軌道を描いて運動する段階である。やがてコンパクト天体の距離が縮まり運動が速くなると、準定常な起動が保てなくなり合体の段階へと移る。最後に合体によって励起された振動が徐々に減衰し、終定常状態へと向かうリングダウンの段階となる。ここで、合体、リングダウンの段階における重力波は場の方程式が複雑であり、波形の作成が困難であることからインスパイラル時の重力波を対象とする。また、重力波は主に 3 つの過程から成る。重力波源が重力波を放射する生成過程、重力波が観測器まで伝わる伝播過程、重力波を観測データとして変換する観測過程である。本稿では、生成過程に焦点を当て、重力波源がどのように重力波を放出するのか GR を超えた枠組みで波形モデルを作成する。

したがって、以下では研究 [1] で説明されている CBC のインスパイラル時における重力波の生成過程について [2] を参考により一般的に考える。第 2 章では一般相対論における重力波、3 章では GR を拡張した理論波形、第 4 章では先行研究 [3] のレビュー、5 章では議論と今後の展望を述べる。

2　一般相対論における重力波

2.1　四重極公式

時空の計量がミンコフスキー時空の計量と微小の重力による歪みで記述できるとする弱重力場、つまり

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad |h| \ll 1 \tag{1}$$

では、ゲージ条件を課すことによりアインシュタイン方程式は

$$\Box h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \qquad \Box \equiv \nabla_\mu \nabla^\mu \tag{2}$$

となる。このとき、真空の平面波解を考えると z 軸方向に進んでいる重力波に対して、重力波の振幅は

以下のように表せる。

$$h_{ij}^{\mathrm{TT}} = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos\left[\omega_{\mathrm{gw}}(t - z/c)\right] \quad (3)$$

ここで、ω_{gw} は重力波の角振動数、TT は Transverse-Traceless ゲージ（TT ゲージ) を表している。課されたゲージ条件によりもともと 10 成分であった $h_{\mu\nu}$ の独立な成分は 2 成分となり、GR では重力波はプラスモードとクロスモードの 2 つの自由度を持つ (図 1)。また、(2) 式の一般解はグリーン関数を用いて表されるが、重力波源が非相対論的な運動をしておりニュートン力学で記述できる場合を考えると

$$[h_{ij}^{\mathrm{TT}}(t, \mathbf{x})]_{\mathrm{quad}} = \frac{1}{r}\frac{2G}{c^4}\ddot{Q}_{ij}^{\mathrm{TT}}(t - r/c) \quad (4)$$

という四重極近似解が得られる。Q_{ij} は重力波源の四重極モーメントをトレースレスにしたものを表しており、” ˙ ”は時間微分、r は重力波源の中心からの距離である。これを用いると、重力波放射によるエネルギー損失率が

$$P_{\mathrm{quad}} = \frac{G}{5c^5}\langle \dddot{Q}_{ij}\dddot{Q}^{ij}\rangle \quad (5)$$

となる。$\langle\ \ \rangle$ は考えている系の典型的な力学的時間スケールについて時間平均を取ることを示している。これが重力波輻射の四重極公式であり、重力波が単位時間あたりに運ぶエネルギーは四重極モーメントの 3 階時間微分の 2 乗に比例する。ここで、GR において重力波に単極子、双極子が存在しないのはそれぞれ質量保存則、運動量保存則からの帰結である。

2.2 インスパイラル時における重力波放射

2.1 で得られた結果を基に、CBC のインスパイラル時における重力波放射による連星系のエネルギー放射率を求める。簡単のため、連星系はニュートン力学で記述できる角振動数 ω_s、軌道半径 R の円運動をしており、重力波の進行方向が z 軸方向の場合を考える。2 つのコンパクト天体の質量をそれぞれ m_1, m_2 とし、全質量、換算質量、をそれぞれ $m = m_1 + m_2, \mu = \frac{m_1 m_2}{m}$ とする。(4) 式は次のように書ける。

$$[h_+(t;\theta,\phi)]_{\mathrm{quad}} = \frac{1}{r}\frac{4G\mu\omega_s^2 R^2}{c^4}\cos(2\omega_s(t - r/c)) \quad (6)$$

$$[h_\times(t,;\theta,\phi]_{\mathrm{quad}} = \frac{1}{r}\frac{4G\mu\omega_s^2 R^2}{c^4}\sin(2\omega_s(t - r/c)) \quad (7)$$

したがって、一般相対論では重力波の角振動数 ω_{gw} と連星系の角振動数 ω_s には $\omega_{\mathrm{gw}} = 2\omega_s$ という関係がある。(6)、(7) 式を使うことにより、インスパイラル時の重力波放射によるエネルギー放射率は

$$P_{\mathrm{quad}} = \frac{32}{5}\frac{c^5}{G}\left(\frac{GM_c\omega_{\mathrm{gw}}}{2c^3}\right)^{10/3} \quad (8)$$

となる。ここで、M_c は $M_c \equiv \mu^{3/5}m^{2/5}$ で定義されるチャープ質量と呼ばれるものであり、重力波データからの観測量である。

2.3 重力波に対する停留位相法

重力波の実データは時間の関数であるが、解析時にはフーリエ変換することによって有限の周波数空間に落とし込むことで扱いやすくなる。よって、一般に周波数の関数として波形のモデルを考える必要があり、そこで用いられるのが停留位相法である。重力波が振幅 $\mathcal{A}(t)$ と軌道位相 $\phi(t)$、重力波を多重極子展開したときの次数 $l(>0)$ を用いて

$$h(t) = \mathcal{A}(t)\left(e^{il\phi(t)} + e^{-il\phi(t)}\right) \quad (9)$$

と表せるとき、フーリエ変換は

$$\tilde{h}(f) \quad = \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{A}(t)\left(e^{il\phi(t)} + e^{-il\phi(t)}\right)e^{2\pi ift}dt \quad (10)$$

となる。ここで、$f < 0$ のときは複素共役を考えればよく、重力波は実関数で得られることから $f > 0$ を考えれば良い。インスパイラル時の波形を考えると、振幅 $\mathcal{A}(t)$ の変化が位相 $l\phi(t)$ の変化に比べて十分遅く、波形の時間変化は位相の時間変化によって決まる。このとき停留点を考えると、$\dot{\phi}(t) > 0$ より (10) 式第 1 項は停留点を持たず、常に速く振動しているため積分する際には無視できる。第 2 項は $l\dot{\phi}(t_0) = 2\pi f$ を満たす $t = t_0$ で停留点を持つ。軌道周波数を $F(t) = \dot{\phi}(t)/2\pi$ とすると $F(t_0) = f/l$ が成り立ち、$t = t_0$ の周りで展開することにより重力波は以下のように表せる。

$$\tilde{h}(f) \quad = \quad \frac{\mathcal{A}(t_0)}{\sqrt{l\dot{F}(t_0)}}e^{-i\Phi} \quad (11)$$

Φ が重力波の位相であり、

$$\Phi[F(t_0)] = 2\pi \int^{F(t_0)} \left(l\frac{F'}{\dot{F}'} - \frac{f}{\dot{F}'} \right) dF' + \frac{\pi}{4} \quad (12)$$

である。

3 GR の拡張

3.1 偏極モード

2.1 章で見た通り GR では重力波は 2 つのテンソル自由度を持つ。しかし、GR を拡張した理論では重力波は GR の 2 つに加え、ベクトルモードで 2 つ、スカラーモードで 2 つの最大で 6 つの偏極モードを持っている。

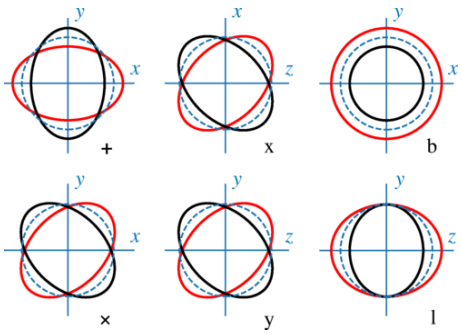


図 1: GR を拡張した理論における偏極モード [4]。左からテンソルモード (GR)、ベクトルモード、スカラーモード。重力波の進行方向は z 軸方向。破線の円が重力波が来る前の位置であり、重力波によって黒線と赤線の位置を振動する。

3.2 GR を拡張した理論波形

GR に新たな偏極モードを加えた波形を考える。連星系の運動において、エネルギー放射率は補正項を加えて以下のように修正される。

$$\begin{aligned} \dot{E} &= -\frac{32}{5}\frac{G^3}{c^5}v^2\left(\frac{m}{r}\right)^4\left[1 + B_q\left(\frac{v}{c}\right)^{2q}\right] \\ &= -\frac{32}{5}\frac{G^3}{c^5}(2\pi M_c F)^{10/3} \\ &\quad \times \left[1 + B_q\eta^{-2q/5}\left(\frac{2\pi M_c F}{c}\right)^{2q/3}\right] \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、q は理論モデルによって決まるものであり、$\frac{v}{c}$ で展開したときにどの次数から始まるのか (どの次数が主要項なのか) を表している。B_q はその定数係数である。停留位相法を用いると、重力波はフーリエ空間において重力波の周波数 f の関数として

$$\begin{aligned} \tilde{h}^{(l)}(f) &= A^{(l)}(f)e^{-i\Phi^{(l)}(f)} \\ &= A^{(l)}_{\rm GR}(f)\left(1 + \delta A^{(l)}(f)\right)e^{-i\left(\Phi^{(l)}_{\rm GR}(f) + \delta\Phi^{(l)}(f)\right)} \end{aligned} \quad (14)$$

と表せる。ここで、$A^{(l)}_{\rm GR}, \Phi^{(l)}_{\rm GR}$ はそれぞれ GR における振幅と位相である。補正項は具体的に、

$$\delta A^{(l)}(f) = -\frac{1}{2}B_q\eta^{-2q/5}\left(\frac{u_l(f)}{c}\right)^{2q} \quad (15)$$

$$\delta\Phi^{(l)} = \frac{15}{64}B_q\frac{l}{(4-q)(5-2q)}\eta^{-2q/5}\left(\frac{u_l(f)}{c}\right)^{2q-5} \quad (16)$$

となる。ここで、$u_l(f) = \left(\frac{2\pi M_c f}{l}\right)^{1/3}$ とした。3 章では [2] に基づいてインスパイラル時における、GR からの修正を加えた振幅と位相の補正項を導出した。

4 先行研究の結果

先行研究 [3] では 2 つの CBC イベント、GW170814 と GW170817 の観測データを用いてスカラーモードの検証を行っている。GW170814 は連星ブラックホール合体 (BBH)、GW170817 は連星中性子星合体 (BNS) である。重力波の偏極自由度は GR を拡張した理論では最大で 6 つあると考えられているが、重力波の同時観測が可能な検出器が 3 台であり最大で 3 つの偏極自由度しか検証できない。そのため、GR の 2 つのテンソルモードに加えてスカラーモードを考慮している。ここで、理論により考えられているスカラーモードの自由度は 2 つであるが、地上の観測器では検出する際に縮退してしまうため、スカラーモードの自由度を 1 つとしている。

テンソルモードは四重極子が主要項となるため $l = 2$、スカラーモードは四重極子と双極子が主要項となるためそれぞれ $l = 2, l = 1$ を考えれば良い。また、スカラーテンソル理論に基づいており、四重極子に対して $q = 0$、双極子に対して $q = 1$ とする。

スカラーモードの振幅パラメーターを双極子、四重極子に対してそれぞれ A_{S1}, A_{S2} とすると、エネルギー放射率は

$$\dot{E} = \dot{E}_{\rm GR}\left(1 + \frac{2}{3}A_{S2}^2 + \frac{5}{96}A_{S1}^2\eta^{2/5}u_1^{-2/3}\right) \quad (17)$$

となる。よって、振幅と位相の補正項は (18) 式、(19) 式を用いることで

$$\delta A^{(l)} = -\frac{1}{3}A_{S2}^2 - \frac{5}{192}A_{S1}^2\eta 2/5\left(\frac{u_l}{c}\right)^{-2} \quad (18)$$

$$\delta\Phi^{(l)} = \frac{l}{128}A_{S2}^2\left(\frac{u_l}{c}\right)^{-5} + \frac{5l}{14336}A_{S1}^2\eta^{2/5}\left(\frac{u_l}{c}\right)^{-7} \quad (19)$$

となる。解析によって得られた結果は、GW170814 に対して $A_{S2} = -0.13^{+0.89}_{-0.63}, A_{S1} = 0.03^{+0.37}_{-0.37}$、GW170817 に対して $A_{S2} = 0.04^{+0.60}_{-0.66}$ であった。ここで、GW170817 に対しては、別の研究で双極子に強い制限がかけられているため無視している。

5 議論と展望

先行研究 [3] では、信号雑音比 (SNR) 高い 2 つのイベントに対して検証を行った。しかし、3 台の検出器により同時観測されたイベントは多数あるため、それらの観測データに対して解析を行うことが可能である。また、得られた制限は一般相対論に矛盾しないものだが、強い制限ではない。そこで、それぞれのイベントに対して得られた結果に適切な重み付けを施して 1 つの結果を得ることで、より一般的な強い制限を得ることができる。よって、まだ研究の余地があると考える。

現在、LIGO-Virgo-KAGRA による第 4 次観測が行われている。ここで使われる検出器は 4 つであることから同時観測が行われれば、4 つの自由度に対して GR の検証を行うことができる可能性がある。さらに、将来的に同時観測可能な検出器の数が増えれば、より多くの自由度について研究するができるようになる。それらを踏まえ、多数の自由度を含んだ重力波の波形モデルの作成、パラメーターが増えることから適切な解析手法の確立などが必要になる。

Reference

1. H. Takeda et al., arXiv.2304.14430
2. K. Chatziioannou et al., Phys.Rev.D86, 022004, [Erratum: Phys.Rev.D.95, 129901 (2017)] (2012)
3. H. Takeda et al., Phys.Rev.D105, 084019 (2022)
4. S. Goyal et al., Phys.Rev.D103, 024038 (2021)

———index へ戻る

重宇a16

パルサー・タイミング・アレイによる背景重力波検出

大城 斗輝

Pulsar Timing Array による背景重力波検出

大城 斗輝 (熊本大学大学院 自然科学教育部)

Abstract

1918 年、アインシュタインは相対性理論で重力波の存在を予言した。重力波は時空間の歪みとして光速で伝搬する波であり、巨大質量の天体の運動により生じる。重力波の中でも nHz〜μHz の低周波重力波は Pulsar Timing Array(PTA) という手法を用いて検出が可能である。

PTA では周期の安定したパルスを放射するパルサーという天体を用いている。特にパルス周期が短く安定しているミリ秒パルサーからは信号が地球に到着する時刻を予測できる。しかし、地球とパルサーの間に重力波が存在すると、時空の歪みによりパルス到着時刻が変化する。その予測された到着時刻と、変化した実際の到着時刻とのずれを観測して重力波の検出を行う。この時の時刻のずれをタイミング残差と言う。

タイミング残差はパルサーの周期変化など重力波以外の要因によっても生じる可能性がある。複数のパルサーでタイミング残差の相関をとると、重力波による効果を確かめることができる。PTA が最初に検出すると言われている背景重力波は銀河中心に位置する超大質量ブラックホール連星から発する重力波を重ね合わせたものである。背景重力波の検出により、波源となるブラックホール形成について核心に迫ることが期待されている。本発表では、PTA による背景重力波の検出法を紹介し、背景重力波の証拠を得た最新の観測結果について報告する。

1 Introduction

アインシュタインによって一般相対性理論で提唱された重力波は、2015 年アメリカのレーザー干渉計重力波望遠鏡 LIGO により直接検出され、その存在が確かめられた。重力波は時空間の歪みとして光速で伝搬する波であり、巨大質量の天体の運動により生じる。波源と考えられるブラックホール連星の質量によって、さまざまな周波数の重力波が存在する。LIGO ようなレーザー干渉計型の重力波望遠鏡ではレーザーを 2 方向に分裂したのち、反射鏡を用いてそれぞれの方向から戻ってくる光の干渉強度を測定する。重力波の性質より、光の伝搬経路上の空間が歪み、それによって干渉光が強度変動することから重力波検出が可能となる。LIGO で検出された重力波の観測周波数帯は数 Hz ∼ 数 kHz となり、波源は恒星質量ブラックホール連星である。しかし、さらに質量の大きい超大質量ブラックホール連星からの重力波はブラックホールの解析のために重要な課題であるが、LIGO では検出できない周波数の重力波を放出する。そのため宇宙空間を介す天体の観測を用いた方法によって、さらに低周波な重力波の検出を目指すのが Pulsar Timing Array(PTA) という手法である。

PTA で用いるパルサーとは中性子星の一種である。パルサーは高速で自転しながら、磁極から双方向に電磁波のビームを放出している。磁極は自転軸から傾いているため、ビームが地球の方向を向いた時のみ、信号を観測することができる。自転周期と同調して、その信号はパルス周期で観測される。またパルサーの中にはミリ秒周期で回転するミリ秒パルサーと呼ばれるものがある。ミリ秒パルサーの回転周期は非常に安定しており、パルスの到着時刻が予測される。しかし、地球とパルサー間に重力波が存在すると、その間の時空が歪み、パルスの到着時刻が変化する。この到着時刻の変化をタイミング残差と呼ぶ。PTA では複数のパルサーのタイミング残差を十数年規模で観測し、重力波の検出を行う。パルサーの観測期間が長いほど、その時間に応じて数 nHz 程度の低周波重力波を観測できる。低周波重力波の発生源は超大質量ブラックホール連星である。それらは銀河中心に位置し、特に連星の軌道運動によって放射される重力波を PTA では検出する。これらの連星が遠方に位置し、多数存在するならば、地球に到達する時はそれらが重なって背景重力波を形成する。銀河の合体という宇宙の大規模構造の形成過程を起源とするので、背景重力波の検出は宇宙の進化過程に

とって重量な情報源となる。複数個のパルサーから得られたタイミング残差の相関係数は、Hellings and Downs curve に従う。本研究ではこの曲線についてレビューを行う。

2 Methods

重力波の平面波解はアインシュタイン方程式を解くと得られる。

$$h_{ab}(t,\vec{x}) = \sum_{A=+,\times}\int_{-\infty}^{\infty} df \int_{S^2} d^2\Omega h_A(f,\hat{\Omega}) \times e^{2\pi i f(t-\hat{\Omega}\cdot\vec{x})} e^A_{ab}(\hat{\Omega}) \tag{1}$$

上式は TT ゲージを踏まえた重力波解であり、f は周波数、$\hat{\Omega}$ は重力波の進行方向、e^A_{ab} は偏光テンソルである。また重力波には二つの偏光モードがあり、それぞれプラス (+) モード、クロス (×) モードと呼ばれている。偏光基底ベクトル $\hat{m}$,$\hat{l}$ を用いると以下の式となる。

$$e^+_{ab}(\hat{\Omega}) = \hat{l}_a\hat{l}_b - \hat{m}_a\hat{m}_b \tag{2}$$

$$e^\times_{ab}(\hat{\Omega}) = \hat{l}_a\hat{m}_b + \hat{m}_a\hat{l}_b \tag{3}$$

重力波が存在するとパルス周期が変化して観測されるため、その変化をパルス周期の逆数であるパルス周波数の赤方偏移として記述できる。重力波に起因する赤方偏移 z の値は、それぞれの時刻と位置における重力波を考えると、到着時刻の差、すなわち周期のずれから求めることができる。

$$\begin{aligned} z(t,\hat{\Omega}) &= \frac{1}{2}\frac{p^a p^b}{(1+\hat{\Omega}\cdot\hat{p})}[h_{ab}(t,\vec{x}_e) - h_{ab}(t',\vec{x}_{p)}] \\ &= \frac{1}{2}\frac{p^a p^b}{(1+\hat{\Omega}\cdot\hat{p})}\Delta h_{ab} \end{aligned} \tag{4}$$

(4) 式をフーリエ変換すると次式のようになる。

$$\tilde{z}(f,\hat{\Omega}) = (e^{-2\pi i f L(1+\hat{\Omega}\cdot\hat{p})} - 1)\sum_A h_A(f,\hat{\Omega})F^A(\hat{\Omega}) \tag{5}$$

ここで、$F^A(\hat{\Omega})$ は偏光 A モードの重力波アンテナのビームパターンと呼ばれるファクターで、

$$F^A(\hat{\Omega}) = \frac{1}{2}\frac{p^a p^b}{(1+\hat{\Omega}\cdot\hat{p})}e^A_{ab}(\hat{\Omega}) \tag{6}$$

また (1) 式から、地球とパルサーにおける重力波強度の差 Δh_{ab} は以下の式となる。

$$\begin{aligned} \Delta h_{ab} = \int_{-\infty}^{\infty} df [e^{2\pi i f t}(e^{-2\pi i f L(1+\hat{\Omega}\cdot\hat{p})} - 1) \\ \times \sum_A h_A(f,\hat{\Omega}) e^A_{ab}(\hat{\Omega})] \end{aligned} \tag{7}$$

同様に Δh_{ab} に対してもフーリエ変換を行うと、以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{ab}(f,\hat{\Omega}) =& (e^{-2\pi i f L(1+\hat{\Omega}\cdot\hat{p})} - 1) \\ &\times \sum_A h_A(f,\hat{\Omega}) e^A_{ab}(\hat{\Omega}) \end{aligned} \tag{8}$$

PTA で期待される重力波の信号は微弱であるが、複数の波源からの波が重なり、一つの背景重力波として観測される。本発表では背景重力波は一様な等方性を持つと仮定し、無偏光なものを考える。さらにノイズについても定常性とガウス性を仮定する。この背景重力波がパルサー間のタイミングのずれをどの程度引き起こしているかの相関を調べる。これらの統計的な相関を考えるにあたり、任意に選んだパルサーの組の角度関係を考える。複数の組み合わせを調べることにより、背景重力波に対してパルサー間角度に応じたタイミング残差の相関関係を得る。赤方偏移が重力波によって引き起こされることから、位置 $\hat{p}_i$, $\hat{p}_j$ にあるパルサーを通過する重力波を用いてパルサー間相関の期待値をとる。全天で立体角積分 $d\Omega$ することを考慮すれば、以下の計算となる。

$$\begin{aligned} &\langle \tilde{z}_i(f)\tilde{z}^*_j(f')\rangle = \int_{S^2}\int_{S'^2} d^2\hat{\Omega} d^2\hat{\Omega}' [e^{-2\pi i f L_i(1+\hat{\Omega}\cdot\hat{p}_i)} - 1] \\ &\times [e^{2\pi i f' L_j(1+\hat{\Omega}'\cdot\hat{p}_j)} - 1] \\ &\times \left\langle \sum_A h_A(f,\hat{\Omega})F^A(\hat{\Omega}) \sum_{A'} h^*_{A'}(f',\hat{\Omega}')F^{A'}(\hat{\Omega}') \right\rangle \end{aligned} \tag{9}$$

背景重力波の等方性、ノイズの定常性とガウス性と

いう仮定を考慮すると、以下のように変形できる。

$$\begin{aligned}&\langle \tilde{z}_i(f)\tilde{z}_j^*(f')\rangle \\ =&\frac{1}{2}\delta(f-f')S_h(f)\int_{S^2}\frac{d^2\hat{\Omega}}{8\pi}\kappa_{ij}(f,\hat{\Omega}) \\ &\times\sum_{A=+,\times}F_i^A(\hat{\Omega})F_j^A(\hat{\Omega})\end{aligned} \tag{10}$$

ここで κ_{ij} は以下の式である。

$$\begin{aligned}\kappa_{ij}(f,\hat{\Omega}) =&[e^{-2\pi i f L_i(1+\hat{\Omega}\cdot\hat{p}_i)}-1] \\ &\times[e^{2\pi i f' L_j(1+\hat{\Omega}\cdot\hat{p}_j)}-1]\end{aligned} \tag{11}$$

また、$S_h(f)$ は重力波のパワースペクトルである。赤方偏移の期待値 ((10) 式) の中には以下の関数が含まれていることがわかる。

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{ij}&=\int_{S^2}\frac{d^2\Omega}{4\pi}\sum_{A=+,\times}F_i^A(\hat{\Omega})F_j^A(\hat{\Omega}) \\ &=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x_{ij}+\frac{3}{2}x_{ij}\ln(x_{ij})\end{aligned} \tag{12}$$

ただし、ここでの x_{ij} は以下の式で与えられる。

$$x_{ij}=\frac{1-\cos(\xi_{ij})}{2} \tag{13}$$

この関数 (12) を Overlap Reduction Function と呼び、タイミング残差の相関関係を示す。ξ_{ij} はパルサー間の角度であり、これを軸にプロットすると、図 1 のような Hellings and Downs curve と呼ばれる曲線を描く。

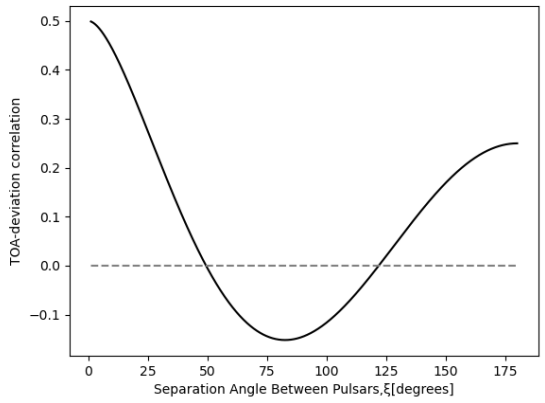


図 1: Hellings and Downs curve

重力波が起因となるタイミング残差には、パルスが予測より早く到着する場合もあれば、遅く到着することも考えられる。それぞれのパルサーの組に対してのタイミング残差の相関がこの曲線に従えば、背景重力波が検出できたと言える。

3 Report

PTA は世界各国で共同研究が行われている分野である。各国で進行しているプロジェクトは北アメリカの North American Nanohertz Observatory for Gravitational waves (NANOGrav)、ヨーロッパの European Pulsar Timing Array (EPTA)、オーストラリアの Parkes Pulsar Timing Array (PPTA)、インドと日本の Indian Pulsar Timing Array (InPTA)、中国の Chinese Pulsar Timing Array (CPTA)、さらにこれらの観測データを共有して解析を行う International Pulsar Timing Array (IPTA) がある。2023 年 6 月 29 日には背景重力波らしき証拠が得られたという報告が各国の PTA グループから発表された。そのグループの一つ、NANOGrav からは、パルサー 67 個を 15 年間観測して得られたデータによる検証が行われた。[1]NANOGrav が公表した図 2 からも見て取れるように、導出した Hellings and Downs curve にほとんど従っている。明確な重力波検出と言うためには、ノイズに対してさらに明瞭な重力波の信号を得る必要がある。今回、NANOGrav の解析では背景重力波の可能性がある信号が 3.5σ の統計的優位性で確認された。しかし、IPTA による背景重力波検出の基準は統計的優位性が 5σ 以上と設定されている。[2] 従って、検出とするためには PTA の感度向上のために長時間観測を行うことに加え、各国が収集したパルサーのデータ数を集めることによって、高度な解析を行う必要がある。そこで IPTA によってデータの統合が進められており、統合データの公開と並列して、直近で重力波の直接検出の発表が期待されている。

4 Summary

本発表では、パルサーを用いた背景重力波検出方法についてのレビューを行った。PTA はミリ秒パルサーのパルス到着時刻を計測する実験であり、重力

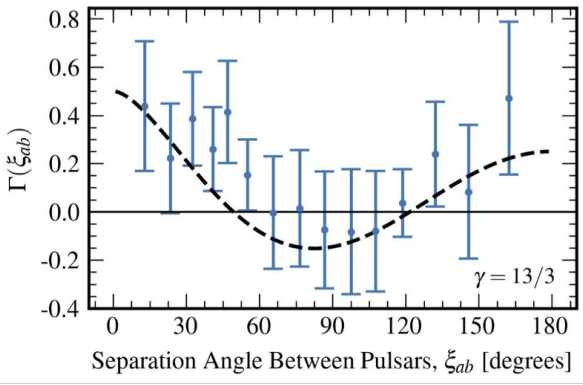


図 2: NANOGrav による Hellings and Downs curve 検証

波が関与するとパルスのタイミング残差が得られる。任意に選んだパルサー間の角度と、タイミング残差との相関を示した Hellings and Downs curve についてレビューを行った。背景重力波の統計的な性質を踏まえたこの検出方法は最新の研究でも用いられており、さらに精度の高い観測や解析を続けた結果、重力波が検出されると期待されている。

Reference

Stephen R.Taylor 2021, CRC press

[1]Agazie, G et al. 2023, the American Astronomical Society

[2]Allen, B et al. 2023, arXiv:2304.04767

———index へ戻る

重宇 a17

重力波を用いた高赤方偏移 z=6 での $M_{\rm BH} - M_{\rm halo}$ 関係の制限

古澤 和也

重力波を用いた高赤方偏移 $z = 6$ での $M_{\rm BH}$-$M_{\rm halo}$ 関係の制限

古澤 和也（名古屋大学大学院 理学研究科）

Abstract

現在観測されているほとんどの銀河は, その中心に $10^6 M_\odot$-$10^{10} M_\odot$ 程度の質量を持つ超大質量ブラックホール (SMBH) を持っており, これらは共進化してきたことが示唆されている. しかし, SMBH の形成・進化を説明するシナリオは提案されているものの解明には至っていない.

本研究では, ハローと SMBH の共進化モデルを構築し, 重力波観測による検証可能性を議論する. 具体的には, Shimasaku & Izumi (2019) の解析結果に基づき, 初期条件として $z = 6$ での $M_{\rm BH}$-$M_{\rm halo}$ 関係に観測から示唆されるべき乗則関係を課し, $0 \leq z \leq 6$ での SMBH の質量成長を計算する. このモデルでの結果は, クェーサーの観測結果とは異なる暗い領域 $M_{\rm halo} \lesssim 10^{12} M_\odot$ に対し示唆を与えることができる.

また, 実際の SMBH は合体とガス降着により質量成長していると考えられているが, このモデルは合体による成長のみを考慮するため, 質量成長の下限とみなすことができる. そして, このモデルで記述される SMBH の合体から発生する重力波を計算し, パルサータイミングアレイ (PTA) と LISA による検出可能性を議論する. 結果として, PTA から得られる確率的重力波背景放射の上限から, $z = 6$ における $M_{\rm BH}$-$M_{\rm halo}$ 関係のべき乗 n に対する制限 $n \geq 1.0$ を導出した. 一方で、LISA による重力波検出数が, $z = 6$ において SMBH を持つことができるハローの質量の最小値に対し下限を課すことがわかった. 本講演では, これらのパラメータに対する制限から, 重力波観測が将来的に SMBH の形成・進化の解明に与える影響を議論する.

1 Introduction

SMBH とそのホスト銀河の種々の特徴量（e.g. 速度分散, バルジ質量, 光度）の間には強い相関関係 (McConnell & Ma 2013) が確認されており, これらは共進化してきたことが示唆されている. しかし, SMBH の形成・成長過程については未だ解明に至っていない.

この謎に対して, 高赤方偏移での SMBH の観測および推定が大きな意味を持つ. $z = 6$ の多くの SMBH が存在する暗い領域 $M_{\rm halo} \lesssim 10^{12} M_\odot$ での質量関係を推定するために, 本研究では重力波観測の適用を議論する. 詳細は Furusawa et al. (2023) を参照.

2 理論

2.1 ハローと SMBH の共進化モデル

まず, ΛCDM 宇宙論での階層的構造形成におけるハローの成長を記述するハローマージャーツリーを構築する. 本研究では拡張 Press-Schechter 理論に基づき, バイナリーマージャー法によってマージャーツリーを作成する.

まず, $z = 0$ において Press-Schechter 理論に従い, 質量範囲 $10^{11} M_\odot h^{-1} \sim 10^{14} M_\odot h^{-1}$ の範囲で 100 個ハローを用意する. 次に, バイナリーマージャー法では以下のルールによって, ハローを過去に向かう方向に分裂させていく.

ある赤方偏移 $z = z_0$ で質量 M_0 の親ハロー 1 つを準備する. また, 質量の閾値 $M_{\rm lim}$ を定義する. 次のタイムステップの赤方偏移を $z = z_1 (> z_0)$ として, 以下のように子ハローを選び取る.

1. $M_0 \geq M_{\rm lim}$ の場合：2 つの子ハローへの分裂を考える. 1 つ目の子ハローの質量 $M_{\rm p1}$ を質量範囲 $0 < M_{\rm p1} < M_0$ から, 以下の確率

$$f(S(M_{\rm p1}), z_1 | S(M_0), z_0)\, {\rm d}(\Delta S) = \frac{\Delta \delta_c}{\sqrt{2\pi} \Delta S^{\frac{3}{2}}} \exp\Big(- \frac{\Delta \delta_c^2}{2S} \Big) {\rm d}(\Delta S) \quad (1)$$

に従って選び取り, 質量保存が成立するようにもう一方の子ハローの質量を $M_{\rm p2} = M_0 - M_{\rm p1}$ として選び取る. ここで式 (1) では, $S \equiv \sigma^2(M)$ を密度揺らぎの分散, $\delta_c = 1.69$ を球対称崩壊の閾値, $D(z)$ を $D(z = 0) = 1$ で規格化された密度揺らぎの線形成長率として $\delta_c(z) = \delta_c / D(z)$

とし, $\Delta S \equiv S(M_{\rm p1}) - S(M_0)$ および $\Delta\delta_c \equiv \delta_c(z_1) - \delta_c(z_0)$ として表している.

2. $M_0 < M_{\rm lim}$ の場合：このハローを降着質量として取り扱い, 分裂を考えず, 以降このハローの分裂の歴史を追わない.

以上の操作を各々のハローに対して $z = 0$ から $z = 6$ まで繰り返す. 結果として, $z = 6$ から $z = 0$ までのハローの合体履歴を得ることができる. 各々のタイムステップ Δz は, 計算の簡単化のため, 式 (1) が各々の赤方偏移で同じ確率になるように, 常に $\Delta\delta_c(z) = 0.02$ が成り立つように取る.

このハローマージャーツリーに付随する SMBH の合体を考慮することで, ハローと SMBH の共進化を記述することができる. 初期条件として, $z = 6$ で $M_{\rm halo} \geq M_{\rm lim}$ を満たしている各々のハローに対し, 以下のべき乗関係

$$\frac{M_{\rm BH}}{M_1} = \left(\frac{M_{\rm halo}}{M_0}\right)^n, \tag{2}$$

に従って, 中心 SMBH を 1 つずつ割り当てる. ここで $(M_0, M_1) = (3.5 \times 10^{12} M_\odot, 1.5 \times 10^9 M_\odot)$ であり, この質量関係は Shimasaku & Izumi (2019) の観測結果に整合するように与えている. $M_{\rm lim} = 3.5 \times 10^9 M_\odot h^{-1}$ に取った時, このモデルにおける $z = 6$ での初期条件と観測結果のプロットを図 1 に示す. 図 1 は, QSO による観測データが質量の重いものにバイアスしていること, 及び本モデルが暗い領域 $M_{\rm halo} \lesssim 10^{12} M_\odot$ に対して示唆を与えうることを示している.

SMBH の合体は, それらをホストするハローの合体時間から, 衛星ハロー（質量 $M_{\rm L}$）が重い方のハロー（質量 $M_{\rm H} \geq M_{\rm L}$）の中心に沈みこむまでの力学的摩擦のタイムスケール

$$t_{\rm df} = 0.731{\rm Gyr}\frac{1+P}{P\ln(1+P)} \times \left[\frac{\Omega_{\rm m}}{\Omega_{\rm m}^z}\frac{\Delta_{\rm vir}}{18\pi^2}\right]^{-\frac{1}{2}}(1+z)^{-\frac{3}{2}} \tag{3}$$

だけずれた時刻に生じると仮定する. ここで, $P = M_{\rm L}/M_{\rm H}$ は合体する 2 つのハローの質量比であり, $\Delta_{\rm vir} = 18\pi^2 + 82(\Omega_{\rm m}^z - 1) - 39(\Omega_{\rm m}^z - 1)^2$ 及び $\Omega_{\rm m}^z = \Omega_{\rm m}(1+z)^3/[\Omega_{\rm m}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda]$ である. このとき SMBH 合体としては, 軽い質量を持つハローにホストされている中心 SMBH が衛星 SMBH として, 質量の重いハローにホストされている中心 SMBH と合体する描像となる.

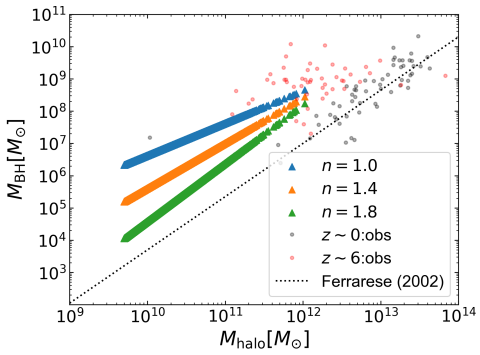


図 1: $z = 6$ での $M_{\rm BH}$-$M_{\rm halo}$ 関係のプロット（三角点）. 丸点は Shimasaku & Izumi (2019), Ferrarese (2002) による $z = 6$（赤）および $z = 0$（黒）での観測から得られた結果, 黒点線は $z = 0$ の観測結果に対する fitting を表す.

この $t_{\rm df}$ は, P の値が小さいとハローの合体時刻 $t = t_{\rm mg}$ での Hubble time を超える値を取るため, 効率良く合体しない. そこで SMBH の合体について以下の取り扱いを行う.

- $P \geq 0.3$ の場合：2 つのハローの中心 SMBH 間の SMBH 合体を考慮する. それらの合体時刻は $t = t_{\rm mg} + t_{\rm df}$ に取る. [1]
- $P < 0.3$ の場合：SMBH 合体を考慮せず, 質量の重い方のハローにホストされている SMBH を新しいハローに引き継がせる.

以上の準備・仮定の下で, $0 \leq z \leq 6$ での SMBH の合体による質量成長を計算する.

2.2 SMBH 合体からの重力波放射

第 2.1 節で構築したモデルで生じる SMBH 連星合体から放射される重力波を考える. 本研究では Enoki et al. (2004) に従い, 確率的重力波背景放射 (SGWB) と重力波バースト (GW Burst) の 2 種類の重力波を考えて計算を行い, それぞれ PTA と LISA による重力波観測可能性を議論する.

SMBH 連星がインスパイラルフェーズにおいて放射する重力波の全方向からの重ね合わせは, SGWB

[1] もしこの合体の前に質量の軽いハローにホストされている SMBH 間で合体が起こるなら, その合体を先に考慮する.

として PTA で観測される. そのシグナルの大きさは characteristic strain h_c で見積もられる. 簡単のために円軌道を仮定すると, SMBH 連星からの SGWB の大きさは以下の式によって計算される.

$$h_c^2(f) = \frac{4G^{\frac{5}{3}}}{3c^2\pi^{\frac{1}{3}}} f^{-\frac{4}{3}} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}z}{(1+z)^{\frac{1}{3}}} \times \int \mathrm{d}M_1 \mathrm{d}M_2 M_c^{\frac{5}{3}} \frac{\mathrm{d}^3 n_c}{\mathrm{d}z \mathrm{d}M_1 \mathrm{d}M_2} \theta(f_{\mathrm{ISCO}} - f) \tag{4}$$

ここで, $\mathrm{d}^3 n_c / \mathrm{d}z \mathrm{d}M_1 \mathrm{d}M_2$ は赤方偏移 $z \sim z + \mathrm{d}z$ における質量 $M_1 \sim M_1 + \mathrm{d}M_1$, $M_2 \sim M_2 + \mathrm{d}M_2$ の SMBH 連星の共動体積あたりの合体数で, 2.1 節のモデルから計算される. $\theta(f_{\mathrm{ISCO}} - f)$ はステップ関数で, インスパイラルフェーズが最内安定円軌道 (ISCO) の周波数に達するまで継続することを反映している. 式 (4) より, SMBH 由来の SGWB は以下のようにべき乗スペクトルで表現される.

$$h_c(f) = A \left(\frac{f}{1\ \mathrm{yr}^{-1}} \right)^{-2/3} \tag{5}$$

PTA の観測では, この $f = 1\mathrm{yr}^{-1} = 31.7\mathrm{nHz}$ での h_c の大きさ A に対して上限もしくは推定がなされている. 過去の最も厳しい A の上限は PPTA (2015) の $A < 1.0 \times 10^{-15}$ であり, 最新の A の推定値は NANOGrav (2023) から $A = 2.4^{+0.7}_{-0.6} \times 10^{-15}$ と与えられている.

一方, SMBH 連星がマージャー・リングダウンフェーズにおいて放射する重力波バーストは, 個々のイベントとして LISA で観測される. この段階では四重極公式による重力波の計算が適用できないので, 本研究では IMR PhenomD という現象論的なモデルを用いてバーストのフーリエ成分を計算する. このバーストが LISA での検出可能性を表す指標として, Signal-to-Noise Ratio (SNR) ρ を用いる.

$$\rho^2 = \mathrm{Re}\left(4 \int_{f_{\mathrm{min}}=10^{-5}\mathrm{Hz}}^{f_{\mathrm{max}}=1\mathrm{Hz}} \frac{\frac{4}{5} A^2(f)}{S_{\mathrm{SciRD}}(f)} \mathrm{d}f \right) \tag{6}$$

ここで, $A(f)$ はバーストの大きさで, $S_{\mathrm{SciRD}}(f)$ は LISA の感度曲線である. 本研究では, 重力波検出の SNR の閾値 ρ_{th} を $\rho_{\mathrm{th}} = 5$ に取り, これより大きい SNR を持つシグナルを検出可能と仮定する. この仮定のもとで, 赤方偏移 $z \sim z + dz$ からの LISA によるバーストの年間検出数は,

$$\frac{\mathrm{d}N_{\mathrm{mgr}}}{\mathrm{d}z} dz = 4\pi d^2(z) c \mathrm{d}z \times \int \mathrm{d}M_1 \mathrm{d}M_2 \frac{\mathrm{d}^3 n_c}{\mathrm{d}z \mathrm{d}M_1 \mathrm{d}M_2} \theta(\rho - \rho_{\mathrm{th}}) \tag{7}$$

と計算される. ここで, $d(z)$ は赤方偏移 z までの共動距離である.

3 Results

このモデルでの計算結果は $z = 6$ での M_{BH}-M_{halo} 関係を決めるパラメータ n, M_{lim} によって特徴付けられる. 質量関係のべき乗 n は SMBH の成長, SMBH を持つハローの最低質量 M_{lim} は SMBH の形成に関連するパラメータである. これらのパラメータに関して重力波検出可能性が与える制限を議論する.

3.1 確率的重力波背景放射 (SGWB)

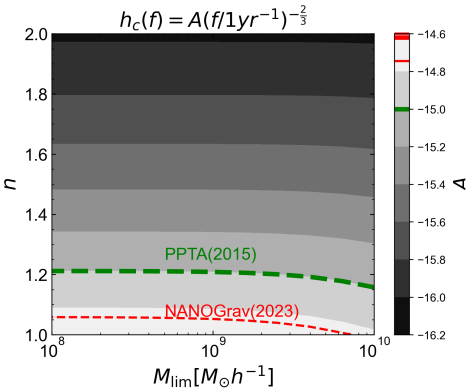


図 2: $f = 1\mathrm{yr}^{-1}$ での SGWB の大きさ A の n-M_{lim} 平面での等高線プロット. 各破線 (緑・赤) はそれぞれ PPTA (2015), NANOGrav (2023) の観測から得られた上限を表す.

n と M_{lim} を変化させた時の $f = 1\mathrm{yr}^{-1}$ での SGWB の大きさの理論的予測と PTA の観測からの制限の比較を図 2 に示した. PTA 帯では $0 \leq z \leq 1$ および $10^7 M_\odot \leq M_{\mathrm{tot}}$ 程度の総質量 $M_{\mathrm{tot}} = M_1 + M_2$ を持った SMBH 連星が SGWB の大きさに主要な寄与を与える. $z = 6$ での質量関係 (2) のべき乗 n を大きくすると SMBH の質量が小さくなる. そのため $0 \leq z \leq 1$ で $10^7 M_\odot \leq M_{\mathrm{tot}}$ となる SMBH 連星の数が減り, PTA の周波数帯における SGWB の大きさは小さくなる. 一方で, M_{lim} を変化させて増える SMBH 連星は $M_{\mathrm{tot}} \leq 10^7 M_\odot$ であり, PTA 帯で主要な寄与を与えないため, SGWB の M_{lim} に関する依存性は強くないことが確認できる.

これに加えて, このモデルはガス降着を含んでないため, 保守的な結果を与えることに注意する. そのため, PTA からの制限を上回るような SGWB を与える n を除外することができる. PPTA (2015) による上限を採用すると, $n \geq 1.2$ に制限することができる. 一方で, 最新の NANOGrav (2023) による結果からは $n \geq 1.0$ が得られる.

3.2 重力波バースト検出数

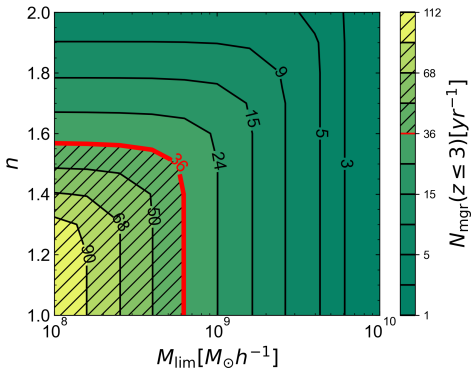


図 3: LISA による $z \leq 3$ からのバースト重力波の年間検出数 $N_{\rm mgr}(z \leq 3)$ の n-$M_{\rm lim}$ 平面における等高線プロット. 赤太線は LISA による将来検出で年間 36 回検出した場合, 禁制される領域の境界線を表す.

n と $M_{\rm lim}$ を変化させた時の LISA による重力波バーストの年間検出数の変化を図 3 に示した. このモデルは $0 \leq z \leq 6$ の範囲で計算を行っているため, $z \geq 6$ からのシグナルを取り除くため, $z \leq 3$ からのシグナルのみを考慮している. LISA の周波数帯では, $10^4 M_\odot \leq M_{\rm tot} \leq 10^8 M_\odot$ の SMBH 連星合体が主要な寄与を与える. また, ΛCDM モデルでは, 質量の小さいハローの数がより多数を占めている. したがって, $M_{\rm lim}$ を小さくすると SMBH 合体の数が増えるため, 総検出数が増加する. 一方で n を小さくすると, SMBH の質量が増加し, 質量の小さいハローに入っていた SMBH からの重力波が LISA で検出されるようになるため, 総検出数は増加する.

もしガス降着を考慮すると, n を変化させた時と同様に SMBH の質量が増加することで, バーストの年間検出数は増加すると考えられる. したがって, 将来的に LISA の検出数が得られた時（図 3 の場合, $N_{\rm mgr} = 36$）, それを上回る検出数を予言するパラメータ領域を制限することができる（図 3 の場合, 黒の斜線部分）. すなわち, n と $M_{\rm lim}$ に対して制限を与えることができる.

4 Conclusion

本研究ではハローと SMBH の共進化モデルを構築し, SMBH の合体に付随する重力波の検出可能性から, 高赤方偏移 $z = 6$ での $M_{\rm BH}$-$M_{\rm halo}$ 関係に対して制限を与える可能性を議論した. 本研究ではこの質量関係として単純なべき乗関係 (2) を仮定し, それは n と SMBH を持つハローの最低質量 $M_{\rm lim}$ によって特徴付けられる.

本モデルでは SMBH の合体のみによる質量成長を考えているため, 保守的な結果を与える. 結果として, PTA の観測から $z = 6$ での質量関係のべき乗 n を制限することができることがわかった. また, 合体間のガス降着による質量成長を新たに考慮すれば, 将来 PTA 観測からこの n を特定することができると考えられる. 一方で, LISA による将来観測からは, 各々の n に対する $M_{\rm lim}$ の下限が与えられることがわかった.

結論として, 重力波観測は, 高赤方偏移のクェーサーによる観測では推定できない暗い領域の SMBH に対して制約を課すことができる. この制約を通じて, $z \geq 6$ での SMBH の形成過程, および $z \leq 6$ での SMBH の成長過程に対して新たな示唆を与えうる.

Acknowledgement

ご指導していただいた崇城大学・田代寛之准教授, 名古屋大学・横山修一郎助教, 同・市來淨與准教授に心より感謝申し上げます. また, 夏の学校参加に際して, 面倒を見ていただいた先輩方・同期の皆様にも感謝申し上げます.

Reference

N.J. McConnell & C.P. Ma, ApJ, 764, 184, 2013.

K. Shimasaku, & T. Izumi, ApJL, 872, L29, 2019.

L. Ferrarese, ApJ, 578, 1, 90, 2002.

M. Enoki et al., ApJ, 615, 1, 9, 2004.

K. Furusawa et al., arxiv:2306.16281, 2023.

———index へ戻る

重宇 a18

Lite BIRD、CMB-S4 の観測によるパラメータへの制限可能性

三輪 拓真

Lite BIRD,CMB-S4 の観測によるパラメータへの制限可能性

三輪 拓真 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

本発表は [1] についてのレビューである。

インフレーション理論は標準ビッグバン理論が抱える初期条件の問題点を解決できる。また、インフレーションの存在は CMB の観測結果からも支持されている。宇宙はインフレーション後、再加熱期を経る。再加熱期は、インフレーションを引き起こすスカラー場のエネルギーから標準模型粒子を生成する過程である。しかし、再加熱の機構については終了時の温度などに不定性がある。

本研究の目的は、Lite BIRD、CMB-S4 などの次世代 CMB 観測から、注目するモデルでの、再加熱終了時の温度などの制限可能性を考えることである。本研究ではインフレーションが単一のスカラー場によって描けるスローロールインフレーションモデルの一つである、mutated hilltop inflation というモデルに着目する。まず、モデルパラメータと CMB 観測量の関係を調べた。そして、前述の次世代観測を想定した擬似データを作成し、マルコフ連鎖モンテカルロ法によってモデルパラメータを推定した。それによって、Lite BIRD と CMB-S4 が再加熱温度などを制限できることが分かった。これによって、素粒子標準模型について新たな知見を得ることが期待できる。

1 Introduction

インフレーション理論は現在の宇宙の等方性、均質性を説明する最も有力な説であり、さまざまなモデルが考えられている。しかし、現在の観測ではその中から明確に一つを選び出すことはできない。

本研究では Mutated hilltop inflation というスローロールインフレーションモデルのうちの一つに着目し、Lite BIRD、CMB-S4 などの次世代 CMB 観測から、インフレーションや再加熱のパラメータについての情報が得られる可能性を探ることを目的としている。Lite BIRD とは 2020 年代後半の打ち上げを目指す人工衛星である。CMB-S4 は 2020 年代後半 2023 年代初頭に観測開始を目指している地上観測実験である。どちらも原始重力波によって CMB に残された B モード偏光を測定することを目標としたものであり、スカラーテンソル比に対して $\sigma_r \sim 1.0 \times 10^{-3}$ の感度が期待されている。

2 general formalism

再加熱中のインフラトン φ は以下の運動方程式に従う。

$$\ddot{\varphi} + (3H + \Gamma)\dot{\varphi} + \partial_\varphi \nu(\varphi) = 0 \tag{1}$$

ここで $\nu(\varphi)$ は有効ポテンシャル、Γ は φ に対する有効減衰率、$H \equiv \dot{a}/a$ はハッブルパラメータである。状態方程式 $w > -1/3$ よりも大きくなるとインフレーションは終わり宇宙は加速膨張を止める。ここではインフレーションの終了 (再加熱の開始) をスローロールパラメータ

$$\epsilon = \frac{M_{pl}^2}{2}\left(\frac{\partial_\varphi \nu}{\nu}\right)^2 \quad , \quad \eta = M_{pl}^2 \frac{\partial_\varphi^2 \nu}{\nu} \tag{2}$$

を用いて、$\epsilon|_{\varphi_{\rm end}} = 1$ で定義する。また、再加熱は状態方程式 $w = 1/3$ となり、宇宙が放射優勢となった時に終了する。この瞬間は近似的に $\Gamma = H$ の瞬間と一致し、本研究では $\Gamma = H$ を用いて再加熱の終了を定義する。

再加熱期の平均状態方程式は

$$\bar{w}_{\rm re} = \frac{1}{N_{\rm re}} \int_0^{N_{\rm re}} w(N) dN \tag{3}$$

$N_{\rm re}$ は再加熱期の長さを表す e-folds であり

$$N_{\rm re} = \frac{4}{3\bar{\omega}_{re} - 1}\left[N_k + \ln\left(\frac{k}{a_0 T_0}\right) + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{40}{\pi^2 g_*}\right) + \frac{1}{3}\ln\left(\frac{11 g_{s*}}{43}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\pi^2 M_{pl}^2 r A_s}{2\sqrt{\nu_{\rm end}}}\right)\right] \tag{4}$$

となる。[2]$M_{pl} = 2.453 \times 10^{18}$GeV はプランク質量、$A_s$ はパワースペクトルの振幅、g_* と g_{s*} はそれぞれプラズマのエネルギー密度とエントロピー密度に寄与する有効自由度であり、本研究では $g_* = g_{s*} = 10^2$ とする。
また、波数 k の摂動がホライゾンを越えてから、インフレーションの終わりまでの e-folds は

$$\begin{aligned} N_k = \ln\left(\frac{a_{\rm end}}{a_k}\right) &= \int_{\varphi_k}^{\varphi_{\rm end}} \frac{H d\varphi}{\dot{\varphi}} \\ &\approx \frac{1}{M_{pl}^2}\int_{\varphi_{\rm end}}^{\varphi_k} d\varphi \frac{\nu}{\partial_\varphi \nu} \end{aligned} \tag{5}$$

となる。a_0 は現在のスケールファクター、$T_0 = 2.725$K は現在の CMB の温度である。ここで、波数 k の摂動がホライゾンを越える瞬間の $H, \varphi, \epsilon, \eta$ のそれぞれの値を示す、$H_k, \varphi_k, \epsilon_k, \eta_k$ を導入する。これらを用いると、スペクトル指数とスカラーテンソル比はそれぞれ

$$n_s = 1 - 6\epsilon_k + 2\eta_k \quad r = 16\epsilon_k \tag{6}$$

と表せる。また、スローロール近似より、フリードマン方程式は

$$H_k^2 = \frac{\nu(\varphi_k)}{3M_{pl}} = \pi^2 M_{pl}^2 \frac{rA_s}{2} \tag{7}$$

と書き直せる。本研究で扱う観測量は $\{n_s, A_s, r\}$ である。(6) より

$$\epsilon_k = \frac{r}{16}, \quad \eta_k = \frac{n_s - 1 + 3/8r}{2} \tag{8}$$

となり (2) と組み合わせることで

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial_\varphi \nu(\varphi)}{\nu(\varphi)}\right|_{\varphi_k} &= \sqrt{\frac{r}{8M_{pl}^2}} \\ \left.\frac{\partial_\varphi^2 \nu(\varphi)}{\nu(\varphi)}\right|_{\varphi_k} &= \frac{n_s - 1 + 3/8r}{2M_{pl}^2} \end{aligned} \tag{9}$$

3 再加熱温度の制限

$N_{\rm re}$ と $\bar{w}_{\rm re}$ を用いると再加熱終了時のエネルギー密度 $\rho_{\rm re}$ は

$$\rho_{\rm re} = \rho_{\rm end} \exp\left(-3N_{\rm re}(1 + \bar{w}_{\rm re})\right) \tag{10}$$

と書けるので、フリードマン方程式に代入して

$$H^2 = \frac{\rho_{\rm end}}{3M_{pl}^2} e^{-3N_{\rm re}(1+\bar{w}_{\rm re})} \tag{11}$$

となる。また、$\rho_{\rm end}$ はインフレーションのモデルのパラメータによって

$$\rho_{\rm end} \sim \frac{4}{3}\nu_{\rm end} \tag{12}$$

と決められる。$\nu_{\rm end}$ はインフレーション終了時のポテンシャルである。また、$\rho_{\rm re}$ は再加熱終了時の温度でも定義されており

$$\frac{\pi^2 g_*}{30} T_{\rm re}^4 \equiv \rho_{\rm re} \tag{13}$$

(11),(12),(13) より $T_{\rm re}$ の表式が得られ

$$T_{\rm re} = \exp\left[-\frac{3(1+\bar{w}_{\rm re})}{4} N_{\rm re}\right] \left(\frac{40\nu_{\rm end}}{g_*\pi^2}\right)^{1/4} \tag{14}$$

また、(11),(13) より $T_{\rm re}$ の表式がもう一つ得られ

$$T_{\rm re} = \sqrt{\Gamma M_{pl}} \left(\frac{90}{\pi^2 g_*}\right)^{1/4}\Bigg|_{\Gamma = H} \tag{15}$$

ここで、$T_{\rm re}$ に対してはビッグバン核合成 (BBN) と銀河系媒質中の軽元素の存在量から下限が設けられており、

$$T_{\rm re} > T_{\rm BBN} = 10{\rm MeV} \tag{16}$$

4 結合定数の制限

この章では $N_{\rm re}$ と $\boldsymbol{g}$ を式的に繋げることで $N_{\rm re}$ の情報から $\boldsymbol{g}$ の制約を得ることを目指す。

$$H^2 = \frac{\rho_{\rm end}}{3M_{pl}^2} e^{-3N_{\rm re}(1+\bar{w}_{\rm re})} \tag{17}$$

また $\Gamma = H$ で再加熱の終了を定義したので、

$$\Gamma|_{\Gamma=H} = \frac{1}{M_{pl}} \left(\frac{\rho_{\rm end}}{3}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{3}{2}(1+\bar{w}_{\rm re})N_{\rm re}} \tag{18}$$

と書ける。また素粒子崩壊による再加熱の場合 Γ は

$$\Gamma = \boldsymbol{g}^2 m_\phi / \# \tag{19}$$

$\boldsymbol{g}$ はインフラトンと他の場との結合定数、m_ϕ はインフラトン質量、$\#$ は定数である。しかし、一般的にはフィードバック効果によって Γ に対して、$\boldsymbol{g}$、m_ϕ 以外に、非摂動論的粒子生成によってできる粒子への依存性がある。そのため Γ をこのような簡単な形で書くことはできず、CMB データから $\boldsymbol{g}$ を決定することができない。このフィードバック効果はイン

フラトンの自己相互作用が十分に小さい時に無視できるため、まず、$\nu(\varphi)$ を $\varphi = 0$ 周りでテイラー展開する。

$$\nu(\varphi) = \frac{1}{2}m_\phi^2\varphi^2 + \frac{g_\phi}{3!}\varphi^3 + \frac{\lambda_\phi}{4!}\varphi^4 + O\left[\varphi^5\right] \quad (20)$$

ここで、g_ϕ に対して $\tilde{g}_\phi = g_\phi/m_\phi$ の無次元定数を導入する。フィードバック効果を無視できる条件は

$$\lambda_\phi \ll 8\left(\frac{m_\phi}{\varphi_{\rm end}}\right)^2 \quad , \quad \lambda_\phi \ll 5.5\left(\frac{m_\phi}{\varphi_{\rm end}}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{m_\phi}{M_{pl}}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\tilde{g}_\phi \ll \frac{1}{2}\frac{m_\phi}{\varphi_{\rm end}} \quad , \quad \tilde{g}_\phi \ll 0.34\left(\frac{m_\phi}{\varphi_{\rm end}}\frac{m_\phi}{M_{pl}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (21)$$

インフレーションのポテンシャルが $|\varphi|$ が十分に大きい領域でほとんど変化しない plateau-type inflation ではこの条件をパラメーターを用いて

$$|\boldsymbol{v}_j| \ll \left(3\pi^2 r A_s\right)^{(j-2)/2} \quad , |\boldsymbol{g}| \ll \left(3\pi^2 r A_s\right)^{j/2} \quad (22)$$

と推定できる。$\boldsymbol{v}_j$ はインフラトンの自己相互作用を表し、指数の j は与えられた相互作用項の Φ の指数を表す。この条件は (19) を成り立たせるための条件であり、この条件が満たされない範囲でも (13) から $T_{\rm re}$ の制約を得られることには注意する必要がある。また、(21) の条件から $\varphi_{\rm end}$ でインフラトンのポテンシャルは対称となり、場の振動は調和的になるので、再加熱の平均状態方程式は

$$\bar{w}_{\rm re} = 0 \quad (23)$$

となる。今回は湯川結合を仮定し、$\boldsymbol{g} = y$、$\# = 8\pi$ とする。よって、

$$\Gamma = \frac{y^2 m_\phi}{8\pi} \quad (24)$$

(24) を (18) に代入し y について解くことで、$N_{\rm re}$ の情報から、y についての制約を得ることができる。

5 Mutated hilltop inflation model

Mutated hilltop inflation model(MHI) のポテンシャルは

$$\nu(\varphi) = M^4\left[1 - \frac{1}{\cosh\left(\alpha\varphi/M_{pl}\right)}\right] \quad (25)$$

M はポテンシャルのエネルギースケール、α は無次元パラメータであるり、この α は再加熱が起きるインフラトンの谷の幅を決定する。MHI のポテンシャルは $|\varphi|$ が大きくなるにつれ平坦になり、$\varphi = 0$ で最小値を持つ (図) のような概形をしている。

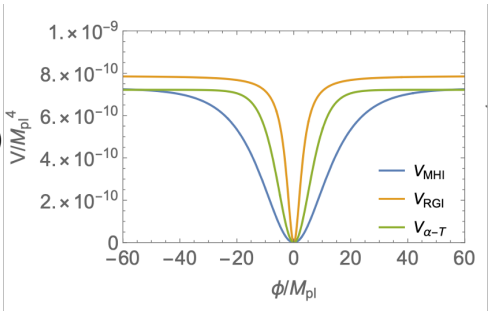


図 1: ポテンシャルの概形 [1]

$\epsilon|_{\varphi_{\rm end}} = 1$ より

$$\varphi_{\rm end} = \alpha M_{pl}\,{\rm arccosh}\frac{3\times 2^{2/3} + 2^{1/3}{\rm b}^{2/3} + 2{\rm b}^{1/3}\alpha + 2^{5/3}\alpha^2}{6\alpha{\rm b}^{1/3}} \quad (26)$$

$b = 3\sqrt{6}a + 36\alpha + 4\alpha^3$、$a = \sqrt{4\alpha^4 + 22\alpha^2 - 1}$ である。また、(25) のポテンシャルを $\varphi = 0$ 周りでテイラー展開したものと (20) の係数比較から、

$$m_\phi = \frac{M^2}{\alpha M_{pl}}, \quad g_\phi = 0, \quad \lambda_\phi = -\frac{5M^4}{(\alpha M_{pl})^4} \quad (27)$$

また (7) より

$$M = M_{pl}\sqrt[4]{\frac{3\pi^2 r A_s}{2\left[1 - 1/\cosh\left(\varphi_k/\mu\right)\right]}} \quad (28)$$

6 Results

(φ_k, α) を $\{r, n_s\}$ で表す二つの方程式 (9) の解析的な解は見つからない。ここでは、$\{r, n_s\}$ の観測的に許される範囲内かつ、(21) の条件を満たす α に対して一意的であることを数値的に探した。これによって、α を $\{r, n_s\}$ で数値的に表し、(28) より M を決定できる。また、(4),(5),(23) から $N_{\rm re}$,N_k を決定できる。決定された $N_{\rm re}$ から、(14) によって再加熱温度 $T_{\rm re}$ を決定できる。最後に (17),(18) から湯川結合の結合定数 y を決定することができる。したがって原理的には、$\{n_s, r, A_s\}$ の測定から、ポテンシャルのエネルギースケール M、再加熱が起きるインフラトンの谷の幅を決定する α、湯川結合の結合定数 y、再加熱期終了時の宇宙の温度 $T_{\rm re}$ を求めることができる。(図 2) は様々な α でのそれぞれの n_s 依存性を示すグラフである。

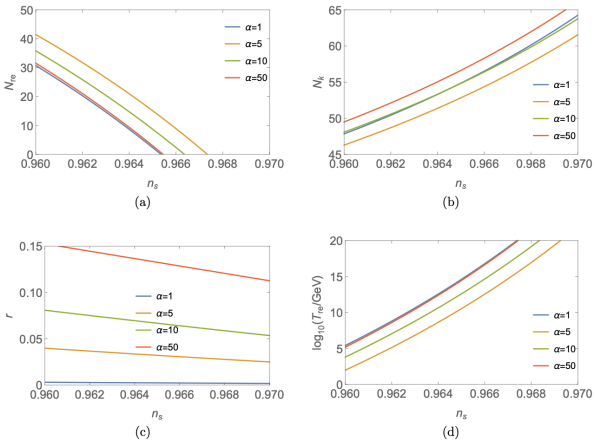


図 2: n_s 依存性 [1]$\alpha = 1, 5, 10, 50$ での $N_{\rm re}$,N_k,r,$T_{\rm re}$ の n_s 依存性を示すグラフ

LiteBIRD、CMB-S4 で制限されるであろう $\{r, n_s\}$ の範囲は、(図 3) のように、現在の観測でわかっている範囲よりも小さくなる。これによって、さまざまなパラメータに対して、より良い制限が期待できる。

7 Conclusion

今回は CMB 観測データ $\{n_s, A_s, r\}$ とポテンシャルのエネルギースケール M、再加熱が起きるインフラトンの谷の幅を決定する α、湯川結合の結合定数 y、再加熱期終了時の宇宙の温度 $T_{\rm re}$ などの量の間の依存関係について調査した。$\{r, n_s\}$ の範囲によって様々なパラメータに制限を設けることができるということが分かった。

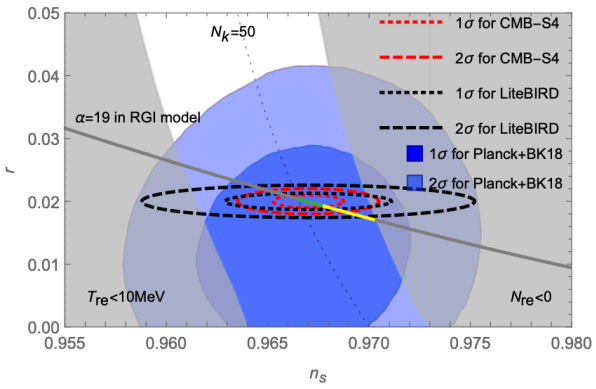


図 3: $n_s - r$ 平面図 [1] 青色の円盤は Planck+BICEP/Keck の 2018 年のデータから得られたもので、濃い青色が $1\sigma(68\%)$ の信頼領域、薄い青色が $2\sigma(95\%)$ の信頼領域を示す。LiteBIRD,CMB-S4 の信頼領域はモンテカルロ・マルコフ連鎖（MCMC）エンジン MONTEPYTHON を用いて得られたものである。

Acknowledgement

今回の発表の準備において、多くのアドバイスをしていただいた名古屋大学 C 研究室の皆様、並びに発表の場を用意していただいた夏の学校運営の皆様に感謝申し上げます。

Reference

[1] Marco Drewes, Lei Ming, & Isabel Oldengott 2023, arXiv:2303.13503

[2] Marco Drewes, Jin U Kang, & Ui Ri Mun 2017, JHEP 11 (2017) 072

———index へ戻る

重宇 a19

銀河赤方偏移サーベイ BOSS のバイスペクトルを用いた複数場インフレーションモデルの制限

中野 新太朗

銀河赤方偏移サーベイ BOSS のバイスペクトルを用いた複数場インフレーションモデルの制限

中野 新太朗 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

インフレーションが生む原始揺らぎの非 Gauss 性は、数多く存在するモデルを峻別する指針となる。これは、局所的原始非 Gauss 性（LPNG）の検出は整合性関係より単一場モデルは直ちに棄却されるからである。Cabass らは BOSS の赤方偏移空間における銀河クラスタリングのデータを用いて $f_{\rm NL}^{\rm local}$ に対し制限をかけた (Cabass 2022)。解析において LPNG 由来の項も含む全ての 1-loop パワースペクトルを用い、$f_{\rm NL} = -33 \pm 28$ (68%C.L.) という制限が得られた。さらにバイスペクトルも含めると $-88 < f_{\rm NL}^{\rm local} < 23$ (95%C.L.) となった。含めないときと比べ約 20% 制限を強めることができたが、原始非 Gauss 性を検出したと言える証拠とはならなかった。

1 局所的原始非 Gauss 性

星や銀河、大規模構造から私達の存在まで、現在の宇宙に見られる多様な構造は、インフレーション理論が予言する原始揺らぎ ϕ に起因すると考えられている。インフレーション理論は非常に多くのモデルが考案されており、何かモデルを峻別するための指針が必要である。宇宙マイクロ波背景放射などの観測結果から、この原始揺らぎは非常に Gaussian に近いことが分かっている。しかし、それは厳密に成り立つわけではなく、僅かな非 Gauss 性があるとされている。Gaussian からのズレを表す**局所的非 Gauss 性（local primodial non-Gaussianity; LPNG）**は次式のように導入される：

$$\phi = \phi_{\rm G} + f_{\rm NL}^{\rm local}(\phi_{\rm G}^2 - \langle\phi_{\rm G}^2\rangle) + \mathcal{O}(\phi_{\rm G}^3) \tag{1}$$

ただし、$\phi_{\rm G}$ は Gauss 分布に従う場である。インフレーションを一つの場が起こす単一場モデルは整合性関係から $\mathcal{O}(1)$ 以上の揺らぎを作り出せない。一方で、インフレーションに関わる場が 2 つ以上ある複数場モデルには $\mathcal{O}(1)$ の揺らぎから $\mathcal{O}(10^3)$ 程度の揺らぎまで作れるものもある。すなわち、観測によって $\mathcal{O}(1)$ 以上の $f_{\rm NL}^{\rm local}$ が見つかれば、直ちに単一場モデルを棄却することができるのである。さらに、その得られた値によって数ある複数場モデルの中からより相応しいものを選ぶことができる。

2 理論

原始揺らぎの性質は長い宇宙の歴史を経て現在の銀河分布に引き継がれているが、観測データからその情報を引き出すことは容易ではない。ここでは、原始揺らぎから観測から得られる統計量まで順を追って説明していく。

2.1 原始揺らぎ ϕ から密度揺らぎ δ

原始揺らぎ $\phi(\boldsymbol{k})$ は遷移関数 $T(k)$ を介して重力ポテンシャルを生み出す：$\Phi(\boldsymbol{k}) = -T(k)\phi(\boldsymbol{k})$. ここで、質量密度 $\rho(\boldsymbol{x},\tau)$ の平均 $\bar{\rho}(\tau)$ からの揺らぎを

$$\delta(\boldsymbol{x},\tau) \equiv \frac{\rho(\boldsymbol{x},\tau) - \bar{\rho}(\tau)}{\bar{\rho}(\tau)} \tag{2}$$

$$= \delta^{(1)}(\boldsymbol{x},\tau) + \delta^{(2)}(\boldsymbol{x},\tau)\cdots \tag{3}$$

と摂動展開すると、Poisson 方程式と Friedmann 方程式を用いれば次式を得る：

$$\delta^{(1)}(\boldsymbol{k},\tau) = \mathcal{M}(k,\tau)\phi(\boldsymbol{k}) \tag{4}$$

$$\mathcal{M}(k,\tau) \equiv \frac{2}{3} D_{\rm md}(\tau) \frac{k^2 T(k)}{\Omega_{m0} H_0^2} \tag{5}$$

ただし、$D_{\rm md}(\tau)$ は物質優勢期の線形成長因子である。

2.2 密度揺らぎ δ から銀河数密度揺らぎ δ_g

密度揺らぎと銀河数密度揺らぎの関係はどんなものであろうか。密度が大きいところには銀河が沢山できそうであるが、その関係は自明ではない。銀河数密度 $n_g(\boldsymbol{x},\tau)$ の平均 $\bar{n}_g(\boldsymbol{x},\tau)$ からの揺らぎを

$$\delta_g(\boldsymbol{x},\tau) \equiv \frac{n_g(\boldsymbol{x},\tau) - \bar{n}_g(\tau)}{\bar{n}_g(\tau)} \tag{6}$$

と定義する．一般に δ_g は δ や ϕ などの汎関数として表され、ここでは次のように展開する：[1]

$$\delta_g = b_1\delta + \frac{1}{2}b_2\delta^2 + b_{\mathcal{G}_2}\mathcal{G}_2 + b_{\Gamma_3}\Gamma_3 + R_*^2\partial^2\delta + f_{\rm NL}^{\rm local}(b_\phi\phi + b_{\phi\delta}\phi\delta). \tag{7}$$

[1] 3 次までの項として他に $\delta^3, \delta\mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3$ が考えられるが、繰り込み後にこれらは 1-loop に寄与しないため今回は触れない。

ただし、Φ_g を重力ポテンシャル、Φ_v を速度ポテンシャルとして $\mathcal{G}_2 = (\partial_i\partial_j\Phi_g)^2 - (\partial^2\Phi_g)^2, \Gamma_3 = \mathcal{G}_2[\Phi_g] - \mathcal{G}_2[\Phi_v]$ である。[2]最後の 2 項が非 Gauss 性からの寄与である。展開係数 $b_1, b_2, b_{\mathcal{G}_2}, b_{\Gamma_3}, b_\phi, b_{\phi,\delta}$ は**銀河バイアス**と呼ばれる。ただし、δ は Euler 座標 $\boldsymbol{x}$ で評価されているのに対し ϕ は Lagrange 座標 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\psi}$ で評価されているため、次式を用いて書き直す必要がある：

$$\phi(\boldsymbol{q}) = \phi - \psi^i\partial_i\phi + \psi^k(\partial_k\psi^i)\partial_i\phi + \frac{1}{2}\psi^i\psi^j\partial_i\partial_j\phi. \quad (8)$$

ダークマターハローの質量関数が普遍的であると仮定すると $b_\phi, b_{\phi\delta}$ は共に b_1 で表すことができると知られており、**universality relation** と呼ばれている。最新の銀河形成のシミュレーションの結果は

$$b_\phi = 2\delta_c(b_1 - 0.55), \quad (9)$$

$$b_{\phi\delta} = 3.85 - 9.49b_1 + 3.44b_1^2 \quad (10)$$

である (Barreira 2022)。ここで、$b_c = 1.686$ は球対称崩壊する臨界密度揺らぎである。今回解析においてこの関係式を用いた。[3]

2.3 実空間 $\boldsymbol{x}$ から赤方偏移空間 $\boldsymbol{s}$

3 次元的な銀河分布を調べるためには、角度方向と距離を調べる必要がある。距離は、宇宙が膨張していることを利用し、観測した銀河からの光の赤方偏移 z から逆算して求め、このようにして求めた座標空間 $\boldsymbol{s}$ を、実空間 $\boldsymbol{x}$ と区別して**赤方偏移空間**と呼ぶ。ところが、これらは基本的に一致しない。なぜなら、z には、それのぞれ銀河が持つ**特異速度**に起因する Doppler 効果も含まれているからである。言い換えれば、z から位置を逆算すると、視線方向 $\hat{\boldsymbol{z}}$ に対し実際の位置より近く、あるいは遠くに見積もってしまうのである。これは見かけの銀河分布を歪ませることになり、この効果は**赤方偏移空間変形 (redshift-space distortion; RSD)** と呼ばれている。この効果を考慮に入れるため、次式のように δ_g を実空間から赤方偏移空間に変換する：

$$\delta_g^{(s)} = \delta_g - \partial_z(u_z(1+\delta_g)) + \frac{1}{2}\partial_z^2(u_z^2(1+\delta_g)) - \frac{1}{6}\partial_z^3(u_z^3). \quad (11)$$

ここで、$u_z = \hat{\boldsymbol{z}}\cdot\boldsymbol{v}/(aH)$ である。小スケールにおける RSD は非常に複雑で「神の指 (Finger of God; FoG)」として知られ、理論的に解析できる波数に上限が生じる。

[2] Φ_g と Φ_v は線形摂動の範囲では同じだが、それより高次の摂動論では異なる。

[3] この関係式を仮定せず、$b_\phi, b_{\phi\delta}$ をパラメータに含めたフィッティングも行えるが、それによる影響は小さい。

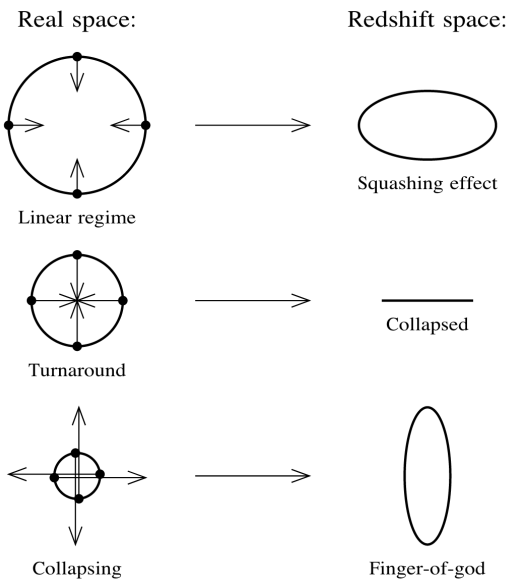


図 1: 特異速度が赤方偏移空間変形を引き起こす図。ドットは高密度領域に落ち込む銀河を表し、矢印はそれらの特異速度を表す。大スケールでは視線方向に潰れ、小スケールでは逆に伸び「神の指」と呼ばれる (Hamilton 1997)

2.4 統計量

銀河の散らばり具合を表す統計量である赤方偏移空間パワースペクトルを定義する：

$$\langle\delta_g^{(s)}(\boldsymbol{k}_1)\delta_g^{(s)}(\boldsymbol{k}_1)\rangle \equiv (2\pi)^3\delta_{\rm D}^3(\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2)P_g^{(s)}(k) \quad (12)$$

原始非 Gauss 性が存在する場合、次のように分解できる：

$$P = P_{\rm tree} + P_{\text{1-loop}} + P_{\rm ctr} + P_{\rm stoch} \quad (13)$$

$P_{\rm tree}$ は線形項、$P_{\text{1-loop}}$ は 1-loop 補正項、$P_{\rm ctr}$ はカウンターターム、$P_{\rm stoch}$ は確率項を表す。$P_{\rm tree}$ と $P_{\text{1-loop}}$ の具体形は本稿の最後に示した。カウンタータームは次式で与えられる：[4][5]

$$\begin{aligned} P_{\rm ctr}^{(s)}(z,k,\mu) = &- 2\tilde{c}_0(z)k^2P_{\rm lin}(z,k) - 2\tilde{c}_2(z)f(z)\mu^2k^2P_{\rm lin}(z,k) \\ &- 2\tilde{c}_4(z)f^2(z)\mu^4k^2P_{\rm lin}(z,k) \\ &+ \tilde{c}_{\nabla_{\hat{\boldsymbol{z}}}^4\delta}(z)f^4(z)\mu^4k^4(b_1(z) + f(z)\mu^2)^2P_{\rm lin}(z,k) \end{aligned} \quad (14)$$

[4] $\tilde{c}_0, 2\tilde{c}_2, 2\tilde{c}_4, \tilde{c}_{\nabla_{\hat{\boldsymbol{z}}}^4\delta}$ は実空間における有効音速とも呼ばれるパラメータ $c_s^2(z)$ に起因し、この振幅や時間依存性は前もって知らないため、解析では局外パラメータとして扱う (Chudaykin 2020)。

[5] FoG は非線形な RSD マッピングにおいて高階微分の項から生じるため、最後の項はそれを上手く説明するためのものである (Chudaykin 2020)。

ただし、f は対数成長因子、$\mu = \hat{\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{z}}$ である。確率項はスケールに依存しないショットノイズとして扱う：[6]

$$P^{(s)}_{\rm stoch}(z,k,\mu) = P_{\rm shot}(z). \tag{15}$$

ここで、後の解析のために多重極展開する：

$$P^{(s)}_g(z,k,\mu) = \sum_{l=0,2,4} \mathcal{L}(\mu) P_l(z,k). \tag{16}$$

ただし、$\mathcal{L}(\mu)$ は Legendre 多項式である。さらに、パワースペクトルの視線方向垂直成分を定義する：

$$Q_0(z,k) \equiv P^{(s)}_g(z,k,\mu)|_{\mu=0}. \tag{17}$$

これは、視線方向の情報を捨てているため RSD の影響を受けず、つまり FoG の効果も受けない。従って、Q_0 を用いることで解析可能な波数の領域を小スケールの方に少し伸ばすことができる。ただし、これらの解析は全て摂動論に基づいているため、依然として適用限界があることに注意されたい。

同様に、次の赤方偏移空間バイスペクトルを定義する：

$$\begin{aligned}&\langle \delta^{(s)}_g(\boldsymbol{k}_1)\delta^{(s)}_g(\boldsymbol{k}_1)\delta^{(s)}_g(\boldsymbol{k}_1)\rangle \\ &\quad \equiv (2\pi)^3 \delta^3_{\rm D}(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_3) B^{(s)}_g(k_1,k_2,k_3)\end{aligned} \tag{18}$$

ここで、確率項からの寄与は sqeezed limit で十分小さくなるため、今回は無視する。

3 観測データの解析

3.1 方法

本研究では Baryon Oscillation Spectroscopic Survey (BOSS) の DR12 から、南・北半球それぞれに対し赤方偏移の有効中心が $z = 0.38, 0.61$ の、計 4 つの独立した銀河クラスタリングデータ（NGC high-z, SGC high-z, NGC low-z, SGC low-z）を用いた。各データから統計量 $P_l(l=0,2,4), Q_0, B_0$ に加え、BAO パラメータ $\alpha_\parallel, \alpha_\perp$ を抽出した。波数 k の範囲は、統計的に大きく独立になるように P_l に対しては $k_i \in [0, 01h\,{\rm Mpc}^{-1}, 0.25h\,{\rm Mpc}^{-1}]$, Q_0 に対しては $k_i \in [0, 25h\,{\rm Mpc}^{-1}, 0.27h\,{\rm Mpc}^{-1}]$ とした。また今は $f^{\rm local}_{\rm NL}$ の制限にのみ興味があるため、宇宙論パラメータは全て Planck 2018 に固定した。これは、CMB のパワースペクトルと BOSS のパワースペクトルとバイスペクトルを組み合わせることに対応する。

今回は無限に広い平坦な事前分布の $f^{\rm local}_{\rm NL}$ と局外パラメータ $(b_1, b_2, b_{\mathcal{G}_2}, b_{\Gamma_3}, c^2_s, R^2_* = c_0, c_2, c_4, \tilde{c}_{\nabla^4_{\hat{\boldsymbol{z}}}\delta}, P_{\rm shot})$ に関して、CLASS PT(Chudaykin 2020) と MONTEPYTHON を用いて Markov 連鎖 Monte Carlo 法（MCMC）によりフィッティングを行った。[7]

3.2 結果

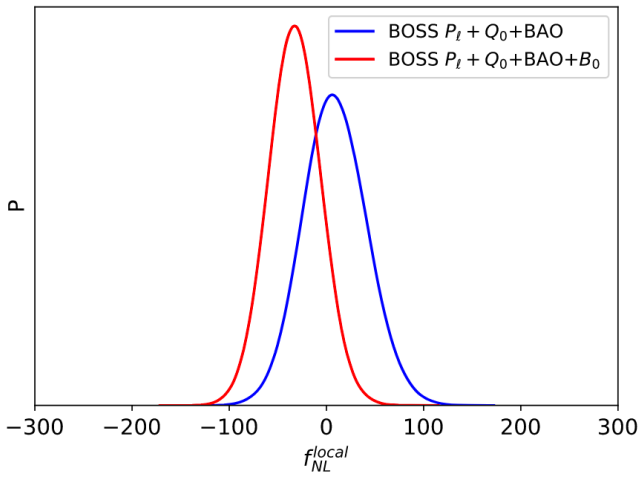


図 2: 局所的非 Gauss 性に対する、BOSS のパワースペクトルからの制限（青）とバイスペクトルを加えた場合の制限（赤）。それぞれ $f^{\rm local}_{\rm NL} = 9^{+33}_{-35}, -33 \pm 28$ (68%C.L.) であり、バイスペクトルにより制限が 20% 強まった。この研究の主となる結果である。(Cabass 2022)

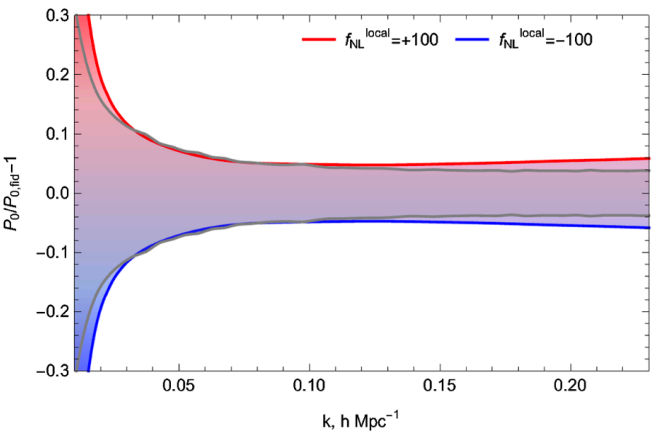


図 3: 銀河パワースペクトルモノポール P_0 の $f^{\rm local}_{\rm NL}$ の変化に対する残差。灰色の領域は NGC z3 データのエラーバーを示す。

[6] 実際には $a_0(z)k^2 + a_2(z)\mu^2k^2$ という、モノポールとクアドロポールに寄与するスケール依存のショットノイズも考えられる。しかし、前者は $k \lesssim 0.3h{\rm Mpc}^{-1}$ でその寄与は無視でき、後者はカウンタータームの最後の項と縮退するため、今回は無視した (Chudaykin 2020)。

[7] $c_0 \equiv \tilde{c}_0 + \frac{f}{3}\tilde{c}_2 + \frac{f^2}{5}\tilde{c}_4, c_2 \equiv \tilde{c}_2 + \frac{6f}{7}\tilde{c}_4, c_4 \equiv \tilde{c}_4$

まず本研究の主となる結果である $f_{\rm NL}^{\rm local}$ に対する制限について述べる (図 2)。パワースペクトル+BAO による結果は

$$\begin{aligned} &P_l + Q_0 + \mathrm{BAO}: \\ &\qquad f_{\rm NL}^{\rm local} = 9^{+33}_{-35}, \quad (68\%\mathrm{C.L.}), \\ &-57 < f_{\rm NL}^{\rm local} < 78, \quad (95\%\mathrm{C.L.}). \end{aligned} \tag{19}$$

であり、ここにバイスペクトルを加えるとエラーバーは約 20% 小さくなり次のようになった：

$$\begin{aligned} &P_l + Q_0 + \mathrm{BAO} + B_0: \\ &\qquad f_{\rm NL}^{\rm local} = -33 \pm 28, \quad (68\%\mathrm{C.L.}), \\ &-88 < f_{\rm NL}^{\rm local} < 23, \quad (95\%\mathrm{C.L.}). \end{aligned} \tag{20}$$

95% の制限は $f_{\rm NL}^{\rm local} = 0$ と整合的であり、これは本研究の結果が LPNG の存在を示す証拠とはならなったことを意味する。また、バイスペクトルを追加すると $f_{\rm NL}^{\rm local}$ の事後分布の平均値がおよそ 1σ 程度移動した。この振る舞いは、複数次元の尤度を計算する際に見られる挙動で特別な意味はないと考えられる (Cabass (2022) の APPENDIX C 参照)。

次に NGC z3 のデータを用いて、ベストフィットモデルにおける P_0 の $f_{\rm NL}^{\rm local}$ 依存性を調べた表 3。具体的には、初めに $f_{\rm NL}^{\rm local} = 0$ としたときの値を計算したのち、$f_{\rm NL}^{\rm local}$ を -100 から $+100$ まで変化させ残差を計算した。図 3 より、特に大スケール（small k）と小スケール（large k）で大きく変化していることが分かる。前者は線形スケール依存バイアスの影響で、後者は 1-loop LPNG 補正の効果である。これらは共に NGC z3 データのエラーバーを超えており、データ解析においては 1-loop LPNG 補正は考慮すべきであると言える。

4 まとめ

本研究では、BOSS の銀河クラスタリングのデータを用いて $f_{\rm NL}^{\rm local} = 0$ に対する制限を行った。解析においては、関連する全ての理論的・観測的効果を考慮し、LPNG 由来の項も全て含めた完全な 1-loop パワースペクトル、そしてバイスペクトルを用いた。バイスペクトルを加えた場合の $f_{\rm NL}^{\rm local}$ に対する制限は、パワースペクトルによる解析に比べ 20% 改善された。

今後の改善点としては、パラメータの事前分布依存性や B_2, B_4 の考慮、そして解析に用いる波数の範囲の拡大などが挙げられる。

Reference

G. Cabass et al. 2022, Physical Review D, Volume 106, Issue 4

A. Barreira, 2022, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics

A. J. S. Hamilton, 1997,

A. Chudaykin, 2020, Physical Review D, Volume 102, Issue 6

V. Desjacques, 2018, Physics Reports

Appendix：$P_{\rm tree}, P_{\text{1-loop}}$ の具体形

$P_{\rm tree}, P_{\text{1-loop}}$ の具体的な表式は以下のようになる：

$$P_{\rm tree} = \left[Z_1(\boldsymbol{k}) + Z_1^{\rm NG}(k)\right]^2 P_{\rm lin}(z,k), \quad \left(\langle\delta^{(1)}(\boldsymbol{k}_1)\delta^{(1)}(\boldsymbol{k}_1)\rangle = (2\pi)^3\delta_{\rm D}^3(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)P_{\rm lin}(k)\right), \tag{21}$$

$$\begin{aligned} P_{\text{1-loop}} = {} & 2\int_{\boldsymbol{p}} \left[Z_2^2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}) + 2Z_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})Z_2^{\rm NG}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})\right] P_{\rm lin}(z,k)P_{\rm lin}(z,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}) \\ & + 3\left[Z_1(\boldsymbol{k}) + Z_1^{\rm NG}(k)\right] P_{\rm lin}(z,k)\int_{\boldsymbol{p}} \left[Z_3(\boldsymbol{k},-\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}) + Z_3^{\rm NG}(\boldsymbol{k},-\boldsymbol{p},\boldsymbol{p})\right] P_{\rm lin}(z,p) \\ & + 2\left[Z_1(\boldsymbol{k}) + Z_1^{\rm NG}(k)\right]\int_{\boldsymbol{p}} \left[Z_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}) + Z_2^{\rm NG}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})\right] B_{111}(k,p,|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}|) \end{aligned} \tag{22}$$

ここで、$\int_{\boldsymbol{p}} = \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\delta_{\rm D}^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})$ である。積分核は

$$Z_1(\boldsymbol{k}) = b_1 + f\mu^2, \quad Z_1^{\rm NG}(k) = b_\phi f_{\rm NL}^{\rm local}, \quad \sigma^2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) \equiv \frac{(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2)^2}{k_1^2k_2^2} - 1, \tag{23}$$

$$Z_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) = \frac{1}{2}b_2 + b_{\mathcal{G}_2}\sigma^2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) + b_1F_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) + f\mu^2G_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) + \frac{f\mu k_{12}}{2}\left[\frac{\mu_1}{k_1}(b_1+f\mu_2^2) + \frac{\mu_2}{k_2}(b_1+f\mu_1^2)\right], \tag{24}$$

$$Z_2^{\rm NG}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2) = f_{\rm NL}^{\rm local}\left[b_\phi\frac{\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2}{2p_1p_2}\left(\frac{p_2}{p_1}\frac{1}{\mathcal{M}(p_2)} + \frac{p_1}{p_2}\frac{1}{\mathcal{M}(p_1)}\right) + b_\phi\frac{f\mu k}{2}\left(\frac{\mu_1}{p_1}\frac{1}{\mathcal{M}(p_2)} + \frac{\mu_2}{p_2}\frac{1}{\mathcal{M}(p_1)}\right) + \frac{1}{2}b_{\phi\delta}\left(\frac{1}{\mathcal{M}(p_1)} + \frac{1}{\mathcal{M}(p_2)}\right)\right] \tag{25}$$

ただし、積分核 F_2, G_2 に関しては Desjacques (2018) 参照。また $Z_3, Z_3^{\rm NG}$ については上式の 3 倍ほど長いためここでは省略する。

———index へ戻る

重宇 a20

Multidimensional Vlasov-Poisson Simulations with High-order Monotonicity- and Positivity-preserving Schemes の紹介

伊藤 圭汰

Multidimensional Vlasov–Poisson Simulations with High-order Monotonicity- and Positivity-preserving Schemes の紹介

伊藤　圭汰 (筑波大学大学院 数理物質科学研究科)

Abstract

本発表は、自己重力系や宇宙プラズマの運動論的数値シミュレーションにおける Vlasov 方程式の新しい数値シミュレーション手法を提案したものである。この手法は有限体積法における数値解の空間的な単調性 (Monotonicity) と正値性 (Positivity) を同時に保証する空間 5 次及び 7 次精度の手法である。また時間積分において、従来の多段 TVD Runge-Kutta 法に替えて、semi-Lagrangian 時間積分を採用しており、より精度が高く、同時に計算コストも低い手法となっている。具体的には、数値シミュレーション手法のテストとして、無衝突自己重力系の重力コラプス問題や静電プラズマにおける空間 1 次元の線形ランダウ減衰、非線形ランダウ減衰を空間 5 次および 7 次精度のスキームを用いて計算した。その結果、どのテストにおいても、従来の同種の数値シミュレーションで用いられてきた空間 3 次精度の PFC(Positive Flux Conservation) スキームに比べて著しく精度が向上している。また semi-Lagrangian 時間積分を採用したことのメリットとして、従来の TVD Runge-Kutta 法による空間高次精度のスキームと比較しても大幅に計算コストを削減できている。

1　Introduction

無衝突自己重力系の数値シミュレーションは銀河や宇宙大規模構造の研究において不可欠なものである。無重力自己重力系の数値シミュレーションでは N 体シミュレーションが広く採用されている。しかし N 体シミュレーションでは質量の分布を有限な数の質点で離散化するため、ショットノイズが混入してしまう。また N 体シミュレーションは粒子の速度空間でのサンプリングが不十分であるため、流体の無衝突減衰をうまく扱うことができない。これらの欠点を克服する手法として Vlasov 方程式を直接解く方法がある。しかしこの手法を 6 次元位相空間で用いると膨大なメモリが必要となり、高精度な結果を得るためにメッシュ数を増やすことは現実的ではない。この論文ではメッシュ数を増加させることなく高精度な結果を得るための移流方程式を解く手法について紹介を行っている。

2　Methods

テスト計算では 1 次元重力不安定性と 6 次元位相空間での密度球の球状崩壊をシミュレートしている。

3　Results

1 次元重力不安定性のテスト計算では SL-MPP5 や SL-MPP7 が空間 3 次精度の PFC スキームに比べ、数値拡散が抑えられ、同じメッシュ数において高精度な結果が得られた。また正値性の保存も確認できた。6 次元位相空間での密度球の球状崩壊では SL-MPP5 や SL-MPP7 の計算コストが RK-MPP5 よりも小さく、空間 3 次精度の PFC スキームと同程度となっている。

4　Conclusion

従来の同種の数値シミュレーションで用いられてきた空間 3 次精度の PFC(Positive Flux Conservation) スキームに比べて著しく精度が向上している。また semi-Lagrangian 時間積分を採用したことのメリットとして、従来の TVD Runge-Kutta 法による空間高次精度のスキームと比較しても大幅に計算コストを削減できている。

Reference

Satoshi Tanaka, ApJ, 849:76, 2017

———index へ戻る

重宇 a21

velocity-dependent Self-Interacting Dark Matter による宇宙論諸問題の解決

木原 健司

velocity-dependent Self-Interacting Dark Matter による宇宙論諸問題の解決

木原 健司 (大阪大学大学院 理学研究科)

Abstract

現在主流である Cold Dark Matter(CDM) によるシミュレーションは、1 Mpc 以上のスケールにおいて観測結果をよく説明しているが、これより小さなスケールでは観測との不一致も見つかっている。その一つである「core-cusp 問題」を解決するために提案されたのが、Self-Interacting Dark Matter(SIDM) である。SIDM 粒子は $\frac{\sigma}{m} \approx 1\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{g}$ という断面積で散乱することで、中心密度を一定にすることができる。ところが近年、中心密度が非常に大きい矮小銀河も観測されている。今回、SIDM のハローの性質である、gravothermal catastrophe (GC) (Balberg, et al 2002) と呼ばれる重力崩壊現象に着目し、SIDM の範疇で中心密度の高さを説明した論文 (Turner, Hannah C, et al 2021) を Review1 にてレビューする。この論文の結果によると、低速度で $\frac{\sigma}{m} \approx 100\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{g}$ となるモデルは、重力崩壊をすることが分かった。また、この現象を利用すれば、超大質量ブラックホール (SMBH) の種を作ることが可能である。Review2 では、既に見つかっている、high-z における SMBH の種の発生についての論文 (Feng, Wei-Xiang, et al 2021) をレビューする。この論文の結果によると、バリオンの分布を考慮すると、GC は初期宇宙で開始し、観測された SMBH の生成が間に合うことが分かった。

1 Introduction

現在、ダークマター（以下 DM）は宇宙全体のエネルギーの約 3 割を占めていると考えられている。宇宙論的シミュレーションにおいて仮定される DM は CDM であり、これは重力相互作用以外に力は働かない。この CDM によるシミュレーションは、1 Mpc 以上のスケールにおいて観測結果をよく説明している。ところが、これより小さなスケールでは観測との不一致も見つかっている。

不一致の一つに、「core-cusp 問題」というものがある。これは、シミュレーションにおける CDM のハローの中心密度のスロープが、観測で求められるよりも急峻になってしまう問題である。これを解決するために提案されたのが、SIDM である。SIDM 粒子は $\frac{\sigma}{m} \approx 1\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{g}$ という断面積で散乱する。これにより、エネルギーの輸送が可能になり、銀河中心に束縛されている運動エネルギーの小さな粒子も次第にエネルギーを獲得し、中心付近の DM 密度は、CDM のカウンターパートよりも小さくなる。

ところが近年、中心密度が非常に大きい銀河も観測されている。これは、DM の量が少ないため、束縛できるバリオン量も少なく、暗くなった銀河に見られる特徴で、観測技術の向上とともに見つかってきている。ここで私は、SIDM が gravothermal catastrophe(Balberg, et al 2002) と呼ばれる重力崩壊を起こすことに着目した。中心密度の高さは、この重力崩壊現象が原因であると考えた。この重力崩壊現象のタイムスケールは、$t_{coll} \approx 130m\,(\rho v\sigma)^{-1}$ である。ここで、ρ は密度、 v は中心の速度分散である。矮小銀河のパラメータを用いた計算の結果、DM ハロー形成にこの時間を足し上げた値は、DM ハローの年齢よりも長く、重力崩壊は実現し得ないことが分かった。

以上の内容では、SIDM の断面積は定数で考えられてきた。湯川ポテンシャルで記述される力が働くとき、散乱断面積は速度の減少関数になるはずである。近年、速度依存性をもつモデル (vdSIDM) がシミュレーションに導入されたり、論じられたりしている (Turner, Hannah C, et al 2021)。vdSIDM モデルは、DM ハローの密度分布の多様性 (Review1) を説明できる可能性がある。また、近年 $z \approx 7$ において、$10^9\,\mathrm{M}_\odot$ の SMBH の存在が示唆されており、これは通常の降着では達成不可能な降着率を要求する。

SIDM の GC の観点から、超大質量ブラックホールの形成 (Review2) を説明できる可能性がある (Feng, Wei-Xiang, et al 2021) ため、本発表ではそのレビューを行う。

2 Gravothermal Catastrophe

以下では、(Colin et al 2002) による SIDM ハローの時間発展について説明する。SIDM 粒子は、散乱を起こすこと以外は CDM と同一である。つまり、散乱が効いてくるハローの密度分布の初期条件としては CDM と同一であることが望ましい。彼らはハローの初期条件として、密度分布を NFW プロファイル (式 1) とし、自己相互作用を入れた。

$$\rho_{\rm NFW}(r) = \frac{\rho_s}{\frac{r}{r_s}\left(1+\frac{r}{r_s}\right)^2} \tag{1}$$

ここで、r_s と ρ_s はそれぞれスケール半径、スケール密度とよばれる。図 1 は、そのときのハローの進化の様子である。(a) は初期条件である。速度分散（温度）はある半径 R_t で極大を持っており、これより内側では比熱が正、外側では比熱が負になっている。内側の領域は R_t の領域から熱をもらい、温度が上昇していく。これにより、中心領域は等温となり、密度分布は平ら (コア) になる。このとき、R_t が広がっているため、core expansion phase と呼ばれる。(b) は、コアが形成されたあと、温度分布が逆転した状態を示している。このとき、内側から熱が流れるが、外側の比熱が正であるため、平衡状態とはならない。外側の領域は熱をもらいながら温度を下げ、一方で内側は熱を吐き出すために収縮し、特異点へと向かう。この現象を、gravothermal catastrophe (GC) とよぶ。

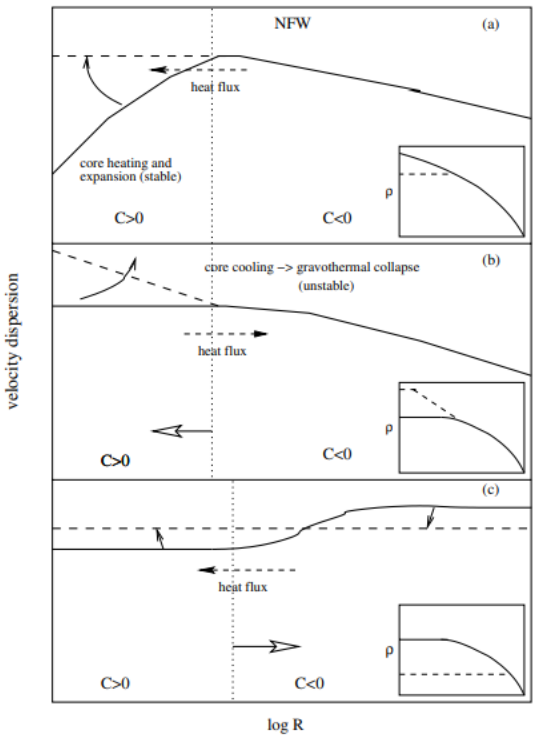


図 1: (Colin et al 2002) 自己相互作用を入れたときからの DM ハローの進化。縦軸はそれぞれ速度分散、横軸は中心からの距離の対数を示す。各段階の右下にある図は密度プロファイルの概形。

3 Review1

3.1 Methods

3.1.1 シミュレーション設定

(Turner, Hannah C, et al 2021) では、DM のみのシミュレーションを、Aquarius Project(Springel V., et al 2008) における、天の川銀河と質量が近い Aq-A に対して行った。DM 粒子の質量は $4.9\times10^4\,{\rm M}_\odot$ 、Plummer equivalent gravitational softening lengths は 120.5 pc であった。ハローは、friends-of-friends algorithm を用いて同定し、SUBFIND(Springel V., et al 2001) によって重力的に自己束縛されたサブハローに分解した。観測との照合のため、ホストハローの 300 kpc 以内にある、20 以上の束縛された粒子を持つサブハローを解析した。ホストハローの質量は、$M_{200}=1.88\times10^{12}\,{\rm M}_\odot$ である。

3.1.2 SIDM のパラメータ設定

ここでは、CDM、散乱断面積が $1\,{\rm cm}^2\,{\rm g}^{-1}$ (SIDM1) と $10\,{\rm cm}^2\,{\rm g}^{-1}$ (SIDM10) の速度依存性のない SIDM、3 種類の vdSIDM(図 2 参照) について上記のシミュレーションを行った。自己相互作用が湯川ポテンシャルによる引力であり、散乱が弾性であると仮定すると、散乱断面積は相対速度の減少関数になる。今回は、そのうち vd100 モデルの結果に

注目する。

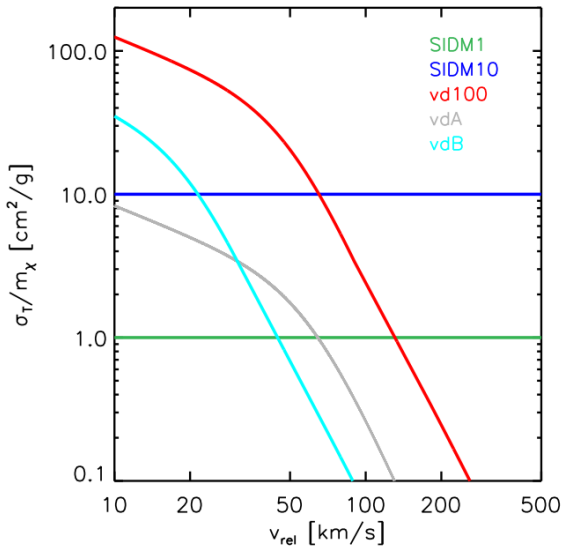


図 2: 各 SIDM モデルの散乱断面積の速度依存性。

3.2 Results and discussion

彼らの研究結果の特筆すべきところは、図 3 の回転曲線のモデルによる傾向の違いである。vd100 では、CDM よりも、最大の回転速度が $10\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ 以上のサブハローの個数が顕著に多くなった。また、最大速度になる半径 r_{max} は、CDM やその他の SIDM のモデルと比べると、vd100 モデルでは小さかった。こうしたハローは、$z=1$ のときは CDM と似た $V_{max}-r_{max}$ の関係を持っていたが、$z=0$ のときには、V_{max} を保持したまま r_{max} が重力ソフトニング程度までに小さくなっており、これは GC が起こった結果であると考えられる。

4 Review2

4.1 Methods

(Feng, Wei-Xiang, et al 2021) では、(Balberg, et al 2002) の SIDM ハローの流体モデルを使用している。彼らは、バリオンの効果を見るために、時間変化しない一定の質量分布をバリオンとして、重力の方程式に加えて SIDM ハローの時間進化を数値的に解

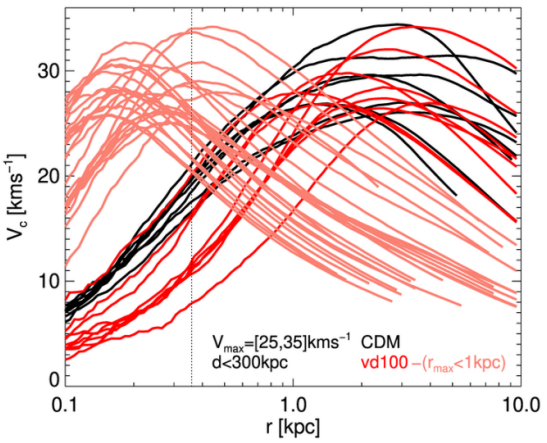


図 3: CDM(黒) と vd100(赤) の回転曲線の比較。縦の点線は、重力ソフトニング長の 2.8 倍を示している。

いた。進化を記述する方程式は、以下の 4 式である:

$$\frac{\partial M_\chi}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho_\chi \tag{2}$$

$$\frac{\partial\left(\rho_\chi \nu_\chi^2\right)}{\partial r} = -\frac{G(M_\chi + M_b)\rho_\chi}{r^2} \tag{3}$$

$$\frac{\partial L_\chi}{\partial r} = -4\pi\rho_\chi r^2 \nu_\chi^2 D_t \ln\frac{\nu_\chi^3}{\rho_\chi} \tag{4}$$

$$\frac{L_\chi}{4\pi r^2} = -\kappa\frac{\partial\left(m\nu_\chi^2\right)}{k_B \partial r} \tag{5}$$

ここで、M_χ、ρ_χ、ν_χ、L_χ はそれぞれ DM の質量、密度、1 次元の速度分散、光度であり、全て時間発展する。一方、M_b はホスト銀河のバリオンの質量プロファイルであり、ここでは時間発展しない値としている。k_B はボルツマン定数、G は万有引力定数、κ は DM 流体の熱伝導率をそれぞれ表す。

ρ_χ の初期条件は NFW プロファイル (式 1) とし、境界条件は、$r=0$ において $M\chi=0$、r_{200} において $M_\chi = M_{200}$、L_χ とした。バリオンの質量分布は、宇宙論的流体シミュレーションに基づき、$z\approx 17$ における値、$M_b(r) \approx 0.1(4\pi\rho_s r_s^3)(r/r_s)^{0.6}$ を用いた。

4.2 Results and discussion

図 4 は、中心から蓄積された質量と、その地点での密度をプロットしている。なお、質量は $M_0 = 4\pi\rho_s r_s^3$ で規格化されている。異なる曲線は異なる時間での値を表し、$t_0 = (4\pi G\rho_s)^{-1/2}$ で規格化されている。崩壊のタイムスケール t_c は、バリオンがある場合

$t_c \approx 8.4\,t_0$ となり、SIDM のみの場合 $t_c \approx 10^3 t_0$ であった。よって、彼らの用いた分布を持つバリオンの存在が、崩壊を 100 倍のオーダーで速くすることが分かった。また、$t > 8.4\,t_0$ において、中心密度が上がっていくとき、中心の質量は $M_{in} \approx 1.8 \times 10^{-3} M_0$ で一定であった。

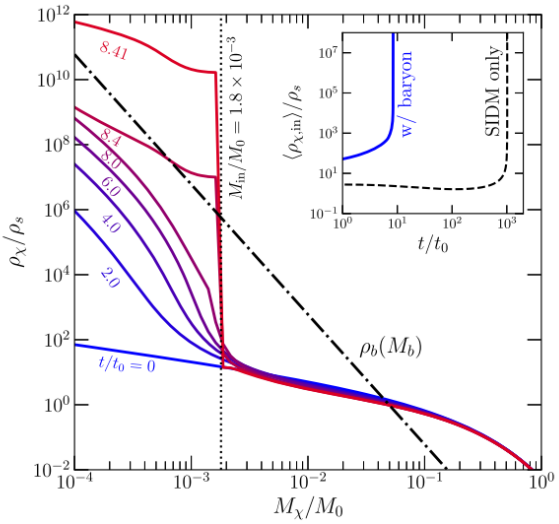


図 4: バリオンがある場合の SIDM ハローの時間進化。横軸はハローの中心から蓄積された質量、縦軸はそれに対応する地点の密度を表している、異なる曲線は異なる時間を示している。挿入されている図は、中心部の平均密度の時間発展を、バリオンの有無で比較したもの。

また、彼らは SMBH の種質量を $M_{seed} = M_{in}$ と考え、二種類の Eddington ratio$f_{\rm Edd}$ を仮定した、SMBH の起源を説明する SIDM の基準を計算した。図 5 の上と下のパネルの黒い線は、それぞれ $f_{\rm Edd} = 0.16, 1.06$ を仮定した、別々の SMBH の Eddington 降着ヒストリーを示している。また、赤い線は、ハローと種の質量を繋いでいる。この結果から、最初のハロー質量は、密度揺らぎ大きい領域でのみ再現されることが分かった。著者は、このことは high-z での SMBH が珍しい理由を説明していると主張している。

5　まとめ

以上のように、矮小銀河の密度プロファイルの多様性と、high-z における SMBH の存在を SIDM モデル

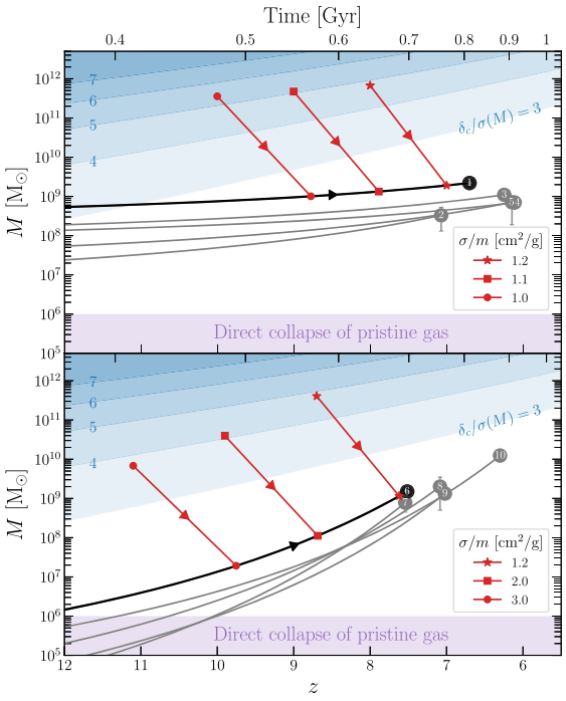


図 5: 黒い線は、SMBH の Eddington 降着ヒストリー。赤い線の high-z の端は最初のハロー質量、low-z の端は種質量を表す。

に基づいて説明した論文を紹介した。しかし、SIDM の断面積は素粒子論的パラメータによって決まるため、DM の対消滅による γ 線など、そのほかの方法での制限も可能である。今後様々な視点から SIDM のパラメータを制限するのが課題である。

Reference

Balberg, et al., 2002, ApJ, 568, 475

Turner, Hannah C, et al., 2021, MNRAS, 505, 5327

Feng, Wei-Xiang, et al., 2021, ApJL, 914, id.L26, 9 pp.

Colin et al., 2002, ApJ, 581, 777

Springel V., et al., 2008, MNRAS, 391, 1685

Springel V., et al., 2001, MNRAS, 328, 726

Wise, J. H., et al., 2008, ApJ, 682, 745

———index へ戻る

重宇 a22

コンパクト連星からの重力波による宇宙論パラメータの推定

大西 翔太

コンパクト連星からの重力波による宇宙論パラメータの推定

大西　翔太 (大阪公立大学大学院 理学研究科 M1)

Abstract

アインシュタインの一般相対性理論から予言された重力波は、2015 年に初めてその存在が観測によって確認され、現在では数多く検出されることで理論の正しさを示しており、また重力波源の同定に至ることも少なくない状況にある。今回レビューを行う論文 [arXiv:1710.05835v1][2] では、GW170817 の検出によってその波形や振幅から波源までの距離を直接測定でき、同時に電磁気的な対応物が観測されたことによって、波源の赤方偏移パラメータ z を予測し、最終的に宇宙膨張パラメータであるハッブル定数 H_0を推定することが可能であることを述べる。この測定は従来のハッブル定数推定の 2 種類の方法とは独立なものかつ直接的であり、現在測定方法によって値が大きく異なっているという、宇宙論におけるハッブル定数問題の新たな解決策になり得ると期待される。

1　Introduction

アインシュタイン方程式から予言された重力波は、長年検出の試みがなされてきたものの成功していなかったが、ついに 2015 年に LIGO によって初めて検出されたことによって、一般相対性理論の正しさが改めて例証された形となった。それ以降世界的に重力波観測のモチベーションが高まり、イタリアの Virgo や日本の KAGRA といった重力波検出器が共同で稼働していく中で、重力波検出の頻度や精度が向上し、重力波源の特定にも成功している場合も出てきている。そのような状況下で重力波を宇宙論研究に活用できる方策が考え出されるようになった。

今回レビューを行う論文 [2] は、2017 年に中性子星連星からの重力波検出に成功し、その観測データを元にハッブル定数の推定を従来のものとは独立した方法で行ったというものである。重力波宇宙論が研究される動機として、そもそも宇宙物理にとって重力波を発生させる天体現象は数多くありいずれも重要なものであるということだ。例を挙げると、中性子星連星（BNS)、ブラックホール連星（BBH)、中性子星・ブラックホール連星（NSBH)、超新星爆発といった天体現象の他、初期宇宙でのインフレーション由来の原始重力波なども存在する。

観測的宇宙論で主流となっている電磁波を用いる方法との差別化という意味では、電磁波では物体と相互作用してしまい発生源の情報を直接得られにくい点がある。また、そもそもブラックホールは電磁波で観測することはできないため、そういった部分で今後重力波が新たな観測のキーとなってくると期待されている。

2　重力波の予備知識

一般相対性理論のアインシュタイン方程式から出発する。

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \tag{1}$$

ここで、$G_{\mu\nu}$ はアインシュタインテンソル、$T_{\mu\nu}$ は運動量エネルギーテンソル
時空の曲率が小さい (=重力が弱い) と仮定し、
$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ (ただし、$|h_{\mu\nu}| \ll 1$) のとき
ローレンツゲージ条件からアインシュタイン方程式は

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu} \tag{2}$$

ここで、$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$
真空 ($T_{\mu\nu}$=0) かつ Z 軸方向に伝播を考えると (2) は波動方程式の形なので平面波を仮定して代入する。
また、$\Box\xi = 0$ を満たすようなゲージ変換の下では、$h_{\mu\nu}$ の振幅 $A_{\mu\nu}$ は、

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ 0 & A_{xy} & -A_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

と表される。重力波の振幅の独立な成分は二成分である。よって、重力波には偏極モードが二つ考えられそれぞれ
プラスモード $h_+ \equiv h_{xx} = -h_{yy}$
クロスモード $h_\times \equiv h_{xy} = h_{yx}$

というモードがあり、$h_+/h_\times$ が実数と純虚数の場合で偏光が起こり、それぞれ「直線偏光」「円偏光」という。

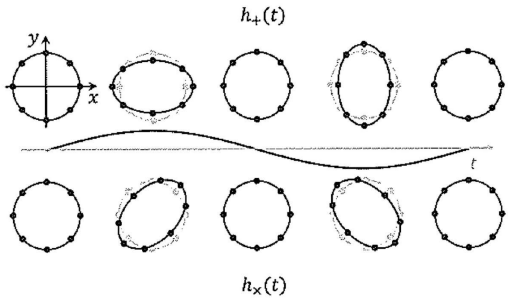


図 1: 重力波の偏極モード

次に連星系からの重力波を考える。TT ゲージ (transverse-traceless gauge) を考え、一般の方向に伝播する重力波を仮定する。軌道面と垂直な方向にある角運動量ベクトルと波源から観測者への方向ベクトルとのなす角を θ、軌道面で連星が x 軸となす角を ϕ とすると ($\phi = \Omega_{orb}t$)、重力波は、

$$h_+ = -\frac{4\mu a^2\Omega_{orb}^2}{r}\left(\frac{1+\cos^2\theta}{2}\right)\cos 2(\theta-\phi) \quad (4)$$

$$h_+ = -\frac{4\mu a^2\Omega_{orb}^2}{r}\cos\theta\cos 2(\theta-\phi) \quad (5)$$

のように表される。ここで、$\mu = \frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)}$,$r$ は波源から観測者までの距離

この式より、軌道面に対して垂直な方向 ($\theta = 0$) には平行な方向 ($\theta = \pi/2$) より二倍の大きさの重力波が観測されることになる。この性質が後述の距離推定の誤差に関わってくる。

3　ハッブル定数の決定方法

最も重要な宇宙論パラメータのうちの一つであるハッブル定数は現在の宇宙膨張の膨張率を表すパラメータである。ハッブルの法則は宇宙膨張の速度 v_H と光度距離 d_L との間の関係式であり、

$$v_H = H_0 d_L \quad (6)$$

と表される。

今回の論文では、ハッブル定数を求めるために重力波観測から d_L を、そして同時に観測された EM counterpart (電磁気的対応天体) から赤方偏移パラメータ z を推測し、その後 v_H へと変換することで式 (1) からハッブル定数を求めるという手法を用いている。

まず検出された重力波の波形から振幅や周波数（ひいてはチャープ質量）を読み取り、距離を決定する。このとき距離を決定するのに距離はしごを用いるような距離推定とは完全に独立した手法であることが革新的である。

こうして得られた光度距離は、$d_L = 43.8^{+2.9}_{-6.9}$ Mpc であった。なお、この値は既に距離はしごと Tully-Fisher 関係を用いて得られた波源のホスト銀河までの距離 $d_L = 41.1 \pm 5.8$ Mpc と誤差の範囲で一致しているため、重力波を用いる独立した方法が有用であることを確認できる。その一方で距離推定の誤差の原因として傾斜角 θ の決定の難しさがある。これについては後程述べる。

次に EM counterpart の存在から赤方偏移を求める。GW170817 の観測では重力波源の合体から二秒後にホスト銀河からのガンマ線バーストを観測した。なお、現在に至るまで上記のように重力波とそれに対する EM が同時に観測された例はこの一例のみであり、運が良かったといえる。(実際観測したガンマ線バーストで最も暗いもの)

このガンマ線バーストから赤方偏移、その後後退速度 v_H が求まる。ただし、後退速度には宇宙にある巨大な質量構造（グレートアトラクター）に向かうホスト銀河の固有速度が含まれているため、これを差し引く必要がある。割合にしておよそ 10 パーセントほど変わり、補正した後の後退速度は、

$v_H = (3017 \pm 166)$km/s という値が得られた。

4　本論文での結果

今回の論文ではハッブル定数の推測値を確率密度分布で表しており、その結果が下の図 1 の実線である。
$H_0 = 70.0^{+12.0}_{-8.0} kms^{-1}Mpc^{-1}$
という値が得られた。

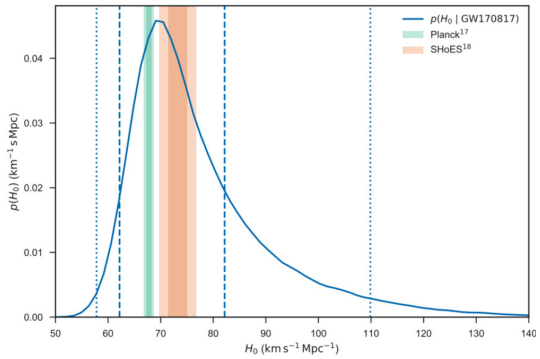


図 2: ハッブル定数 H_0 の確率密度分布

5　他の方法との比較

今回の論文の結果を他の方法で得られたハッブル定数とも比較する。遠方宇宙から推定した、CMB を用いた方法での結果は、
$H_0 = 67.74 \pm 0.46$ km/s/Mpc
という値が得られた。

一方で近傍宇宙で Ia 型超新星を用いた方法での結果は、
$H_0 = 73.24 \pm 1.74$ km/s/Mpc
という値が得られた。
これらの結果から言えることとして、重力波から推定したハッブル定数は従来の二つの方法のいずれとも誤差の範囲で一致しているため、独立した手法で観測的宇宙論の重要なパラメータを正しく推定できる画期的なものである。その一方で現時点では誤差が大きいため、従来の方法のどちらがより真の値に近いのかを今回の独立した手法でも決定することはできなかった。

6　問題点・まとめ

上で述べたように重力波を用いて推定したハッブル定数は誤差が大きいが、その大きな要因として傾斜角 θ の決定が難しいことにある。重力波検出器二台の角度が平行に近いと重力波の偏光が捉えにくく到来方向が決定しにくくなるためである。重力波の振幅は傾斜角が 0 と $\pi/2$（すなわち軌道面に垂直か平行か）とで二倍の差があるため、傾斜角の正確な推定はハッブル定数決定の重要な要素といえる。下の図 2 は H_0 と $\cos\theta$ の分布であるが黒実線の範囲が 1σ であり、かなり大きくなっている。

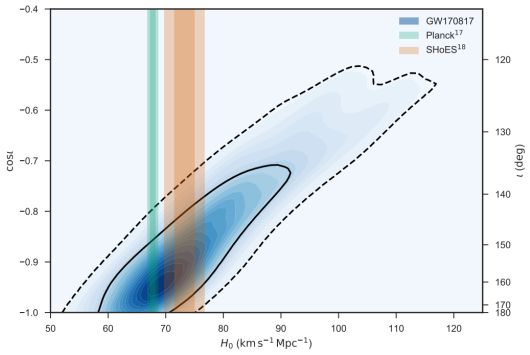


図 3: H_0 と $\cos\theta$ の確率密度分布

最後にレビュー論文の主張と展望をまとめる。最も重要かつ革新的なことは重力波の検出から独立した手法かつ直接的に距離推定が可能になったということ。それに加えて幸運にも EM を観測できたことにより、重要な宇宙論パラメータの一つであるハッブル定数の推定に成功したということ。また現状重力波のイベント数や精度については不十分であるが、今後の次世代検出器の登場によってこれらの問題が解決されるということに期待している。

Reference

[1] 宇宙論の物理（上）[松原隆彦 (2014)]

[2] A GRAVITATIONAL-WAVE STANDARD SIREN MEASUREMENT OF THE HUBBLE CONSTANT [THE LIGO SCIENTIFIC COLLABORATION(2017)] https://arxiv.org/abs/1710.05835

———index へ戻る

重宇 a23

すばる望遠鏡 HSC データを用いた弱重力レンズ質量マップで確認されたトラフ領域の視線構造

島末 匠

すばる望遠鏡 HSCY3 データを用いた 弱重力レンズ質量マップで確認されたトラフ領域の視線構造

島末 匠 (東京大学大学院 理学研究科)

Abstract

私たちはすばる望遠鏡 HSCY3 S19A の internal data を用いて球面質量マップを再構築し、ボイド由来の可能性があるトラフ領域 (マップにおける極小領域) の視線構造を調べた。質量マップは視線方向に密度ゆらぎを積分した値を示したものであり、マップ上のトラフ領域は単一の巨大なボイドもしくは複数の小さなボイドに由来する可能性がある。視線方向の情報を知るために HSC photometric luminous red galaxy (LRG) カタログと SDSS Data Release 12 の LOWZ & CMASS の分光銀河カタログを用いて、トラフ領域が単一の巨大な低密度領域か否かを識別した。トラフ領域のほとんどは視線方向に並んだ複数のボイドによって説明されるが、私たちは単一の巨大なボイドと思われる領域を 2 個、$z \sim 0.2 - 0.3$ において発見した。発見したボイドの半径は いずれも 10 h^{-1}Mpc 程度である。以上の結果は三次元質量マップ解析とも一致する。これらのボイドは、視線方向に長く伸びた形状とみなせば説明がつくと考えられる。

1 Introduction

ボイドとは宇宙の大規模構造を構成する要素であり、銀河やダークマターが分布しない低密度領域を指す。ボイドの形成と進化は重力によってのみ駆動されると考えられ、バリオン物理の影響を受けにくく、重力理論や標準宇宙論の検証に有用と考えられる。従来、ボイドは分光サーベイによって得られた銀河数密度分布に基づき探索された (例えば、Douglass et al. (2023))。しかし、銀河とダークマターの分布の相違に起因する不確実性や系統誤差が伴う。一方、弱重力レンズはソース銀河から発せられた光が途中の質量分布を反映して、わずかに歪曲する効果を示す。これを用いる場合、バイアスなしに直接的に質量密度ゆらぎを知ることができる。ただし、従来の予想では弱い重力レンズを用いたボイド探索では単一の巨大なボイドが発見しづらいとされていた (Amendola et al. 1999)。そこで、私たちは最新のすばる望遠鏡 HSC weak lensing shape カタログを用いて質量マップを再構築し、マップにおける極小領域に相当するトラフ領域を探索した。ただし、質量マップは視線方向に沿った密度ゆらぎの積分値を示したものであり、トラフ領域の 3 次元密度構造を把握することはできない。視線方向の情報を知るために CAMIRA algorithm によって抽出された HSC photometric luminous red galaxy (LRG) カタログと SDSS Data Release 12 の LOWZ & CMASS の分光銀河カタログ を用いて、トラフ領域が単一の巨大な低密度領域か否かを識別した。

論文の構成は次の通りである。２章では弱重力レンズの基礎と質量マップの構築手法を述べる。３章では解析に用いた複数のデータを述べる。４章では私たちが質量マップ解析で得られたトラフ領域を述べる。５章では結果の解釈を述べ、６章でまとめる。

本論文は拙稿 (Shimasue et al. 2023) を基にしており、詳細はそちらを参照してほしい。

2 Methods

本章では、先行研究の手法を参照しつつ、HSC Y3 weak lensing shape カタログから球面調和展開を用いて質量マップに相当するコンバージェンスマップを再構築する手法を述べる。重力レンズ効果とは質量の重い天体がレンズの役割を果たし、ソース銀河から発せられた光がゆがんだり増光したりする現象を指す。特に、ゆがみや増光の程度が比較的小さく、像が１つのものを弱重力レンズ効果と呼ぶ。複数の銀河を観測することで、途中の質量分布を反映した組織的な歪み (Cosmic shear) が生じる。私たちが知りたいのは元々の形からの楕円率の変化分、シア (shear) である。観測量として得られるのは銀河の固有楕円率 (Intrinsic ellipticity) がわずかに歪んだ observed

shear であり、シアと固有楕円率に分ける必要がある。経験的に、シアは次の式で求められる (Oguri et al. 2018b; Shimasue et al. 2023)。

$$\hat{\gamma}_\alpha(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\sum_i w_i(\gamma_\alpha(\boldsymbol{\theta}_i) - c_{\alpha,i})W(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{\theta}_i)}{\sum_i w_i(1+m_i)W(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{\theta}_i)}, \quad (1)$$

$\hat{\gamma}_\alpha(\boldsymbol{\theta}_i)$ は位置 i の銀河のシアであり、表式は各ピクセルで平均化されたシア場を成す。ピクセルは HEALPix における単位領域であり、$N_{\rm pixel} = 512$ を採用している。w_i はレンズ重み付け関数、$c_{\alpha,i}$ は aditive bias、m_i は multiplicative bias、$W(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{\theta}_i)$ はガウシアンスムージングである。得られたシアを用いて、質量密度ゆらぎに相当するコンバージェンス κ を求める。シアとコンバージェンスの関係は曲がった時空におけるシア、コンバージェンスとレンズポテンシャル ψ の関係式

$$\kappa = \frac{1}{4}(\eth\eth + \bar{\eth}\bar{\eth})\psi, \ \gamma = \frac{1}{2}\eth\eth\psi \quad (2)$$

とそれぞれの球面調和展開

$$\psi = \sum_{\ell m} \tilde{\psi}_{\ell m}\, {}_0Y_{\ell m}(\theta,\phi), \quad (3)$$

$$\kappa = \sum_{\ell m} \tilde{\kappa}_{\ell m}\, {}_0Y_{\ell m}(\theta,\phi), \quad (4)$$

$$\gamma = \sum_{\ell m} \tilde{\gamma}_{\ell m}\, {}_2Y_{\ell m}(\theta,\phi) \quad (5)$$

にコンバージェンス、レンジングポテンシャルと重力ポテンシャル Φ の具体的な表式

$$\kappa(\boldsymbol{\theta},\chi_{\rm s}) = \frac{3H_0^2\Omega_{\rm m}}{2c^2}\int_0^{\chi_{\rm s}} \frac{{\rm d}\chi}{a(\chi)}\frac{f_K(\chi_{\rm s}-\chi)f_K(\chi)}{f_K(\chi_{\rm s})}\delta(f_K(\chi)\boldsymbol{\theta},\chi) \quad (6)$$

$$\psi(\chi_{\rm s},\boldsymbol{\theta}) = \frac{2}{c^2}\int_0^{\chi_{\rm s}} {\rm d}\chi \frac{f_K(\chi_{\rm s}-\chi)}{f_K(\chi_{\rm s})f_K(\chi)}\Phi(\chi,\boldsymbol{\theta}) \quad (7)$$

$$\nabla_x^2\Phi(\chi,\boldsymbol{\theta}) = \frac{3\Omega_{\rm m}H_0^2}{2a^2}\delta(\chi,\boldsymbol{\theta}) \quad (8)$$

を代入することで次のようにシアとコンバージェンスの関係式が得られる：

$$\tilde{\kappa}_{\ell m} = -\frac{1}{2}\ell(\ell+1)\tilde{\psi}_{\ell m}, \quad (9)$$

$$\tilde{\gamma}_{\ell m} = \frac{1}{2}\sqrt{(\ell-1)\ell(\ell+1)(\ell+2)}\tilde{\psi}_{\ell m} = -\sqrt{\frac{(\ell-1)(\ell+2)}{\ell(\ell+1)}}\tilde{\kappa}_{\ell m}. \quad (10)$$

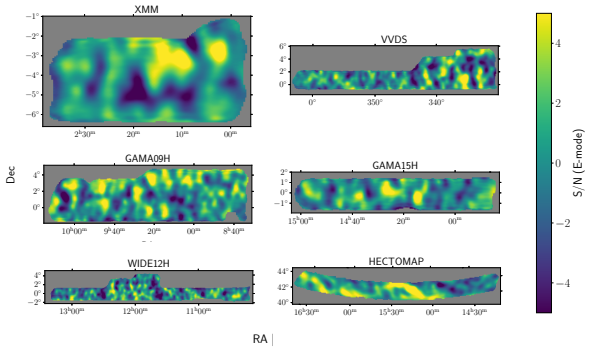


図 1: E モードの S/N マップ。HSC の 6 つの観測領域、XMM, VVDS, GAMA09H, GAMA15H, WIDE12H, HECTOMAP で構成される。

ここで $\eth$ は spin-weighted spherical function の昇降演算子、$\boldsymbol{\theta} = (\theta,\phi)$、$f(k)$ は曲率 K における co-moving angular diameter distance、a は計量因子、$\delta(\chi,\boldsymbol{\theta}) = \frac{\rho-\bar{\rho}}{\bar{\rho}}$ は密度ゆらぎ (density contrast) である。観測している領域とそうでない領域 (Mask) の境界、Edge では系統誤差が大きくなることが知られている。系統誤差を減らし、トラフ領域を定量的に評価するために、私たちはコンバージェンスマップを用いて S/N マップを作成する (詳細は Shimasue et al. (2023) を参照)。作成したものが図 1 になる。また、本章では触れないが、さらなるクロスチェックとして 3 次元質量マップを作成 (Shimasue et al. (2023)) し、弱重力レンズシグナルにおけるトラフ領域を確認した。

3 Galaxy catalogue

本章では視線方向の情報を知るために用いた 2 つの銀河カタログについて簡単に紹介する。

はじめに、CAMIRA algorithm(Oguri et al. 2018a) で選択され、$\Delta z/1+z \sim 0.03$ の正確性が担保された photometric redshift galaxy カタログを用いた。赤方偏移の範囲は $0.1 < z < 1.2$ であり、5,479,879 個 の LRG を含む HSC-SSP の internal data に基づく。

次に、SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey(BOSS) Deta Release 12 data に基づく spectroscopic galaxy カタログを用いた。これは CMASS,LOWZ の、それぞれ $0.4 < z < 0.8$、$z < 0.4$

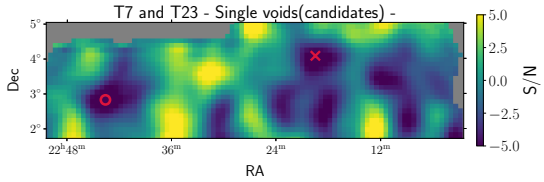


図 2: 質量マップにおける単一の巨大なボイドと考えられる 2 つのトラフ領域 T7(circle) と T23(cross)

の、2 つ異なる赤方偏移の範囲をもつサンプルで構成される。それぞれ 777,202、361,762 個の銀河を含む。CMASS&LOWZ カタログは HSC photometric LRG カタログのクロスチェックとして用いることで、弱重力レンズ解析に得られたトラフ領域が単一の巨大なボイドに由来するか否かを識別した。

4 Results

本章では弱重力レンズ解析で得られたトラフ領域を示し、視線方向の情報を確認することで単一で巨大なボイド由来の可能性があるトラフ領域を提示する。トラフ領域を 23 個リストアップし、銀河カタログを参照することで 15 個がボイド由来のトラフ領域であることを確認した。そのうち、単一で巨大なボイドの候補を 2 つ (T7、T23) 発見した。質量マップは図 2 に示す。また、T7 と T23 の質量マップにおけるコンバージェンス分布を図 3 に示す。同様に、銀河数分布に基づく赤方偏移分布は図 4 となる。

5 Discussion

従来の予想 (Amendola et al. 1999) では単一の巨大なボイドは見つけづらいとされていた。しかし、私たちは単一で巨大なボイド候補を 2 つ発見した。これらのボイドがどのような形状かを知るため、簡単なモデルとして球対称で密度ゆらぎが一様なボイドを考える。簡単のため、ソース銀河の赤方偏移を 1 とし、ボイドの半径を $r_{\rm v} \sim 10h^{-1}$Mpc、密度ゆらぎを最小値 $\delta = 1$ とする。コンバージェンスは以下のようにかける:

$$\kappa_{\rm v} = \frac{2\delta_{\rm v}\bar{\rho}(z_{\rm v})r_{\rm v}}{\Sigma_{\rm crit}}. \tag{11}$$

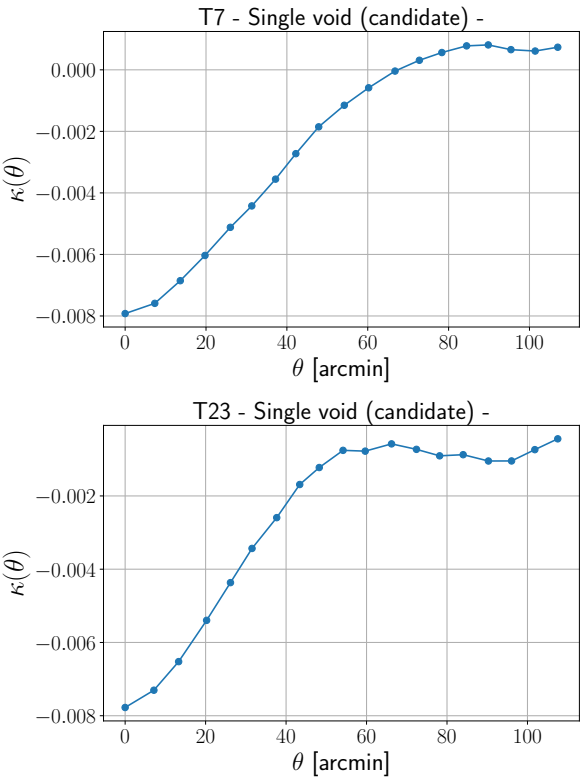


図 3: T7(上)、T23(下) のトラフ中心からの質量マップにおけるコンバージェンス分布。

ここで $\bar{\rho}(z) = (1+z)^3\Omega_{\rm m}\rho_{\rm crit}$ はレンズ天体の赤方偏移 z における平均密度、$\rho_{\rm crit} = 3H^2/8\pi G$ は臨界密度である。臨界面密度 $\Sigma^{-1}_{{\rm crit},i}(z)$ は

$$\Sigma^{-1}_{{\rm crit},i}(z) \approx \frac{4\pi G}{c^2} f_K(\chi(z_s)) \frac{f_K(\chi(z_s) - \chi(z))}{f_K(\chi(z))}. \tag{12}$$

T7、T23 におけるコンバージェンスの計算値は $\kappa_{\rm v} \sim -1 \times 10^{-3}$ となり、観測値 $\kappa_{\rm v} \sim -8 \times 10^{-3}$ よりも大きかった。可能性として、視線方向に長いボイドを想定することで、説明される。実際、シミュレーションにおいて球対称ボイドはほとんど形成されないと予測される (Park et al. 2007)。ただし、計数誤差（Eddington bias）の影響も少なからず含まれると考えられる。

6 Conclusion

私たちは弱い重力レンズで単一の巨大なボイドを探索することが難しい予想を確かめるために、HSC Y3 internal data を用いて質量マップを再構築し、視

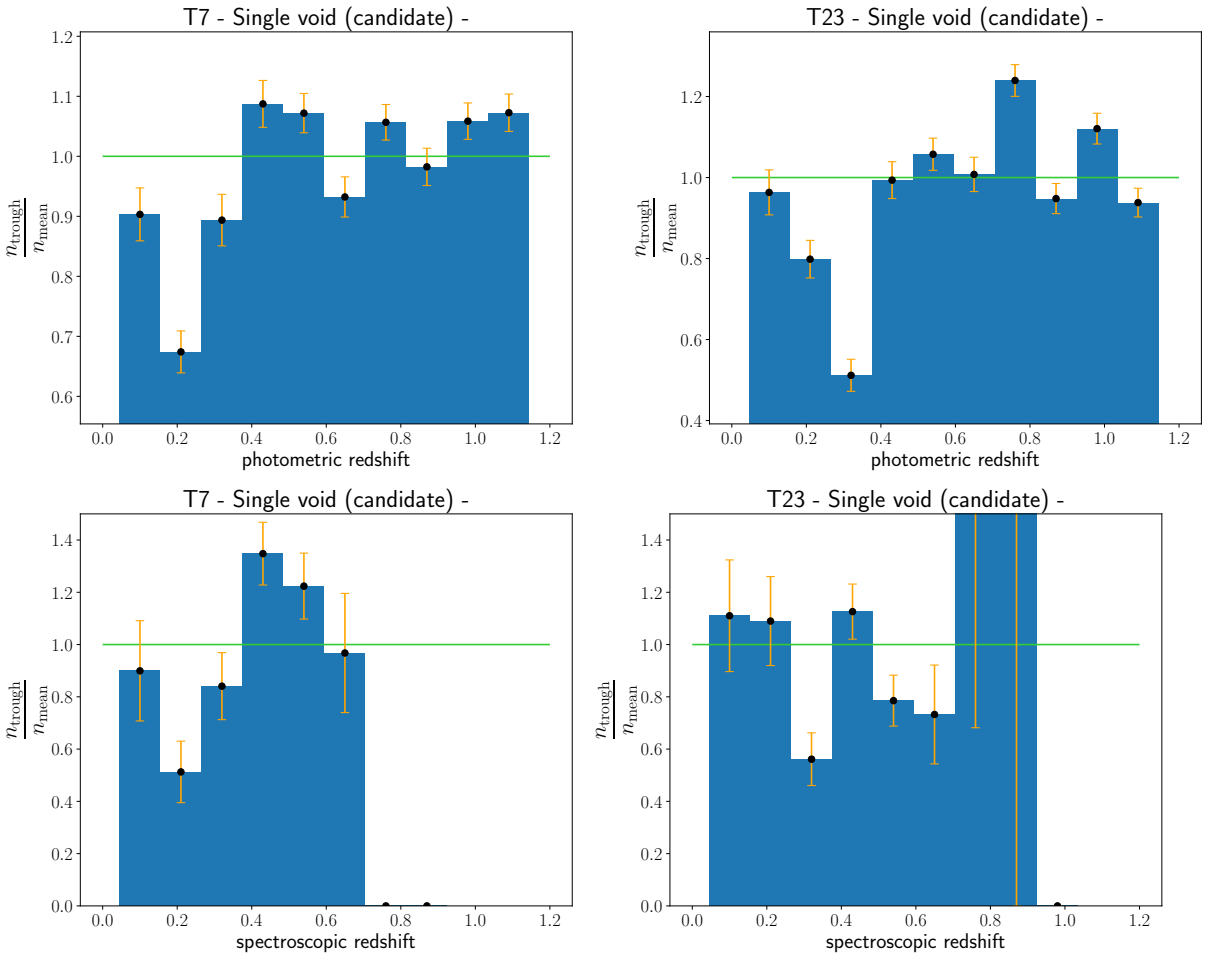


図 4: HSC photometric LRGs (上段) と CMASS/LOWZ 分光銀河 (下段) における T7 と T23 の視線構造。横軸に赤方偏移、縦軸にトラフ中心から 10 arcmin(HSC)、40 arcmin(SDSS) の半径の円に含まれる銀河数密度を、観測領域全体の銀河数密度でわった値 $n_{\rm trough}/n_{\rm mean}$ を示す。緑線は $n_{\rm trough}/n_{\rm mean} = 1$ を表す。

線方向の情報を補うために HSC photometric カタログと SDSS の分光カタログを用いて有意なトラフ領域を識別した。従来の予想に反して、単一で巨大なボイドを 2 つ発見した。球対称一様モデルを仮定してボイドのつくるコンバージェンスを計算すると、観測値の方がより深い値であり、視線方向に長いボイドを想定することで説明できると考えられる。今後、分光サーベイによる追加観測により、本研究で発見されたボイドがリアルか否か確かになるだろう。

7 Aknowlegdement

本研究において、ご指導、有意義な議論をしてくださった、大栗真宗氏、大里健氏、嶋川里澄氏、西澤淳氏に心より感謝申し上げます。また、発表練習にて様々なアドバイスをしてくださった RESCEU の面々にも同様に感謝申し上げます。

Reference

Amendola Luca., Frieman J. A., and Waga, I., 1999, MNRAS.

Douglass K A., Veyrat, D., and BenZvi, Segev, 2014, ApJ.

Shimasue T., Osato K., Oguri M., Shimakawa R., and Nishizawa J. A., 2023, arXiv:2307.11407.

Park D., Lee, J., 2007, Physical Review Letters.

Oguri M., et al. 2018a, PASJ.

Oguri M., et al. 2018b, PASJ.

———index へ戻る

重宇 a24

すばる HSC3 年間データの弱重力レンズ効果の精密測定による平坦な Λ CDM モデルの検証

手良脇 大誠

すばる HSC3 年間データの弱重力レンズ効果の精密測定による平坦な ΛCDM モデルの検証

手良脇 大誠 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

ΛCDM モデルは, 現在の宇宙論における標準モデルであるが, 近年 S_8 という宇宙論パラメタに観測間のテンションが見られるようになった. コズミックシアはこのパラメタに強く依存する現象である. そこで Xiangchong Li et al. 2023 は, すばる HSC の 3 年分の新しいコズミックシアの測定データを解析し, S_8 の値を求めた. 解析はブラインド解析を行うことで確証バイアスを無くし, ベイズ統計を用いて行った. 最終的に $S_8 = 0.769^{+0.031}_{-0.034}$(68%信頼区間) という値が得られ, この値は Planck-2018 の CMB 観測との間に約 95% の確率でテンションを起こしていることが判明した.

1 イントロダクション

1.1 ΛCDM モデルと S_8 テンション

ΛCDM モデルは, 現在の宇宙論における標準モデルであり, ビッグバン元素合成や CMB の異方性など, 多様な宇宙の現象がこのモデルによって説明できる. この標準モデルには, 理論では決められない宇宙論パラメタが未知変数として含まれており, その正確な測定は宇宙論における重要な課題の一つである. そんな中, 近年の精密観測技術の発展に伴い, 宇宙の構造形成の進行度合いを表す S_8 というパラメタに観測間の不整合（テンション）が見られるようになった. すなわち, 本モデルの下で一致すべき S_8 の値に, 観測によって異なる値が示されているのだ.

本発表でレビューする Xiangchong Li et al. 2023 は, すばる望遠鏡の新しい観測データを元に, 重力レンズ効果を用いて S_8 の値を測定し, 既存の測定結果との比較を行った.

1.2 重力レンズ効果（コズミックシア）

重力レンズ効果（コズミックシア）により, 遠方銀河の放つ光は, 光路付近の物質 (銀河団や暗黒物質) が作る重力場によってその経路を曲げられる. そのため, 観測される遠方銀河の像は, 歪められたものとなる. この歪みの影響は, 物質の量を表す宇宙論パラメタ Ω_m 及び S_8 に主に依存するため, 宇宙論パラメタの値決定の重要なツールとなる.

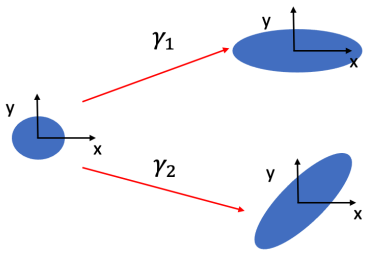


図 1: 銀河の歪みの模式図

銀河形状に対するコズミックシアの影響は大きく二つに分けられる. すなわち, x 軸や y 軸方向に歪められる寄与 γ_1 と, 軸に対して 45 度方向に歪められる寄与 γ_2 である (図 1). 数式的には, (1) 式のように, コズミックシアの影響の有無による座標値の違いを元に γ_1, γ_2 が与えられる.

$$\begin{pmatrix} x_{\rm lensed} \\ y_{\rm lensed} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1+\gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\rm unlensed} \\ y_{\rm unlensed} \end{pmatrix} \quad (1)$$

尚, 実際に観測される銀河の形は「銀河固有の歪み」「コズミックシア」「大気揺らぎなどの観測上の効果による歪み」が組み合わさったものになっている. そのため, 銀河ごとにコズミックシアの情報を引き出すことはできず, 統計的なアプローチをとることになる.

1.3 すばる HSC の観測データ

すばる望遠鏡は, 標高 4200m のハワイ・マウナケア山頂という高地に位置しており, そこに取り付け

られた Hyper Suprime-Cam (HSC) は, 幅広い天域に渡って遠方の宇宙の銀河を観測することのできる広視野のカメラである. 今回は, $0.3 < z < 1.5$, 合計 416 平方度, 2500 万個に及ぶ銀河に対する, 3 年間に渡るすばる HSC の観測データを使用する. 宇宙論パラメタの測定改善のために, 赤方偏移 bin は $z = (0.3, 0.6], (0.6, 0.9], (0.9, 1.2], (1.2, 1.5]$ の四つに分割する. それぞれ bin1,bin2,bin3,bin4 と呼ぶことにする. この際, 各銀河の赤方偏移は二つの測光的手法を組み合わせて求められるが, bin3, bin4 については一方の手法にカバーされていない領域が存在するため, この領域の赤方偏移の値は精度が低い可能性がある.

2 データ解析

2.1 ブラインド解析

以降の解析においては, 「都合の良い結果が得られた段階で解析を終了する」などといった確証バイアスを避けるため, ブラインド解析を行う. すなわち, 同じ観測データを三つ用意し, ランダムに選ばれた二つに適当なバイアスを乗せる. 三つ全ての解析終了後に, どれがバイアスのないデータであったかを明らかにする. そして, 明らかにされた後は, 解析のやり直しはしないと約束する. これにより, 解析中はバイアスのないデータがどれかを知り得ないため, 得られた結果のテンションの有無は分からないまま解析を終了することになる.

2.2 ベイズ統計

先述のように, 個々の銀河だけを見てコズミックシアの影響を測ることはできない. そこで, 統計量である二点相関関数 (2PCF) に着目し, ベイズ統計的な解析を行うことになる. すなわち, まず Ω_m などの宇宙論パラメタを含むパラメタのセット Θ を用意し, 事前（確率）分布を与える. そして, 2PCF の観測データを元にこの確率分布を更新し, 事後（確率）分布を求める. この過程は, 次の数式で与えられる.

$$P(\Theta|\hat{\xi}_\pm) \propto \mathcal{L}(\hat{\xi}_\pm|\Theta)\Pi(\Theta) \tag{2}$$

$\Pi(\Theta), P(\Theta|\hat{\xi}_\pm)$ はそれぞれ Θ の事前分布, 事後分布である. $\mathcal{L}(\hat{\xi}_\pm|\Theta)$ は尤度関数と呼ばれ, 観測される 2PCF ($\hat{\xi}_\pm$) の情報が含まれた量となっている. 具体的には次式で与えられる.

$$\ln \mathcal{L}(\hat{\xi}_\pm|\Theta) = -\frac{1}{2}(\hat{\xi}_\pm - \xi_\pm(\Theta))^T C^{-1}(\hat{\xi}_\pm - \xi_\pm(\Theta)) \tag{3}$$

$\xi_\pm(\Theta)$ はパラメタのセット Θ から理論的に求まる 2PCF である. また, C は共分散行列と呼ばれ, シミュレーションから求まる. 従って, 観測的及び理論的な 2PCF と, Θ の事前分布を与えれば, 求める Θ の事後分布が得られることになる.

2.3 観測的な二点相関関数

すばる HSC のデータから大気揺らぎなどの観測上の効果を差し引くことで, 銀河固有の歪みとコズミックシアからなる観測量 γ_1, γ_2 が得られる. 各銀河の γ_1, γ_2 の値を用いると, 以下の式によって赤方偏移の bin の組ごとの 2PCF が観測量として得られる.

$$\hat{\xi}^{nm}_\pm(\theta) = \frac{\sum_{i,j} w(\mathbf{r}_i)\gamma_+(\mathbf{r}_i)w(\mathbf{r}_j)\gamma_+(\mathbf{r}_j)}{\sum_{i,j} w(\mathbf{r}_i)w(\mathbf{r}_j)} \pm \frac{\sum_{i,j} w(\mathbf{r}_i)\gamma_\times(\mathbf{r}_i)w(\mathbf{r}_j)\gamma_\times(\mathbf{r}_j)}{\sum_{i,j} w(\mathbf{r}_i)w(\mathbf{r}_j)} \tag{4}$$

θ は二つの銀河がなす角, $\mathbf{r_i}$ は各銀河の位置ベクトルであり, w はシミュレーションから求められる銀河ごとの重みである. また, γ_+ と $\gamma_\times$ は γ_1 と γ_2 の基底の取り方を変えたものである. そして, 左辺の n, m は共に bin を表す添字であり, 右辺の Σ は n, m に対応する銀河の組を動く. すなわち, 観測された全銀河のうち, なす角度が θ である銀河の組であって, 一方の銀河が bin n に, もう一方が bin m にいるようなペアについて総和を取っている. こうした bin の組の作り方は, 10 通り存在する. こうして実際に測定された 2PCF を図 2 に示す. 下三角の 10 個が ξ_+ に, 上

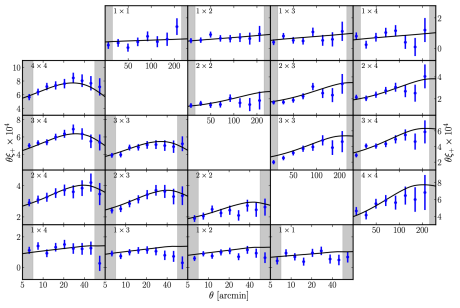


図 2: 観測された 2PCF (Li et al. 2023 より.)

三角の 10 個が ξ_- に対応している．尚, 角度 θ については 7 つの bin に分けられており, 灰色で示された領域は解析に使用しない．また, 青の実線は ΛCDM モデルの理論予言であり, 観測との間に矛盾はなかった (p 値=0.28).

2.4 理論的な二点相関関数

理論的な 2PCF は次のように角度パワースペクトル C を用いて展開できる．

$$\xi_{\pm}^{nm}(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int dll J_{0/4}(\theta l) \times (C^{E;nm}(l) \pm C^{B;nm}(l)) \quad (5)$$

$$C^{E;nm} = C_{GG}^{E;nm} + C_{II}^{E;nm} + C_{GI}^{E;nm} + C_{GI}^{E;mn} \quad (6)$$

$$C^{B;nm} = C_{II}^{E;nm} \quad (7)$$

GG は二つの銀河のコズミックシアの相関に由来する寄与, II は二つの銀河の固有歪みに由来する寄与, GI は一方のコズミックシアともう一方の固有歪みに由来する寄与である．また, C^E は E モードを, C^B は B モードを表しており, コズミックシアの B モードが無視できることから (7) 式には II 成分しか登場しない.

ここに現れた角度パワースペクトルは, 理論モデルを用いることにより計算可能である．例えば C_{GG}^E は物質のパワースペクトルのモデルを元に計算可能であり, この際, 宇宙論パラメタ $(\Omega_m, A_s, n_s, h, \omega_b)$ を未知変数として導入することになる．このために 2PCF の観測から宇宙論に制限をかけられるのである. その他の角度パワースペクトルもモデルを用いて計算可能であり, 最終的に 11 個の未知変数が導入される.

2.3 節で見たように, 観測的な 2PCF は観測上の効果を引いた上で求められている．しかし, この効果の処理が不完全である恐れがある．また, 使用している銀河の赤方偏移の値も正確でない恐れがある．そこで, こうした不完全さからくるパラメタも理論式に未知変数として導入する. このパラメタは 12 個となる.

2.5 事前分布

前節の議論から, Θ は物理的パラメタ 11 個と系統的パラメタ 12 個の合計 23 個のパラメタからなる．これらのパラメタに適切な事前分布を与える必要がある．宇宙論パラメタを含む物理的パラメタに関しては, 事前情報がない（この値の可能性が高い, というような情報を持っていない）と考え, 一様な確率分布を用いる．一方で, 系統的パラメタについては, 観測値の不正確さが理想的には 0 であることから, 0 周りのガウシアンを事前分布とする．尚, 1.3 節でも述べたように, bin3,4 の赤方偏移の値には不定性があるため, 例外的に一様な事前分布を用いる. 最終的な事前分布の一覧は図 3 のようになる．尚, この表に S_8 は含まれていないが, S_8 は宇宙論パラメタから計算可能であるため, やはり事後分布を得ることができる.

宇宙論パラメタ

その他の物理的パラメタ

観測の不確かさのパラメタ

Parameter	Prior
Cosmological parameters (Section IV A)	
Ω_m	$\mathcal{U}(0.1, 0.7)$
A_s ($\times 10^{-9}$)	$\mathcal{U}(0.5, 10)$
n_s	$\mathcal{U}(0.87, 1.07)$
h_0	$\mathcal{U}(0.62, 0.80)$
ω_b	$\mathcal{U}(0.02, 0.025)$
Baryonic feedback parameters (Section IV A)	
A_b	$\mathcal{U}(2, 3.13)$
Intrinsic alignment parameters (Section IV B)	
A_1	$\mathcal{U}(-6, 6)$
η_1	$\mathcal{U}(-6, 6)$
A_2	$\mathcal{U}(-6, 6)$
η_2	$\mathcal{U}(-6, 6)$
b_{ta}	$\mathcal{U}(0, 2)$
Photo-z systematics (Section IV C)	
Δz_1	$\mathcal{N}(0, 0.024)$
Δz_2	$\mathcal{N}(0, 0.022)$
Δz_3	$\mathcal{U}(-1, 1)$
Δz_4	$\mathcal{U}(-1, 1)$
Shear calibration biases (Section IV D)	
Δm_1	$\mathcal{N}(0.0, 0.01)$
Δm_2	$\mathcal{N}(0.0, 0.01)$
Δm_3	$\mathcal{N}(0.0, 0.01)$
Δm_4	$\mathcal{N}(0.0, 0.01)$
PSF systematics (Section IV E)	
$\alpha'^{(2)}$	$\mathcal{N}(0, 1)$
$\beta'^{(2)}$	$\mathcal{N}(0, 1)$
$\alpha'^{(4)}$	$\mathcal{N}(0, 1)$
$\beta'^{(4)}$	$\mathcal{N}(0, 1)$

図 3: 使用する事前分布 (Li et al. 2023 より.)

3 解析結果と考察

最終的に得られた 23 次元の事後分布を, 重力レンズ効果において重要なパラメタである (Ω_m, S_8) の二次元に積分して得られる確率分布を図 4 の青い領域で示す．図 4 の左が DES-Y3, KiDS-1000,Planck-2018 との比較を, 右が BAO 観測（eBOSS）との比較を表している．この図から, DES-Y3, KiDS-1000, BAO 観測とは無矛盾であるが Planck-2018 との間には不整合が示唆されている．続いて, S_8 の一次元確率分布に注目すると（図 5）, 最頻値（図 5 のピークに相当）の値が $S_8 = 0.769^{+0.031}_{-0.034}$(68%信頼区間) であり, この値と Planck-2018 の観測結果との間には, 約 95%の

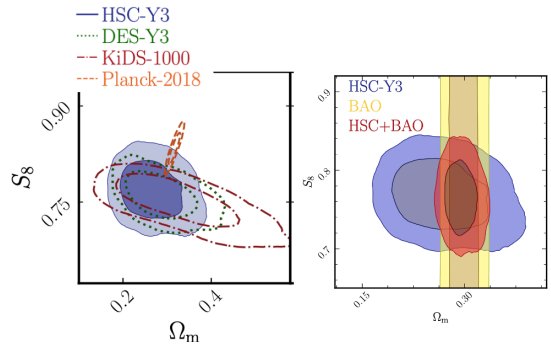


図 4: (Ω_m, S_8) の二次元事後分布 (Li et al. 2023 より.)

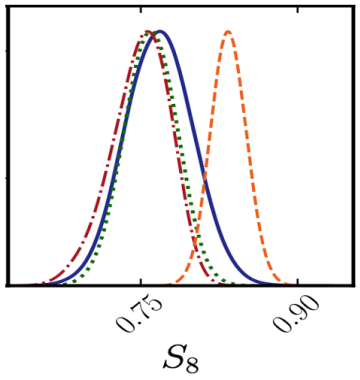


図 5: S_8 の一次元事後分布 (色分けは図 4 と同じ)(Li et al. 2023 より.)

確率でテンションが存在すると分かった. また, 事前分布・理論モデルの様々な変更や, 使用するデータ数の制限に対してこの結果がロバストであることも確認され, 今回得た結果がモデル依存な結果でないことも確かめられた.

bin3,4 の赤方偏移測定値の不確かさパラメタには一様な事前分布を与えていた. 今回得た事後分布をこれらのパラメタ以外について積分すると, それぞれの最頻値は $\Delta z_3 = -0.115^{+0.052}_{-0.058}, \Delta z_4 = -0.192^{+0.088}_{-0.088}$ となった. この値は 0 から有意にずれており, 高赤方偏移銀河の z の観測値が正確でないことを意味する. 一様分布よりもガウシアンを用いた方が S_8 への制限も強まると考えられるため, 高赤方偏移銀河の赤方偏移のさらなる較正が次なる課題の一つとなる.

4 まとめ

Xiangchong Li et al. 2023 は, すばる HSC の $0.3 < z < 1.5$, 合計 416 平方度, 2500 万個に及ぶ 3 年間の銀河観測データを使用し, 重力レンズ効果の二点相関関数に着目して S_8 の測定を行った. 確証バイアスをなくすためにブラインド解析を行い, ベイズ統計に従った解析を行うことにより最終的に $S_8 = 0.769^{+0.031}_{-0.034}$(68%信頼区間) という結果に至った. この結果は DES-Y3, KiDS-1000, BAO 観測とは無矛盾であるが, Planck-2018 の CMB 観測との間には約 95%の確率でテンションが存在しており, ΛCDM モデルの綻びを示唆している. 高赤方偏移銀河の赤方偏移の値については測光観測の結果が正確でない可能性が示唆されており, より強い制限のためにも, 高赤方偏移銀河の z の較正が必要である.

Reference

Xiangchong Li et al. 2023. “Hyper Suprime-Cam Year 3 Results: Cosmology from Cosmic Shear Two-point Correlation Functions”. (arXiv:2304.00702).

——————index へ戻る

重宇 a25

SQLSからのエリスワームホールと負質量コンパクト天体の存在量に対する観測的な上限

吉崎 允泰

SQLS からの負質量コンパクト天体の存在量に対する観測的な上限

名古屋大学大学院 宇宙論研究室 M1
吉崎　允泰

Abstract

負質量物体は通常の物質とは異なり、質量が負の値をとるような仮想的な物質であり、斥力重力を生む。(H. Bondi 1957) 負の質量は 19 世紀から議論されてきたがそれを示す証拠は全く掴めていない。本研究では負質量コンパクト天体が存在すると仮定し、スローン・デジタル・スカイ・サーベイ (SDSS) のクエーサー・レンズ・サーベイ (SQLS) の重力レンズ探査により存在量を推定する。
負質量コンパクト天体のレンズ効果によってクエーサーの複数の像が作られる。そこで複数の像から負質量コンパクト天体の質量とレンズ効果を受ける確率から存在量の上限を推定した結果、負質量コンパクト天体の存在量の上限は銀河や銀河団より少ないことが分かった。更なる観測精度の向上によって、多くのレンズ効果を受けたクエーサーの発見に至れば、負質量コンパクト天体に対する強い制限が期待される。本講演は (R. Takahashi & H. Asada 2013) に基づいたレビューである。

1　導入

理論物理学において負質量物体が通常の物質とは異符号となる物質であると仮想的に考えられることにより、負質量物体は斥力を及ぼす。負質量物体については 19 世紀から考えられてきたが、実際に存在するという証拠は未だに得られていない。
重力質量が負であると考えたとき、慣性質量は正負のどちらも取りうるため 2 つに場合分けして考える。もし負質量物体の慣性質量が正である場合、重力は通常の物質に対しては斥力が働き負質量物体に対しては引力が働く。ここで通常の物質も負質量物体も慣性質量が正のため、それぞれの加速度の方向は力の働く方向と同じである。一方で負質量物体の慣性質量が負である場合、通常の物質と負質量物体に対しては力は先ほどと同様に働くが、負質量物体の加速度の方向のみ力と反対方向となる。

通常の天体による重力レンズ効果は図 1 のように作用する。一方で負質量コンパクト天体による重力レンズ効果は、図 2 のように光が曲げられると考えられている。

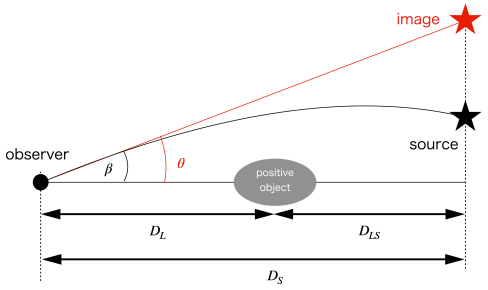


図 1: 通常の重力レンズ効果を表した図である。D_L は観測者とレンズ天体との距離、D_{LS} はレンズ天体と光源との距離、D_S 観測者から光源との距離、β は光源の角度位置、θ は像の位置を表す。

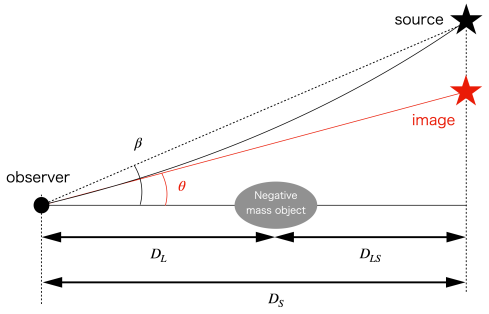


図 2: 負質量天体による重力レンズ効果を表した図である。

負質量コンパクト天体は斥力を及ぼし物質の降着が起こらないため、負質量コンパクト天体を直接観測することはできない。そこで近年では重力レンズ

による間接的観測が試みられてきた。負質量コンパクト天体による遠方のクェーサーに対する重力レンズ効果を考えるが、クェーサーの位置によって生成される像の数が変化する。負質量コンパクト天体による重力レンズ効果を受ける確率からレンズ天体の存在量に制限を与える。今回 SQLS のデータを用いる。SQLS は SDSS Ⅱ Data Release 7 からのクェーサーレンズ調査に関するデータである。(York et al. 2000) このデータには赤方偏移 $z = 0.6 - 2.2$ かつ見かけの光度 $i < 19.1$ の範囲に 50,836 個のクェーサーが含まれる。今回はその中でも複数の像の角度差が 1”から 20” までの 19 個のクエーサーについて考える。$G = c = 1$、ハッブル定数 $h = 0.7$、物質密度 $\Omega_m = 0.28$、宇宙定数 $\Omega_\Lambda = 0.72$ を用いる。

2　負質量天体の重力レンズ効果

負質量コンパクト天体に対するレンズ方程式は式 (1) となる。このとき観測者からレンズ天体までの距離 D_L、観測者から光源までの距離 D_S、光源からレンズ天体までの距離 D_{LS}、光源の角度位置 β、像の角度位置 θ を用いる。この状況は図 3 に示した。

$$\beta = \theta + \frac{{\theta_E}^2}{\theta} \tag{1}$$

ただしアインシュタイン角度は式 (2) のようになる。

$$\theta_E = \left(4|M|\frac{D_{LS}}{D_L D_S}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

式 (1) を β について解くと式 (3) のようになる。

$$\theta = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4{\theta_E}^2}}{2} = \theta_\pm \tag{3}$$

式 (3) より $\beta < 2\theta_E$ の時は像はできず、$\beta = 2\theta_E$ の時は 1 つの像ができ、$\beta > 2\theta_E$ の時は 2 つの像ができることが分かる。β と θ_E の大小関係による像の個数については図 3、4、5 にまとめた。

また倍率と像の位置角度差を求めることもできる。倍率 $\mu_\pm$ は

$$\mu_\pm = |1 - {\theta_E}^4/{\theta_\pm}^4| \tag{4}$$

となる。像の角度位置差 $\Delta\theta$ は

$$\Delta\theta_\pm = |\theta_+ - \theta_+| \tag{5}$$

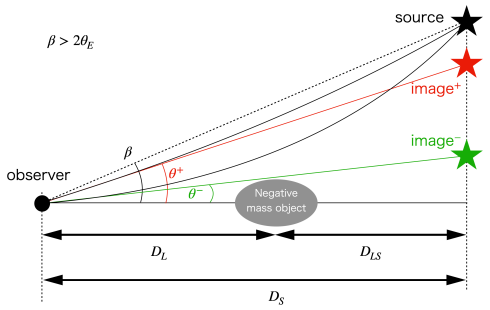


図 3: $\beta > 2\theta_E$ の時の負質量コンパクト天体のレンズ効果を表す。θ^+ は image$^+$ の角度位置、θ^- は image$^-$ の角度位置を表す

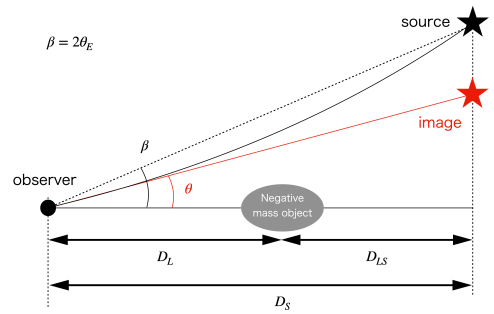


図 4: $\beta = 2\theta_E$ の時の負質量コンパクト天体のレンズ効果

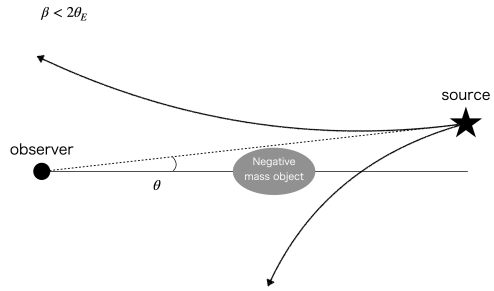


図 5: $\beta < 2\theta_E$ の時の負質量コンパクト天体のレンズ効果

となる。
式 (2) を $|M|$ について解くと

$$|M| \approx 1 \times 10^{11} h^{-1} M_\odot \left(\frac{\theta_E}{1''}\right)^2 \frac{D_L D_S}{D_{LS} \times 1h^{-1}\mathrm{Gpc}} \tag{6}$$

となることが分かり、複数の像の位置角度差が 1” − 20” の範囲にあるものを考えているため、対応する質量の典型的な負質量コンパクト天体は $|M| = 10^{11-14} M_\odot$ となる。

3　強重力レンズ効果を受ける確率

強重力レンズ効果について考えるため、レンズ天体が宇宙で一様に分布していると仮定する。強重力レンズ効果を受ける確率は基本的に SQLS での計算に従って行う。(M. Oguri et. al.　2012)

まず断面積 σ を求める。SQLS では角度位置が 1" $< \Delta\theta <$ 20" の範囲にありフラックス比 μ_+/μ_- が $10^{-0.5}$ より小さいクェーサーの複数の像が調べられた。これらは複数の像が同一のクェーサーの像であることを定義している。以上のことを加味して断面積を求めると

$$\sigma = 2\pi {D_L}^2 \int_{\beta_{\min}}^{\beta_{\max}} d\beta\beta \frac{\Phi(L/\mu, z_s)}{\mu\Phi(L, z_s)} \Theta\left(10^{-0.5} - \frac{\mu_+}{\mu_-}\right) \Theta(\Delta\theta - 1'')\Theta(20'' - \Delta\theta) \quad (7)$$

となる。ここで $\Theta(x)$ はステップ関数で、$\beta_{\max}$ と $\beta_{\min}$ は光源の位置に関する最大値と最小値を表す。複数の像が形成される状況を考えているため、今回は $(\beta_{\min}, \beta_{\max}) = (2\theta_E, \infty)$ である。$\Phi(L, z_s)$ は z_s での光度関数である。

次に断面積を表す式 (7) を用いて強重力レンズ効果を受ける確率を求める。ここでレンズ天体の数密度は共動体積では一定であると仮定する。このとき赤方偏移が z_s で見かけの明るさが m_i であるクェーサーに対するレンズ効果を受ける確率 P は

$$P(z_s, m_i) = \int_0^{z_s} dz_l \frac{cdt}{dz_l} n(1+z_l)^3 \sigma \quad (8)$$

となる。ただし z_l はレンズ天体の赤方偏移を表し、$cdt/dz_l = 1/(H(z_l)(1+z_l))$ となる。また P はレンズ天体の数密度 n に比例する。

最後に Kochanec が導入した尤度関数を用いる。(C.S. Kochanek　1993) この時の尤度関数は SQLS のデータを用いて負質量コンパクト天体の存在量に対する上限を求める。その際 1σ に相当する信頼区間、つまり 68% 信頼区間と 2σ に相当する信頼区間、つまり 95% 信頼区間を求めた。さらに密度パラメーター $\Omega = Mn/\rho_{cr}$ を求め、図 6 にプロットした。

4　結果と展望

図 6 より銀河や銀河団のスケールである $|M| = 10^{12-15} M_\odot$ において $|\Omega| < 10^{-4}$ となる。典型的なルミノシティー L^* を持つ銀河の数密度は $n_{gal} \approx 10^{-2}\mathrm{Mpc}^{-3}$ で、密度パラメーターは $\Omega_{gal} \approx 0.2$ である。典型的な質量 $10^{14} M_\odot$ を持つ銀河団の数密度は $n_{clust} \approx 10^{-4}\mathrm{Mpc}^{-3}$ で、密度パラメーターは $\Omega_{clust} \approx 0.3$ である。よって負質量コンパクト天体は銀河や銀河団より少ないことが分かった。以上のように負質量コンパクト天体の存在量に対して重力レンズ効果を用いて上限を設けた。今回は 50,836 個中の 19 個のクェーサーに対して考えたため、今後の調査の発展により強い制限を得られると期待される。また負質量天体同士は引きつけ合いボイドに存在する。密度に関する空間平均量をもとに、ボイドの密度コントラストは式 (9) のように定義する。

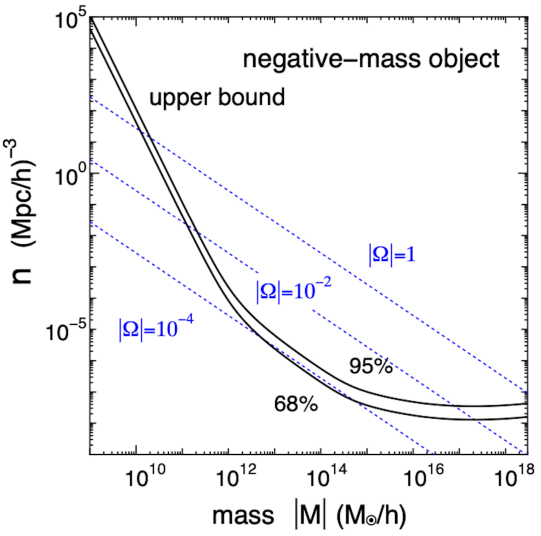


図 6: 負質量コンパクト天体の数密度 (R. Takahashi & H. Asada 2013) より引用

$$\delta(t, \vec{x}) = \frac{\rho_{\mathrm{void}}(t, \vec{x}) - \bar{\rho(t)}}{\bar{\rho}(t)} \quad (9)$$

式 (9) が -1 より小さいことが分かれば $\rho(t, \vec{x}) < 0$ となる。そのことから負質量天体が存在すると示される。

Reference

H. Bondi 1957, Rev.Mod.phys. 29 1957 423

R. Takahashi, & H. Asada 2013, Astrophys.J.Lett. 768 2013 L16

M. Oguri, N. Inada, M.A. Strauss, &et al., 2012, AJ, 143, 120

C.S. Kochanek, 1993, ApJ, 419, 12

York &et al. 2000, AJ, 120, 1579

————index へ戻る

重宇 a26

初期宇宙における原始磁場の減衰機構

山下 由莉

初期宇宙での原始磁場の減衰機構

山下 由莉 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙には至る所に磁場が存在しており、地球や太陽などの天体は自身で磁場を発生させている。しかし、天体のほとんど存在していないボイドのような領域にも 10^{-20} $10^{-15}G$ 程度の磁場が存在する。

このボイド領域の磁場の起源と発展には様々なシナリオが考えられている。その一つに再結合以前 (赤方偏移 $z > 1300$) の初期宇宙で磁場が生成され（この磁場を原始磁場と呼ぶ)、その後プラズマ流体と凍結することで減衰をし、現在のボイド領域の磁場になったというものがある。

本発表ではこのシナリオを採用し [1]、減衰過程での磁場の減衰機構に注目する。磁場の減衰の解析には一次の摂動で近似した相対論的 MHD 方程式を用いる。解析結果、物理的描像、そして観測的展望を議論する。

1 Introduction

初期宇宙で原始磁場が生成された後、磁力線は宇宙プラズマ流体に凍結した。そして従来では,Maxwell 方程式から、磁場はスケールファクターの 2 乗 $B \propto a^{-2}$ で減衰するとされていた。しかしこの減衰を説明するシナリオでは、磁場中のプラズマ流体で発生する種々の波による減衰効果が無視されてしまっている。本来磁場中のプラズマ流体では Magneto-Hydro-Dynamics モード (MHD モード）と呼ばれる縦波・横波の様々な波が発生する。そのため、それら波の減衰を考慮することでより高い精度で原始磁場の減衰を説明できる。

磁場の入っていない流体では、流れなし・温度一様である状態において、音波は等方的に広がる 1 つのモードのみである。一方、MHD モードでは 3 つの異なるモードが存在する。それぞれ、アルヴェン波、速い磁気音波、遅い磁気音波と呼ばれる。アルヴェン波は横波、速い・遅い磁気音波は縦波である。

今回注目する時期はニュートリノ脱結合付近から光子の再結合まで ($z > 1300$) の初期宇宙である。この間に MHD モードは表 1 のような減衰時期を経験したとされる。つまり、ニュートリノ脱結合までにニュートリノによる MHD モードの 2 段階の減衰が起こる。そして、同時期から光子の再結合までに光子による 2 段階の減衰が起こるという具合である。

そこで、これら 2 段階の減衰の物理的描像を説明する。1 段階目は放射拡散機構と呼ばれる。これはいわゆる熱伝導、粘性による MHD モードの減衰を表しており、減衰によって失われた磁場のエネルギーは流体に熱エネルギーとして散逸する。そして 2 段階目は放射自由流れ機構と呼ばれる。脱結合粒子 (ここではニュートリノと光子) の平均自由行程は宇宙膨張によって成長する。自由流れ機構は MHD モードの波長よりも長くなった段階を指している。ここでは、脱結合粒子がバリオン流体を引きづることで密度揺らぎがならされ、結果バリオン流体 (プラズマ流体) に凍結している MHD モードが減衰する。

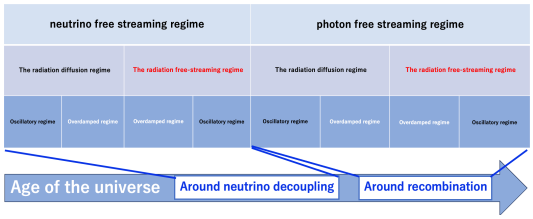


図 1: 減衰段階

また、表内の Oscillatory regime は振動しながら減衰する段階で、Overdamped regime は脱結合粒子の平均自由行程の成長によって振動せずに減衰する過減衰の段階を表す。

本論文では、MHD モードの振幅が e^{-1} 倍されたとき' 減衰を受けた' と定義している。この時、減衰を受けたある MHD モードの最大の波長を減衰スケールと定義する。減衰スケールは脱結合粒子の平均自由行程の成長に伴って成長することから、温度 T の関数となっている。

2　解析手法

計量は曲率 0 の Robertson-Walker metric

$$g_{\mu\nu} = diag(1, -a^2, -a^2, -a^2) \tag{1}$$

を用いた。エネルギー運動量保存則

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \tag{2}$$

が成りたち、これを用いて相対論的 MHD 方程式を導出した。ここで用いるエネルギー運動量テンソルは放射拡散機構と放射自由流れ機構で異なり、拡散機構では

$$T^{\mu\nu} = T_I^{\mu\nu} + \tau^{\mu\nu} + T_{EM}^{\mu\nu} \tag{3}$$

自由流れ機構では

$$T^{\mu\nu} = T_I^{\mu\nu} + T_{EM}^{\mu\nu} \tag{4}$$

を用いた。ここで、$T_I^{\mu\nu}$ は理想流体のエネルギー運動量テンソル、$\tau^{\mu\nu}$ は粘性、熱伝導を表すテンソル、$T_{EM}^{\mu\nu}$ は電磁エネルギー運動量テンソルである。自由流れ機構では流体はバリオンのみで構成されていると仮定し、脱結合粒子はバリオン流体と時折衝突する背景として扱う。ここへ物理量を背景成分と摂動成分に分けて (3)(4) へ代入することで、相対論的 MHD 方程式を導出した。

MHD 方程式を導出した後、周波数と波数の関係式である分散関係式を導出するために、方程式をフーリエ変換した。フーリエ変換は

$$\phi\ (\mathrm{x}, t) = \int d^3\mathrm{k}\ \phi\ (\mathrm{k}, t) exp(i\mathrm{k}\cdot\mathrm{x}) \tag{5}$$

$$\phi\ (\mathrm{k}, t) = \phi_k(t) exp(\int i\ \omega\ (t) dt) \tag{6}$$

を用いた。フーリエ変換を施すことで、2 段階の減衰での MHD モードの分散関係式を導出した。

3　結果・考察

分散関係式を解くことで周波数ωを波数の関数で記述できる。ωは複素数であり、実部が波の伝播率、虚部が減衰率を示す。さらにωの虚部から、先述した減衰スケールを温度の関数として導出している。[1]

MHD モードごとでそれぞれ分散関係式を導出するので、それぞれで異なる減衰スケールが導出された。速い磁気音波では、再結合時の減衰スケールは銀河スケールにまで及んだ。これは現在観測される銀河磁場がダイナモ増幅を経験した可能性が大いにあることを示唆している。一方、遅い磁気音波とアルヴェン波では再結合時の減衰スケールは銀河スケールほど大きくはない。これは比較的小さなスケールで磁場が生き残ることを示唆しており、初期の段階での恒星の形成などに重要である可能性がある。

4　展望

今回の解析結果では、減衰スケールは時間と共に成長することになる。つまり小スケール側の磁場の減衰が著しくなる。これは小スケールでエネルギーが卓越する原始磁場の生成理論への制限をかけることにつながる。ここに関しては別途調査中である。また現在、超大型電波望遠鏡 Squqre Kilometre Array(SKA) による宇宙磁場の解明が期待されている。[2] その中で天体による磁場の影響を受けづらいボイド領域や銀河間の探査も期待されている。今後は原始磁場の生成理論・減衰機構の観測制限、数値計算による制限可能性について調べたいと考えている。

Reference

[1] Karsten Jedamzik, Višnja Katalinić, and Angela V. Olinto ,Phys. Rev. D 57, 3264,1998

[2] 日本版 Square Kilometre Array サイエンスブック 2020

———index へ戻る

重宇b01

コンパクトなボゾンスターをどうやって作るか

宮内 侑

未提出

———index へ戻る

重宇 b02

warm dark matter の mass function

小野 瑞季

Warm Dark Matter モデルの高分解能シミュレーションによる subhalo mass function

小野 瑞季 (北海道大学大学院 宇宙理学専攻)

Abstract

ΛCDM モデルは、現在、構造形成の標準的なモデルとなっている。しかし、cold dark matter (CDM) モデルには、銀河より小さなスケールで様々な問題が指摘されている (missing satellite, core-cusp, too-big-to-fail など)。また、このような小スケールではダークマター （DM） の分布はバリオンの影響を強く受けるため、その性質はあまり制限されていない。そのため、大スケールでは CDM と同様に振る舞い、小スケールで CDM と異なる振る舞いをする DM を考える余地があり、候補として warm dark matter (WDM) がある。WDM はその質量により、例えば天の川銀河のダークハローに含まれるサブハローの数などに対して異なる予言をするため、観測的にサブハローの質量関数が得られれば WDM の質量に制限を付けることが可能である。そのためには観測と対比する理論モデルが必要となる。そこで、1 keV と 10 keV の WDM の宇宙論的 N 体シミュレーションを行い、$z = 0$ に $\sim 10^{12} M_\odot$ となる DM ハローのサブハロー質量関数を調べた。WDM では数値ノイズを種に形成される偽ハローが問題となるため、Lovell et al. (2014) の方法を用いて偽サブハローを取り除いたのち、extended Press-Schechter を用いた理論モデル (Hiroshima et al. 2018) と比較した。その結果、理論モデルは $z = 0$ から 1 までは我々のシミュレーション結果を良く再現することがわかったが、$z = 2$ ではサブハローの数を過小評価することがわかった。本講演ではこれらの結果について報告し、理論モデルとシミュレーションの不一致の原因について議論する。

1 Introduction

平坦低密度な Lambda-Cold Dark Matter（ΛCDM）モデルは、現在、構造形成の標準的なモデルとなっている。しかし、CDM モデルには、銀河より小さなスケールで様々な問題が指摘されている（missing satellite, core-cusp, too-big-to-fail など）。また、この様な小スケールではダークマターの分布はバリオンの影響を強く受けるため、その性質はあまり制限されていない。そのため、大スケールでは CDM と同様に振る舞い、小スケールでは CDM と異なる振る舞いをするダークマターを考える余地がある。そのような候補の 1 つとして Warm dark matter（WDM）がある。WDM はその質量により、例えば天の川銀河のダークマターハローに含まれるサブハローの数などに対して異なる予言をするため、観測的にサブハローの質量関数が得られれば、WDM の質量に制限をつけることが可能である。そのためには観測と対比する理論モデルが必要となる。そこで、その質量が 1 keV と 10 keV の WDM の宇宙論的 N 体シミュレーションを行い、$z = 0$ に $\sim 10^{12} M_\odot$ となるダークマターハローのサブハロー質量関数を調べた。

2 Simulation

本研究では、CDM モデルと 1keV、10keV の WDM モデルの宇宙論的 N 体シミュレーションを行った。宇宙論パラメータは PLANCK の最新結果に基づいて決定した (Aghanim et al. 2021)。用いた宇宙論パラメータは、物質密度 $\Omega_m = 0.3158$、ダークエネルギー密度 $\Omega_\Lambda = 0.6842$、ハップルパラメータ $h = 0.6732$、スペクトル指数 $n_s = 0.96606$、パワースペクトル規格化定数 $\sigma_8 = 0.81$ である。WDM モデルのシミュレーションで用いた初期密度揺らぎのパワースペクトルは伝達関数 $T(k)$ を用いて以下の式で表されている。

$$P_{\rm WDM}(k) = T^2(k) P_{\rm CDM}(k)$$

ここで、$P(k)$ は共動波長 k の関数としたパワースペクトルである。$T(k)$ は Bode et al. (2001) で以下の

ように与えられている。

$$T(k) = (1 + (\alpha k)^{2\nu})^{-5/\nu}$$

ここで、ν は定数で、本研究では $\nu = 1.12$ とした。また、α はパワースペクトルのカットオフの位置を決めるパラメータであり、例えば、α が大きいほどカットオフスケールがより大きくなる。α は Bode et al. (2001) で WDM 粒子の質量 $m_{\rm WDM}$ に対応づけられており、以下の式で得ることができる。

$$\alpha = \frac{0.05}{h\ {\rm Mpc}^{-1}} \left(\frac{m_{\rm WDM}}{1{\rm keV}}\right)^{-1.15} \left(\frac{\Omega_{\rm WDM}}{0.4}\right)^{0.15} \times \left(\frac{h}{0.65}\right)^{1.3} \left(\frac{g_{\rm WDM}}{1.5}\right)^{-0.29}$$

ここで、$\Omega_{\rm WDM}$ は WDM が寄与する密度パラメータ、$g_{\rm WDM}$ は自由度数で $g_{\rm WDM} = 1.5$ である。α を計算すると、1keV において $\alpha = 0.04793 h^{-1}$Mpc、10keV において $\alpha = 0.00372 h^{-1}$Mpc となった。計算したパワースペクトルを図 1 に示す。横軸は波数 k を常用対数で表した $\log_{10} k$、縦軸は無次元パワースペクトルを常用対数で表した $\log_{10} \Delta^2$ である。黒色が CDM モデル、マゼンタが 1keV の WDM モデル、シアンが 10keV の WDM モデルに対応しており、破線が無次元パワースペクトルが最大となるときの波数 $k_{\rm peak}$ の位置を表している。

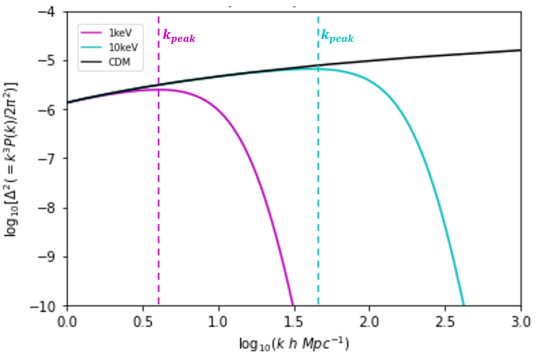


図 1: シミュレーションで用いた無次元パワースペクトル 黒色が CDM モデルに、マゼンタが 1 keV、シアンが 10 keV の WDM モデルに対応している。

3 Removal of Spurious Halos

WDM ではその平均自由行程以下のスケールに物理的な揺らぎが存在しないため、数値ノイズを種に形成される偽ハローが問題となる。そこで Lovell et al. (2014) は 3 つの観点から偽ハローの同定・除去を行なった。

一つ目はハローの形である。Lovell et al. (2014) によると、真ハローと偽ハローで形が異なり、真ハローは比較的球状である一方で、偽ハローは比較的扁平である。彼らは、三軸楕円体の長軸と短軸の軸比を s として、ハローの進化過程で最大となった質量の半分以上の質量に初めてなった時のサブハローの粒子の初期位置を使って s を計算し、CDM によるサブハローの下限 99%を偽ハローと真のハローを分ける閾値 $s_{\rm cut}$ としている。

二つ目は、ハローの質量である。Wang & White (2007) によると、そのハロー質量以下では偽ハローが支配的になる質量の閾値 $M_{\rm lim}$ は、パワースペクトルのカットオフスケールとシミュレーションの分解能に依存しており、以下の式で表されている。

$$M_{\rm lim} = 10.1 \bar{\rho} d k_{\rm peak}$$

ここで、$\bar{\rho}$ は宇宙の平均密度、d はシミュレーションにおける平均粒子間距離、$k_{\rm peak}$ は無次元パワースペクトル $\Delta^2(k)$ の最大値を取る波数 k である。

しかし、Lovell et al. (2014) は $M_{\rm lim}$ を閾値として使用してしまうと真のハローまで除去しすぎてしまうことを指摘し、同じ位相の初期密度揺らぎをもつ異なる分解能のシミュレーションを比較することでこの閾値を $M_{\rm min} = \kappa M_{\rm lim}$ として、κ の値を求めた。

本研究では、Lovell et al. (2014) で得られた値、$s_{\rm cut} = 0.16$ と $\kappa = 0.5$ を採用し、$M_{\rm min}$ は 1keV で $M_{\rm min} = 1.1 \times 10^8 M_\odot$、10keV で $M_{\rm min} 1.0 \times 10^6 M_\odot$ と求まった。以上の結果を用いて、偽ハローの同定・除去を行った。

4 RESULT and DISCUSSION

除去したサブハローカタログを用いて、Semi-Analytical SubHalo Inference ModelIng (SASHIMI) (Hiroshima et al. 2018) とサブハローの質量関数を比較した。SASHIMI とは、extended Press-Schechter 理論に加え、潮汐摩擦を考慮したサブハローの進化モデルを用いた準解析的理論モデルである。

図 2 は、赤方偏移 $z = 0,\ 1,\ 2$ のメインハローの r_{200b}（密度が宇宙の背景密度の２００倍となる半径）

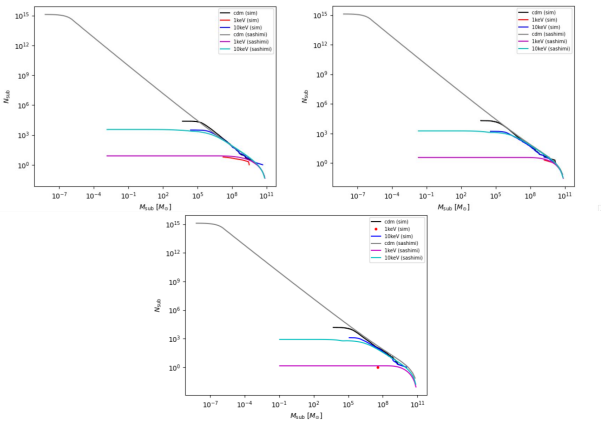


図 2: サブハローの累積質量関数 赤方偏移は、左上が $z = 0$、右上が $z = 1$、下が $z = 2$ に対応している。黒色が CDM、赤色が 1 keV の WDM、青色が 10 keV の WDM のシミュレーションに、灰色が CDM、マゼンタが 1 keV、シアンが 10 keV の WDM の SASHIMI に対応している。

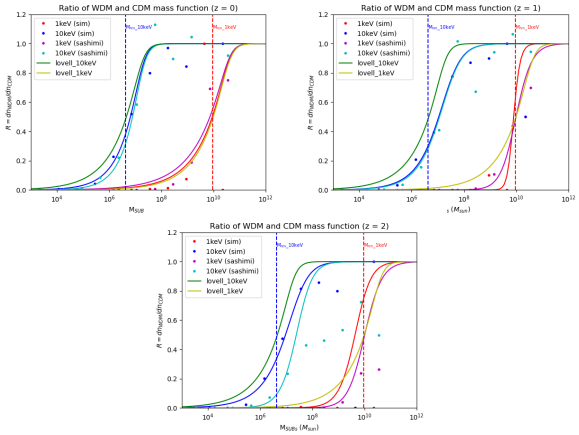


図 3: CDM に対する WDM のサブハローの微分質量関数の比 赤方偏移は、左上が $z = 0$、右上が $z = 1$、下が $z = 2$ に対応している。黄色が 1 keV の WDM、緑色が 10 keV の WDM の先行研究 (Lovell 2020) に、赤色が 1 keV の WDM、青色が 10 keV の WDM のシミュレーションに、マゼンタが 1 keV、シアンが 10 keV の WDM の SASHIMI に対応している。

以内にあるサブハローの累積質量関数である。$M_{\rm sub}$ はサブハローの質量で、サブハローの質量はビリアル質量としている。$N_{\rm sub}$ はその $M_{\rm sub}$ よりも大きい質量をもつサブハローの個数である。黒色が CDM、赤色が 1 keV の WDM、青色が 10 keV の WDM のシミュレーションに、灰色が CDM、マゼンタが 1 keV、シアンが 10 keV の WDM の SASHIMI に対応している。その結果、SASHIMI は赤方偏移 $z = 0,\ 1$ で我々のシミュレーション結果をよく再現することがわかった。しかし、赤方偏移 $z = 2$ ではサブハローの数を過小評価することがわかった。

次に、CDM に対する WDM のサブハローの微分質量関数の比に対する fitting 関数 $R_{\rm fit}$ の fitting パラメータの推定を行った。Lovell (2020) により、$R_{\rm fit}$ は以下の式で与えられている。

$$R_{\rm fit} = \frac{n_{\rm WDM}}{n_{\rm CDM}} = \frac{(dN_{\rm WDM}/d\log M)}{(dN_{\rm CDM}/d\log M)} = \left(1 + \left(\frac{\alpha M_{\rm hm}}{M}\right)^{\beta}\right)^{\gamma}$$

ここで、n は微分質量関数、N はある質量範囲 $(d\log M)$ に対するハローの数、$M_{\rm hm}$ は CDM に対する WDM のパワースペクトルの比の平方根が 0.5 になる時の波数 $k_{\rm hm}$ に対応する質量スケール、$\alpha,\ \beta, \gamma$ は fitting パラメータである。

表 1: fitting パラメータ

Param/Data	si-1	sa-1	si-10	sa-10
α_0	4.2	4.2	4.2	4.2
α_1	0.74	0.97	5.8	5.9
α_2	0.57	1.0	5.8	7.0
β_0	2.6	2.6	2.6	2.6
β_1	3.2	1.4	1.3	1.3
β_2	1.5	1.3	1.3	1.5
γ_0	-0.18	-0.16	-0.26	-0.32
γ_1	-1.5	-1.1	-0.51	-0.54
γ_2	-0.18	-1.1	0.46	-0.8

結果の図を図 3 に示す。赤方偏移は、左上が $z = 0$、右上が $z = 1$、下が $z = 2$ に対応している。黄色が 1 keV の WDM、緑色が 10 keV の WDM の先行研究 (Lovell 2020) に、赤色が 1 keV の WDM、青色が 10 keV の WDM のシミュレーションに、マゼンタが 1 keV、シアンが 10 keV の WDM の SASHIMI に対応している。各点は計算した $R = dn_{\rm WDM}/dn_{\rm CDM}$ であり、各線は fitting した $R_{\rm fit}$ の結果である。各破線は各モデルの $M_{\rm hm}$ で、赤色が 1 keV、青色が 10 keV に対応している。また、fitting パラメータを表 1 に示す。si はシミュレーション、sa は SASHIMI（理論モ

デル)、-1 は 1keV の WDM、-10 は 10keV の WDM に対応している。例えば、sa-1 であれば、SASHIMI による 1keV の WDM に対応している。α_z, β_z, γ_z の z は赤方偏移を表す。例えば、β_1 であれば $z = 1$ の β である。赤方偏移 $z = 0$ では、1 keV のシミュレーションと理論モデルが先行研究とよく一致した。10keV のシミュレーションと理論モデルはよく一致したが両者とも先行研究と一致しなかった。赤方偏移 $z = 1$ では、1 keV の理論モデルと先行研究が $M_{\rm hm}$ 以上でよく一致したが、両者ともシミュレーションと一致せず、また $M_{\rm hm}$ 以下でどれも一致したものはなかった。10 keV のシミュレーションと理論モデルがよく一致したが、両者とも先行研究と一致しなかった。赤方偏移 $z = 2$ では、1 keV の理論モデルと先行研究が $M_{\rm hm}$ 以上で一致したが、両者ともシミュレーションと一致せず、また $M_{\rm hm}$ 以下で一致したものはなかった。10 keV のどれも一致したものはなかった。

また、$z = 0$ では 1 keV のシミュレーション、理論モデル、先行研究で非常によく一致しているのに対し、10 keV のシミュレーションと理論モデルが先行研究とよく一致していなかったことから、先行研究の fitting パラメータは 1 keV では適切だと考えられるが、10 keV では適切ではない可能性が考えられる。そのため、fitting パラメータは WDM の質量に依存している可能性があるため、WDM の質量依存性についても調査する必要がある。高赤方偏移になるにつれ、特に 10 keV の fitting 関数 $R_{\rm fit}$ が計算した R をトレースすることが出来ていないように思われる。つまり、fitting 関数 $R_{\rm fit}$ の表式を改良する必要があると考えられ、fitting パラメータの赤方偏移依存性について調査する必要がある。

1 keV のシミュレーションが $z = 0$ 以外でほかの２つと良い一致を示すことはなかったのは、そもそも 1 keV のシミュレーションで作られるサブハローの個数が少なく、fitting が困難なことが原因である可能性がある。また、 $M_{\rm hm}$ 以下で $z = 0$ 以外でよい一致を示さなかったのも、half-mode 波長スケール以下ではサブハローの形成が抑制され、サブハローの個数がさらに少なくなってしまい、fitting が困難なことが原因である可能性がある。

赤方偏移 $z = 2$ では、10 keV の理論モデルが R の値をシミュレーションより過小評価していることが分かった。これは、偽ハローの除去が十分に行われているとすれば、 $z = 2$ で SASHIMI がシミュレーション結果を再現できていないと考えられる。一方で、偽ハロー除去が十分に行われていないとすれば、$z = 0$ や $z = 1$ ではシミュレーションが過大評価していないことから、$z = 2$ で偽ハローの除去の改良を行う必要があると考えられる。

5 CONCLUSION

本研究では、1 keV と 10 keV の WDM モデルの高解像度で宇宙論的 N 体シミュレーションを $z = 127$ から $z = 0$ まで行った。WDM モデルのシミュレーションでは、数値ノイズを種に生成される偽ハローが問題となるため、Lovell et al. (2014) の手法を用いて偽ハローの除去を行ったのち、CDM に対する WDM のサブハローの微分質量関数に対する比 R を計算し、fitting 関数 $R_{\rm fit}$ の fitting パラメータを推定した。先行研究の fitting パラメータは $z = 0$ で 1 keV の WDM モデルにのみ適用でき、10 keV の WDM モデルでは β, γ の値を適用することが出来なかった。また、赤方偏移 $z = 2$ のとき、10 keV の WDM モデルのシミュレーションと理論モデルに対してうまく fitting することが出来なかった。以上のことから、今後の研究として、fitting 関数 $R_{\rm fit}$ の WDM の質量依存性と赤方偏移依存性を調査し、fitting 関数 $R_{\rm fit}$ の表式の改良を試みる。そして、WDM の質量範囲に対する制限を調査する。

Reference

N. Aghanim et al. (Planck) 2020, Astron. Astrophys. 641, A6

Bode P., Ostriker J. P., Turok N., 2001, ApJ, 556, 93

Lovell M. R., Frenk C. S., Eke V. R., Jenkins A., Gao L., Theuns T., 2014, MNRAS, 439, 300

Wang J., White S. D. M., 2007, MNRAS, 380, 93

N. Hiroshima, S. Ando, T. Ishiyama, 2018, Phys. Rev. D97 123002

M. R. Lovell, 2020, ApJ, 897(2), 147

———index へ戻る

重宇 b03

原始ブラックホールからの Hawking 放射のモンテカルロシミュレーション

八木 大地

ブラックホールのホーキング放射のモンテカルロシミュレーション

八木　大地 (弘前大学大学院 理工学研究科)

Abstract

原始ブラックホールとは、インフレーション期に初期揺らぎが重力崩壊してできると考えられているブラックホールのことである。原始ブラックホールは重力以外の相互作用をほとんどしない点で暗黒物質の有力な候補とされている。

ブラックホールは量子力学的な効果によって質量に反比例する温度を持ち、その温度に対応する Planck 分布のエネルギーを持つ素粒子を放射する Hawking 放射が起こるとされ、徐々に放射するエネルギーを増加させながら最終的には消滅する。現在観測されているような恒星質量以上のブラックホールは質量が十分に重いので温度が低くなり、観測可能なエネルギーを持つ Hawking 放射はほとんど起こらない。しかし、原始ブラックホールは様々な質量を持ち得ると考えらており、インフレーション期に $4-5*10^{14}g$ 程度の原始ブラックホールはインフレーションから現在まで Hawking 放射によって質量を減少させ、消滅する瞬間及び直前の原始ブラックホールとなっており、十分高温のため観測可能であると考えられている。

本研究では、MacGibbon-Webber のモデルに基づき、LHC 等の高エネルギー素粒子実験の結果に基づくデータを反映した Pythia8.3 を用いて計算し、初期質量が $4-5*10^{14}g$ 程度の原始ブラックホールからの Hawking 放射によって出てくる粒子のガンマ線等のスペクトルを計算した。

1　Introduction

Planck 衛星による宇宙マイクロ波背景放射の観測によって、現在の宇宙の平均エネルギー密度のほぼ 4 分の 1（27%）をダークマターと呼ばれる正体不明の物質で占められている事がわかってる。ダークマターは電磁気的な相互作用をほとんど或いは全しないが、重力相互作用はするという性質を有しており、宇宙の構造形成に重要な役割を担っている。現在ダークマターはアクシオンなどの未発見の素粒子やニュートリノなどの他に原始ブラックホールが有力な候補として挙げられている。

原始ブラックホールとは Zel ' dovich や Hawking によって予言された、ビックバン直後に揺らぎが重力崩壊してできたとされるブラックホールであり、恒星からできるブラックホールと異なり、10^{-8} g 程度まで小さな質量を持つ原始ブラックホールが理論的に許容されているので、観測可能な恒星質量ブラックホールのみではプランクの観測結果を説明するダークマターの質量には届かないが、原始ブラックホールも含めれば、ダークマターの質量のうち全て、ないしより多くの質量をブラックホールで説明できる可能性がある。

原始ブラックホールは様々な質量の様々な観測で数密度の上限値が与えられている。

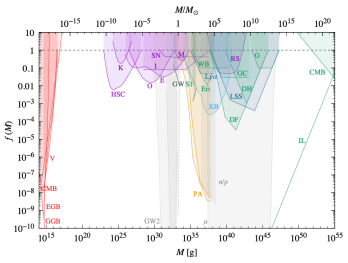


図 1: 原始ブラックホールの存在量に対する制限

ブラックホールは事象の地平線で対生成された粒子は、一方はブラックホールに落ちていくが、もう一方はブラックホールの外に放射される現象が起こることが Hawking によって予言されている。ブラックホールは事象の地平線の表面積と等しい面積を持つ黒体とみなせて、その温度は

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G M} \tag{1}$$

で与えられる。

Hawking の研究によれば、Hawking 放射はこの黒体のスペクトルで放射される。Stefan–Boltzmann の法

則により、ブラックホールのエネルギー放射率は

$$\begin{aligned} E &= \sigma T^4 \times 4\pi r_s^2 \\ &= \frac{\pi^2 k_B^4}{60c^2\hbar^3}(\frac{\hbar c^3}{8\pi k_B GM})^4 \times 4\pi(\frac{2GM}{c^2})^2 \\ &= \frac{\hbar c^5}{15360\pi M^2 G^2} \end{aligned}$$

よって、エネルギー保存の法則により、ブラックホールの質量の変化率は

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{c}E \\ &= -\frac{\hbar c^4}{15360\pi M^2 G^2} < 0 \end{aligned}$$

となる。よって、Hawking 放射によって、ブラックホールの質量は減少する。MacGibbon による研究により、$M_* = 5 \times 10^{15}$ g 以下の質量の PBH は現在の宇宙年齢の時間で質量が 0 になり、「蒸発した」と言える。本研究では、M_* 程度の近傍の PBH を想定し、十分にホーキング放射し、回転していないブラックホールを考える。

2 Methods

2.1 MacGibbon-Webber モデル

Hawking 放射は、光子だけでなく、電子やクオークなど、真空から対生成で生じ得る全ての素粒子が放射される。この粒子を i 粒子と呼び、次の粒子を考える。

$$i : d, \bar{d}, u, \bar{u}, s, \bar{s}, c, \bar{c}, b, \bar{b}, t, \bar{t}, e^{\pm}, \mu^{\pm}, \tau^{\pm}, g, Z, w^{\pm}, H_0$$
$$\nu_e, \bar{\nu_e}, \nu_\mu, \bar{\nu_\mu}, \nu_\tau, \bar{\nu_\tau}, \gamma$$

ここで、光子は質量が 0 だが、多くの粒子は 0 以外の質量を有する。粒子の静止エネルギー m_0c^2 に対して、ブラックホールの温度のエネルギー K_BT より小さい時は、実質的にその粒子は放射されないと見做す。
また、クオークやグルーオンは QCD 閉じ込めスケールのエネルギーと呼ばれる、$\Lambda = 250$ 300 Mev を超える運動エネルギーを持っていなければ、ブラックホールの外で安定なハドロンに転化することができず、ブラックホールに引き戻されてしまうので、実質的に放射されない。

i 粒子の多くは崩壊し、f 粒子

$$f : e^{\pm}, \nu_e, \bar{\nu_e}, \nu_\mu, \bar{\nu_\mu}, \nu_\tau, \bar{\nu_\tau}, \gamma$$

になる。最終的な f 粒子のスペクトルは全ての i 粒子のスペクトルと多重度の積の総和で求められるので、次のような式で表せられる。

$$\frac{d\dot{N}_f}{de_f} = \sum_i g_i \int_0^\infty dE_i \frac{d\dot{N}_i}{dE_i}\frac{dN_{i\to f}}{dE_f}(E_i, E_f) \quad (2)$$

ここで、$\frac{d\dot{N}_i}{dE_i}$ が一次粒子のスペクトル、$\frac{dN_{i\to f}}{dE_f}(E_i, E_f)$ はエネルギー E_i の i 粒子 1 個から電磁シャワーや QCD ジェットを経て最終的に出るエネルギー E_f の f 粒子の微分多重度この微分多重度を解析的に計算することは不可能なので、PYTHIA8.3 を用いてモンテカルロシミュレーションを行なって平均値を数値的に求める。

2.2 PYTHIA8.3 を用いたモンテカルロシミュレーション

f 粒子を適当なビンの数に分けて、そのビンのエネルギー幅 ΔE_f を用いて、エネルギー E_i の i 粒子 1 個が生成するエネルギービン $[E_f, E_f + \Delta E_f]$ に入る粒子の個数を $\Delta N_{i\to f}$ と定義する。

PYTHIA8.3 の Resonance Decays を用いて、静止質量 $m0 = 2E_i$、電荷 0、色荷 0、スピン 1 重項の共鳴状態を設定し、$i\bar{i}$ 対に崩壊するように設定する。これを繰り返し計算し、$\Delta N_{i\to f}$ の平均値を求める。

3 Results

図 2 から図 4 のように、二次粒子は高エネルギー側ではスペクトルはプランク分布に近い形になるが、低エネルギー側になると、他の粒子が崩壊してできた二次粒子の影響が大きい。10 − 1GeV 付近のピークに対しては、図 2 の光子は中性 π 中間子の 2 光子崩壊、図 3、図 4 のニュートリノと電子は荷電 π 中間子の崩壊の寄与が支配的だった。一方で 10 − 4GeV 付近の電子や電子ニュートリノのピークに対しては、中性子のベータ崩壊の寄与が支配的とみられる。
図 5 のように、一次粒子としては放射されないが、二次粒子同士が反応し、陽子が放射される。

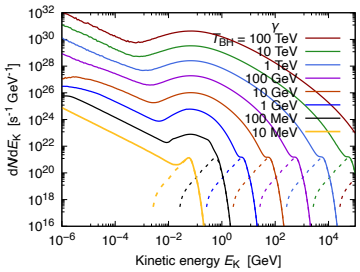


図 2: 光子の Hawking 放射のスペクトル。実線が一次粒子、破線が二次粒子

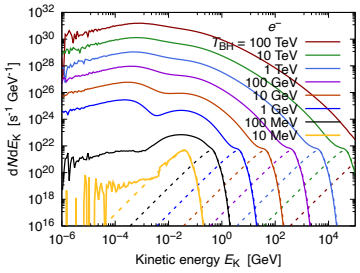


図 3: 電子の Hawking 放射のスペクトル。実線が一次粒子、破線が二次粒子

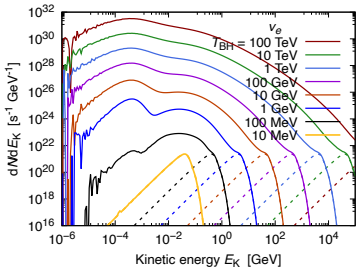


図 4: 電子ニュートリノの Hawking 放射のスペクトル。実線が一次粒子、破線が二次粒子

4　まとめと展望

PYTHIA8.3 をもちいて単一の PBH のスペクトルを計算することができた。今後はこの PBH を、具体的な空間分布や質量分布を仮定し、実際の宇宙線の観測結果と比較したい。

Acknowledgement

本講演は，指導教員の仙洞田雄一教授との共同研究に基づくものです．日々の議論を通して多大なご指導を頂いていることに，感謝を申し上げます．

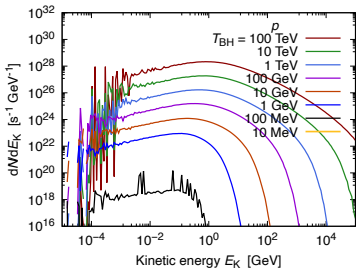


図 5: 陽子の Hawking 放射のスペクトル。実線が一次粒子、破線が二次粒子

Reference

S. W. Hawking 1971, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 152, 75-78.

S. W. Hawking 1974, Nature 248, 30-31.

J. H. MacGibbon & B. R. Webber 1990, Phys. Rev. D 41, 3052–3079.

Christian Bierlich et al. 2022, SciPost Phys. Codebases 8.

Don N. Page 1976, Phys. Rev. D 13, 198–206.

Planck Collaboration 2020, Astron. Astrophys. 641, A1.

Ya. B. Zel’dovich and I. D. Novikov, 1967, Sov. Astron. 10, 602–603.

———index へ戻る

重宇b04

ブラックホールの帯電とBZ過程

松尾 賢汰

ブラックホールの帯電と BZ 過程

松尾 賢汰 (大阪公立大学大学院 理学研究科)

Abstract

ブラックホール (BH) から出ている jet のエネルギー供給機構の有力な候補として Blandford-Znajek 過程 (BZ 過程) が支持されている。BZ 過程は回転している BH の回転エネルギーを磁場を使って引き抜くというプロセスであり、jet が起こるために必要なエネルギーを効率良く抜き出せると考えられている。King and Pringle (2021) はブラックホールまわりの電磁場が Wald 解で与えられているとき、BH は荷電粒子の降着により選択的に同じ符号の電荷を取り込んで帯電し、その結果電場が消失するので、BZ 過程は起こらないという結論を出した。一方、Komissarov (2022) は BH は帯電はするが、BZ 過程は起こるという反対の意見を出した。BZ 過程の機能に関して主張は異なっているが、両者共にブラックホールは片方の電荷のみを取り込んで帯電するという主張をしている。

本講演では、意見の分かれている帯電による BZ 過程の議論はせず、Komissarov (2022) の BH に帯電する帯電量の内容についてレビューする。

1 Introduction

ブラックホール (BH) から出ている jet のエネルギーの供給機構の問題の一つは、jet を引き起こすために、莫大なエネルギーを必要とすることにある。Blandford と Znajek は BH の回転エネルギーが磁場を使い抜き出せることを示した。この機構は Blandford-Znajek 過程 (BZ 過程) と呼ばれ、現在は BZ 過程が jet のエネルギー供給機構である可能性が高いと考えられている。

Wald (1974) はキリングベクトルからテスト場としての電磁場の解である Wald 解を導いた。Wald は KerrBH の Wald 解の回転軸上で、片方の電荷を持つ粒子が降着して BH が帯電すると主張した。帯電による BZ 過程の影響に関しては King and Pringle (2021) や Komissarov (2022) が議論しており、主張が異なるが BH の帯電に関しては見解が一致している。しかし、Komissarov (2022) は Wald が主張した帯電量に関しては否定的である。帯電量に関して議論する為、まず曲がった時空での電磁場を定義する。

2 Methods

2.1 3+1 分解と ZAMO

電場と磁場を曲がった時空で定義するために計量を時間と空間に分解する”3+1 分解”を行う。時間の基底ベクトルは時間一定の超曲面の単位法線ベクトル n^a を使って

$$t^a = \alpha n^a + \beta^a \tag{1}$$

と書ける。このとき計量は

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + \beta^j dt)(dx^j + \beta^i dt) \tag{2}$$

と書くことができる。ここで、α はラプス関数、β^i はシフトベクトル、γ_{ij} は三次元計量と呼ばれる。

この 3+1 分解を Kerr 時空の Boyer-Lindquist 座標に対して行う。これは、Zero Angular Momentum Observer(ZAMO) と呼ばれる。そうすると ZAMO は

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \varpi^2(d\phi - \Omega dt)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \tag{3}$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta \tag{4}$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 \tag{5}$$

$$\Sigma = (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta \tag{6}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\rho^2\Delta}{\Sigma}} \tag{7}$$

$$\Omega = \frac{2Mar}{\Sigma} \tag{8}$$

$$\varpi = \sqrt{\frac{\Sigma}{\rho^2}}\sin\theta \tag{9}$$

$$\beta^i = (0, 0, -\Omega) \tag{10}$$

と書ける。ここで、Ω は KerrBH の角速度である。

2.2 マクスウェル方程式

曲がった時空でのマクスウェル方程式は

$$\nabla_a F^{ab} = -j^b \tag{11}$$

$$\nabla_a ({}^*F^{ab}) = 0 \tag{12}$$

と定義される。ここで、${}^*F^{ab}$ は完全反対称テンソル ϵ_{abcd} を使って

$${}^*F_{ab} = \frac{1}{2}\epsilon_{abcd}F^{cd} \tag{13}$$

である。また、F_{ab} は 4 元ポテンシャルを使って

$$F_{ab} = \nabla_a A_b - \nabla_b A_a \tag{14}$$

電場と磁場はこれらを使って

$$E_a = F_{ab}n^b \tag{15}$$

$$B_a = -\frac{1}{2}\epsilon_{abcd}F^{cd}n^b = \frac{1}{2}\epsilon_{abc}F^{bc} \tag{16}$$

ここで、$\epsilon_{abcd}n^a = \epsilon_{bcd}$ である。

2.3 Wald 解

Wald 解は Wald (1974) が見つけ出したキリングベクトルを使ったマクスウェル方程式の解である。KerrBH に対する Wald 解は物理的な条件から

$$A_\mu = \frac{B_0}{2}(m_\mu + 2ak_\mu) \tag{17}$$

と書くことができる。ここで、$m^\mu = \delta^\mu_\phi, k^\mu = \delta^\mu_t$ である。ZAMO から見た電場と磁場は

$$E_r = B_0\frac{Ma}{\rho^2\sqrt{\Sigma}}\left(2r^2\sin^2\theta - \frac{(r^2 - a^2\cos^2\theta)R^2C^2}{\Sigma}\right) \tag{18}$$

$$E_\theta = B_0\sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}}\frac{2Ma^3C^2r\sin\theta\cos\theta}{\rho^4} \tag{19}$$

$$B_r = B_0\frac{\cos\theta}{\rho^2\sqrt{\Sigma}}\frac{\Sigma - 2Ma^2rR^2C^2}{\rho^2} \tag{20}$$

$$B_\theta = -B_0\sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}}\sin\theta(r + \frac{Ma^2C^2(r^2 - a^2\cos^2\theta)}{\rho^4}) \tag{21}$$

となる。ここで、$C^2 = 1 + \cos^2\theta, R^2 = r^2 + a^2$ である。

2.4 ブラックホールの帯電

BH の回転軸上では選択的に荷電粒子を BH に落とすことができ、A_μ は

$$A_\mu = \frac{B_0}{2}(m_\mu + 2ak_\mu) - \frac{q}{2}k_\mu \tag{22}$$

と書ける。q が帯電量を表す。Wald は、帯電は静電ポテンシャルの差が 0 になる $q = q_0 = 2aB_0$ まで続くと主張した。 図 1、図 2 は帯電前後の BH まわり

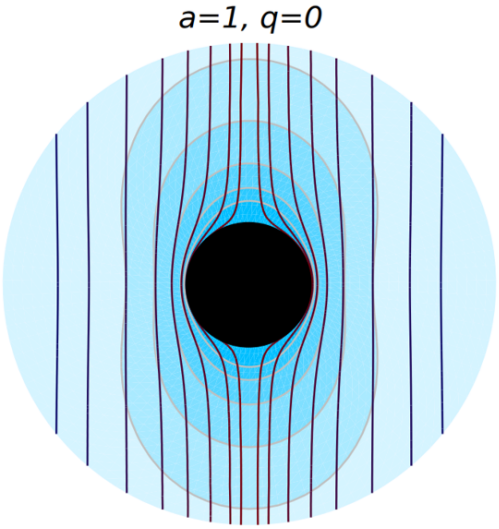


図 1: 帯電前の BH

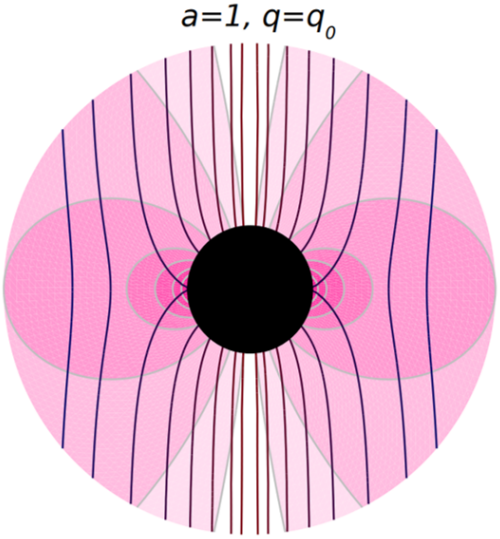


図 2: 帯電後の BH

の磁力線と静電ポテンシャルをプロットしたもので

ある。静電ポテンシャルの正と負はそれぞれピンク色と水色で表され、白色は 0 を表す。

2.5 座標不変な量

電場や磁場は観測者は観測者に依存する物理量であるが、観測者の依存しないスカラー量として以下の二つが存在する。

$$*F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 4\vec{E}\cdot\vec{B} \tag{23}$$

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2(\vec{B^2} - \vec{E^2}) \tag{24}$$

仮に、$\vec{E}\cdot\vec{B} \neq 0$ であれば磁力線に沿って荷電粒子は加速される。$\vec{E}\cdot\vec{B} = 0, \vec{B^2} - \vec{E^2} < 0$ であれば電場優勢であり、荷電粒子は磁力線に垂直に加速される。

3 Results

$*F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ と $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ のそれぞれの帯電前後を描いたものが図 3 から図 6 である。

黒線は図 1 や図 2 に描いてある磁力線で、灰色の線がそれぞれの $*F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ と $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ をプロットしたものである。図 5 は図 1 や図 2 と同じくピンクが濃いほど正の値が大きく、白色は 0 である。図 5 以外では紫色が 0 を表し、水色は負、ピンク色は正である。

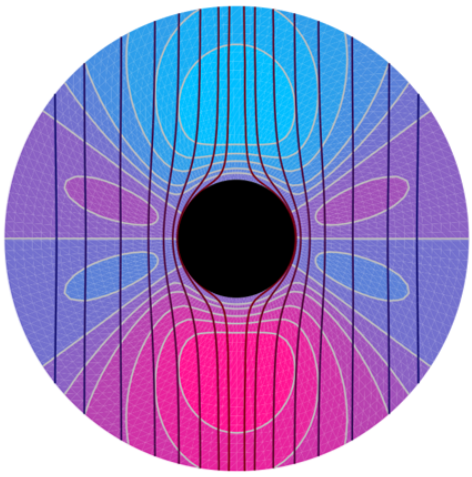


図 3: $*F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(a = 1, q = 0)$

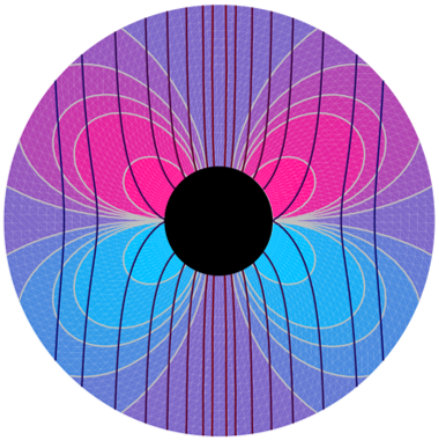


図 4: $*F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(a = 1, q = q_0)$

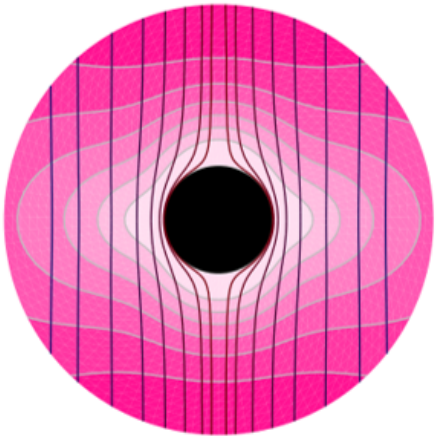


図 5: $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(a = 1, q = 0)$

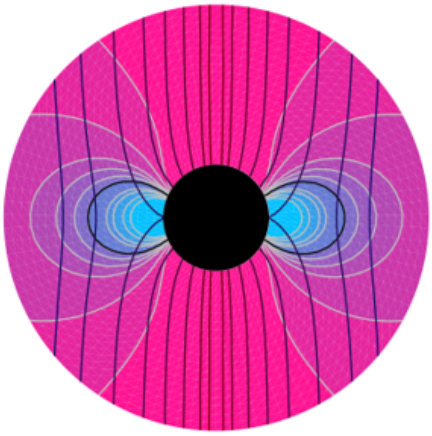


図 6: $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(a = 1, q = q_0)$

4 Conclusion

図 4 と図 6 の赤道面上に注目すると、$\vec{E}\cdot\vec{B}=0, \vec{B^2}-\vec{E^2}<0$ の領域が存在する。よって電場優勢であり、荷電粒子は磁力線に垂直に加速される。このとき加速される荷電粒子は BH に帯電している電荷と反対符号のものである。なので、BH の帯電量は $q=q_0=2aB_0$ に比べて確実に減少する。Wald の主張した帯電量 $q_0=2aB_0$ はただの上限値の可能性が高い。より正確な帯電量を求めたいならば、荷電粒子の運動方程式を数値的に解いていく必要がある。

Acknowledgement

本発表にあたり、ご指導いただいた宇宙物理・重力研究室の皆様、講演の機会を与えてくださった夏の学校の運営の皆様に深く感謝申し上げる。

Reference

A. R. King and J. E. Pringle. Can the Blandford–Znajek Mechanism Power Steady Jets? *Astrophys. J. Lett.*, 918(1):L22, 2021. doi: 10.3847/2041-8213/ac19a1.

Serguei S. Komissarov. Electrically charged black holes and the Blandford–Znajek mechanism. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 512(2):2798–2805, 2022. doi: 10.1093/mnras/stab2686.

Robert M. Wald. Black hole in a uniform magnetic field. *Phys. Rev. D*, 10:1680–1685, 1974. doi: 10.1103/PhysRevD.10.1680.

———index へ戻る

重宇 b05

Quasinormal mode spectrum of the AdS black hole with the Robin boundary condition

小塚 友裕

Quasinormal mode spectrum of the AdS black hole with the Robin boundary condition

小塚 友裕 (日本大学大学院 総合基礎科学研究科)

Abstract

我々は Robin 境界条件下における AdS ブラックホールの準固有振動モード (QNM) スペクトルについての研究を行った。平坦な事象の地平面を持つ Sch-AdS$_4$ を考える。Klein-Gordon 方程式を満たす 4 次元のスカラー場を考えるとき、無限における波動関数 $\phi(z)$ の漸近形は $\phi(z) \sim \phi_1 z + \phi_2 z^2$ となる。これに Robin 境界条件を課し $\phi_2 = \cot(\theta/2)\phi_1$ として、数値計算を行うことで QNM スペクトルを求めた。その結果、Robin 境界条件の θ を $0 \to 2\pi$ まで 1 サイクルさせると QNM スペクトルの軌跡は変化しないが n 番目の overtone が $n-1$ 番目の overtone に移動していること、また、不安定性が $\theta \simeq 222.4°$ で現れることが確認できた。

1 Introduction

本発表は、我々の研究である『Quasinormal mode spectrum of the AdS black hole with the Robin boundary condition』に基づくものである。[(Keiju Murata et al. 2023)]

漸近的な AdS 時空は無限遠に時間的な境界を持ち、glpbally hyperbolic ではない。漸近的な AdS 時空における場のダイナミクスを決定するためには初期条件と同様に境界における境界条件を指定する必要がある。本研究では ϕ_1 と ϕ_2 に対して

$$\phi_2 = \kappa\phi_1 \tag{1}$$

という境界条件を課す。これを Robin 境界条件といい、今回は $\kappa = \cot(\theta/2)$ とする。

Robin 境界条件下における漸近的 AdS 空間におけるスカラー場のダイナミクスについてはいくつかの先行研究が行われているが、本研究では Robin 境界条件下での Sch-AdS$_4$ 時空におけるスカラー場の準固有振動モード (QNM) スペクトルに注目した。

2 Methods

平坦な地平面を背景時空とする 4 次元 Schwarzschild-AdS 時空 (Sch-AdS$_4$) を考える。このときの計量は

$$ds^2 = \frac{1}{z^2}\left(-F(z)dt^2 + \frac{1}{F(z)}dz^2 + dx^2 + dy^2\right) \tag{2}$$

である。ここで

$$F(z) = 1 - z^3 \tag{3}$$

であり、$z = 0$ のとき無限遠で $z = 1$ のとき地平面である。ここで Klein-Gordon 方程式

$$\Box\Phi - \mu^2\Phi = 0 \tag{4}$$

考える。また、スカラー場 Φ はフーリエモードで次のように展開できる。

$$\Phi(v, z, x, y) = \varphi(z)e^{-i\omega v + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \phi(z)e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tag{5}$$

さらに、$z \sim 0$ では

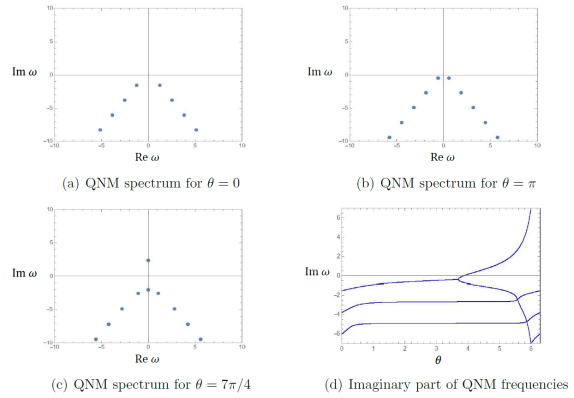
$$\phi(z) \sim \phi_1 z + \phi_2 z^2 \tag{6}$$

となり、これを (4) に代入した後、Robin 境界条件 (1) を課し、"Yaffe's mathematica note in Mathematica Summer School on Theoretical Physics"[(L. G. Yaffe 2014)] に従って QNM スペクトルを数値計算した。

3 Results

その QNM スペクトルの結果を以下に示す。

図 1 (a)-(c) は $\theta = 0$(Dirichlet)、π(Neumann)、$7\pi/4$(Robin) の場合である。これらの図から QNM スペクトルは Robin パラメータ θ に依存し、特に $\theta = 7\pi/4$ では不安定モードが現れていることがわか



(a) QNM spectrum for $\theta = 0$ (b) QNM spectrum for $\theta = \pi$

(c) QNM spectrum for $\theta = 7\pi/4$ (d) Imaginary part of QNM frequencies

図 1: QNM スペクトル

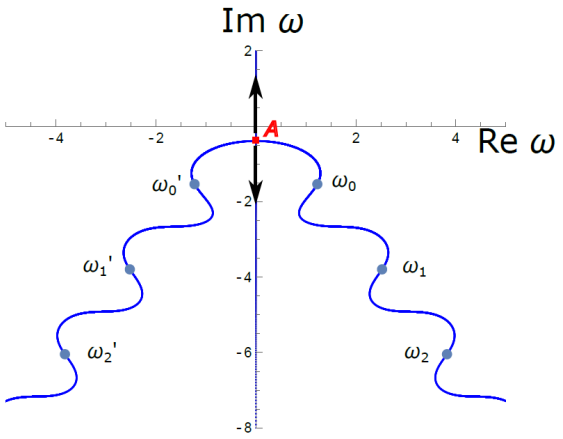


図 2: QNM スペクトルの軌跡

る。また図 1 (d) は QNM スペクトルの虚部を Robin パラメータ θ の関数として示している。これにより不安定性が $\theta \simeq 222.4°$ で現れることが確認できた。

図 2 は Robin パラメータ $\theta = 0 \to 2\pi$ を 1 周期とした場合の複素平面上の QNM スペクトルの軌跡を示している。青い点は $\theta = 0$(Dirichlet) のときの QNM スペクトルである。n を tone number、その QNM スペクトルを ω_n (Re $\omega_n \geq 0$) とする。まず、$\theta = 0 \to 2\pi$ における fundamental tone ω_0 と ω_0' の変化を追跡する。θ の値が 0 から徐々に大きくなるにつれて ω_0 と ω_0' はともに虚軸に近づき、$\theta \simeq 1.18\pi$ で両者は点 A で合流し、その後 $\theta \to 2\pi$ の極限ではそれぞれのモードは漸近的に $\pm\infty i$ に近づく。一方で、overtone ω_n と ω_n' を追跡すると、$\theta = 0 \to 2\pi$ まで 1 周させると n 番目の overtone が $n-1$ 番目の overtone に移動することがわかった。すなわち、1 サイクルさせると QNM スペクトルの軌跡は元に戻るが、各スペクトルの追跡に注目すると元の位置に戻らないことから、ホロノミーが存在することが示唆される。

4 Conclusion

我々は Sch-AdS$_4$ のスカラー場の QNM スペクトルを Robin 境界条件を与えて調べた。その結果、Robin パラメータのパラメトリックサイクル $\theta = 0 \to 2\pi$ のあと、スペクトルそのものは変化しないが、fundamental tone は複素平面上で無限大に発散し、n 番目の overtone は $n-1$ 番目の overtone に移動することがわかった。これにより、$\theta = 0 \to 2\pi$ のサイクルで新奇なホロノミーが存在することが示唆される。また、$222.4° \leq \theta < 360°$ の Robin 境界条件下で、スカラー場の摂動に対する不安定モードを発見した。

Reference

Shunichiro Kinoshita, Tomohiro Kozuka, Keiju Murata, & Keita Sugawara 2023, arXiv:2305.17942

L. G. Yaffe, Mathematica Summer School on Theoretical Physics ”Yaffe - Solutions (for day ’s 1-2).nb”, http://msstp.org/?q=node/289

————index へ戻る

重宇b06

ループ量子重力理論へのシンプルな道

佐野 大志

ループ量子重力理論へのシンプルな道

佐野 大志 (早稲田大学大学院 先進理工学研究科)

Abstract

本発表では、量子重力理論の最有力候補の一つであるループ量子重力理論の基礎的部分が、何に重きをおいてどのように導かれるかを一般相対性理論から出発して簡潔に紹介する。ループ量子重力理論は、一般相対性理論の持つ理論が特定の座標に依らない背景独立性に重きを置いて、重力の正準量子化を目指す理論である。Yang-Mills 理論に最も近い SU(2) 接続の Ashtekar 変数のホロノミーを量子化される基本的な演算子として見なし、その結果、ヒルベルト空間の基底としてスピンネットワークが導かれる。面積や体積に対応する演算子のスピンネットワークへの作用を考えることにより、これらが離散化されていることがわかる。

1 導入

現代の理論物理学における最も大きな課題の一つは量子重力理論を導くことである。重力の量子性は実験的に確認されていないものの、重力が量子化しないとして今日までに十分良い説明をつけた理論はなく、重力の量子化は理論的に果たされるべき可能性の高い課題と見なされている。重力を除く 3 つの力 (電磁気力、強い力、弱い力) は、Yang-Mills 理論に基づく場の量子論によって良く説明される。一方、重力は古典論である一般相対性理論 (GR) によって、現在までの多くの実験・観測結果と整合性を持った説明がなされている。一般相対性理論 (GR) に基づいた、重力の量子化は難題であり [1]、今日まで様々な取り組みがなされて来た。

量子重力理論の最も有力な候補の一つにループ量子重力理論 (LQG) がある。ループ量子重力理論 (LQG) は背景独立性を持った正準量子重力理論を目指す理論であり、ループ表現によってそのヒルベルト空間が構築される [2,3]。背景独立性は、理論の基礎が特定の座標や計量に依らず、理論の中で時空間の構造が決定される性質であり、一般相対性理論 (GR) の持つ特徴の一つである。ループ量子重力理論 (LQG) は、この一般相対性理論 (GR) の持つ背景独立性を尊重した理論であり、この理論では面積や体積は離散化された最小の値を持つものとして表される [2,4]。また、一様平坦な対称性を課し、LQG の自由度を落としたループ量子宇宙論 (LQC) では、種々の宇宙論的考察がなされ、例えば、宇宙初期の特異点がなくなりバウンス宇宙となることが示唆される [4,5]。

このように、ループ量子重力理論は非常に興味深い示唆を与える。一方で、そのような帰結の部分のみが過度に強調され、その基本的な部分の構築や手法があまり知られていないことがしばしばある。本発表は、ループ量子重力がどこに重きを置いて、どのようにその基礎が得られるかを、一般相対論から始めて説明することを目標とする。

2 一般相対論 (GR) と Yang-Mills 理論の違い

重力を説明する一般相対性理論と他の 3 つの力 (電磁気力、強い力、弱い力) を説明する Yang-Mills のゲージ理論との間には本質的には非常に共通点が多い。実際、いずれの理論も局所不変性が理論の柱であり、それを満たすように接続が導入され、場を介して相互作用する。Yang-Mills 理論では接続 A_μ そのものが基本変数として見なされる。一方で、一般相対性理論では計量 $g_{\mu\nu}$ を基本変数として見なすが、この基本変数の選び方では本質的に重力と他の力でどこが同じであり、どこが違うのかがはっきりとしない [1]。また、3 つの力 (電磁気力、強い力、弱い力) は Yang-Mills 理論に基づいて良く量子化されている。このため、一般相対性理論における基本変数の取り換えは量子重力を考える上での一歩として尤もらしいアプローチである。

実際、一般相対性理論において、(少なくとも古典的には) 同一な物理を示す作用を異なる基本変数に基づいて構築することは可能であり、その一つが四脚場 ${e_\mu}^i(x)$ とスピン接続 ${\omega_\mu}^{ij}(x)$ を基本変数とする作用である。

四脚場 ${e_\mu}^i(x)$ はいかなる時空点においても局所ミンコフスキー座標系に移れるという一般相対性理論の特徴から、時空の各点において以下のように定義される。

$$g_{\mu\nu}(x) = {e_\mu}^i(x){e_\nu}^j(x)\eta_{ij} \tag{1}$$

ここで、η_{ij} はミンコフスキー計量であり、$i,j = 1,2,3,4$ は内部空間 (局所ミンコフスキー空間) の添え字である。η_{ij} は自明であるから、四脚場 ${e_\mu}^i(x)$ が定まれば計量 $g_{\mu\nu}(x)$ が定まる。

スピン接続 ${\omega_\mu}^{ij}(x)$ は内部空間 (局所ミンコフスキー空間) に対する接続に当たり、トーションレス条件下では以下のように与えられる。

$${\omega_\mu}^{ij}(x) = {e_\nu}^i(x){\Gamma^\nu}_{\sigma\mu}(x)e^{\sigma j}(x) + {e_\nu}^i(x)\partial_\mu e^{\nu j}(x) \tag{2}$$

ここで、$e^{\sigma j}(x) = g^{\sigma\nu}(x){e_\nu}^j(x)$ であり、また、${\Gamma^\nu}_{\sigma\mu}(x)$ はアフィン接続である。この時、スピン接続 ${\omega_\mu}^{ij}$ は内部添え字 i,j に関して反対称となる。

Einstein–Hilbert 作用において、基本変数を計量 $g_{\mu\nu}$ のみから、計量 $g_{\mu\nu}$ と接続 ${\Gamma^\nu}_{\sigma\mu}(x)$ と捉え直しても同様の物理を得ることが出来る。(この際、スカラー曲率 R は接続 ${\Gamma^\nu}_{\sigma\mu}(x)$ の関数と見なす。)

これをさらに、四脚場 ${e_\mu}^i$ とスピン接続 ${\omega_\mu}^{ij}$ を基本変数とした作用が Tetrad-Palatini 作用

$$S_{\mathrm{T-P}} = \int d^4x\, \det(e){e^\mu}_i{e^\nu}_j{F^{ij}}_{\mu\nu}(\omega) = \int e\wedge e\wedge F^*(\omega) \tag{3}$$

であり、一般相対性理論と同様の物理が得られる。(スピン接続の反対称性は前提の要請として課す。) ただし、上式において $F^{ij}(\omega) = d\omega^{ij} + \omega^i{}_k\omega^{kj}$ である。

3 Ashtekar 変数

ADM 形式に基づき、前章の Tetrad-Palatini 作用 $S_{\mathrm{T-P}}$ を空間と時間の 3+1 分解をすることにより、基本変数を荷重度付き三脚場 $E^a_I = \det e\, {e^a}_I$ と実接続の Ashtekar 接続 $A^I_a = \frac{1}{2}\omega_{JKa}\epsilon^{IJK} + \gamma\omega^{0I}{}_a$ にすることが出来る。ただし、$a,b = 1,2,3$ は空間の添え字、$I,J,K = 1,2,3$ は内部空間の空間部分の添え字であり、γ は実数のパラメータ (Immirzi パラメータ) である。Ashtekar 接続 A^I_a は内部空間の空間回転 ($SO(3)$) 変換を考えると、内部空間添え字に関して SO(3) 接続となっていることがわかる。SO(3) 代数と SU(2) 代数の構造定数は同一であることから、Ashtekar 接続 A^I_a は SU(2) 接続と見なせると同時に内部空間添え字 $(I,J,K = 1,2,3)$ は SU(2) 代数の基底の添え字と見なせる [2,4]。荷重度付き三脚場 $E^a_I = \det e\, {e^a}_I$ は、Ashtekar 接続 A^I_a の正準共役運動量となっており、これらは以下の関係を持つ。

$$\{A^I_a(x), E^b_J(y)\}_{PB} = 8\pi G\gamma\delta^b_a\delta^I_J\delta^{(3)}(x-y) \tag{4}$$

ただし、$\{\}_{PB}$ はポアッソン括弧である。また、拘束条件として SU(2) ゲージ拘束に加えて、空間の微分同相拘束、ハミルトニアン拘束も存在し、全拘束系となる点において Yang-Mills 理論と異なり、ダイナミクスはハミルトニアン拘束から生まれる。背景独立な理論を構築するに当たって、基本変数の関係 (4) 式や、これら拘束条件は特定の背景構造に依存するべきでない。(4) 式のデルタ関数 $\delta^{(3)}(x-y)$ はこの観点から良いものではなく、量子化への基礎変数として Ashtekar 接続と荷重度付き三脚場 $\{A^I_a, E^a_I\}$ の代わりに以下で定義されるホロノミー $h_\gamma[A]$ とフラックス F

$$h_\gamma = P\exp\left\{\int_{u=0}^{1} A^I_a(x(u))\tau_I\frac{\partial x^a(u)}{\partial u}du\right\} \tag{5}$$

$$F = \int_S \epsilon_{abc}E^a_I\tau_I\frac{\partial x^b}{\partial\sigma^{(1)}}\frac{\partial x^c}{\partial\sigma^{(2)}}d^2\sigma \tag{6}$$

を基本変数とする。ここで、γ,S はそれぞれ三次元多様体上で定義されるパス (経路) と面であり、τ_I は SU(2) 代数の基底 (例えば、パウリ行列) である。また、ホロノミー h_γ は SU(2) 群の元となる。

4 スピンネットワーク

ループ量子重力理論における状態空間 (ヒルベルト空間) は、各グラフ Γ に対応する Cylindrical 関数 $\Psi(\Gamma)$ からなる [2]。グラフ Γ は三次元多様体内に定義され、有限個のパス (経路)e_i からなり、Cylindrical 関数 $\Psi(\Gamma)$ はグラフ Γ の各パス e_i に対応するホロノミー $h_{e_i} \in \mathrm{SU}$ を引数とする関数 $\Psi : SU(2)^k \to \mathbb{C}$ である。(ここで、k はグラフ Γ に含まれるパス e_i の数である。) Cylindrical 関数 $\Psi(\Gamma)$ は各グラフ Γ に対応する $L_2(\mathrm{SU}, d\mu_{Haar})^k$ の元であり ($d\mu_{Haar}$ は Haar 測度)、

Peter-Weyl の定理から、これは以下のように分解可能である。

$$\Psi(\Gamma) = \sum_{j_i,m_i,n_i} \Psi^{j_1,\cdots,j_k}_{m_1,\cdots,m_k,n_1,\cdots,n_k} D^{j_1}_{m_1,n_1}(h_{e_1}) \cdots D^{j_k}_{m_k,n_k}(h_{e_k}) \tag{7}$$

ここで、各 $D^{j_i}_{m_i,n_i}(h_{e_i})$ は Wigner 行列の成分であり、スピン j_i に対応する h_{e_i} の既約表現である。各スピン j_i は 0 以上の整数または半整数であり、各 $m_i = -j_i, -j_i+1, \cdots, j_i-1, j_i$ である。

ホロノミー $h_{e_i} \in \mathrm{SU}(2)$ は一般に局所 SU(2) ゲージ変換 $g_x \in \mathrm{SU}(2)$ に対して、以下のように変換する。

$$h_{e_i} \longrightarrow h'_{e_i} = g_{e_i\mathrm{st}} h_{e_i} g^{-1}_{e_i\mathrm{fin}} \tag{8}$$

ここで、e_ist,$e_i$fin はそれぞれパス e_i の始点と終点での変換に対応する SU(2) 群の元である。表現は準同型であるため、$D^{j_i}_{m_i,n_i}(g_{e_i\mathrm{st}} h_{e_i} g_{e_i\mathrm{fin}}) = D^{j_i}_{m_i,m'_i}(g_{e_i\mathrm{st}}) D^{j_i}_{m'i,n'_i}(h_{e_i}) D^{j_i}_{n'_i,n_i}(g_{e_i\mathrm{fin}})$ が成り立つ。ゆえに、(7) 式が局所 SU(2) ゲージ変換不変であるためには、各ノード i_l の点に対応する表現の成分の積 $D^{j_{r_1}}_{m_{r_1},m'_{r_1}}(g_{i_l}) \cdots D^{j_{r_q}}_{m_{r_q},m'_{r_q}}(g_{i_l}) D^{j_{s_1}}_{m_{s_1},m'_{s_1}}(g_{i_l}) \cdots D^{j_{s_p}}_{m_{s_p},m'_{s_p}}(g_{i_l})$ の g_{i_l} に依らない部分のみを取り出せばよい。ただし、$\{r_1,\cdots,r_q\}$,$\{s_1,\cdots,s_p\}$ はそれぞれノード i_l を始点、終点とするパスの番号の集まりである。そのような SU(2) 変換不変性を保つ部分は直和分解された際のシングレット部分に当たる。シングレット部分が存在するようなスピン j_i を持ったパスの組み合わせが各ノードに集まっていればゲージ不変部分が存在することになる。

各ノードでシングレット部分が存在するような色 j_i の振られ方をしたグラフを考え、各ノードに対してシングレット部分を取り出したもの

$$\bigotimes_i D^{j_i} \bigotimes_l i_l \tag{9}$$

が局所 SU(2) ゲージ不変なヒルベルト空間の基底となり、またこのようなグラフをスピンネットワークと呼ぶ。(ここで、i_l は各ノードにおけるシングレット部分への map である。)

本発表では詳細は述べないが、ここからさらに三次元微分同相写像不変性、及び、ハミルトニアン拘束を満たすようにヒルベルト空間を制限する必要がある。

面積 $S(\Delta)$ は古典論では、面 Δ 上の二次元計量 $h^{(2)}$ を用いて、

$$S(\Delta) = \int_\Delta \sqrt{\det h^{(2)}} d^2\delta = \int_\Delta \sqrt{E^a_I E^b_I n_a n_b} d^2\delta \tag{10}$$

と表される。ただし、ここで n_a は Δ の法線ベクトルである。これは、式中の基礎変数を量子化することにより量子化可能であり、スピンネットワーク Ψ へ作用させると以下のような固有値を得ることが出来る。

$$\hat{S}(\Delta)\Psi = 8\pi\gamma G \sum_i \sqrt{j_i(j_i+1)}\Psi \tag{11}$$

ただし、和は面 Δ を貫くパスに対してとり、面に載るようなパスが存在しないとした。このように、面積は離散化され、パスが面上に載る場合を考慮すると最小の面積は以下になる [4]。

$$\Delta_{min} = 2\sqrt{3}\pi\gamma G \tag{12}$$

体積に関しても同様の手続きで固有値が得られ、その領域に含まれるノードに対して体積の固有値が定まり、離散化される。ループ量子重力理論における最小面積や体積は Immirzi パラメータ γ に依存して決まり、$\gamma \approx 1$ とすると、最小面積、体積は Plank スケール程度となる。

5 まとめと発展

以上のように、ループ量子重力理論ではホロノミー、フラックスを基本的な変数として量子化し、ヒルベルト空間の基底はスピンネットワークによって表される。面積演算子や体積演算子の固有値は離散化され、最小の面積体積は Immirzi パラメータに依存して決まる。

ループ理量子重力理論の自由度を一様等方性の仮定により落としたループ量子宇宙論 (LQC) ではバウンスによる宇宙初期の特異点の回避など興味深い帰結が導かれる [4,5]。また、スピンフォームのアプローチによる断面積の決定や現象論的側面の検証など、様々な方面でループ量子重力理論は発展を続けており、大変興味深い理論の一つであると言える。

Reference

[1] 深谷英則 2017, 素粒子論研究・電子版 Vol.25 No.2.

[2] P. Doná and S. Speziale, arXiv preprint arXiv:1007.0402 15 (2010).

[3] Carlo Rovelli, Lee Smolin 1995, PhysRevD.52.5743.

[4] 玉置孝至 2015, サイエンス社, 臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ ; 115.

[5] Taveras, Victor 2008, PhysRevD.78.064072.

———index へ戻る

重宇b08

重力波観測における赤方偏移の取り扱いと観測量からの宇宙論パラメータ決定 の可能性

中馬 史博

重力波観測における赤方偏移の取扱いと観測量からの宇宙論パラメータ決定の可能性

中馬 史博 (千葉大学大学院　融合理工学府　物理学コース宇宙物理学研究室)

Abstract

GW150914 の観測以降、重力波観測は発展を続け、それが可能となる十分な統計量が確保されるようになった。去る 2023 年 5 月 24 日には LIGO-Virgo-KAGRA コラボレーションによる第 4 期共同観測運転（Observing Run 4; O4）が開始され、次世代型観測器アインシュタイン天文台 (ET) や DECIGO の計画も進むなか、新たな観測運転や次期観測器がもたらす観測結果に期待が集まっている。一方で、それに歩調を合わせて、解析手法を向上させることが重力波天文学の発展に重要である。重力波はその波源までの絶対距離が波形の解析によって直接得られるという特筆すべき点がある一方で、必ずしも電磁波カウンターパートを伴うとは限らず、そのため赤方偏移を得ることができるという保証がない。この困難を克服し重力波天文学の可能性を広げるための様々な手法がこれまで研究されてきたが、その中でも赤方偏移は使用せずに弱い重力レンズ効果が重力波源までの光度距離に与える異方性によって宇宙の大規模構造 (LSS) を推定する手法 (T.Namikawa et al. 2016) と重力波源の分布と赤方偏移が既知である銀河分布の相互相関をとることによって、重力波源の光度距離と赤方偏移の関係を明らかにする手法 (M.Oguri 2016) を紹介する。

1 Introduction

重力波は、空間歪みのさざなみが光速度で周囲に伝播する現象である。そのため、宇宙空間への透過力が高く、電磁波やニュートリノを利用した観測ではとらえきれないブラックホールや中性子星といった強重力天体や初期宇宙に関連する現象を観測できると期待されている。重力波観測に関連する様々な研究が盛んに行われているが、その中でも重力波を放出するコンパクト連星の合体を標準サイレンとして利用するための手法を開発することが本研究のテーマである。

重力波の波形は数値相対論により、様々な状況でシミュレーションがおこなわれており、観測された波形と比較することで波源の様々な情報を得ることができる。波形の振動数・振動数の時間変化から天体の質量を求めることができ、この質量と波形から求められる歪み振幅を用いれば光度距離を導くことができる。このように天体までの光度距離を直接波形から導出できる点が重力波の観測手法としての長点となる。

しかしながら、重力波を放出する天体現象は赤方偏移を観測できるような電磁波を放出する現象（電磁波カウンターパート）を伴うとは限らないという問題がある。特に BH-BH 連星の合体においては電磁波カウンターパートを伴う方が稀であると考えられている。重力波を標準サイレンとして利用し、ハッブル定数やダークマター・エネルギーといった宇宙論パラメータを決定するには、重力波波源の赤方偏移が同時に必要である。したがって重力波観測、ひいては重力波天文学の可能性を広げるためにも赤方偏移をどのように取り扱うかが重要である。さらに、重力波の波形を変化させる要素として弱い重力レンズがある。この効果をどこまで含ませるかということが手法の正確さ、引き出した情報の正確さに重要である。

以下では今回紹介する Namikawa+2016 と Oguri 2016 の手法とその結果について説明する。

2 Methods

2.1 Namikawa+2016

LSS によって引き起こされる異方性の角度パワースペクトルを導く。まず、重力波を放射し光度距離が得られたコンパクト連星の分布関数を $p(\boldsymbol{x}) \equiv N(\boldsymbol{x})/\int \mathrm{d}DN(\boldsymbol{x})$ と定義する。ここで、$N(\boldsymbol{x}) = N(D,\Omega)$ とはコンパクト連星の光度距離ごとの分布

を表す光度距離 D と方向 Ω の関数である。観測された重力波波源は範囲が $D_i^{\max} \leq D \leq D_i^{\min}$ である光度距離のビンにサブサンプルとして分けられる。LSS のもたらす異方性には主要なものに光度距離に弱い重力レンズが与える効果と重力波源の分布関数 $N(\boldsymbol{x})$ に与えるクラスタリングの効果の 2 種類がある。前者は重力レンズがなく一様等方宇宙を仮定した場合の光度距離を $\bar{D}$ とすれば、$D(\boldsymbol{x}) = \bar{D}[1 + \kappa(\overline{\boldsymbol{x}})]$ と表せられる。後者は $N(\boldsymbol{x}) = N(\overline{\boldsymbol{x}})[1 + \delta(\overline{\boldsymbol{x}})]$ として表される。ただし $\overline{\boldsymbol{x}} = (\bar{D}, \Omega)$ である。ここで $\kappa(\boldsymbol{x})$ はレンズ収束場である。

次に光度距離の平均をビンごとにとり、これと全天での光度距離の平均との差を LSS が誘引する異方性として定量化する。ビンごとの光度距離の平均は

$$\widehat{d}_i(\Omega) = \int_{D_i^{\min}}^{D_i^{\max}} \mathrm{d}D D p(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

したがって、LSS が誘引する異方性は

$$\widehat{s}_i(\Omega) \equiv \frac{\widehat{d}_i(\Omega) - \widehat{d}_i}{\widehat{d}_i} \tag{2}$$

ここで、$n(\boldsymbol{x}) \equiv D p(\boldsymbol{x})$ と定義しておき、レンジングとクラスタリングの効果を加味すれば

$$\widehat{s}_i(\Omega) = \frac{1}{\bar{d}_i} \int_{D_i^{\min}}^{D_i^{\max}} \mathrm{d}D \bar{n}(D)[\delta(\boldsymbol{x}) + \gamma(D)\kappa(\boldsymbol{x})]. \tag{3}$$

となる。ここで、

$$\gamma(D) \equiv 1 + D\left[\delta_{\mathrm{D}}\left(D - D_i^{\min}\right) - \delta_{\mathrm{D}}\left(D - D_i^{\max}\right)\right] \tag{4}$$

この異方性を球面調和関数を用いて展開し、自己相関角度パワースペクトル $\widehat{C}_\ell^{s_i s_j} \equiv \sum_{m=-\ell}^{\ell}\left(\widehat{s}_{i,\ell m}\widehat{s}^*_{j,\ell m} + c.c.\right)/[2(2l + 1)]$ を求めると

$$\begin{aligned} C_\ell^{s_i s_j} \equiv \left\langle \widehat{C}_\ell^{s_i s_j} \right\rangle = \int_{D_i^{\min}}^{D_i^{\max}} \frac{\mathrm{d}D_1}{\bar{d}_i} \int_{D_j^{\min}}^{D_j^{\max}} \frac{\mathrm{d}D_2}{\bar{d}_j} \\ \times \bar{n}\left(D_1\right)\bar{n}\left(D_2\right)\Big\{C_\ell^{\delta_1\delta_2} + \gamma\left(D_1\right)\gamma\left(D_2\right)C_\ell^{\kappa_1\kappa_2} \\ + \gamma\left(D_1\right)C_\ell^{\delta_2\kappa_1} + (1 \leftrightarrow 2)\Big\}. \end{aligned} \tag{5}$$

$C_\ell^{\delta\delta}$ と $C_\ell^{\kappa\kappa}$ はクラスタリングとレンジングの自己相関角度パワースペクトルであり、$C_\ell^{\delta\kappa}$ はクラスタリングとレンジングの相互相関角度パワースペクトルである。

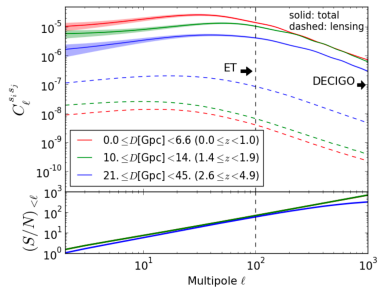


図 1: 光度距離ビンごとの LSS が誘引する異方性 $\widehat{s}_i$ 自己相関角度パワースペクトルと累積信号対雑音比 (SNR)。ET による 3 年間の観測を仮定し、光度距離によって分けられたビンを 3 つ選んで l_{max} に対し図示されている。

2.1.1 結果

LSS による自己相関角度パワースペクトルが観測可能かを調べるためにビン i における LSS が誘引する異方性 $\widehat{s}_i$ の累積信号対雑音比を次のように定義し l_{max} に対して図示する。

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2_{<\ell} \equiv \sum_\ell \frac{2\ell + 1}{2}\left[\frac{C_\ell^{s_i s_i}}{(\sigma_i^2/N_i) + C_\ell^{s_i s_i}}\right]^2 \tag{6}$$

ただし、$\sigma(D)$ はフィッシャー行列を用いて導出された計測器による誤差 ϵ（今回は簡単のためランダム・ガウス分布を仮定している）の rms である。図 1 は LSS の誘引する異方性の角度自己相関パワースペクトルと累積信号対雑音比（SNR）である。図 1 より SNR は $l_{max} > 1000$ まで単調に増加し、ビンによる差はほとんどない。つまり、GW 検出器の十分な角度分解能があれば、LSS による異方性をかなり遠くの天体まで検出できると期待される。

2.2 Oguri 2016

弱い重力レンズ効果による影響を含んだ光度距離 D は Namikawa + 2016 と同様次のように定義される。

$$D \approx \bar{D}[1 - \kappa(\boldsymbol{\theta}, z)], \tag{7}$$

さらに、Oguri 2016 では重力波観測から推定される光度距離 D_{obs} と光度距離 D との関係が以下のような対数正規分布であると仮定している。

$$p\left(D_{\mathrm{obs}} \mid D\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\ln D}} \exp\left[-x^2\left(D_{\mathrm{obs}}\right)\right] \frac{1}{D_{\mathrm{obs}}} \tag{8}$$

ここで $x(D_{obs})$ とは

$$x\left(D_{\rm obs}\right) \equiv \frac{\ln D_{\rm obs} - \ln D}{\sqrt{2}\sigma_{\ln D}} \tag{9}$$

である。またここでは $\sigma_{\ln D} = 0.05$(S.Camera,& A.Nishizawa 2013) と仮定している。

次に i 番目の角度数密度場 $n_i^w(\boldsymbol{\theta})$ を、区間を $D_{{\rm min},i} < D_{obs} < D_{{\rm max},i}$ に構成する。重力波源の 3 次元数密度場 $n_{\rm GW}(\boldsymbol{\theta}, z)$ を用いて

$$n_i^{\rm w}(\boldsymbol{\theta}) = \int_0^\infty dz \frac{\chi^2}{H(z)} S_i(z) n_{\rm GW}(\boldsymbol{\theta}, z) \tag{10}$$

ここで、共動角径距離は $\chi = \int_0^z dz' \left[1/H\left(z'\right)\right]$ であり、$S_i(z)$ は視線方向の選択関数で以下のように表せられる。

$$\begin{aligned} S_i(z) \equiv & \int_0^\infty \Theta\left(D_{\rm obs} - D_{{\rm min},i}\right) \Theta\left(D_{{\rm max},i} - D_{\rm obs}\right) \\ & \times p\left(D_{\rm obs} \mid D\right) dD_{\rm obs} \\ = & \frac{1}{2}\left[{\rm erfc}\left\{x\left(D_{i,{\rm min}}\right)\right\} - {\rm erfc}\left\{x\left(D_{i,{\rm max}}\right)\right\}\right] \end{aligned} \tag{11}$$

ここで、(3) は $S_i(z)$ に修正を加える。また $n_{\rm GW}(\boldsymbol{\theta}, z) = \bar{n}_{\rm GW}(z)[1 + \sigma_{\rm GW}(\boldsymbol{\theta}, z)]$ によって角度投影密度場 $\delta_i^{\rm 2D,w}(\boldsymbol{\theta})$ を定義できる。レンズ収束 $\kappa(\boldsymbol{\theta}, z)$ が十分小さいとすると

$$\begin{aligned} \delta_i^{\rm 2D,w}(\boldsymbol{\theta}) \equiv & \frac{n_i^{\rm w}(\boldsymbol{\theta}) - \bar{n}_i^{\rm w}}{\bar{n}_i^{\rm w}} \\ \approx & \frac{1}{\bar{n}_i^{\rm w}} \int_0^\infty dz \frac{\chi^2}{H(z)} \bar{n}_{\rm GW}(z) S_i(z) \delta_{\rm GW}(\boldsymbol{\theta}, z) \\ & + \frac{1}{\bar{n}_i^{\rm w}} \int_0^\infty dz \frac{\chi^2}{H(z)} \bar{n}_{\rm GW}(z) T_i(z) \kappa(\boldsymbol{\theta}, z) \\ \equiv & \int_0^\infty dz \left[W_i^{\rm s}(z) \delta_{\rm GW}(\boldsymbol{\theta}, z) + W_i^{\rm t}(z) \kappa(\boldsymbol{\theta}, z)\right] \end{aligned} \tag{12}$$

ここで

$$\begin{aligned} T_i(z) \equiv & \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\ln D}} \\ & \times \left\{-\exp\left[-x^2\left(D_{i,{\rm min}}\right)\right] + \exp\left[-x^2\left(D_{i,{\rm max}}\right)\right]\right\} \end{aligned} \tag{13}$$

(12) の第一項はクラスタリングによる重力は波源の分布の修正、第二項はレンジングによって重力波波源の分布が修正されることからくる項である。

重力波波源と相関をとる分光銀河の i 番目のサンプルは $z_{{\rm min},i} < z < z_{{\rm max},i}$ で定義され、分光銀河の角度投影密度場 $\delta_i^{\rm 2D,g}(\boldsymbol{\theta})$ は 3 次元密度場 $\delta_{\rm g}(\boldsymbol{\theta}, z)$ を用いて

$$\delta_i^{\rm 2D,g}(\boldsymbol{\theta}) = \int_0^\infty dz W_i^{\rm g}(z) \delta_{\rm g}(\boldsymbol{\theta}, z), \tag{14}$$

と表せられる。ここで

$$W_i^g(z) \equiv \frac{1}{\bar{n}_i^{\rm g}} \frac{\chi^2}{H(z)} \bar{n}_{\rm g}(z) \Theta\left(z - z_{{\rm min},i}\right) \Theta\left(z_{{\rm max},i} - z\right) \tag{15}$$

以上から、l が大きい時に成り立つ Limber 近似を用いて、重力波波源の自己相関角度パワースペクトルは

$$C^{{\rm w}_i{\rm w}_j}(\ell) = C^{{\rm s}_i\ {\rm s}_j}(\ell) + C^{{\rm s}_i{\rm t}_j}(\ell) + C^{{\rm s}_j{\rm t}_i}(\ell) + C^{{\rm t}_i{\rm t}_j}(\ell), \tag{16}$$

$$\begin{aligned} C^{{\rm s}_i\ {\rm s}_j}(\ell) = & \int_0^\infty dz W_i^{\rm s}(z) W_j^{\rm s}(z) \frac{H(z)}{\chi^2} b_{\rm GW}^2 \\ & \times P_{\rm m}\left(\frac{\ell + 1/2}{\chi}; z\right). \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} C^{{\rm s}_i{\rm t}_j}(\ell) = & \int_0^\infty dz W_j^{\rm t}(z) \int_0^z dz' W_i^{\rm s}\left(z'\right) W^\kappa\left(z'; z\right) \\ & \times \frac{H\left(z'\right)}{\chi'^2} b_{\rm GW} P_{\rm m}\left(\frac{\ell + 1/2}{\chi'}; z'\right), \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} C^{{\rm t}_i{\rm t}_j}(\ell) = & \int_0^\infty dz W_i^{\rm t}(z) \int_0^\infty dz' W_j^{\rm t}\left(z'\right) \\ & \int_0^{\min\left(z, z'\right)} dz'' \times W^\kappa\left(z''; z\right) W^\kappa\left(z''; z'\right) \frac{H\left(z''\right)}{\chi''^2} \\ & \times P_{\rm m}\left(\frac{\ell + 1/2}{\chi''}; z''\right) \end{aligned} \tag{19}$$

分光銀河の自己相関角度パワースペクトルは

$$\begin{aligned} C^{{\rm g}_i\ {\rm g}_j}(\ell) = & \delta_{ij} \int_0^\infty dz \left[W_i^{\rm g}(z)\right]^2 \frac{H(z)}{\chi^2} b_{\rm g}^2 \\ & \times P_{\rm m}\left(\frac{\ell + 1/2}{\chi}; z\right) \end{aligned} \tag{20}$$

重力波波源と分光銀河の相互相関角度パワースペクトルは

$$C^{{\rm w}_i\ {\rm g}_j}(\ell) = C^{{\rm s}_i\ {\rm g}_j}(\ell) + C^{{\rm t}_i\ {\rm g}_j}(\ell), \tag{21}$$

$$\begin{aligned} C^{{\rm s}_i\ {\rm g}_j}(\ell) = & \int_0^\infty dz W_i^{\rm s}(z) W_j^{\rm g}(z) \frac{H(z)}{\chi^2} \\ & \times b_{\rm GW} b_{\rm g} P_{\rm m}\left(\frac{\ell + 1/2}{\chi}; z\right), \end{aligned} \tag{22}$$

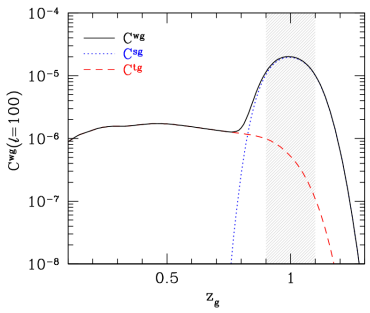


図 2: 重力波源と銀河間の相互相関パワースペクトル。$l = 100$ における相互相関パワースペクトルを、分光銀河サンプルの中心赤方偏移 z_g の関数として示したものである。GW 天体の光度距離ビンを、$0.9 \leq z_g \leq 1.1$ に対応するように固定している。点線と破線は、それぞれ C^{sg} [(22)] と C^{tg}[式 (23)] の C^{wg} への寄与を示す

$$C^{\mathrm{t}_j\ \mathrm{g}_j}(\ell) = \int_0^\infty dz W_i^{\mathrm{t}}(z) \int_0^z dz' W_j^{\mathrm{g}}(z')\, W^{\kappa}(z'; z) \times \frac{H(z')}{\chi'^2} b_{\mathrm{g}} P_{\mathrm{m}}\left(\frac{\ell + 1/2}{\chi'}; z'\right) \tag{23}$$

となる。

2.2.1 結果

光度距離のビンと赤方偏移のビンが最もよく一致するときに最大となり、そこから光度距離と赤方偏移の関係を推定することができる。GW 天体の光度距離ビンは $0.9 \leq z \leq 1.1$ に対応するように固定している。図 2 は、相互相関が分光銀河サンプルの赤方偏移より下まで伸びていることを示している。式 (23) で定義される C^{tg} が原因である。距離-赤方偏移関係や宇宙論的パラメータをどの程度拘束できるかを推定するためにフィッシャー行列

$$F_{\alpha\beta} = \sum_{\ell} \sum_{i,j,m,n} \frac{\partial C^{ij}}{\partial p_\alpha} \left[\mathrm{Cov}\left(C^{ij}, C^{mn}\right)\right]^{-1} \frac{\partial C^{mn}}{\partial p_\beta} \tag{24}$$

を計算する。ただし、ここで p_α は宇宙論パラメータを示す。マージナル誤差は $\sigma(p_\alpha) = \sqrt{(F^{-1})_{\alpha\alpha}}$ で求まる。図 3 は、宇宙論的パラメータのマージナル誤差を示したもので、相互相関解析により、ハッブル定数やダークエネルギーパラメータに厳しい制約を与えることができることがわかる。また、$l_{max} = 100$ から $l_{max} = 300$ まで制約が大きく改善されていることから、相互相関解析では GW 天体の正確な位置特定が重要であることがわかる。

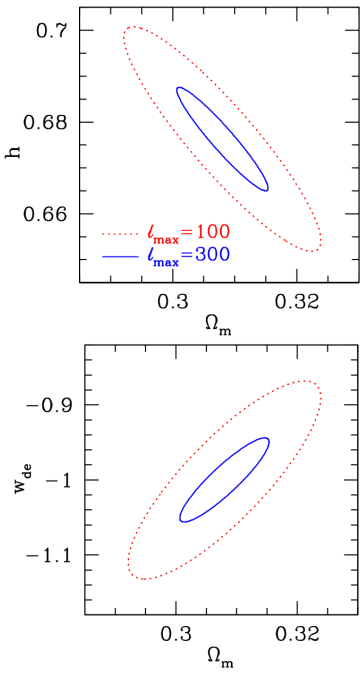


図 3: $\Omega_m - h$ と $\Omega_m - wde$ 平面における 68 %信頼限界。$l_{max} = 100$ と $l_{max} = 300$ における宇宙論的パラメータのマージナル誤差を示している。

3 Conclusion

Namikawa+2016,Oguri 2016 はともに重力波から得られる光度距離を用いて有意な情報を得られる手法であることがわかった。しかしながら、O4 や次世代観測器によって High z の観測データが得られた時、有意な解析が可能かどうか。レンジングによる光度距離への効果はより高次では何を意味するのか。観測された光度距離と標準光度距離の関係など改善の余地がある。

Reference

T.Namikawa,A.Nishizawa, & A.Taruya 2016,Physical Review Letters, Volume 116, Issue 12, id.121302

M.Oguri 2016, hysical Review D, Volume 93, Issue 8, id.083511

S.Camera, & A.Nishizawa 2013, Physical Review Letters, vol. 110, Issue 15, id. 151103

———index へ戻る

重宇b09

背景重力波の円偏極モード検出を目指した重力波ラジオメトリ解析の開発

覺 依珠美

背景重力波の円偏極モード検出を目指した重力波ラジオメトリ解析の開発

覺　依珠美 (大阪公立大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙論的背景重力波の円偏極モードは Chern-Simons 項の存在によって生成されると考えられており、全天で右回りまたは左回りに偏っている非対称性を観測することができれば、その生成機構でパリティ対称性が破れていることの証拠になると考えられている。一方これまで、天体起源背景重力波円偏極モードは波源の一様分布によって無偏極になると考えられてきたが、波源分布の異方性と今後の検出器感度の向上を考慮すると無視できない振幅で円偏極モードが存在する可能性があることが指摘された。つまり、これらの存在は宇宙論的背景重力波の円偏極モードを観測する上で前景放射として影響を及ぼす恐れがある。本発表では、天体起源背景重力波の全天探索を目的とした解析手法の開発について述べる。

1　研究背景

重力波とは時空の歪みが横波となって光速で伝播する波動現象であり、様々な起源を持つ微弱な重力波の重ね合わせが「背景重力波」となる。その中でも、宇宙初期のインフレーションなどを起源とする「宇宙論的背景重力波」は、重力波が物質との相互作用が極めて小さいために脱結合以前の宇宙から到来することから、宇宙誕生後の様子を知るための重要な手掛かりの一つである。しかし、過去 3 度行われた地上設置型のレーザー干渉計検出器を用いた国際共同観測では、背景重力波存在の直接の証拠は発見されていない。よって、2023 年 5 月から行われている第 4 次国際共同観測以降では、検出器の高感度化や観測データの増加によってその観測可能性の向上が期待されている。

重力波は横波であることから、その偏極が存在する。特に、最近では宇宙論的背景重力波の円偏極モードにおいて、全天で右回りまたは左回りのどちらかに偏る非対称性の存在に注目が集まっている [1][2]。この円偏極モードは弦理論に従う Chern-Simons 項の存在によって生成されると考えられているため、円偏極モードを空の各点で観測することができれば、その生成機構でパリティ対称性が破れていることの証拠になると考えられている。よって、このような円偏極モードの探索は宇宙初期に関する研究に直接的な影響を与える可能性があり、背景重力波直接観測後の観測目的として重要なターゲットの一つである。

一方で、ブラックホール連星合体などによる「天体起源背景重力波」は、波源分布が等方的であると仮定して無偏極であると考えられてきた。しかし、波源分布に異方性がある場合、今後の検出器感度の向上によって無視できない振幅で存在する可能性が指摘された [3]。これらは特に第 3 世代検出器の観測周波数帯において円偏極モード観測を行う際に大きな影響を及ぼす可能性があり、これらを除去するための解析手法が必要となる。

そこで本研究では、天体起源背景重力波の円偏極モードを解析するための手法として、電磁波の偏光を特徴づけるストークスパラメータを「重力波ラジオメトリ解析 [4]」に導入する新たな解析手法の開発を目的とする。

重力波ラジオメトリとは、複数台の検出器に重力波が到来する際の到来時間差を用いて、空の各点におけるパワーを全天マッピングできる手法である。重力波ラジオメトリは全天を一度に探索することによって波源を特定することができ、観測時間の増加に対して単純に相関値を加算するだけで良い。背景重力波探索では観測時間の 1/2 乗に比例して信号対雑音比が大きくなるため、これらの点は天体起源背景重力波探索を行う上で優れた点である。

2　研究方法

以下では、本研究に用いる重力波ラジオメトリ解析とストークスパラメータについて述べる。

2.1 重力波ラジオメトリ解析

2.1.1 原理

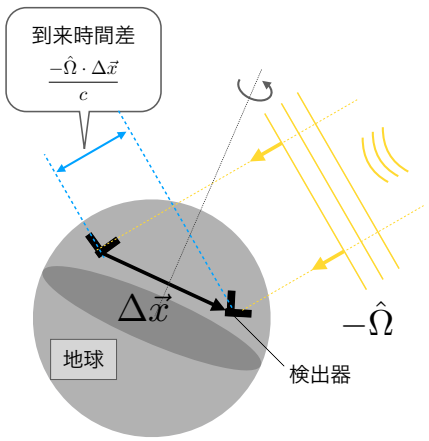


図 1: 重力波ラジオメトリ解析の原理

ラジオメトリ解析は宇宙マイクロ波背景放射の観測で使われる手法の一つである。原理としては、2 のように、空のある方向 $\hat{\Omega}$ から 2 台の検出器に重力波が到来すると、到来時間差 $-\hat{\Omega}\cdot\Delta\vec{x}/c$ が発生する。2 台の検出器を結ぶベクトル $\Delta\vec{x}$ の向きが地球の自転によって変化すると、この時間差も変化する。よって、2 台の検出器からのデータに適切な時間差を導入して相互相関をとることで、求めたい空の方向からの重力波を検出することができる。また、空のそれぞれの位置に対してこの計算を行うことで全天マップを作成することができる。

2.1.2 相互相関統計量

それぞれの検出器における観測信号を $s_I(t)$ $(I = 1, 2)$ とする。この時、重力波信号を $h_I(t)$、それぞれの検出器における雑音を $n_I(t)$ とすると、

$$s_I(t) = h_I(t) + n_I(t) \tag{1}$$

となる。ここで、重力波信号と検出器雑音は無相関であり $(\langle h_I(t)n_I(t)\rangle = 0)$、また検出器間の雑音も無相関であるとする $(\langle n_1(t)n_2(t)\rangle = 0)$。

次に、統計量 S を

$$S \equiv \int_0^T dt\ s_1(t)s_2(t)Q(t) \tag{2}$$

と定義する。ここで $Q(t)$ はラジオメトリフィルター関数である。検出器雑音が非定常であることから Δt ごとに計算を行うと、時刻 t における k 番目の統計量 $\Delta S(t)$ は、

$$\Delta S(t,\hat{\Omega}) = \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} dt' \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} dt''\ s_1(t')s_2(t'')Q(t,\hat{\Omega};t',t'') \tag{3}$$

$s_1(t)$, $s_2(t)$ の短時間フーリエ変換を

$$\tilde{s}_1(f) = \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} dt\ s_1(t)e^{-2\pi ift} \tag{4a}$$

$$\tilde{s}_2(f) = \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} dt\ s_2(t)e^{-2\pi ift} \tag{4b}$$

とする。また、

$$Q(t,\hat{\Omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} df\ \tilde{Q}(f,\hat{\Omega};t)e^{2\pi if(t'-t'')} \tag{5}$$

であることから (3) は、

$$\Delta S(t,\hat{\Omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} df\ \tilde{s}_1(f;t)\tilde{s}_2(f;t)\tilde{Q}(f,\hat{\Omega};t) \tag{6}$$

となる。さらに、信号対雑音比が最大となるようなラジオメトリフィルターを選ぶと、

$$\tilde{Q}(f,\hat{\Omega};t) = \lambda\frac{\gamma^*(f,\hat{\Omega})H(f)}{P_1(f;t)P_2(f;t)} \tag{7}$$

とすることができる。ここで λ は規格化定数、$H(f)$ は観測したい重力波のパワースペクトル、P_1, P_2 はそれぞれの検出器雑音のパワースペクトルである。また γ は overlap reduction function と呼ばれ、検出器間の相関の度合いを示す指標となっている。具体的な形は検出器のアンテナ応答を F^A $(A = +, \times)$ として

$$\gamma(f,\hat{\Omega}) = \sum_{A=+,\times} F_1^A F_2^A e^{2\pi if\hat{\Omega}\cdot\Delta\vec{x}/c} \tag{8}$$

となっており、アンテナ応答と到来時間差の補正を γ で行うことができる。これにより到来方向に対して $\tilde{s}_1(f)$, $s_2(f)$ の間の位相が補正されるので統計量が最大値をとる。

最後に、平均を $\mu = \langle\Delta S\rangle$、分散を $\sigma^2 = \langle\Delta S^2\rangle - \langle\Delta S\rangle^2$ とすると、信号対雑音比 ρ は

$$\rho(\hat{\Omega}) = \frac{\mu(\hat{\Omega})}{\sigma(\hat{\Omega})} \tag{9}$$

と表す。

2.2 ストークスパラメータ

ストークスパラメータは電磁波の偏光の特性を表す物理量である。z 軸方向に伝播する単色波のような電磁波について、空間のある点での電場の成分を

$$\mathcal{E}_x(t) = A_x(t)e^{i[\omega t-\theta_x(t)]} \tag{10a}$$
$$\mathcal{E}_y(t) = A_y(t)e^{i[\omega t-\theta_y(t)]} \tag{10b}$$

とすると、電磁波を特徴づける $\{A_x,\, A_y,\, \theta_x,\, \theta_y\}$ はエルミート行列 $\langle \mathcal{E}_a \mathcal{E}_b^* \rangle\, (a, b = x, y)$ の 4 つの独立した実成分に組み込むことができる。ここで $\langle\ \rangle$ は数周期分の時間平均である。このエルミート行列は単位行列とパウリ行列を用いて展開することができ、

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{E}_a \mathcal{E}_b^* \rangle &= \frac{1}{2} I\delta_{ab} + \frac{1}{2}(U\sigma_1 + V\sigma_2 + Q\sigma_3)_{ab} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I+Q & U-iV \\ U+iV & I-Q \end{pmatrix}_{ab}\end{aligned} \tag{11}$$

として、実定数であるストークスパラメータ I, Q, U, V でまとめることができる。このエルミート行列は単位行列とパウリ行列を用いて展開することができ、

$$I = \langle A_x^2 \rangle + \langle A_y^2 \rangle \tag{12a}$$
$$Q = \langle A_x^2 \rangle - \langle A_y^2 \rangle \tag{12b}$$
$$U = 2\langle A_x A_y \cos(\theta_x - \theta_y) \rangle \tag{12c}$$
$$V = 2\langle A_x A_y \sin(\theta_x - \theta_y) \rangle \tag{12d}$$

である。

(12a) より、I は電磁波の強度を表す。また、Q と U は直線偏光を表す。(12b), (12c) について、$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_y$ のとき $Q \neq 0, U = V = 0$ となり、x 軸に対して偏光面を 45° 傾けることによって $A_x = A_y, \theta_x = \theta_y$ となることから、$U \neq 0, Q = V = 0$ となる。以上より、任意の方向に対する直線偏光はこの 2 つのパラメータの重ね合わせであるので、$Q, U \neq 0, V = 0$ で直線偏光を表すことができる。

そして、V は円偏光を表す。(12d) において円偏光になるように $\theta_y = \theta_x + \pi/2$, $A_x = A_y$ とおくと、$\mathcal{E}_x = \pm i\mathcal{E}_y$ となる。よって $Q = U = 0, V \neq 0$ となる。

このように、4 つのストークスパラメータを用いて電磁波の偏光を特徴づけることができる。

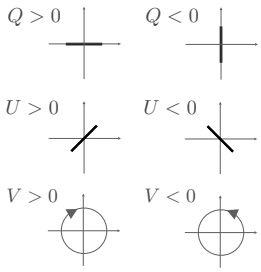


図 2: ストークスパラメータ

3 円偏極モード探索のための解析方法

円偏極モードを探索するにあたり、背景重力波の偏極に着目してストークスパラメータを導入し、重力波ラジオメトリ解析で偏極成分と方向依存成分を取り出すことにより解析を行う。

3.1 ストークスパラメータの導入

ここで、重力波信号が異なる周波数、異なる到来方向であったときに無相関であると仮定する。この時の重力波信号同士の相関は

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} \langle \tilde{h}_+(f,\hat{\Omega})\tilde{h}_+(f,\hat{\Omega})\rangle & \langle \tilde{h}_+(f,\hat{\Omega})\tilde{h}_\times(f,\hat{\Omega})\rangle \\ \langle \tilde{h}_\times(f,\hat{\Omega})\tilde{h}_+(f,\hat{\Omega})\rangle & \langle \tilde{h}_\times(f,\hat{\Omega})\tilde{h}_\times(f,\hat{\Omega})\rangle \end{pmatrix} \\ &\equiv \frac{1}{2}\mathcal{D}_{AA'}(f,\hat{\Omega})\delta(\hat{\Omega}-\hat{\Omega}')\delta(f-f')\end{aligned} \tag{13}$$

$$\mathcal{D}_{AA'} \equiv \begin{pmatrix} I(f,\hat{\Omega}) + Q(f,\hat{\Omega}) & U(f,\hat{\Omega}) - iV(f,\hat{\Omega}) \\ U(f,\hat{\Omega}) + iV(f,\hat{\Omega}) & I(f,\hat{\Omega}) - Q(f,\hat{\Omega}) \end{pmatrix} \tag{14}$$

となる。これより、検出器ごとに得られた重力波信号の相関は

$$\begin{aligned}&\langle \tilde{h}_1(f';t)\tilde{h}_2(f;t)\rangle \\ &= \sum_{A'}\sum_{A}\int_{S^2} d\hat{\Omega}'\ F_1^{A'}(\hat{\Omega})F_2^{A}(\hat{\Omega}) \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} df''\ \frac{1}{2}\mathcal{D}_{AA'}(f'',\hat{\Omega})e^{2\pi i f\hat{\Omega}\cdot\Delta\vec{x}}\delta_{\Delta t}(f'-f'')\delta_{\Delta t}(f-f'')\end{aligned} \tag{15}$$

のようになる。$\delta_{\Delta t}$ は

$$\delta_{\Delta t}(f) \equiv \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} dt'\ e^{2\pi i f t'} \tag{16}$$

であり、S^2 は全立体角を表している。

ここで、overlap reduction funtion を定義する。簡単のため周波数成分と方向成分の変数分離を仮定し、全天に重力波源が 1 つしかない ($\mathcal{P}_\alpha(\Omega') = \delta(\Omega' - \Omega)$) とする。この時、

$$\sum_{A'}\sum_{A}\int_{S^2} d\hat{\Omega}'\ F_1^{A'}(\hat{\Omega})F_2^{A}(\hat{\Omega})\frac{1}{2}\mathcal{D}_{AA'} = \sum_{\alpha=I,Q,U,V}\gamma^\alpha(t,f)H_\alpha(f) \tag{17}$$

であり、

$$\gamma^I \equiv \int_{S^2} d\hat{\Omega}\left[F_1^+(\hat{\Omega},t)F_2^+(\hat{\Omega},t) + F_1^\times(\hat{\Omega},t)F_2^\times(\hat{\Omega},t)\right] \times\mathcal{P}_I(\hat{\Omega})e^{2\pi i f\hat{\Omega}\cdot\Delta\vec{x}/c} \tag{18a}$$

$$\gamma^Q \equiv \int_{S^2} d\hat{\Omega}\left[F_1^+(\hat{\Omega},t)F_2^+(\hat{\Omega},t) - F_1^\times(\hat{\Omega},t)F_2^\times(\hat{\Omega},t)\right] \times\mathcal{P}_Q(\hat{\Omega})e^{2\pi i f\hat{\Omega}\cdot\Delta\vec{x}/c} \tag{18b}$$

$$\gamma^U \equiv \int_{S^2} d\hat{\Omega}\left[F_1^+(\hat{\Omega},t)F_2^\times(\hat{\Omega},t) + F_1^\times(\hat{\Omega},t)F_2^+(\hat{\Omega},t)\right] \times\mathcal{P}_U(\hat{\Omega})e^{2\pi i f\hat{\Omega}\cdot\Delta\vec{x}/c} \tag{18c}$$

$$\gamma^V \equiv i\int_{S^2} d\hat{\Omega}\left[F_1^+(\hat{\Omega},t)F_2^\times(\hat{\Omega},t) - F_1^\times(\hat{\Omega},t)F_2^+(\hat{\Omega},t)\right] \times\mathcal{P}_V(\hat{\Omega})e^{2\pi i f\hat{\Omega}\cdot\Delta\vec{x}/c} \tag{18d}$$

となる。以上より、$f' \to f$ のとき、

$$\langle\tilde{h}_1^*(f;t)\tilde{h}_2(f;t)\rangle = \Delta t\boldsymbol{\Gamma}(t,f)\cdot\boldsymbol{H}(f)e^{2\pi i f\hat{\Omega}\cdot\Delta\vec{x}/c} \tag{19}$$

$$\gamma^\alpha(\hat{\Omega},t,f) = \Gamma^\alpha(\hat{\Omega},t)e^{2\pi i f\hat{\Omega}\cdot\Delta\vec{x}/c} \tag{20}$$

となり、信号対雑音比を最大化するラジオメトリフィルターは

$$\tilde{Q}(\hat{\Omega},t,f) = \lambda(\hat{\Omega},t)\frac{\boldsymbol{\Gamma}^*(\hat{\Omega},t)\cdot\boldsymbol{H}(f)}{P_1(f;t)P_2(f;t)}e^{2\pi i f\hat{\Omega}\cdot\Delta\vec{x}/c} \tag{21}$$

と求められる。よって、μ, σ は

$$\mu(\hat{\Omega},t) = \int_{-\infty}^{\infty} df\ \Delta t\boldsymbol{\Gamma}(\hat{\Omega},t)\cdot\boldsymbol{H}(f)\tilde{Q}(\hat{\Omega},f;t) \times e^{2\pi i f\hat{\Omega}\cdot\Delta\vec{x}/c} \tag{22}$$

$$\sigma^2(\hat{\Omega},t) = \frac{\lambda(\hat{\Omega},t)}{4} \tag{23}$$

となる。

3.2 Clean map の構築

最後に、ラジオメトリフィルター (21) は仮定された重力波スペクトル $\boldsymbol{H}(f)$ に対してのみ最適となる。よって実際の重力波スペクトルと異なる可能性があることを考慮する必要がある。

また、全天に波源が 1 つしかないと仮定したことから、実際に複数の波源が存在するときには最適とはならない。よってこのフィルターを用いた統計量による全天マップは“Dirty map”となる。全観測時間で足し上げた最終的な統計量は

$$s(\hat{\Omega}) = \frac{\int\mu(\hat{\Omega},t)\sigma^{-2}dt}{\int\sigma^{-2}(\hat{\Omega},t)dt} \tag{24}$$

と求められるが、これは

$$s(\hat{\Omega}) = \sum_\alpha\int_{S^2} d\hat{\Omega}'\ \mathcal{P}_\alpha B^\alpha(\hat{\Omega},\hat{\Omega}') \tag{25}$$

のように、点の拡がりを表す beam function B との畳み込みで表すことができる。よってこの畳み込みを解くことにとって純粋な $\mathcal{P}_\alpha$ を得ることができ、得られた $\mathcal{P}_\alpha$ によるマップが“Clean map”である。

4 まとめ・今後の展望

今回は、天体起源背景重力波の円偏極モードについて全天探索を行う解析手法の理論的な構築を行った。その際、重力波の偏極に着目してストークスパラメータを導入し、定常的に値をもつ連続波を探索する重力波ラジオメトリ解析を用いることにした。これによると、(17), (18a)-(18d) のように overlap reduction function が、そして (21) のようにラジオメトリフィルターが修正されることがわかった。

今後は重力波源分布の異方性を仮定してシミュレーション解析を行い、実データ解析を見据えて今回の解析手法の完成を目指す。

Reference

[1] N. Seto, Phys. Rev. Lett. 97, 151101
[2] N. Seto and A. Taruya, Phys. Rev. D 77, 103001
[3] E. Thrane et al. Phys. Rev. D 80, 122002
[4] S. Mitra et al. Phys. Rev. D 77, 042002
[5] 岡田雄太, 修士論文, 大阪市立大学大学院 (2011)
[6] M. Maggiore, “gravitational Waves Volume2: Astrophysics and Cosmology”, Oxford University Press, 2008.

———index へ戻る

重宇b10

BipoSH を用いた宇宙の大規模構造における等方性の破れの検証

湊 恵太

BipoSH を用いた宇宙の大規模構造における等方性の破れの検証

湊 恵太 (京都大学大学院 理学研究科)

Abstract

BipoSH を用いてパワースペクトルを展開し、その係数を調べることで、宇宙における等方性の破れを検証、およびその破れ方を特定することが可能になる。また、Fisher 行列を用いた解析により、将来観測でパラメータ推定の精度が 1 桁近く改善することが示された。

本稿では、[1] に基づき BipoSH を用いた非等方性の解析方法、および Fisher 解析によるパラメータ推定のエラーの評価についてレビューする。

1 Introduction

2 点相関関数は、観測者から見た 2 つの銀河の方向 $\hat{x}_1, \hat{x}_2$、およびそれらの相対的な向き $\hat{x}_{12}$ の計 3 つの向きにより特徴づけられる。そのため、球面調和関数 3 つの直積である Tripolar Spherical Harmonics (TripoSH) を用いた展開が可能である。ところが、TripoSH を用いた解析ではパラメータ（展開計数）の数が多く、統計平均を取る際に十分な統計精度が確保できない。そこで、本発表では Plane-Parallel 近似と呼ばれる近似を行い、パラメータの数を減らした解析を行う。ここで、Plane-Parallel 近似とは、相関をとる 2 つの銀河を見込み角が小さいものに限定し、$\hat{x}_1 \sim \hat{x}_2 \equiv \hat{n}$ とする近似である。この近似を行うことで、TripoSH は Bipolar Spherical Harmonics (BipoSH) へと簡略化される。次節以降では、まず初めに BipoSH を基底としてパワースペクトルを展開し、等方性の破れの有無によりその展開係数がどのような形を取るかを調べる。その後、観測データからパラメータ推定を行った際の統計精度について議論し、将来観測でどの程度検証精度が改善するかについても紹介する。

2 BipoSH 解析

2.1 パワースペクトルの BipoSH 展開

BipoSH は以下で定義される。

$$X^{LM}_{l_1 l_2}(\hat{x}, \hat{n}) = \{Y_{l_1}(\hat{x}) \otimes Y_{l_1}(\hat{n})\}_{LM} = \sum_{m_1 m_2} C^{LM}_{l_1 m_1 l_2 m_2} Y_{l_1 m_1}(\hat{x})\, Y_{l_2 m_2}(\hat{n}) \quad (1)$$

ここで、$C^{LM}_{l_1 m_1 l_2 m_2}$ は Crebsch-Gordan 係数である。これは以下の直行性を持つ。

$$\int d^2\hat{x} \int d^2\hat{n}\; X^{LM}_{l_1 l_2}(\hat{x}, \hat{n})\; X^{L'M'*}_{l'_1 l'_2}(\hat{x}, \hat{n}) = \delta_{l_1 l'_1} \delta_{l_2 l'_2} \delta_{LL'} \delta_{MM'} \quad (2)$$

次に、パワースペクトルを定義する。宇宙に大域的な一様性があるとき、密度揺らぎ δ の 2 点相関関数は次のような形を取る。

$$\langle \delta(\boldsymbol{k}_1, \hat{n}) \delta(\boldsymbol{k}_2, \hat{n}) \rangle = (2\pi)^3 P(\boldsymbol{k}_1, \hat{n}) \delta^{(3)}(\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2) \quad (3)$$

この式で定義される $P(\boldsymbol{k}, \hat{n})$ をパワースペクトルと呼ぶ。

式 (1) を用いてパワースペクトルは以下のように展開される。

$$P(\boldsymbol{k}, \hat{n}) = \sum_{l_1 l_2 LM} \pi^{LM}_{l_1 l_2}(k)\, X^{LM}_{l_1 l_2}(\hat{k}, \hat{n}) \quad (4)$$

これに式 (2) を用いると、パワースペクトルの展開係数は

$$\pi^{LM}_{l_1 l_2}(k) = \int d^2\hat{x} \int d^2\hat{n}\; P(\boldsymbol{k}, \hat{n}) X^{L'M'*}_{l'_1 l'_2}(\hat{k}, \hat{n}) \quad (5)$$

となる。

2.2 展開係数の具体形

2.2.1 銀河バイアス、赤方偏移空間変形

銀河サーベイなどの観測から手に入るデータは銀河の数密度の分布であり、これは一般に物質の密度分布に一致しない。そのため、何らかの方法でこれら 2 つの分布を関連づける必要がある。最も簡単な

モデルとして、線形バイアスモデルが存在する。このモデルにおいては、銀河の数密度の揺らぎ δ_g と物質の密度の揺らぎ δ の間に $\delta_g = b\delta$ という関係が存在する。ここで、b はバイアスパラメータと呼ばれる量である。

加えて、銀河は観測者に対して静止しておらず、固有速度をもつ。これにより引き起こされるドップラー効果によって、観測される赤方偏移が本来の値からズレる。これを赤方偏移空間変形という。

これらの効果を組み合わせると、観測される銀河数密度の揺らぎ $\delta_s(\boldsymbol{k}, \hat{n})$ と本来の物質の密度揺らぎ $\delta(\boldsymbol{k})$ の間に

$$\delta_s(\boldsymbol{k}, \hat{n}) = \delta(\boldsymbol{k}\left[b + f(\hat{k}\cdot\hat{n})^2\right] \tag{6}$$

という関係が成立する。したがって、$\delta_s(\boldsymbol{k}, \hat{n})$ から定義される銀河数密度のパワースペクトル $P_s(\boldsymbol{k}, \hat{n})$ と $\delta(\boldsymbol{k})$ から定義される密度揺らぎのパワースペクトル $P(\boldsymbol{k})$ の間には、式 (3) より、

$$P_s(\boldsymbol{k}, \hat{n}) = P(\boldsymbol{k})\left[b + f(\hat{k}\cdot\hat{n})^2\right]^2 \tag{7}$$

という関係が存在することがわかる。

2.2.2 等方性のある場合

$P(\boldsymbol{k}) = P_m(k)$ として式 (5) より展開係数を計算すると、

$$\pi^{LM}_{l_1 l_2}(k) = P_{l_1}(k)\frac{4\pi}{2l_1+1}H^{-1}_{l_1 l_1 0}\delta_{l_1 l_2}\delta_{L0}\delta_{M0} \tag{8}$$

となる。ただし、P_l は

$$\begin{aligned}
P_0(k) &= \left(b^2 + \frac{2}{3}bf + \frac{1}{5}f^2\right)P_m(k)\\
P_2(k) &= \left(\frac{4}{3}bf + \frac{4}{7}f^2\right)P_m(k)\\
P_4(k) &= \frac{8}{35}f^2 P_m(k)\\
P_1(k) &= P_3(k) = P_{l\geq 5} = 0
\end{aligned}$$

を満たす。式 (8) から、宇宙に大域的一様性のある場合は、展開計数のうち $L = 0, M = 0$ の成分のみが有限の値を取ることがわかる。

2.2.3 Quadrupolar Modulation

次に、等方性の破れた場合、展開係数が式 (8) からどのように変化するかを調べる。本節では特に、

$$P(\boldsymbol{k}, \hat{n}) = P_m(k)\left[1 + \sum_M g_{2M} f(k) Y_{2M}(\hat{k})\right] \tag{9}$$

のような等方性の破れ方を考えるが、他の破れ方の場合でも議論は特に変わらない。

このとき、前節と同様に式 (5) より展開係数を計算すると、

$$\begin{aligned}
\pi^{LM}_{l_1 l_2}(k) = P_{l_2}(k)\Bigg[&\frac{4\pi}{2l_1+1}H^{-1}_{l_1 l_1 0}\delta_{l_1 l_2}\delta_{L0}\delta_{M0}\\
&+ \sqrt{\frac{4\pi(2l_1+1)}{2l_2+1}}H_{l_1 l_2 2} g_{2M} f(k)\delta_{L2}\Bigg]
\end{aligned} \tag{10}$$

となる。この式から、等方性の破れている場合においては、等方性のある場合でも有限となる $L = 0$ の成分のほか、等方性の破れ方に対応した（今の場合は $L = 2$ の）成分も有限の値を取りうることがわかる。

3 Fisher 解析

本節では、Fisher 解析を行うことでパラメータ推定の精度の限界について議論する。

本節で重要な役割を果たす Fisher 行列は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
F_{LM,L'M'} = \sum &\frac{\partial \pi^{L_1 M_1}_{l_1 L'_1}(\boldsymbol{k}_1)}{\partial h_{LM}}\\
&\times \left\langle \pi^{L_1 M_1}_{l_1 L'_1}(\boldsymbol{k}_1), \pi^{L_2 M_2}_{l_2 L'_2}(\boldsymbol{k}_2)\right\rangle^{-1}\\
&\times \left(\frac{\partial \pi^{L_2 M_2}_{l_2 L'_2}(\boldsymbol{k}_2)}{\partial h_{L'M'}}\right)^*
\end{aligned} \tag{11}$$

ここで、和は L, M, L', M' 以外の全ての添字、および波数 $\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2$ についてとる。また、h_{LM} は g_{2M} を含む任意の展開係数である。

ここで定義された Fisher 行列を用いて、展開係数 h_{LM} の 1σ のエラーの下限 Δh_{LM} は次式で与えられる。

$$\Delta h_{LM} = \frac{1}{\sqrt{F_{LM,LM}}} \tag{12}$$

Quadrupolar Modulation の場合、主要項のみを残す近似のもと、Fisher 行列は

$$F_{2M,2M} = V \int_{k_{min}}^{k_{max}} \frac{k^2 dk}{2\pi^2} \frac{f^2(k)}{8\pi} \tag{13}$$

となる。ここで、V はサーベイ空間の全体積、k_{min} および k_{max} は解析に利用する波数の最小値および最大値である。次節で、過去に行われた観測、および将来観測におけるパラメータ g_{2M} の誤差の下限 Δg_{2M} について議論する。

4 Fisher 解析の結果

図 1 および図 2 に過去の観測および将来観測におけるパラメータ g_{2M} の推定値の誤差の下限 Δg_{2M} を k_{max} の関数として示す。

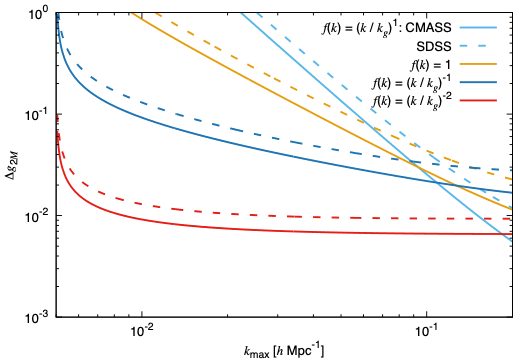


図 1: 過去の観測におけるパラメータ推定の誤差

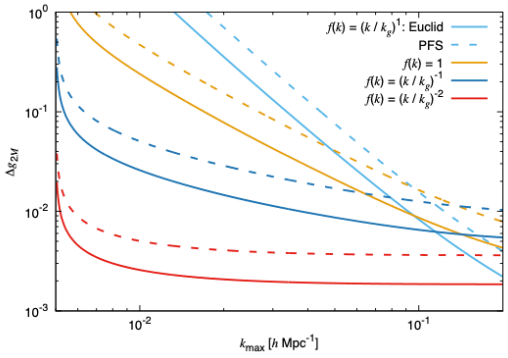


図 2: 将来観測におけるパラメータ推定の誤差

図 1 と図 2 を見比べることで、将来観測により誤差が 1 桁近く改善されることがわかる。参考までに、[2] によると、g_{2M} の全てのパラメータは 2σ の範囲で 0 と整合するものの、いくつかのパラメータは 1σ のエラーの範囲から外れている。そのため、将来観測によりパラメータ推定の精度が改善されることで、宇宙の大規模構造における非等方性の存在が明らかにされるのではないかと期待される。

5 Conclusion

BipoSH を用いた解析により、大規模構造の 2 点相関関数における等方性の破れを原理的には解析可能であることが示された。現時点では統計精度が不十分で等方性の破れは見つかっていないものの、将来観測により検証精度が 1 桁近く改善されることにより非等方性の存在が明らかにされることが期待される。

今後の課題としては、さらなる精度の向上のため、銀河の固有速度や向きの情報も考慮し、利用できるデータの数を増やした解析を行う。また、今回の内容は全て線型解析に基づいており、利用できる波数の最大値はさほど大きくない。そこで、非線形領域まで議論を拡張することで、解析に利用できる波数領域を拡大し、より良い精度での解析を試みる。

Reference

1. M. Shiraishi *et al.*, Phys.Rev.D **95** 6, 063508 (2017)

2. Sugiyama *et al.*, Mon.Not.Roy.Astron.Soc. **473** 2, 2737-2752 (2018)

———index へ戻る

重宇 b11

assembly bias の物理量パラメータ化に向けた研究

石川 慶太朗

assembly bias とハロー特徴量の関係性の探求

石川 慶太朗 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

銀河は暗黒物質の密集領域である暗黒物質ハロー (以下, ハロー) の中で形成されると考えられている. 従来, ハローの空間分布およびハロー内の銀河の空間分布や数はハローの質量のみに依存すると考えられてきたが, シミュレーションの性能向上に伴い, ハローや銀河の空間分布はハローの形成史にも依存することが示唆された (Wechsler et al. 2006). このような銀河分布のハロー形成史依存性を assembly bias と呼ぶ. 近年の観測データの急速な増加および観測領域の拡大により統計精度が飛躍的に向上したことで, 実観測に対する解析では assembly bias の考慮の有無で標準宇宙論パラメータの制限に大きな影響を与えることが判明している (Miyatake et al. 2022). それゆえにこの系統誤差の影響を最小化して標準宇宙論を徹底検証する必要がある. 本研究では, 物理量と結び付けた先行研究のないこの assembly bias を調査するため, Dark Quest (Nishimichi et al. 2019) などのシミュレーションデータを用いて, ハローの中心集中度などのパラメータに着目した解析を行う. 本発表ではそれぞれのパラメータと assembly bias との関係を特徴付ける本研究の進行状況を述べるとともに, 将来的に assembly bias 効果を実装する宇宙論エミュレータの有用性およびこれを用いた宇宙論解析の展望について議論する.

1 Introduction

1990 年代後半の Ia 型超新星の観測により宇宙は加速膨張していることが発見された. この加速膨張を引き起こす未知のエネルギーを暗黒エネルギーと呼ぶ. また, 電磁波観測はできないが, 銀河の形成史や力学的性質を説明する上で欠かせない重力源を暗黒物質といい, これら暗黒成分の物理機構は既存の理論では説明できない現代物理学の重要な問題の一つである. 世界中で推進されている大規模銀河サーベイは暗黒成分の性質解明に迫るため, 暗黒成分を主要な構成要素とする標準宇宙論モデルの徹底検証を目標としている.

これら大規模銀河サーベイによる観測データの急速な増加および観測領域の拡大で統計精度が飛躍的に向上した. それはまた, 異なる観測が予言する宇宙論モデルの様々な矛盾を明らかにした. その一つが, 宇宙の構造形成の度合いを表す量 S_8 は初期宇宙 (宇宙マイクロ波背景放射:CMB) の予言する値よりも後期宇宙 (宇宙の大規模構造) で観測した時の値の方が小さいというものである (S_8 テンション問題)(Abdalla et al. 2022). 例えばすばる望遠鏡 Hyper Suprime-Cam (HSC) による銀河サーベイ (Miyatake et al. 2023) では可能な限り全ての系統誤差を考慮してもなお 2.5σ の違いが確認されている. この違いが未知の系統誤差によるものでなければ, 標準宇宙論モデルの破綻を示唆する. そのためこれが新しい物理の兆候なのか決定的に答えるために系統誤差の影響を最小化する必要がある.

銀河は暗黒物質の密集領域である暗黒物質ハロー (以下, ハロー) の中で形成されると考えられている. 従来, ハローの空間分布およびハロー内の銀河の空間分布や数はハローの質量のみに依存すると考えられてきたが, シミュレーションの性能向上に伴い, ハローや銀河の空間分布はハローの形成史にも依存することが示唆された (Wechsler et al. 2006). このような銀河分布のハロー形成史依存性を assembly bias と呼ぶ. assembly bias が入った銀河の模擬カタログ (宇宙構造形成数値シミュレーションで得た銀河位置などの観測量) を, assembly bias が考慮されていない理論モデルで解析すると, 標準宇宙論のパラメータ制限に大きな影響を与えることがわかる (図 1).

本研究では, N 体シミュレーションから生成されたハローの三次元分布のシミュレーションデータを用いて, assembly bias とハロー特徴量の関係を探る.

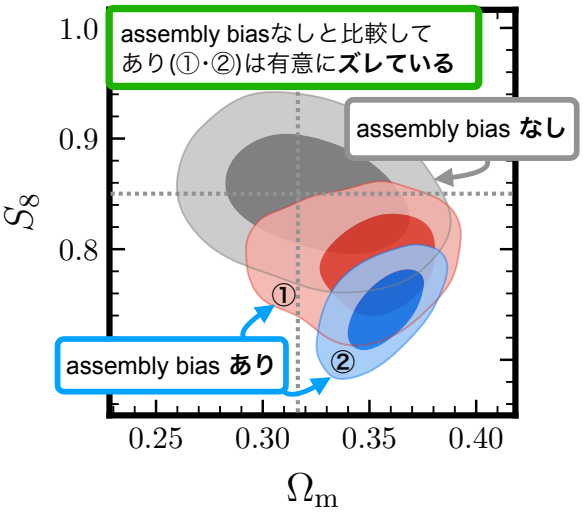


図 1: assembly bias の影響 (Miyatake et al. 2023) assembly bias が入った銀河の模擬カタログを, assembly bias が考慮されていない理論モデルで解析した結果. ①・②:を見ると分かる通り, assembly bias が入っていない銀河模擬カタログを解析した結果と比較して有意にズレている. ①・②の違いは考慮する assembly bias の大きさ.

2 Simulation data

使用するシミュレーションデータは Dark Quest (Nishimichi et al. 2019) および Dark Quest 2 (Nishimichi et al. in prep.) である. 特に Dark Quest 2 の N 体シミュレーションでは, ニュートリノ質量を考慮した `Planck2015` の ΛCDM 宇宙論を仮定して構造形成シミュレーションを行なっており, ハローファインダー (`Rockstar` など) を用いてハローを同定することで, ハローの位置や速度のカタログを得る.

粒子数 N は 3000^3 で, 周期境界条件を課したシミュレーションボックスのサイズは 1 $[{\rm Gpc}/h]^3$ である. また, 赤方偏移は $z = 0 \sim 3$ までを 11 個のビンに切ってある. `Rockstar` で同定されたハローカタログに含まれるサブハローは, その近辺にセントラルハローがいると後述の r_{200} などを計算するときに誤った値を出してしまうことがある. そのため本解析においてサブハローはその対象から外している. また, 全赤方偏移の質量関数を確認すると, ハロー質量 $7 \times 10^{10} M_\odot/h^2$ でピークを迎えていることがわかった. 十分な解像度を保った解析を行うため, ハロー質量 $M_{\rm halo} \geq 2 \times 10^{11} M_\odot/h^2$ のハローを用いている.

実際の観測では実空間ではなく, 赤方偏移空間で測定されるため, 初めにそれぞれの赤方偏移に対して, 同定されたハローのカタログの速度を用いて赤方偏移歪み (Redshift Distortion) 効果

$$s(z) = r(z) + \frac{v_{\rm z}(1+z)}{H(z)} \tag{1}$$

を挿入する. ここで v_z は視線方向のハローの速度で, $r(z)$ は実空間の共動距離, $s(z)$ は赤方偏移空間の共動距離を表す.

3 Methods

ここでは, 銀河分布のハロー形成史依存性である assembly bias と結び付けられる物理量として, 本発表で紹介するハローの中心集中度 (Concentration) の定義と, 統計量として比較する際の手法を紹介する.

3.1 ハローの中心集中度 (Concentration)

今回使用するハローの中心集中度の定義は以下の通り (Kobayashi et al. 2020).

$$c \equiv \frac{r_{200}}{r_{\rm half}}. \tag{2}$$

ここで, r_{200} は宇宙の現在の平均物質密度 $\bar{\rho}_{\rm m0}$ の 200 倍の物質密度をハローが持つ半径である. また, その時のハローの質量を $M \equiv M_{200} = (4\pi/3)(r_{200})^3(200)\bar{\rho}_{\rm m0}$ と定義するとき, $r_{\rm half}$ は $M_{\rm half} = (1/2)M_{200}$ を満たす半径である. つまり, この量はある半径 (今回の定義では $r_{\rm half}$) で規格化された, 典型的なハローの半径を表している. この量を一つ一つのハローに対して計算し, $z = 0.5$ で質量-中心集中度の関係 (mass-concentration relation) を調べると, 図 2 のようになる. 質量が大きくなるほど中心集中度のバラツキは小さくなっており, その関係は単純な線形ではないことがわかる.

本発表では, それぞれのハローで計算された中心集中度の大きさ上位 25%と下位 25%のハローカタログを抽出して 3.2 章で見るように統計量を計算し, 抽出を行わず全てのハローカタログを用いて統計量を計算した場合と比較した.

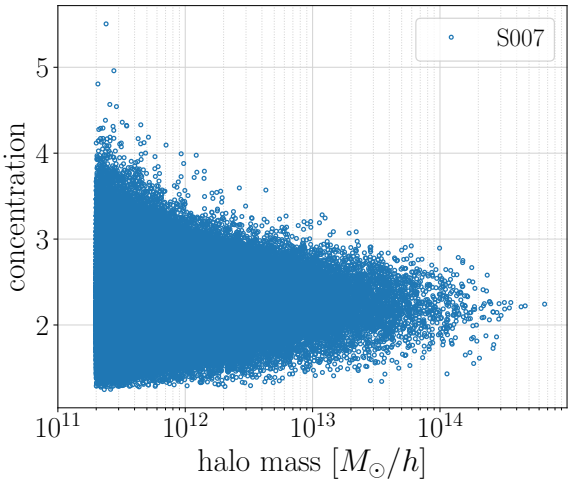


図 2: $z = 0.5$ におけるハロー質量-中心集中度の関係 (mass-concentration relation)
スムーズな plot のため, ハローの数は約 100 分の 1 に間引いて点を打っている.

3.2 三次元二点相関関数

理論と観測は統計量で比較する. 二点相関関数はある二点 $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$ における密度ゆらぎ δ の積を考え, それを 2 点間の距離 $x_{12} = |\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}|$ で固定してアンサンブル平均したもの

$$\xi(x_{12}) = \langle \delta(\boldsymbol{x_1}) \delta(\boldsymbol{x_2}) \rangle \tag{3}$$

のことを指す.

今回, 観測量を統計量に変換する際は Peebles & Hauser (1974) の estimator

$$\xi(r) = \frac{DD(r)}{RR(r)} - 1 \tag{4}$$

を用いている. ここで $DD(r)$ は対象 (ここではハロー) のペアカウント数を規格化した数で, $RR(r)$ は同じ観測領域で一様ランダムに撒かれた対象のペアカウント数を規格化した数を表す. なお, 今回のように周期境界条件が課されているシミュレーションデータの場合, $RR(r)$ は解析的に計算できる.

4 Results

4.1 ハローの中心集中度

3.1 章で見たように中心集中度が上位 25%のハローカタログと下位 25%のハローカタログでそれぞれ相関関数を計算した結果が図 3. ハロー間距離約

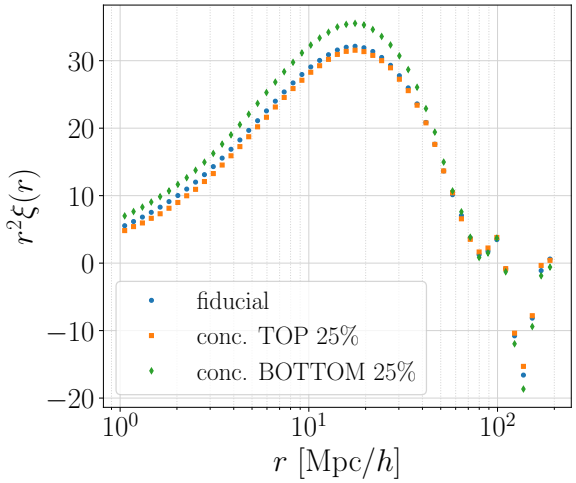


図 3: 中心集中度で抽出を行なった, $z = 0.5$ における相関関数. 横軸が半径 r [Mpc/h], 縦軸がハローの二点相関関数 $\xi(r)$ に r^2 をかけたもの. 青色が中心集中度で抽出をおこなっていない fiducial な相関関数で, 橙色が中心集中度上位 25%で抽出したハローカタログから計算した相関関数, 緑色が中心集中度下位 25%で抽出したハローカタログから計算した相関関数を表す.

100 [Mpc/h] にはバリオン音響振動 (BAO) の痕跡が振幅の増大 (BAO ピーク) として表れている. この図を見るとわかるように, 抽出を行なっていない fiducial な相関関数と比べて, 中心集中度下位 25%のハローカタログ群からの相関関数は振幅が大きくなり, 上位 25%のハローカタログ群からの相関関数は振幅が小さくなっている. ただしそれは大スケールまで続いているわけではなく, $r = 70$ [Mpc/h] 以降はほぼその違いが見えなくなっている. fiducial な相関関数の振幅がそれぞれ中心集中度で抽出した相関関数の平均を取らないのは, 図 2 のような分布の中心集中度に対して値の大きさのみを基準に抽出するからだと考えられる. これらの相関関数の比を, 分母に fiducial な相関関数で取ると, 図 4 のようになる. 中心集中度下位 25%を抽出した場合は振幅のバイアスが中スケールまでおよそ 10%以上あることが確認できる. また, 上位 25%の場合は小スケールで 10%ほどのバイアスがあるものの, 大スケールに向かうにつれて fiducial と同じ振幅に近づいている. 大スケールで値がバラついている理由はいくつか考えら

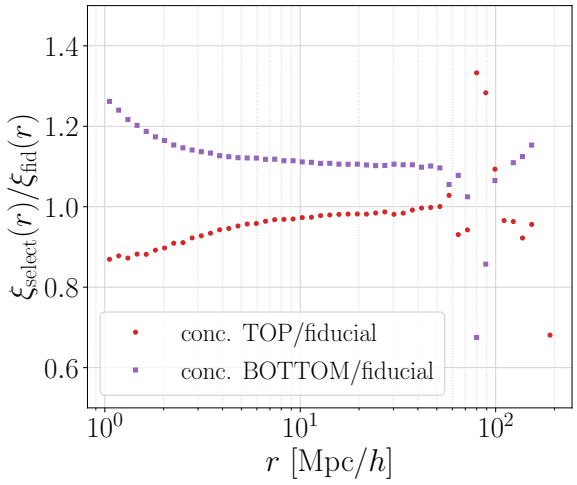


図 4: 中心集中度で抽出を行なった, $z = 0.5$ における相関関数の比. 横軸が半径 r [Mpc/h], 縦軸がハローの二点相関関数 $\xi(r)$ の比で, 中心集中度で抽出した相関関数を抽出せず全てのハローカタログで相関を計算した fiducial な相関関数で割ったもの. これが振幅のバイアスを表している. 紫色が中心集中度上位 25%と fiducial な相関関数の比で, 赤色が中心集中度下位 25%と fiducial な相関関数の比を表す.

れるが, ボックスサイズが 1 [Gpc/h]^3 なので, cosmic variance が効いていること, 相関関数の振幅は一般に大スケールで 0 に近づくので, 数値的に値がバラつきやすいことなどが挙げられる.

5 Discussion & Conclusion

今回, 銀河分布のハロー形成史依存性である assembly bias を統計量として確認するため, ハローの特徴量の一つである中心集中度 (concentration) を用いてその大きさでハローカタログの抽出を行い, 相関関数の振幅にバイアスができるのかを調べた. $z = 0.5$ では特に中心集中度下位 25%のハローカタログを使用すると, fiducial な場合と比べて 10%ほどバイアスが大きくなることがわかった. しかし, どちらの抽出条件も大スケールで振幅のバイアスが小さくなる理由は判明していない. 今後, パワースペクトルで測定する必要がある可能性もある.

6 Prospect

今後の展望としては, 赤方偏移依存性や Halo Mass Limit 依存性を確認すること, 使用するハローの質量帯を厳しくしてビンに分け, 振幅のバイアスを調べること, 他の特徴量に依る影響を調べることなどがある. その後は `Dark Emulator` と呼ばれる, 宇宙論エミュレータにこの効果を実装する予定である. ハロー形成史依存性などは摂動理論を用いて解析的に予言することが困難なため, これまで宇宙論解析する際に考慮されることはなかった. そこでこのような摂動理論では扱うことが困難な事象をモデル化するために生まれた最新の手法がこの宇宙論エミュレータである. これにより理論解析でも assembly bias を考慮することができるようになり, 図 1 のような宇宙論パラメータ推定において発生していた系統誤差を抑えた解析ができるようになる.

Acknowledgement

京都産業大学の西道啓博准教授には, 高性能なシミュレーションデータを使用してハローのプロファイルの基礎から丁寧に教えていただきました. 名古屋大の宮武広直准教授やアリゾナ大の砂山朋美研究員には, photo-z BAO の研究の頃から多方面でお世話になっております. 京都産業大学への出張の際には特徴量の選定で議論してくださり, 今後の研究方針を明確にすることができました. 本研究をここまで進めることができたのは, 以上の共同研究者の皆様のおかげです. 心から感謝申し上げます.

Reference

Abdalla et al. JHEAp 34 49A (2022)

Kobayashi et al. PhRvD.101h23510M (2020)

Miyatake et al., PhRvD.106h3520M (2022)

Miyatake et al. arXiv:2304.00704 (2023)

Navarro, Frenk, and White, ApJ. 462, 563 (1996)

Nishimichi et al., ApJ 884 29N (2019)

Peebles & Hauser, ApJS, 28, 19 (1974)

Wechsler et al., ApJ 652 71W (2006)

———index へ戻る

重宇b12

段差モデルインフレーションによる曲率ゆらぎの非対称的確率分布の生成

川口 遼大

段差モデルインフレーションによる曲率ゆらぎの非対称的確率分布の生成

川口 遼大 (早稲田大学大学院 先進理工学研究科)

Abstract

本ポスター発表では論文 (R.Kawaguchi, T.Fujita & M.Sasaki 2023) に基づく発表を行う。本研究では、単一スカラー場インフレーションにおいて、2 つのスローロールステージの間にインフラトンポテンシャルが有限幅の上向き段差を持つモデルを議論した。段差が存在することで通常のスローロールインフレーションとは異なる振る舞いが生じる。我々は δN-formalism を用いて、曲率ゆらぎの確率分布関数 (PDF) を計算した。PDF には段差幅に依存する exponential-tail が現れ、原始ブラックホール (PBH) の存在量の見積もりに大きな影響を及ぼすことを示した。また、パワースペクトルの dip に対応する特別なスケールにおいて、PDF は非常に高い非対称性を有することを明らかにし、これが宇宙の大規模構造のボイド領域の分布に対して興味深いシグナルを残す可能性を指摘した。

1 Introduction & Conclusion

標準ビッグバン宇宙モデルでの問題点を解決するために導入されたインフレーションは今日では標準的な宇宙モデルとして広く認められており、インフレーション期の量子ゆらぎが我々の宇宙の多彩な構造の起源であると考えられている。特にスローロール (SR) インフレーションはほとんどスケール不変かつガウシアンなゆらぎの生成を予言し、宇宙マイクロ波背景放射 (Cosmic Microwave Background, CMB) の温度ゆらぎ観測と整合的である。しかし一方で CMB スケールよりも小さなスケールでは観測からの制限がほとんどないため、小スケールでは SR 条件が破られている可能性もあり、多くのインフレーションシナリオが許容されている。

近年、**原始ブラックホール (Primordial Black Hole, PBH)**(Y. B. Zel ' dovich & I. D. Novikov 1967)(S. Hawking 1971) と関連するインフレーションモデルが盛んに研究されている。PBH とは初期宇宙の高密度領域が重力崩壊し形成されるブラックホールのことであり、その質量に応じて、宇宙の歴史上で異なる役割 (例えばダークマターなど) を果たし得る仮想的な天体である。密度ゆらぎの起源はインフレーション中に生成される曲率ゆらぎにあるため、十分な量の PBH 形成を引き起こすためには曲率ゆらぎの小スケールでの増幅が必要となる。その増幅メカニズムとして、インフラトンポテンシャル中に平坦な領域 (J. Garcia-Bellido & E. Ruiz Morales 2017) や段差 (Y.-F. Cai et al. 2022) がある特別なインフレーションモデルがこれまでに研究されてきた。本発表では研究 (R.Kawaguchi, T.Fujita & M.Sasaki 2023) に基づき、**段差モデル**に焦点を当てた議論を紹介する。特に段差の幅を有限に取り、段差幅が与える影響を明らかにする。

典型的には、曲率ゆらぎの増幅具合は曲率ゆらぎのパワースペクトルで計算されるが、PBH 存在量は非ガウス性にも大きく影響されるため、パワースペクトルの計算のみでは不十分である。また、PBH 形成を引き起こすような大きくてレアなゆらぎは摂動的計算手法では捉えきれない。そこで本研究では、非摂動的な手法である δN フォーマリズムを用いて曲率ゆらぎを計算し、その確率分布関数 (PDF) の導出を行った。

本研究では曲率ゆらぎの PDF について以下の 2 つの新たな結果を得た。

1. PDF に**段差幅に依存する exponential-tail** が現れることを示し、PBH の存在量の見積もりに段差幅が大きく影響することを明らかにした。

2. 段差よりも手前でハッブルホライズンを出た特定のスケール (これはパワースペクトルの dip スケールに対応する) において、**PDF が高い非対称性を有する**ことを示し、これが大規模構造のボイド領域の分布に対して特徴的なシグナルを残す可能性を指摘した。

本発表では上記の 2 つの結果とその物理的な解釈についての詳細を説明をする。

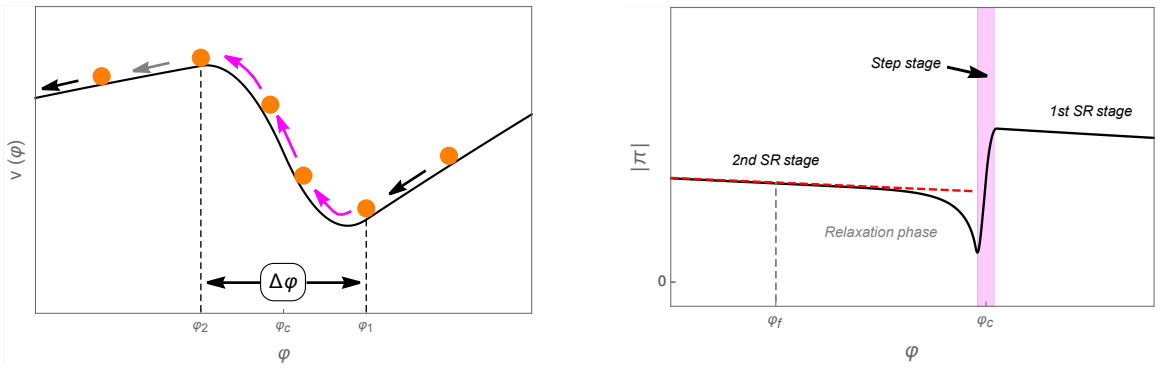


図 1: (左) ポテンシャルとインフラトンの概略図。(右) 位相空間内の背景軌道の概略図。インフラトンは時間的に右から左に進み、3 つのステージ (i) 第 1SR ステージ (ii) 段差ステージ (iii) 第 2SR ステージを経験する。

2 Upward-step model

単一正準スカラー場 ϕ によるインフレーションモデルを考えよう。空間平坦な FLRW 計量に対して導かれる運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}n} + 3\pi + 3\frac{\partial_\varphi v}{v} = 0\,. \tag{1}$$

で与えられる。ここで全ての物理量は無次元化されており、$\varphi \equiv \phi/M_{pl}$, $\pi \equiv \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}n$, $v \equiv V(\phi)/V_0$ で定義される。V_0 はポテンシャルの任意の参照点での値であり、n は $\mathrm{d}n = H\mathrm{d}t$ で定義される e-folding 数である ($H = \dot{a}/a$ はハッブル膨張率)。

モデルとして $v(\varphi)$ が 2 つのスローロール (SR) 領域及びその間に上向き段差を持つ場合

$$v(\varphi) = \begin{cases} v_{\mathrm{sr1}}(\varphi) & (\varphi \geq \varphi_1) \\ f_{\mathrm{step}}(\varphi) & (\varphi_2 < \varphi < \varphi_1) \\ v_{\mathrm{sr2}}(\varphi) & (\varphi \leq \varphi_2) \end{cases} \tag{2}$$

を考える。ここで v_{sr1} と v_{sr2} は SR ポテンシャルである。段差幅 $\Delta\varphi \equiv \varphi_1 - \varphi_2$ は重要なパラメータである。上向き段差を表す関数 f_{step} として、

$$f_{\mathrm{step}}(\varphi) = \begin{cases} A_1 + B_1(\varphi - \varphi_{\mathrm{min}})^2 & (\varphi_c \leq \varphi < \varphi_1) \\ A_2 + B_2(\varphi - \varphi_{\mathrm{max}})^2 & (\varphi_2 < \varphi < \varphi_c) \end{cases} \tag{3}$$

を用いる。ここで $\varphi_c \equiv (\varphi_1 + \varphi_2)/2$ は段差領域の中間地点である。φ_{min} 及び φ_{max} はポテンシャルの極小と極大に対応している。ポテンシャルとその 1 階微分が連続であることを要請し、6 つのパラメータ $A_1, A_2, B_1, B_2, \varphi_{\mathrm{min}}, \varphi_{\mathrm{max}}$ が決定される。

図 3 に本モデルのポテンシャルの概形 (左) と位相空間内の背景軌道の概略図 (右) を示す。段差の存在により、インフラトンのダイナミクスは 3 つのステージに分かれている。(i) 第一 SR ステージ ($\varphi \geq \varphi_1$) では、インフラトンは SR インフレーションでの場合と同じように SR アトラクター上にある。(ii) 次に段差ステージ ($\varphi_2 < \varphi < \varphi_1$) である。ここでは、インフラトンは段差によってその運動エネルギーを奪われるため、スカラー場の速度 $|\pi|$ は急激に減少する。(iii) 最後に第 2SR ステージ ($\varphi \leq \varphi_2$) である。段差を登り切った直後では $|\pi|$ が小さくなっているので、ダイナミクスは SR アトラクターから外れているが、時間発展と共に SR アトラクターへと漸近していく。以降 SR アトラクターに落ち着いた時点でのインフラトンの値を φ_f と呼ぶことにする。

3 Calculation of δN

共動曲率ゆらぎ $\mathcal{R}$ はインフレーションの中で最も重要なスカラー型ゆらぎである。非断熱的なゆらぎが無視できる場合、曲率ゆらぎは super-horizon($k \ll aH$) において保存量となり、インフレーションで生成されるスカラー型ゆらぎの情報は全て曲率ゆらぎに刻印される。現在の宇宙のゆらぎの起源はこの曲率ゆらぎに由来すると考えられるため、曲率ゆらぎの解析を行うことは重要である。

本研究では 2 章で導入したモデルについて δN formalism(A. A. Starobinsky 1985)(M. Sasaki and E. D. Stewart 1996) を用いて解析を行なった。δN formalism の利点は、super-horizon でのゆらぎの進化を非摂動的に追うことができる点である。これは摂動的には捉えられない大きくてレアなゆらぎの議論

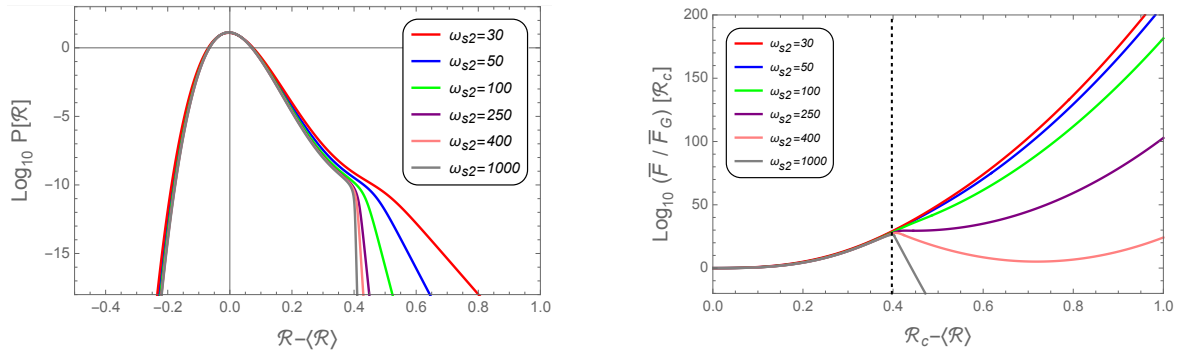


図 2: 異なる段差幅 (ω_{s2}) に対する曲率ゆらぎ $\mathcal{R}$ の PDF(左) と CCDF(右)。 ここで各パラメータは $\gamma = 1.5$, $\kappa = 60$, $\beta = 20$, $g = 0.02$, $\sigma_{\delta\varphi} = 2 \times 10^{-5}$ とした。$\langle\mathcal{R}\rangle$ は期待値であるが十分小さい。

に最適だ。δN formalism によれば、曲率ゆらぎ $\mathcal{R}$ は摂動軌道と背景軌道の e-folding 数の差として計算でき、

$$\mathcal{R} = N(\varphi + \delta\varphi, \pi; \varphi_f, \pi_f) - N(\varphi, \pi; \varphi_f, \pi_f) \quad (4)$$

として与えられる。ここで $N(\varphi, \pi; \varphi', \pi')$ は位相空間において (φ, π) から (φ', π') まで時間発展するのに要する e-folding 数 (時間) である。つまり式 (4) が意味するのは、スタート地点が $\delta\varphi$ だけ異なる 2 つの軌道を比較すれば曲率ゆらぎが計算できるということだ。スタート地点 (φ, π) としては、興味のあるスケール k が Hubble ホライズンを横断する時刻での値を用いる。本研究ではスタート地点として段差の直前で Hubble ホライズンを出るスケールに着目し解析を行なった。よって $\mathcal{R}$ を計算するためには、各ステージでの δN を計算する必要がある。

δN の計算手法は以下の通りだ。まずスカラー場の背景運動方程式 (1) を解き、$n = \cdots$ の形に変形する。そして得られた解に対して $\varphi \to \varphi + \delta\varphi$ の摂動を加えることで δN は計算される。各ステージの δN は以下のように得られる。

$$\delta N^{(1)} \simeq \beta\delta\varphi \quad (5)$$

$$\delta N^{(s)} \simeq -\frac{1}{2\omega_{s2}} \log\left(1 + \frac{2\gamma}{g^2}\delta\varphi + \frac{\gamma^2}{g^2}\delta\varphi^2\right) \quad (6)$$

$$\delta N^{(2)} \simeq \frac{\kappa g}{3}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2\gamma}{g^2}\delta\varphi + \frac{\gamma^2}{g^2}\delta\varphi^2}\right) \quad (7)$$

ここで添字 $(1), (s), (2)$ はそれぞれ第 1SR ステージ、段差ステージ、第 2SR ステージを表している。$\beta, \gamma, g, \kappa, \omega_{s2}$ はモデルパラメータであり、

$$\beta \equiv -\frac{1}{\pi}, \quad \gamma \equiv (2\epsilon_{V1} - \eta_{V1})\beta\left(\frac{k}{k_1}\right)^3 \quad (8)$$

$$g \equiv \frac{\pi_2}{\pi_1}, \quad \kappa \equiv \sqrt{\frac{\epsilon_{V1}}{\epsilon_{V2}}}, \quad \omega_{s2} \equiv \frac{\sqrt{2}|\pi_1|}{\Delta\varphi} \quad (9)$$

で定義される。下付き添字 $_{1,2}$ は φ_1, φ_2 での値を意味する。ϵ_V, η_V はポテンシャル SR パラメータである。特に ω_{s2} は段差幅 $\Delta\varphi$ を表す量である。

上記の式 (5),(6),(7) を足し上げることで曲率ゆらぎ $\mathcal{R}$ を計算できる。$\delta N^{(s)}$ は段差幅 $\Delta\varphi$ で抑えられているので、一見寄与がないように見える。しかし $\delta\varphi \sim -g^2/2\gamma$ では、log の中身がゼロとなるため、$\delta N^{(s)}$ の項からの寄与が顕著になる。これはある摂動軌道においては、段差ステージに入る際の運動エネルギーが小さく、段差を通過するのに莫大な時間 (δN 大) を要することが原因である。

4 PDF and CCDF

3 章で得た結果により、曲率ゆらぎ $\mathcal{R}$ をスカラー場ゆらぎ $\delta\varphi$ の関数として書くことに成功した。$\delta\varphi$ は量子ゆらぎ起源であることから、ガウス分布に従っているとみなして良い。そこで確率の保存則 $P[\mathcal{R}]\mathrm{d}\mathcal{R} = P[\delta\varphi]\mathrm{d}\delta\varphi$ を用いることで、$\mathcal{R}$ の確率分布関数 (PDF)$P[\mathcal{R}]$ を計算することができる。

図 2 の左に得られた PDF を示す。本モデルでの曲率ゆらぎの PDF はガウス分布とは大きく異なっているのが見てとれる。各色の線は異なる段差幅 (異なる ω_{s2}) に対応しており、ある値 (今の場合 $\mathcal{R}_{\rm cutoff} = 0.4$) よりも大きな $\mathcal{R}$ では、PDF の振る舞いが段差幅に大きく依存していることが見てとれる。実際、式 (6) にある $\delta N^{(s)}$ を用いて PDF を計算すると、段差幅に依存する exponential-tail($P[\mathcal{R}] \propto \exp(-2\omega_{s2}\mathcal{R})$) が現れることを解析的に導くことができ、これは数値的な計算結果とも一致している。

PBH 存在量を見積もる上で重要となってくるのは、ある閾値 $\mathcal{R}_c$ に対して $\mathcal{R} > \mathcal{R}_c$ となる確率、

$$\bar{F}[\mathcal{R}_c] = \int_{\mathcal{R}_c}^{\infty} P[\mathcal{R}]\mathrm{d}\mathcal{R}\,. \tag{10}$$

である。これを確率論の言葉で相補累積分布関数 (CCDF) という。本モデルでの CCDF を図 2 の右に示す。比較のためにガウス分布での CCDF で規格化している。図より明らかに非ガウス性の効果が PBH 存在量の見積もりに重要であることがわかる。また、$\mathcal{R} < \mathcal{R}_{\rm cutoff}$ の領域では $\omega_{\rm s2}$ にほとんど依存していない一方で、$\mathcal{R} > \mathcal{R}_{\rm cutoff}$ の領域では CCDF は $\omega_{\rm s2}$ に対して大きな依存性があることが見てとれる。つまり、**PBH 存在量の評価をする際には、段差幅の正確な取り扱いが必要不可欠**である (結果 1)。

5 Highly asymmetric PDF

最後に本モデルでは面白い形の PDF が現れることを紹介する。$\gamma > 0$ かつ $\beta > \kappa\gamma/3$ の場合、式 (5),(6),(7) により導かれる $\mathcal{R}$ は最小値を持つことが示される。すなわち、ある値 $\mathcal{R}_{\rm min}$ よりも小さな曲率ゆらぎは実現しない。このような場合での PDF を図 3 に示す。確かに $\mathcal{R}$ の分布が正に偏っているのが見てとれる。図中ではいくつかの異なる γ に対して図示したが、γ は式 (8) にあるようにスケール k に対応しているので、各色は異なるスケールでの PDF を表している。特に $\mathcal{R}_{\rm min} = 0$ となるような極端な状況に対応するスケールは今のモデルパラメータでは $\gamma = 0.3$ であり、このスケールはパワースペクトルに dip(沈み込み) が 現れるスケールに対応している。

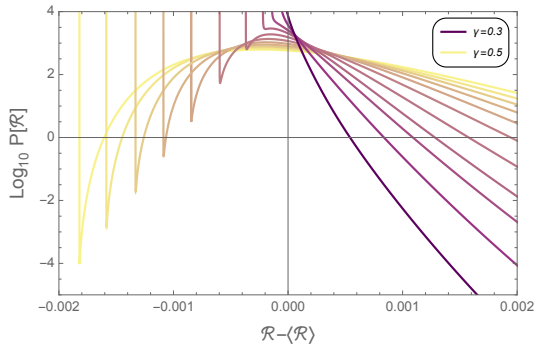


図 3: 高い非対称性を有する PDF。パラメータは $\kappa = 1$, $\beta = 20$, $g = 0.02$, $\sigma_{\delta\varphi} = 5 \times 10^{-5}$, $\omega_{\rm s2} = 50$ を用いた。各色は γ の値に対応しており、$\gamma = 0.5$ が薄黄色、$\gamma = 0.3$ が濃紫色で表されている。

ではこのような高い非対称性を有する PDF は宇宙にどのような痕跡を残すのだろうか？直感的にそれを理解するために図 4 を示す。図 4 では、格子状に分割した 2 次元平面に対して、確率変数 $\mathcal{R}$ の値を高い非対称性を有する PDF($\gamma = 0.3$) で重み付けしてランダムに割り振った (右図)。また比較のために同じ分散を持つガウス分布の場合でも同じことを実行した (左図)。2 つの図では同じカラースキームを用いており、赤色が正、青色が負の値に対応する。ガウス分布の場合では赤と青の領域が同じように現れているのに対して、高い非対称性を有する PDF の場合では大きな負の値 (濃い青) を持つ領域が現れず、分布に偏りがあるのが見てとれる。この図を密度ゆらぎの空間的な分布として解釈すると、**高い非対称性を有する PDF(dip スケール) ではガウス分布の場合と比べて、低密度領域 (ボイド領域) が少なくなる可能性**を示唆している (結果 2)。

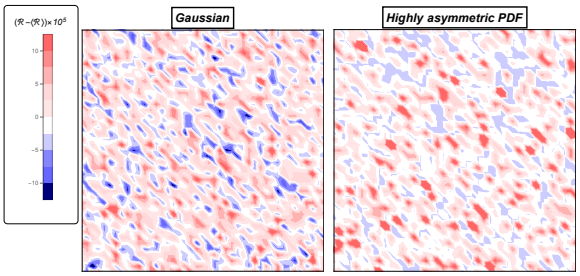


図 4: ガウス分布 (左) と高い非対称性を有する PDF(右) に基づき、格子状にランダムな値を割り振った $\mathcal{R}$ の分布図。二つの図は同じカラースキームを用いている。

Reference

R.Kawaguchi, T.Fujita & M.Sasaki 2023, arXiv: 2305.18140 (JCAP 査読中)

Y. B. Zel'dovich & I. D. Novikov 1967, Soviet Astronomy 10, 602

S. Hawking 1971, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 152, 75

J. Garcia-Bellido & E. Ruiz Morales 2017, Phys. Dark Univ. 18, 47

Y.-F. Cai, X.-H. Ma, M. Sasaki, D.-G. Wang, & Z. Zhou 2022, JCAP 12, 034

A. A. Starobinsky 1985, JETP Lett. 42, 152

M. Sasaki & E. D. Stewart 1996, Prog. Theor. Phys. 95, 71

———index へ戻る

重宇c01

The core-halo structure of fuzzy dark matter

下鶴 大輔

Analytical approach to core-halo structure of fuzzy dark matter (review)

下鶴 大輔 (総合研究大学院大学 高エネルギー加速器科学研究科)

Abstract

本発表は (Taruya,A, & Saga,S. 2022) のレビューである。
標準的な ΛCDM モデルの要素である Cold Dark Matter(CDM) は、その正体は未解明であるものの、大きなスケール (≥1Mpc) の観測結果の説明に成功している。一方で小さいスケール (≤1Mpc) において問題を多く抱えている。その問題を解決する候補の 1 つとして Fuzzy Dark Matter(FDM) がある。FDM は、質量が $m \sim 10^{-22} - 10^{-20}$eV と超低質量で重力相互作用しかしないスカラー粒子である。FDM の de Broglie 波長が $\lambda \sim$ 1kpc であることから、FDM の量子効果が小さいスケールの構造形成に影響を及ぼすと考えられている。数値シミュレーションによる研究によって、halo の中心には密度が一定である soliton core が形成されることが指摘されている。さらに、halo 質量と core 質量及び core 半径の間に関係があるとも指摘されている。 このような FDM による構造形成の数値的研究をするには、十分なシミュレーションのサイズと十分に小さいスケールを考えられる解像度が必要となる。このことが FDM におけるシミュレーションの研究を困難にしている。そこで、本論文では soliton core の構造と core-halo 関係を解析的に調べている。FDM を支配する Schrödinger-Poisson 方程式に幾つかの近似を施すことで soliton core の波動関数を導出する。そうして得られた波動関数を用いて soliton core の性質を調べる。

1 Introduction

現在の標準的な宇宙論モデルにおいて、ダークマターは速度分散の無視できる非バリオン物質、Cold Dark Matter (CDM) と考えられており。宇宙の大規模構造の観測と一致している。しかし、1Mpc よりも小さいスケールでは、CDM の予言と観測結果に不一致が見られる。例えば、Core/Cusp 問題や Missing satellite 問題、Too-big-to-fail 問題などがある (Bullock,J.S, & Boylan-Kolchin,M. 2017)。これらの問題を解決する候補の 1 つとして Fuzzy Dark Matter (FDM) が近年注目を集めている。

FDM は、質量が $m_{\rm FDM} \sim 10^{-22}$-$10^{-20}$eV 程度で、重力場にのみ結合したスカラー粒子である。FDM の de Broglie 波長が $\mathcal{O}(1)$kpc 程度となるので、そのスケール以下で支配的となる FDM の波動性が小スケール問題の解決に重要な効果をもたらす。一方で、de Broglie 波長よりも大きいスケールでは FDM が CDM のように振る舞う。FDM による構造形成のシミュレーション (Schive,H.-Y et al. 2014a) により、halo の中心には密度が一定で、大きさが de Broglie 波長程度の soliton core が形成されると分かった。そして、halo の外縁領域には量子効果に由来する粒状構造ができることが分かった。さらに、soliton core の半径 $r_{\rm c}$ 及び質量 $M_{\rm c}$ と halo の質量 $M_{\rm h}$ との間に相関 $r_{\rm c} \propto M_{\rm h}^{-1/3}$, $M_{\rm c} \propto M_{\rm h}^{1/3}$ があると示された (Schive,H.-Y et al. 2014b)。しかし、その相関は大きく散乱することが指摘されている (May,S, & Springel,V. 2021)。

現在までに FDM に関する様々なシミュレーションが行われてきた。構造形成のシミュレーションには、大きいシミュレーションのサイズが必要となる。一方で soliton core を見るために十分な解像度も同時に必要となる。この 2 つの要請を満たすための莫大な計算コストがシミュレーションを困難にしている。そこで、彼ら (Taruya,A, & Saga,S. 2022) は、FDM が従う Schrödinger-Poisson(S-P) 方程式を解析的に解き、FDM の波動関数から soliton core の構造を調べた。そして、core と halo の関係を導出した。

2 Setup

この節では、FDM が従う S-P 方程式を解析的に解くために彼らが用いた近似を示し、方程式を線形

固有問題に落とし込む。

はじめに、計量は

$$ds^2 = -[1+2\Phi(\boldsymbol{x},t)]\,dt^2 + a^2(t)[1-2\Phi(\boldsymbol{x},t)]\,\delta_{ij}dx^i dx^j \quad (1)$$

としてある。$a(t)$ はスケール因子で、Φ は重力ポテンシャルであり、conformal Newtonian gauge を選択している。FDM は非相対論的なスカラー粒子だから以下の S-P 方程式に従う。

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[-\frac{1}{2ma^2}\nabla_x^2 + m\Phi\right]\psi, \quad (2)$$

ψ と m は FDM の波動関数と質量である。ここで、注目する soliton core がホライズンより十分に小さいことから、Hubble parameter$H$ による膨張の効果を表す項を落としている ($H/m \ll 1$)。重力場は十分に弱い場 $|\Phi| \ll 1$ とし、Poisson 方程式

$$\frac{1}{a^2}\nabla_x^2\Phi = 4\pi G\frac{m}{a^3}\{|\psi|^2 - \langle|\psi|^2\rangle\}, \quad (3)$$

に従う。右辺は FDM の密度ゆらぎであり、$\langle|\psi|^2\rangle$ は宇宙全体における平均密度である。FDM の振る舞いを調べるには、これらの非線形方程式を解く必要がある。S-P 方程式を解析的に解くために、彼らは次の近似を用いた。soliton core のサイズが halo のサイズに比べて十分に小さいことから (i)core の自己重力は無視し、(ii)core の周囲にある halo は背景として core と分離して扱う。そして、その halo は (iii) 球対称に分布し、Navarro-Frenk-White (NFW) に従うとする。さらに、(iv) 注目している core を構成する FDM の密度は平均密度より十分に大きい ($|\psi|^2 \gg \langle|\psi|^2\rangle$) とする。以上から halo のプロファイルを

$$m|\psi|^2 \simeq \rho_{NFW}(r) \equiv \frac{\rho_{\rm s}}{(r/r_{\rm s})(1+r/r_{\rm s})^2} \quad (4)$$

とできて、これが NFW プロファイルである。式 (3) から halo による重力ポテンシャルが

$$\Phi = -4\pi G\frac{\rho_{\rm s}r_{\rm s}^2}{a}\frac{\log(1+r/r_{\rm s})}{r/r_{\rm s}}$$

と動径方向のみに依存する形となる。それから、FDM の波動関数を

$$\psi = \sum_{nlm} u_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\varphi)e^{-i\epsilon\tau}, \quad \tau \equiv \int^t dt'\frac{1}{a^2(t')}$$

とする。ただし、ϵ は FDM のエネルギーである。さらに、ここに半径 r, エネルギー ϵ, ポテンシャルにある係数を無次元な量に変換して、$x \equiv r/r_{\rm s}$, $\mathcal{E} \equiv 2mr_{\rm s}^2\epsilon$, $\alpha \equiv 8\pi G m^2\rho_{\rm s}r_{\rm s}^4 a$ と表す。そうすれば、式 (2) は

$$-\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d}{dx}u_{nl}(x)\right) + \left[-\alpha\frac{\log(1+x)}{x} + \frac{l(l+1)}{x^2}\right]u_{nl}(x) = \mathcal{E}u_{nl}(x). \quad (5)$$

という線形固有問題になる。上式から α はポテンシャルの深さに対応しているとわかる。そこで、α を典型的な量で表すと、

$$\alpha = 7.21\times10^2\left(\frac{m}{10^{-22}eV}\right)^2\left(\frac{M_h}{10^9M_\odot}\right)^{4/3} \times\left(\frac{\Delta_{\rm vir}(z)}{200}\right)^{-1/3}\left(\frac{\Omega_{m,0}h^2}{0.147}\right)^{-1/3}\frac{f(c_{\rm vir})}{1+z}.$$

$$f(c_{vir}) \equiv \frac{1}{c_{vir}\left[\ln(1+c_{vir}) - c_{vir}/(1+c_{vir})\right]}, \quad c_{vir} \equiv \frac{r_{vir}}{r_s}$$

になる。ここで、$c_{\rm vir}$ は concentration parameter、virial 半径 $r_{\rm vir}$ である。α が大きい値をとることから、式 (5) を解くために WKB 近似を用いることができる。しかし、次節で述べるように彼らは WKB 近似よりも回帰点周りで精度良く解を求めることができる Langer 変換を用いて波動関数を導出している。

3 Analytical solution

さて、式 (5) を解けば FDM の波動関数が求められるのであるが、彼らは $l = 0$ の場合に注目して解を求めている。波動関数を $\tilde{u}_n \equiv xu_n(x)$ と変換すると、式 (5) は

$$\frac{d^2\tilde{u_n}(x)}{dx^2} + \alpha g_0(x)\tilde{u_n}(x) = 0, \quad (6)$$

$$g_0(x) \equiv \frac{\log(1+x)}{x} + \frac{\mathcal{E}}{\alpha}. \quad (7)$$

となる。束縛状態の解を導出するために境界条件を $\tilde{u}_n(0) = 0$, $\tilde{u}_n(\infty) = 0$ とし、エネルギー $\mathcal{E}$ を負にとる。すると、$g_0(x)$ には $g_0(x_{\rm c}) = 0$ となる回帰点が存在する。この点付近では WKB 近似が破綻するので、彼らは以下に示す Langer 変換 (Nayfeh,A.H. 1993) を用いている。まず、Liouville-Green 変換によって

$$zx = p(x), \quad v_n(z) = \sqrt{p'(x)}\tilde{u}_n(x)$$

と変換する。′ は半径 x による微分である。これにより、式 (6) は

$$\frac{d^2v_n(z)}{dz^2} + \left[\alpha\frac{g_0(x)}{p'(x)^2} + \delta\right] v_n(x) = 0, \tag{8}$$

$$\delta = \frac{\sqrt{p'(x)}}{p'(x)^2}\left(\frac{1}{\sqrt{p'(x)}}\right)'' \tag{9}$$

となる。そして、$p(x)$ を Langer 変換によって

$$\alpha\frac{g_0(x)}{p'(x)^2} = -z$$

と決める。ただし、この変換式は $g_0(x)$ が持つ回帰点の数やその点周辺での振る舞いによって決められるものである。こうして、$z = p(x)$ が

$$z = p(x) = \begin{cases} \alpha^{1/3}\left[\frac{3}{2}\int_{x_c}^{x}\sqrt{-g_0(x')}dx'\right]^{2/3} \\ \quad (x > x_c,\ z > 0) \\ -\alpha^{1/3}\left[\frac{3}{2}\int_{x}^{x_c}\sqrt{-g_0(x')}dx'\right]^{2/3} \\ \quad (x \le x_c,\ z \le 0) \end{cases} \tag{10}$$

とわかる。$z \sim \mathcal{O}(\alpha^{1/3})$ より、$\delta \sim \mathcal{O}(\alpha^{-2/3})$ となって δ の項を無視することができる。結局、方程式は

$$\frac{d^2v_n(z)}{dz^2} - z\ v_n(z) \simeq 0. \tag{11}$$

という形になる。これは Airy 方程式であるので、一般解は

$$v_n(z) = c_1\mathrm{Ai}(z) + c_2\mathrm{Bi}(z) \tag{12}$$

と Airy 関数で記述される。境界条件 $\tilde{u}_n(\infty) = 0$ および $z \to \infty$ における Airy 関数の漸近形が

$$\mathrm{Ai}(z) \sim \frac{e^{-(2/3)z^{3/2}}}{2\sqrt{\pi}z^{1/4}}, \qquad \mathrm{Bi}(z) \sim \frac{e^{(2/3)z^{3/2}}}{\sqrt{\pi}z^{1/4}}$$

ということから $c_2 = 0$ と決められる。もう一方の境界条件 $\tilde{u}_n(0) = 0$ から $Ai[z(0)] = 0$ が導かれる。この条件によってエネルギー固有値が決まるのだが、この式は超越方程式だから数値的に固有値を評価する必要がある。以上により波動関数が

$$\tilde{u}_n(x) = \begin{cases} \frac{\{z(x)\}^{1/4}}{\{-g_0(x)\}^{1/4}}\mathrm{Ai}(z(x)), & (x > x_c) \\ \frac{\{-z(x)\}^{1/4}}{\{g_0(x)\}^{1/4}}\mathrm{Ai}(z(x)), & (0 \le x \le x_c) \end{cases} \tag{13}$$

と解析的に求められた。

4 Comparsion with numerical results

この節では、前節で解析的に導出した波動関数と数値的に求めたものとを比較する。数値計算による波動関数は式 (6) を解いたものである。以下の図は (Taruya,A, & Saga,S. 2022) から抜粋したものである。図 1 から解析的結果が精度良く得られていることが分かる。さらに、図 2 からは FDM のプロファイルが平坦になっており、soliton core に対応することが確認できる。

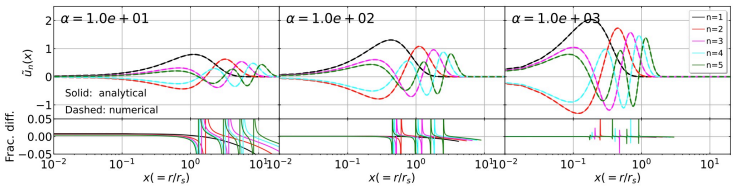


図 1: 上図は解析的に導出した波動関数 (実線) と数値計算によるもの (破線) を基底状態 $n = 1$ から $n = 5$ までプロットしたものである。下図は 2 つの差 $(\tilde{u}_{n,analytical} - \tilde{u}_{n,numerical})/\tilde{u}_{n,numerical}$ を表す。

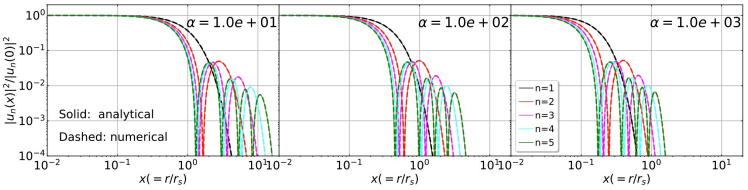


図 2: 図 1 と同じように波動関数を絶対値の 2 乗にして原点で規格化したもの $|u_n(x)|^2/|u_n(0)|^2$ をプロットしている。ただし、波動関数は $u_n(x) = \tilde{u}_n(x)/x$ である。これは、FDM の密度プロファイルに対応する。

5 Prediction for core-halo relations

この節では、解析的に得た結果を用いて soliton core の半径と質量の見積りを行う。彼らは、(Schive,H.-Y et al. 2014b) によるシミュレーションで得られた soliton core のプロファイルを用いて、core の半径と質量のパラメータ依存性を示した。シミュ

レーションによって示された core のプロファイルが

$$\rho_{\rm soliton}(r) = \frac{\rho_{\rm c}}{\{1+\gamma(r/r_{\rm c})^2\}^8}. \tag{14}$$

$$\rho_{\rm c} = \frac{0.019}{a}\left(\frac{m}{10^{-22}eV}\right)^{-2}\left(\frac{r_{\rm c}}{1{\rm kpc}}\right)^{-4}\left[M_\odot pc^{-3}\right]$$

である。core 半径は $\rho_{\rm c}$ の半分の値 $\rho_{\rm soliton}(r_{\rm c}) = \rho_{\rm c}/2$ となるように定義されており、$\gamma \simeq 0.091$ である。このプロファイルと解析的に得た波動関数を $\frac{|u_1(x)|^2}{|u_1(0)|^2} = \frac{\rho_{\rm soliton}(x)}{\rho_{\rm c}}$ と結ぶことで core 半径が近似的に

$$x_{\rm c} = \frac{r_{\rm c}}{r_{\rm s}} = p\sqrt{\frac{6}{\alpha(1+\mathcal{E}/\alpha)}} \tag{15}$$

と求まる。ここで、p は解析的結果をシミュレーションによる結果に合わせるための因子で、彼らは $p = 0.65$ と選んででいる。$r_{\rm s} = r_{\rm vir}/c_{\rm vir}$ から core 半径が

$$\begin{aligned} r_c =& 1.83[{\rm kpc}]{\rm a}^{-1/2}\left(\frac{\rm p}{0.65}\right)\left(\frac{\rm m}{10^{-22}{\rm eV}}\right)^{-1} \\ &\times\left(\frac{M_h}{10^9 M_\odot}\right)^{-1/3}\left(\frac{\Delta_{vir}}{200}\right)^{-1/6} \\ &\times\left(\frac{\Omega_{m,0}h^2}{0.147}\right)^{-1/6}\left\{\frac{g(c_{vir})}{(1+\mathcal{E}/\alpha)}\right\}^{1/2}, \end{aligned} \tag{16}$$

と見積もられる。ここで、$g(c_{\rm vir}) = \frac{1}{c_{\rm vir}^2 f(c_{\rm vir})}$ である。

続いて、core 質量である。soliton core のプロファイル $\rho_{\rm soliton}(r)$ を core 半径 r_c までで積分したもの $M_c = 4\pi\int_0^{r_c} r^2\rho_{\rm soliton}(r)dr$ を用いる。これと x_c により M_c は

$$\begin{aligned} M_c =& 2.91\times10^7[M_\odot]a^{-1/2}\left(\frac{p}{0.65}\right)^{-1}\left(\frac{m}{10^{-22}eV}\right)^{-1} \\ &\times\left(\frac{M_h}{10^9 M_\odot}\right)^{1/3}\left(\frac{\Delta_{vir}}{200}\right)^{1/6} \\ &\times\left(\frac{\Omega_{m,0}h^2}{0.147}\right)^{1/6}\left\{\frac{g(c_{vir})}{(1+\mathcal{E}/\alpha)}\right\}^{-1/2} \end{aligned} \tag{17}$$

と見積られた。(Schive,H.-Y et al. 2014b) によって求められた core 半径と core 質量と比べると、解析的に得られた結果の後ろの 2 項がシミュレーションによる結果にはない依存性である。つまり、考える宇宙モデル $\Omega_{m,0}h^2$ と concentration parameter$c_{\rm vir}$ に依存することが示された。シミュレーションにより各 halo の $c_{\rm vir}$ と質量 $M_{\rm vir}$ との間にはバラつきがあることが指摘されている (Bullock et al. 2001)。式 (16)(17) から core の半径と質量が $c_{\rm vir}$ に依存するので、core-halo 関係のバラつきが concentration と halo 質量の関係にあるバラつきに由来するものと考えられる。

Reference

Bullock,J.S, & Boylan-Kolchin,M. 2017, Annu.Rev.Astron.Astrophys, 55, 343.

Bullock,J.S, Kolatt,T.S. Sigad,Y. Somerville,R.S. Kravtsov,A.V. Klypin,A.A. Primack,J.R. & Dekel,A. 2001 Mon.Not.R.Astron.Soc. 321, 559.

May,S, & Springel,V. 2021, Mon.Not.R.Astron.Soc. 506, 2603.

Nayfeh,A.H, *Introduction to Perturbation Techniques*, 1993, Wiley-VCH,

Schive,H.-Y, Chiueh,T, & Broadhurst,T. 2014, Nat.Phys, 10, 496.

Schive,H.-Y, Liao,M.-H, Woo,T.-P, Wong,S.-K, Chiueh,T, Broadhurst,T, & Hwang,W.Y.P. 2014, Phys.Rev.Lett, 113, 261302.

Taruya,A, & Saga,S. 2022, Phys.Rev.D, 106, 103532.

———index へ戻る

重宇 c02

球面重力波に対するパルサータイミング公式の導出に関するレビュー

山本 峻

球面重力波のパルサータイミング公式導出のレビュー

山本 峻 (弘前大学大学院 理工学研究科)

Abstract

1915 年に発表されたアインシュタインの一般相対性理論にて重力波 の存在が予言された。重力波は時空を歪めながら伝搬する波である。 1950 年代以降に観測に向けて世界中で研究が行われ、2015 年にアメ リカのレーザー干渉計重力波検出器 LIGO によって重力波の直接観測 が成し遂げられた。重力波は強い透過力を持つなどの電磁波にはない 特徴が多くあり、宇宙観測の可能性がより広がると考えられている。 今回はこの重力波の検出方法の一つとなるパルサーを用いた重力波検出にとって新たな理論を構築する論文のレビューを行う。

高速で電磁波を放出する中性子星はパルサーとよばれ、地球上でも観測できるそのパルスは極めて規則正しい周期を持っている。観測できるパルスを発しているパルサーと地球の間に重力波がある時、時空 の歪みが生じることによってパルスの伝搬する時間に変動が発生して、 観測されるパルスの周期が乱れる。今回議論する重力波の検出方法はこの周期変動を利用したものである。先行研究により、パルスの振動 数変化と重力波の関係を表すための定式化がなされてきた。一般的に知られているその式は平面重力波を仮定した場合のものであった。そ のため、非常に遠方の天体から到来する重力はに対しては有効である。今回は近傍に存在するコンパクト天体から放射される重力波を仮定 して、球面重力波に対する振動数変化の数式を導出した。球面波特有の効果として、地球から重力波源までの距離と地球からパルサーまで の距離に比例した項が表れた。この項によって地球から重力波源までの距離が小さいまたは、地球からパルサーまでの距離が大きいほど周波数の変化が大きくなることがわかった。

1 イントロダクション

2015 年に干渉計を利用して重力波の観測がされて、今年 2023 年にパルサーを用いた方法であるパルサータイミングアレイ（PTA）によって重力波が観測された。宇宙空間に存在するパルサーから放出された電磁波パルスは、地球でも観測することができる。パルスが伝播する経路は重力波の存在によって変化することになる。これを利用して、重力波を検出する方法がパルサータイミングアレイである。この観測では数ナノヘルツ〜数百ナノヘルツ程度の周波数の重力波の検出が予想されている。すでに先行研究によって電磁パルスの振動数変化と重力波の関係を表すための定式化がなされている。一般的に知られているその式は平面重力波を仮定した場合においてのものである。 平面重力波の仮定は非常に遠方の天体から到来する重力波や、宇宙空間に広く存在していると考えられている背景重力波などに対しては十分に有効な理論である。

この論文では近傍に存在するコンパクト天体連星から放射される重力波について、球面の重力波を仮定したときにどの程度効果があるのかを考える。そのために、重力波を球面波と仮定した時のパルスの振動数変化と重力波の関係式を導出する。 2 章では先行研究におけるパルスの周期変化と重力波の関係式と平面波を仮定した場合の効果を紹介する。 3 章では球面波を仮定した場合での検出公式の書き換えと、球面波を仮定したことによって生じた効果を見る。 4 章ではまとめを行う。また、この集録では光速度 $c = 1$、万有引力定数 $G = 1$ とする自然単位 形を用いるが、形式上 c や G を記述することがある。

2 パルスの周期変化による重力波検出

2.1 パルサーを用いた重力波の検出理論

パルサーを用いた重力波の検出はパルス周期と地球の周期の差から求められる。

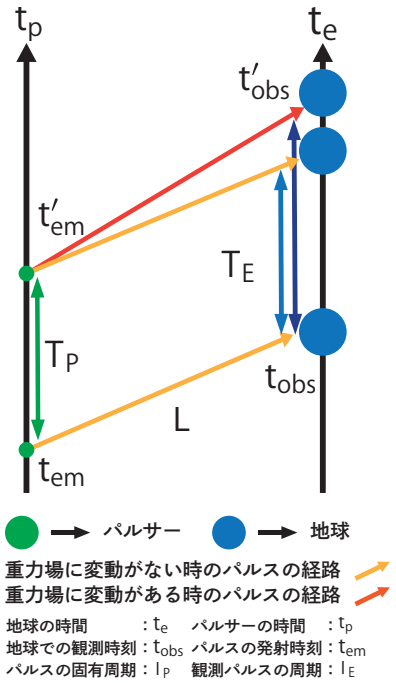


図 1: 地球とパルサーの間に重力波がある時のパルス周期の変化。重力波の有無によってパルスの経路が伸び縮みするため、パルスの周期が変動する。

パルスの進む空間長 L は、パルス経路中の重力波を h_{ij}^{TT} として

$$L = t_{em} - t_p - \frac{1}{2}\mathbf{n}_p^i \mathbf{n}_p^j \int_{t'_{em}}^{t'_p+L} dt' \left[\frac{\partial}{\partial t'} h_{ij}^{TT}(t', \mathbf{x})\right] \tag{1}$$

この空間長さが時間変化しないことを利用すると、次に発射されるパルスについても同様に L を考えられる。この L から、パルス固有の周期 T_P と地球で観測されるパルスの周期 T_E の差となるパルス周期の変化 ΔT を求める。この結果求められる ΔT と重力波の関係式は

$$\frac{\Delta T}{T_P} = \frac{1}{2} T_P n_p^i n_p^j \int_{t'_{em}}^{t'_{em}+L} dt' \left[\frac{\partial}{\partial t'} h_{ij}^{TT}(t', x)\right] \tag{2}$$

2.2 平面波における重力波

(2) 式について、平面波を仮定、つまり、重力波源が十分に遠方であるとき、パルスが受ける重力波の向きは一定となる。このことを利用して、右辺を積

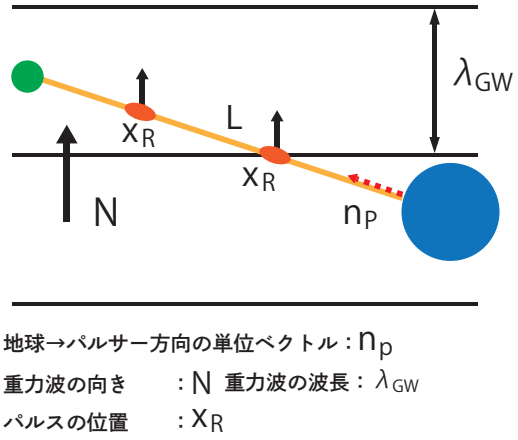


図 2: パルスが受ける平面波を仮定した重力波。パルスに対する重力波の向きが常に一定になる。

分すると、

$$\frac{\Delta T}{T_P} = \frac{\mathbf{n}_p^i \mathbf{n}_p^j}{2(1+\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{N})} \left[h_{ij}^{TT}(t_{obs}, \mathbf{x}_E) - h_{ij}^{TT}(t_{em}, \mathbf{x}_p)\right] \tag{3}$$

となり、パルス周期の変化から重力波を求められる。

3 球面重力波の検出公式

3.1 球面波を仮定した重力波

球面波を仮定した時、パルスが受ける重力波の向きはパルスの位置に依存して変化する。

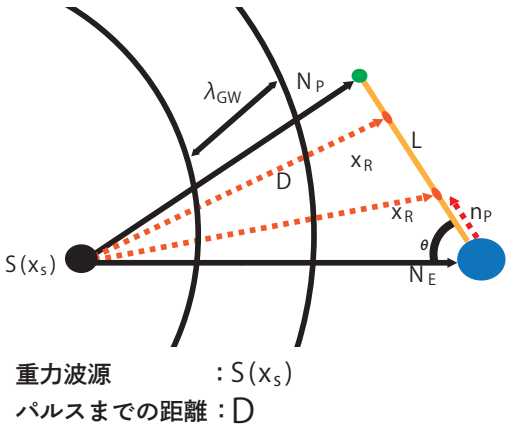


図 3: パルスが受ける球面重力波。パルスの受ける重力波の向き ($\mathbf{x}_R$) が変化する。

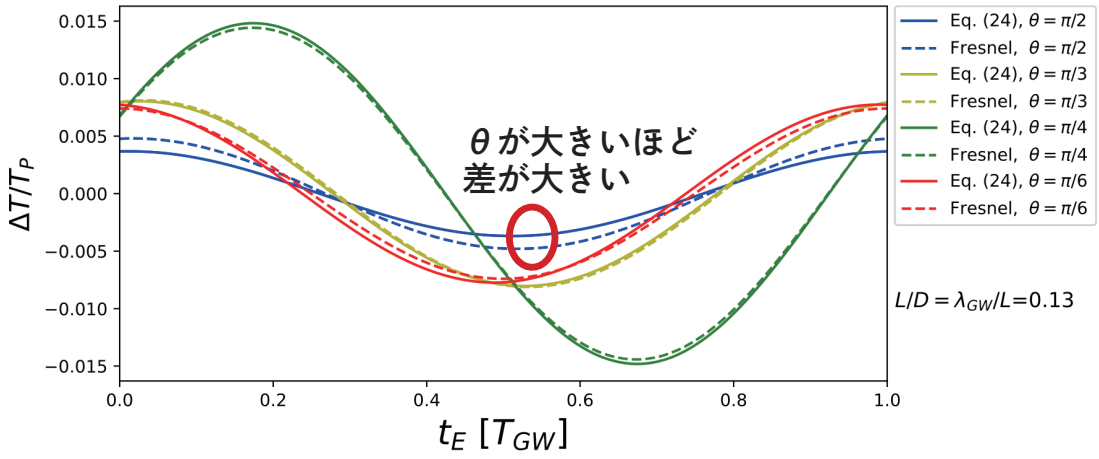


図 4: 連星系を edge on で観測した時の重力波を仮定したパルス周期の変化と重力波の関係式のグラフ θ は地球からみたパルサーと重力波源の角度、横軸は重力波の周期で規格化されている。点線→フレネル補正項のみを取り入れたグラフ　実線→重力波の向きによる補正項も取り入れたグラフ

重力波源からの距離と重力波の波長の関係などを利用して (2) 式を書き換えて、積分をすると、

$$\frac{\Delta T}{T_P} = \frac{1}{2}\mathbf{n}_p^i\mathbf{n}_p^j\left[\frac{h_{ij}^{TT}(t_E,\mathbf{x}_E)}{(1+\mathbf{n}_p\cdot\mathbf{N}_R(t_E)} - \frac{h_{ij}^{TT}(t_p,\mathbf{x}_p)}{(1+\mathbf{n}_P\cdot\mathbf{N}_R(t_p)}\right] + O(\frac{h\lambda_{GW}}{D}) \tag{4}$$

$L \ll D$ のとき N_E=N_P となるので (4) 式は平面波解である (3) 式を再現する。

3.2　数値計算による検証

実際に連星系から放射された重力波 ${h_{ij}}^{TT}$ の波形を仮定して (3) 式を計算する。その際に出てくる波源までの距離、重力波の波長、パルサーと地球の間の距離などによって影響を受ける項を補正項と呼ぶ。今回導出した (3) 式には平面波解の時にもあったフレネル補正項：$O\left(\frac{L^2}{D\lambda_{GW}}\right)$ に加えて、重力波向きに依存する補正項:$O\left(\frac{L}{D}\right)$ がある。このフレネル補正項と重力波の向きによる補正項の両方を取り入れた (3) 式とフレネル補正項のみを取り入れた (3) 式を数値計算した結果が図４である。

4　まとめ

今回はパルサーの周期変化と球面波を仮定した重力波の検出公式を導出した。この公式を実際に連星系から放出される重力波を仮定して、実際に計算すると、パルサーと地球の間の距離と重力波源までの距離によって影響を受ける項が現れた。この項による周波数 変化の式に対する影響は、地球から重力波源までの距離が小さいまたは地球からパ ルサーまでの距離が大きいほど強く現れることがわかった。実際のパルサータイミング観測では、パルサー固有の変動やノイズ、または測定誤差などの検出を防ぐため、一つのパルサーだけではなく複数のパルサーを用いてその周波数がそれぞれ観測されている。今回導出できた振動数変化の式は単一のパルサーに対して有効であるため、より実践的な理論として複数のパルサーを考慮したうえでの球面重力波に対する振動数変化の式を検討する必要がある。

5　参考文献

1. R. Kubo, K. Yamahira, and H. Asada, The Astrophysical Journal, 946:76 (6pp),2023
2. Maggiore, M., ”Gravitational Waves: Astrophysics and Cos- mology”Ox- ford Univ. Press, UK, 2018.

———index へ戻る

重宇c03

ダークエネルギーを説明する低エネルギー有効理論の強重力領域における検証可能性

小林 元

ダークエネルギーを説明する低エネルギー有効理論の強重力領域における検証可能性

小林 元 (京都大学 基礎物理学研究所)

Abstract

現在の宇宙の加速膨張を説明するダークエネルギーのモデルは，スカラー場に時間的な勾配を持たせ時間方向の対称性を自発的に破った低エネルギー有効理論 (Effective Field Theory, EFT) を用いて普遍的に記述される．近年 [2] にて一般の背景時空の下へこの EFT が拡張されたことを踏まえ，EFT におけるブラックホール (BH) 背景の下での重力摂動を一般相対論と比較することで，BH 起源の重力波からダークエネルギーの情報を引き出すことが期待される．本稿では，このような動機の下で [2]，[3] に基づき任意の背景時空における EFT の構築法と，EFT における静的・球対称 BH 解周りのパリティ奇成分の BH 摂動論の定式化についてレビューする．

1 Introduction

現在の宇宙は加速膨張していることが知られているが，その起源は未だ理解されていないため，多くのモデルを統一的に扱う方法を構築し，観測結果を用いてモデルを峻別することが重要である．[1] で提案された「ダークエネルギーの低エネルギー有効理論 (EFT of DE)」により，単一のスカラー場により加速膨張を駆動するモデルを普遍的に扱うことができる．低エネルギー有効理論 (EFT) のアプローチでは，対称性とその自発的破れのパターンさえ分かれば，指定した背景の周りの摂動の低エネルギーで有効な作用の形を系統的に決定できる．DE を説明するモデルの多くは，時間的な勾配を持つスカラー場に基づいているため,「EFT of DE」では，一様等方宇宙背景の下で時間方向の一般座標変換不変性を自発的に破る状況を考える．

近年 [2] において，時間方向の対称性を破る EFT の，任意の背景時空での定式化が提案された．特に，この EFT はブラックホール (BH) 時空においても適用可能である．BH 時空背景の EFT における重力摂動を，一般相対論の場合と比較することで，ダークエネルギーの正体となりうるスカラー場についての情報を，BH 連星合体起源の重力波から得ることが期待される．本稿では，2 節で一般の背景時空における EFT の構築方法を紹介した後，3 節で EFT に基づく静的・球対称 BH の周りのパリティ奇成分の計量の摂動の解析方法について紹介する．特に EFT においてもパリティ奇の計量摂動が 1 つの力学的自由度で記述されることを確かめ，一般相対論における BH 摂動論でよく知られた Regge-Wheeler 方程式の一般化; 式 (3.11) を導出する．さらに，4 節でまとめとこの式 (3.11) の解析を通じた今後の展望を述べる．

2 EFT の一般の背景時空への拡張

[2] に基づき，スカラー場により時間方向の座標変換不変性を自発的に破る EFT の，任意の背景時空における定式化について解説する．今回考える EFT では，背景スカラー場の勾配 $\partial_\mu\overline{\Phi}$ が timelike であるため，スカラー場の背景量 $\overline{\Phi}$ が空間的に一様になるような時間座標 τ をとれる．

$$\overline{\Phi} = \overline{\Phi}(\tau) : \tau \text{ にのみ依存する背景スカラー場}$$

2.1 ユニタリーゲージにおける有効作用

ユニタリーゲージ，すなわちスカラー場 Φ の摂動 $\delta\Phi := \Phi - \overline{\Phi} = 0$ の下での計量の摂動を議論する．このとき，Φ の等高面は時間一定面を指定し，$X := g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi$ として，その単位法線ベクトル場は，$n_\mu := -\frac{\partial_\mu\Phi}{\sqrt{-X}} \to -\frac{\delta^\tau_\mu\dot{\overline{\Phi}}}{\sqrt{-g^{\tau\tau}\dot{\overline{\Phi}}^2}}$ である[1]．計量の ADM 分解

$$ds^2 = -N^2d\tau^2 + h_{ij}(dx^i + N^id\tau)(dx^j + N^jd\tau) \quad (2.1)$$

[1] ここで「$\to$」はユニタリーゲージの下での表式を意味し，$\dot{}$ は τ 微分を表す．$n_\mu n^\mu = -1$ で確かに timelike となっている．

を考え[2]，超曲面の外的曲率を $K_{\mu\nu} := h^\rho_\mu \nabla_\rho n_\nu$ と定義する[3]．3 次元曲率 ${}^{(3)}R$ も誘導計量 h_{ij} を用いて定義される．

これらの準備の下で，ユニタリーゲージの下での EFT の作用を一般的に構成する．ユニタリーゲージの下での作用は，4 次元の Ricci スカラーのような 4 次元の共変量に加えて，$(K_{\mu\nu}, N, {}^{(3)}R$ などで書ける)3 次元共変な幾何学量に依存しうる．さらに，τ-方向の対称性の自発的な破れから作用は τ に対するあらわな依存性を持ちうる．F を，4 次元と 3 次元の共変量，および時間座標 τ に対するスカラー関数として，ユニタリーゲージにおける一般的な作用は，

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}F(R_{\mu\nu\alpha\beta}, K_{\mu\nu}, g^{\tau\tau}, \nabla_\mu, \tau) \tag{2.2}$$

の形にまとまる[4]．

固定した任意背景の下での摂動量の解析を行いたい．背景量を $(\cdots)$ として，摂動量を

$$\delta g^{\tau\tau} := g^{\tau\tau} - \overline{g}^{\tau\tau}(\tau,\vec{x}), \delta K^\mu_\nu := K^\mu_\nu - \overline{K}^\mu_\nu(\tau,\vec{x}), \cdots$$

のように定義する．摂動量の有効作用は，上記の F の指定した背景の周りでの Taylor 展開を用いて書き下すことができる．

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\overline{F} + \overline{F}_{g^{\tau\tau}}\delta g^{\tau\tau} + \overline{F}_K \delta K + \cdots\right] \tag{2.3}$$

ここで，$\overline{F}_Z = \frac{\partial F}{\partial Z}\big|_{\text{背景量}}$ と，F の微分係数を背景量で評価したものである[5]．Taylor 展開の各係数は座標 (τ, x^i) に依存する[6]．しかし，Taylor 展開の各項の係数は，その x^i 依存性と連鎖律を通じて以下の関係に束縛されている．

$$\partial_{x^i}\begin{pmatrix}\overline{F}\\ \overline{F}_{g^{\tau\tau}}\\ \overline{F}_K\\ \vdots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\overline{F}_{g^{\tau\tau}} & \overline{F}_K & \overline{F}_{{}^{(3)}R} & \cdots\\ \overline{F}_{g^{\tau\tau}g^{\tau\tau}} & \overline{F}_{g^{\tau\tau}K} & \overline{F}_{g^{\tau\tau}{}^{(3)}R} & \cdots\\ \overline{F}_{Kg^{\tau\tau}} & \overline{F}_{KK} & \overline{F}_{K{}^{(3)}R} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}\partial_{x^i}\begin{pmatrix}\overline{g}^{\tau\tau}\\ \overline{K}\\ {}^{(3)}\overline{R}\\ \vdots\end{pmatrix} \tag{2.4}$$

関係式 (2.4) により，作用の摂動展開において逐次的に空間 3 次元方向の座標変換不変性が保証される[7]．

したがって，ユニタリーゲージでの摂動を記述する一般的な Lagrangian density $\mathcal{L}$ は[8]，以下のように書き下すことができる．

$$\mathcal{L} = \frac{M_\star^2 f(y)}{2}\hat{R} - \Lambda(y) - (g^{\tau\tau}, K, \sigma_{\mu\nu}, r_{\mu\nu}\text{の 1 次}) + (\text{摂動量の二次}) + \cdots \tag{2.5}$$

$\cdots$ は摂動量の高次の展開を表す．$y = (\tau, x^i)$ であり，$\hat{R}$ は全微分項を差し引いた 4 次元の Ricci スカラーである[9]．$f(y), \Lambda(y)$ および $g^{\tau\tau}, K, \sigma_{\mu\nu}, r_{\mu\nu}$ の一次の係数[10]の間には，背景場の運動方程式 (tadpole 相殺条件) からくる制限がつく[11]．

2.2 Stückelberg 作用

作用の 4 次元の一般座標変換に対する不変性は，時間方向の微小な座標変換 $\tau \to \tau - \pi(\tau,\vec{x})$ に対し作用全体が不変となるよう，$\pi(\tau,\vec{x})$ で書き表される項を Lagrangian に加えることによって回復される[12]．作用に現れる $\pi(\tau,\vec{x})$ は，時間方向の対称性の破れに関する Nambu-Goldstone ボソンとなっている．インフレーション中に生成する揺らぎの非ガウス性の解析など NG ボソン π の自己相互作用が重要な寄与を持ち，時空計量の摂動との混合を無視できる場合の解析において，π をあらわに含む作用を考えることは重要である[13]．逆に今回の BH 摂動論のような時空の (摂動) ダイナミクスに興味があるときには，NG ボソン π の寄与は時空に吸収されるのでユニタリーゲージ下での作用 (式 (2.5)) による議論で十分である．

3 静的・球対称背景の下での EFT

3.1 EFT の作用と背景場の運動方程式

背景時空として，静的・球対称な計量

$$ds^2 = \overline{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -A(r)dt^2 + \frac{dr^2}{B(r)} + r^2 d\Omega_2^2 \tag{3.1}$$

[2] $h_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu$ は，τ-一定面に誘導される計量とする．

[3] 外的曲率の空間成分とトレースは，$K_{ij} = \frac{1}{2N}(\dot{h}_{ij} - D_i N_j - D_j N_i)$，$K = h^{ij}K_{ij}$ と ADM 変数を用い書き表せる．ここで ∇_ρ は 4 次元の共変微分であり，D_i は 3 次元の共変微分である．

[4] 3 次元曲率テンソル ${}^{(3)}R_{\mu\nu}$ は，Gauss-Codazzi の関係式より 4 次元の Riemann 曲率と外的曲率を用いて書き表せるので独立変数から取り除いた．また，ラプス関数 N の代わりに $g^{\tau\tau}$ を関数の独立変数として採用した．

[5] $\sigma_{\mu\nu} := K_{\mu\nu} - \frac{K}{3}h_{\mu\nu}$，$r_{\mu\nu} := {}^{(3)}R_{\mu\nu} - \frac{{}^{(3)}R}{3}h_{\mu\nu}$ を用いて，独立変数のうち $\{R_{\mu\nu\alpha\beta}, K_{\mu\nu}\}$ を $\{K, {}^{(3)}R, \sigma_{\mu\nu}, r_{\mu\nu}\}$ に取り換えて計算している．

[6] x^i に対する依存性は，背景量を代入した際に生じる．

[7] τ 方向については，関数 F 自身に顕な依存性が含まれるので，連鎖律により $\overline{F}_{\cdots\tau}$ のような項が生じるが，このような項は作用の Taylor 展開には含まれない．そのため，作用の展開係数に対する束縛関係を与えない．

[8] $S = \int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}$ とする．

[9] $\hat{R} = {}^{(3)}R + K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} - K^2$ を満たす．

[10] $(g^{\tau\tau}, K, \sigma_{\mu\nu}, r_{\mu\nu}\text{の 1 次}) = c(y)g^{\tau\tau} + \beta(y)K + \alpha^\mu_\nu(y)\sigma^\nu_\mu + \gamma^\mu_\nu(y)r^\nu_\mu + \zeta(y)\overline{n}^\mu\partial_\mu g^{\tau\tau}$ で，各係数は時空の座標依存性を持つ．

[11] 式 (3.4) にて再度解説する．具体例として注[16]を挙げた．

[12] 具体的には，ゲージ変換作用に現れるすべての局所場において，$f(\tau,\vec{x}) \to f(\tau+\pi,\vec{x}) = f(\tau,\vec{x}) + \dot{f}(\tau,\vec{x})\pi + \frac{1}{2}\ddot{f}(\tau,\vec{x})\pi^2 + \mathcal{O}(\pi^3)$ の置き換えを，求めたい摂動のオーダーまで行う．

[13] このような極限は decoupling 極限と呼ばれ，摂動の波長のスケールが背景計量の長さスケールと比べて十分短い場合に成り立つ．

を考える[14]．自由落下する観測者の座標系

$$ds^2 = -d\tau^2 + [1 - A(r)]d\rho^2 + r^2 d\Omega_2^2 \tag{3.2}$$

をとり[15]，スカラー場 Φ が τ 方向の対称性の自発的に破る場合を考える．背景計量が時間によらないため，背景場 $\overline{\Phi}(\tau) \propto \tau$ で $\overline{X} = \text{const.}$ の配位が実現される．時間 (τ) 方向の並進対称性と時間反転対称性に対応し，スカラー場の $\Phi \to \Phi + \text{const.}$ と $\Phi \to -\Phi$ なる変換に対する不変性を持つとする．この下で，Einstein frame $f(y) = 1$ がとれると仮定する．ユニタリーゲージにおける Lagrangian は，r のみに依存する関数を展開係数として

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& \frac{M_\star^2}{2}R - \Lambda(r) - c(r)g^{\tau\tau} - \tilde{\beta}(r)K - \alpha(r)\overline{K}^\mu_\nu K^\nu_\mu \\ & - \zeta(r)n^\mu\partial_\mu g^{\tau\tau} + (\text{摂動量の二次}) + \cdots\end{aligned} \tag{3.3}$$

と書ける．背景計量 $\overline{g}_{\mu\nu}$ から計算される Einstein テンソルを $\overline{G}_{\mu\nu}$，Lagrangian の $-\Lambda(r)$ から $\zeta(r)$ の項までと背景計量を用いて計算したエネルギー・運動量テンソルを $\overline{T}_{\mu\nu}$ として，背景場の運動方程式は，

$$\overline{T}_{\mu\nu} = M_\star^2 \overline{G}_{\mu\nu}; \text{tadpole 相殺条件} \tag{3.4}$$

となる．式 (3.4) について，右辺は $A(r)$, $B(r)$ のみに依存する幾何学量であり，左辺はそのほかに EFT の展開係数に依存し，$A(r), B(r)$ が与えられれば EFT の展開係数の間の関係を与える[16]．

3.2 EFT における奇パリティ摂動の解析

計量 (3.2) の持つ $SO(2)$ 不変性から，球面調和関数を基底とする展開により計量の摂動を偶奇のパリティ成分に分解することができる．パリティを破るような相互作用項を含めていないので，パリティ偶奇の成分が混ざり合うことはない．今回は奇パリティ成分の解析に着目する[17]．計量に対する摂動を $\delta g_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} - \overline{g}_{\mu\nu} = \delta g^{\text{odd}}_{\mu\nu} + \delta g^{\text{even}}_{\mu\nu}$ とし，パリティ奇成分 $\delta g^{\text{odd}}_{\mu\nu}$ は，

$$\delta g^{\text{odd}}_{\mu\nu} = \sum_{\ell m} r^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & h_0 E_a{}^b \overline{\nabla}_b \\ 0 & 0 & h_1 E_a{}^b \overline{\nabla}_b \\ h_0 E_a{}^b \overline{\nabla}_b & h_1 E_a{}^b \overline{\nabla}_b & h_2 E_{(a|}{}^c \overline{\nabla}_c \overline{\nabla}_{|b)} \end{pmatrix} Y_{\ell m} \tag{3.5}$$

と書ける[18]．$i = 0, 1, 2$ に対して $h_i := h_i^{\ell m}(\tau, \rho)$ と略記している．無限小座標変換 $x^\mu \to x^\mu + \epsilon^\mu$ を

$$\epsilon^\tau = \epsilon^\rho = 0, \ \epsilon^a = \sum_{\ell,m} \Xi_{\ell m}(\tau, \rho) E^{ab} \overline{\nabla}_b Y_{\ell m}(\theta, \phi)$$

ととると，$h_0 \to h_0 - \dot{\Xi}$, $h_1 \to h_1 - \partial_\rho \Xi$, $h_2 \to h_2 - 2\Xi$ のように変換する．このゲージ自由度を用いて $\Xi = \frac{h_2}{2}$ とすれば，h_2 は消える．

以下，$\ell \geq 2$ とする．ここで，EFT の作用 (式 (3.3)) の中から，奇パリティの摂動の時間発展に効く項について考察する．背景計量 (式 (3.2)) は，パリティ偶であるから，背景計量を代入して評価される量はすべてパリティ偶となる．$\delta g^{\tau\tau}$ と δK もパリティ偶なのでこれらだけからなる項は無視できる．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{odd}} =& \frac{M_\star^2}{2}R - \Lambda(r) - c(r)g^{\tau\tau} - \tilde{\beta}(r)K - \alpha(r)\overline{K}^\mu_\nu K^\nu_\mu \\ & + \frac{1}{2}M_3^2(r)\delta K^\mu_\nu \delta K^\nu_\mu + \cdots\end{aligned} \tag{3.6}$$

$\cdots$ は摂動の高次の項を意味する．式 (3.6) の摂動量の二次までの展開に基づき，h_0, h_2 に関する二次の Lagrangian を導出すると，

$$\frac{2\ell+1}{2\pi j^2}\mathcal{L}_2 = p_1 h_0^2 + p_2 h_1^2 + p_3[(\dot{h}_1 - \partial_\rho h_0)^2 + 2p_4 h_1 \partial_\rho h_0] \tag{3.7}$$

と求まる．各係数は，多重極の指数 $j^2 := \ell(\ell+1)$ および計量に含まれる関数 $A(r), B(r)$ および EFT の展開係数 $M_\star^2$, $\alpha(r)$, $M_3^2(r)$ に依存する[19]．ここで，係数 p_4 は $\alpha + M_3^2 = 0$ を満たすなら消える．例えば，[3] で明示されたように，シフト不変な Higher Order Scalar-Tensor 理論でこの条件を満たす．$p_4 \neq 0$ の時には，遅く回転している BH が作れない，あるいは ρ 方向の音速が無限遠で発散してしまうという問題がある [3]．以下では $p_4 = 0$ が成り立つよう，$\alpha + M_3^2 = 0$ を仮定する．

作用 (3.7) は，拘束条件を取り除くと 1 つの力学的自由度によって記述される．補助場 χ を導入し，

$$\frac{2\ell+1}{2\pi j^2}\mathcal{L}_2 = p_1 h_0^2 + p_2 h_1^2 + p_3[-\chi^2 + 2\chi(\dot{h}_1 - \partial_\rho h_0)]$$

と書き直せる[20]．h_0 と h_1 に関する Euler-Lagrange 方程式[21] から h_0, h_1 を消去すると χ だけの Lagrangian

$$\frac{(j^2-2)(2\ell+1)}{2\pi j^2}\mathcal{L}_2 = s_1\dot{\chi}^2 - s_2(\partial_\rho\chi)^2 - s_3\chi^2 \tag{3.8}$$

[14] $d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ は，単位 2 次元球面上の計量である．

[15] $d\tau = dt + \sqrt{\frac{1-A}{AB}}dr$, $d\rho = dt + \frac{dr}{\sqrt{AB(1-A)}}$ である．

[16] 例えば $A(r) = B(r)$ の時，$r^4\left(\frac{1-A}{r^2}\right)\frac{d}{dr}(\alpha - M_\star^2) = \text{const.}$ となり，λ を定数として $\alpha = M_\star^2 + \frac{3\lambda}{r(2-2A+rA')}$ の関係にある．

[17] 今回の対称性を仮定した EFT における，even sector 及び parity mixing がある場合の解析については今後の課題である．

[18] $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$：球面調和関数，E_{ab}：2 次元球面上の完全反対称テンソル，$\overline{\nabla}_a$:：単位球面上の計量 ($d\Omega_2^2$) に関する共変微分である．$a, b, \ldots$ は単位球面上の角度座標を表す．

[19] 具体的には $(\cdots)^\cdot$ は τ-微分，$(\cdots)'$ は r-微分として，

$$\begin{aligned} p_1 &:= \frac{1}{2}(j^2-2)r^2\sqrt{1-A}\,(M_\star^2 + M_3^2)\,, \\ p_2 &:= -(j^2-2)\frac{r^2 M_\star^2}{2\sqrt{1-A}} + (p_3 p_4)^\cdot\,, \\ p_3 &:= \frac{(M_\star^2 + M_3^2)r^4}{2\sqrt{1-A}}\,, \\ p_4 &:= \sqrt{\frac{B}{A(1-A)}}\left(\frac{A'}{2} + \frac{1-A}{r}\right)\frac{\alpha + M_3^2}{M_\star^2 + M_3^2} \end{aligned}$$

となる．

[20] χ を運動方程式を用いて消去すると，式 (3.7) の Lagrangian と一致する．

[21] $h_0 = -\frac{\partial_\rho(p_3\chi)}{p_1}$, $h_1 = \frac{(p_3\chi)^\cdot + p_3 p_4 \chi}{p_2}$

を得る[22]．式 (3.8) から，ρ, θ 方向の摂動の伝播速度はそれぞれ，$c_\rho^2 := \frac{\overline{g}_{\rho\rho}}{|\overline{g}_{\tau\tau}|}\frac{s_2}{s_1} = \frac{M_\star^2}{M_\star^2+M_3^2}$，$c_\theta^2 := \lim_{\ell\to\infty}\frac{r^2}{|\overline{g}^{\tau\tau}|}\frac{s_3}{j^2 s_1} = \frac{M_\star^2}{M_\star^2+M_3^2}$ と一致し[23]，これは odd-mode の重力波の伝播速度 c_T に対応する．重力波の伝播速度と光速のずれは，

$$\alpha_T(r) := c_T^2 - 1 = -\frac{M_3^2(r)}{M_\star^2 + M_3^2(r)} \tag{3.9}$$

によりパラメトライズされる．

(τ, ρ) 座標から (t, r) 座標に戻ると，

$$\mathcal{L}_2 \propto a_1(\partial_t\chi)^2 - a_2(\partial_r\chi)^2 + 2a_3(\partial_t\chi)(\partial_r\chi) - a_4\chi^2$$

で，各係数 a_1, a_2, a_3, a_4 は，s_1, s_2, s_3 と $A(r), B(r)$ を用いて書き表せる．時間座標を $t \to \tilde{t} := t + \int \frac{a_3}{a_2}dr$ と書き直すことで[24]，

$$\mathcal{L}_2 \propto \tilde{a}_1(\partial_{\tilde{t}}\chi)^2 - a_2(\partial_r\chi)^2 - a_4\chi^2 \tag{3.10}$$

を得る．ここで $\tilde{a}_1 := a_1 + \frac{a_3^2}{a_2}$ である．伝搬する各フーリエモードの解析には，亀座標を導入するのが便利である．今回の設定では，$r_* = \int\sqrt{\frac{\tilde{a}_1}{a_2}}dr$ であり，$F(r) := \frac{dr}{dr_*} = \sqrt{\frac{\tilde{a}_1}{a_2}} = \sqrt{\frac{B}{A}}\frac{A+\alpha_T}{\sqrt{1+\alpha_T}}$ と定めると，$F(r_g) = 0$ を満たす $r_g > 0$ は自由度 χ の horizon に対応する．$\Psi := (\tilde{a}_1 a_2)^{\frac{1}{4}}\chi$ とおくと，

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r_*^2} - \frac{\partial^2}{\partial\tilde{t}^2} - V_{\rm eff}(r)\right)\Psi = 0 \tag{3.11}$$

を得る．ここで，有効ポテンシャルは

$$V_{\rm eff}(r) = \sqrt{1+\alpha_T}\,F\sqrt{\frac{A}{B}}\frac{\ell(\ell+1)-2}{r^2} + \frac{rF}{(1+\alpha_T)^{1/4}}\left[F\times\left(\frac{(1+\alpha_T)^{1/4}}{r}\right)'\right]' \tag{3.12}$$

である．ここで，$(\cdots)'$ は r に関する微分であり，$\alpha + M_3^2 = 0$ を仮定している．$\alpha_T(r)$ は，tadpole 条件: 式 (3.4) を満たすように A, B から決まる[25]．一般相対論における Schwarzschild 解では，$A(r) = B(r) = 1 - \frac{r_g}{r}$ および $\alpha_T \equiv 0$ であり，このとき式 (3.11) は，BH 摂動論でよく知られた Regge-Wheeler 方程式に帰着する．したがって，式 (3.11) は Regge-Wheeler 方程式の一般化になっており EFT における一般相対論からのずれの情報は，式 (3.12) の有効ポテンシャルに含まれている．

[22] ここで各係数は $s_1 := -\frac{(j^2-2)p_3^2}{p_2}$，$s_2 := \frac{(j^2-2)p_3^2}{p_1}$，$s_3 := (j^2-2)p_3\left[1 - \left(\frac{p_1+p_2}{p_1 p_2}\dot{p}_3\right)^{\cdot}\right]$ である．

[23] $p_4 \neq 0$ の場合，c_ρ^2 に $\frac{r^2 p_4^2}{j^2-2}$ の項が加わり，$c_\rho^2 \neq c_\theta^2$ となり，また動径方向の伝播速度が j に依存する．

[24] $\frac{a_3}{a_2} = \sqrt{\frac{1-A}{AB}}\frac{\alpha_T}{A+\alpha_T}$

[25] $A(r) = B(r)$ の時，$\alpha_T(r) = -1 - r(2 - 2A + rA')\frac{M_\star^2}{3\lambda}$

4 Summary & Discussion

本稿では，1 節で加速膨張宇宙のモデルに依らない普遍的な記述方法として「EFT of DE」を導入し，2 節で，空間的に一様とは限らない背景時空にも適用可能な，スカラー場の配位により時間方向の対称性を自発的に破る EFT の一般的な構成方法を紹介した．特にユニタリーゲージ下での作用の摂動展開において，その展開係数は一般に時空の座標 y^μ に依存するが，空間 3 次元共変性を保証するために，各係数は式 (2.4) の関係を通じて結びつき，互いに独立ではない．3 節では，ユニタリーゲージ作用 (式 (2.5)) を用いた，静的・球対称 BH 解の周りの奇パリティの計量摂動の解析方法について議論し，EFT の場合に拡張された Regge-Wheeler 方程式 (3.11) を導いた．EFT の情報は，式 (3.12) の有効ポテンシャルに現れており，この一般相対論からのずれが，式 (3.11) を適切な境界条件の下で解析した結果として，複素離散の固有スペクトルである準固有振動数や static 極限 ($\omega \to 0$) の解に現れる潮汐応答 (いわゆる tidal Love number 等) に反映される．これらの値は，BH 連星合体由来の重力波の波形に寄与するため，実際の重力波の観測データから準固有振動数や tidal Love number を読み取ることで EFT のパラメータを制限できる．発表では [4],[5] および自身の研究をもとに，背景計量は GR と同じ Schwarzschild だが α_T が非零の定数となる stealth Schwarzschild 解と適切なパラメータ領域で曲率特異点を解消できる Hayward 解を例にとり具体的な解析と展望について紹介する．今回の EFT と「EFT of DE」がどちらも妥当なエネルギースケールでうまく接続されていれば，BH 周りの摂動を通じて DE の情報を引き出せたことになる．

Reference

[1] G. Gubitosi, F. Piazza and F. Vernizzi, JCAP **02**, 032 (2013) .

[2] S. Mukohyama and V. Yingcharoenrat, JCAP **09**, 010 (2022) .

[3] S. Mukohyama, K. Takahashi and V. Yingcharoenrat, JCAP **10**, 050 (2022) .

[4] S. Mukohyama, K. Takahashi, K. Tomikawa and V. Yingcharoenrat, JCAP **07**, 050 (2023) .

[5] R. A. Konoplya, JCAP **07**, 001 (2023) .

———index へ戻る

重宇c04

5次元回転ワームホールの解析

上道 恵也

2023 年度 第 53 回 天文・天体物理若手夏の学校

5 次元回転ワームホールの解析

上道 恵也 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

ワームホールとは時空の 2 つの領域を直接つなぐトンネルのような時空構造であり、アインシュタイン方程式の解である。また、ワームホールのいちばんくびれている部分を「喉」と呼ぶ。この喉を広げるためにありふれた古典的な物質に備わっている条件 (エネルギー条件) を破る物質が必要になるので、喉が広がった通過可能なワームホール解を構成するのは難しい [1]。本研究では喉を広げるために回転の効果を用いて、エネルギー条件の破れ方を軽減するようなワームホール解の構成を試みる。しかし、任意の角速度の効果を入れると非球対称となり、この低い対称性からアインシュタイン方程式は偏微分方程式を解かなければいけないことになる。そこで、[2] では角運動量が等しい 5 次元空間における定常回転ワームホール解を構成し、4 次元時空ワームホール解の構成のときと同じ自由度を保ちながらアインシュタイン方程式を常微分方程式にすることができた。本研究では漸近平坦な境界条件を課し、[2] では考えられてなかったワームホールの喉付近における「非対称性」の自由度を考慮し、より一般的な解を構成する。そして、任意の角速度の効果について議論する。

1 Introduction

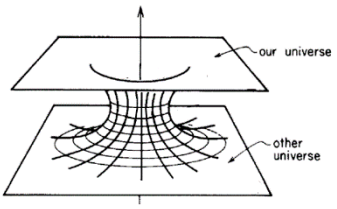


図 1: ワームホールの模式図 ([1] 参照)

ワームホール (WH) とは時空の 2 つの領域を直接つなぐトンネルのような時空構造である（図 1 参照)。WH は一般相対性理論における時空の曲がりと物質分布を関連付けたアインシュタイン方程式の解（= 時空構造）として与えられる。WH はワープ航法やタイムトラベルなどの空想上の技術と関連する興味深い時空構造として研究されているが、一般に通過可能な WH 解を得ることは古典的な物質では難しいとされている。

なぜならば、そのような WH 解を構成するのにはありふれた古典的な物質に備わっている条件（エネルギー条件）を破る物質（エキゾチック物質）を用いてトンネルを広げる必要があるからだ。よって、通過可能 WH の実現可能性は困難とされてきた。

なるべくエネルギー条件を破らない通過可能な WH を構成するために本研究では回転する WH を扱う。なぜならば、角運動量による遠心力によってエキゾチック物質に頼らなくても WH のトンネルを広げることが期待されるからである。実際、遅い回転に限定した WH ではエネルギー条件の破れ方が軽減されることが解析的に示されている [2]。さらに速い回転を求める場合、一般に回転時空は 4 次元のまま数値的に解くと計算コストがかかる。そのため [3] では 5 次元等角運動量時空で計算を簡略化し、WH 解を構成しその安定性を解析している。[3] で得られた解は制限されたものであり、解をより一般的に拡張できることに気付いた。そして WH の 5 次元回転 WH のより一般的な解を構築することを目指す。[2, 3] での限定的なモデルで見たエネルギー条件の破れの軽減の証拠をより確実なものにする。

2 Ansatz と方程式

2.1 Ansatz

今回考える作用としてはエネルギー条件が破れているファントムスカラー場を用いた 5 次元 Einstein 重力を考える。

$$S = \int \left[\frac{1}{16\pi G} R + \mathcal{L}_{\rm ph} \right] \sqrt{-g} d^5 x \qquad (1)$$

ラグランジアン $\mathcal{L}_{\rm ph}$ はファントムスカラー場 ϕ を用いて

$$\mathcal{L}_{\rm ph} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi \tag{2}$$

と表される。本研究で扱う 5 次元等角運動量定常回転ワームホールは以下の計量である。

$$\begin{aligned} ds^2 = &-e^{2a}dt^2 \\ &+ pe^{-a}\{e^{a-q}[dl^2 + hd\theta^2] \\ &+ e^{q-a}h[\sin^2\theta(d\varphi - \omega dt)^2 + \cos^2\theta(d\psi - \omega dt)^2] \\ &+ (e^{a-q} - e^{q-a})h\sin^2\theta\cos^2\theta(d\psi - d\varphi)^2\} \end{aligned} \tag{3}$$

なお、計量関数 $h(l)$ は以下の通りであり、r_0 は喉の半径を表している。

$$h(l) = l^2 + r_0^2 \tag{4}$$

ここで、t は時間座標で、座標 l はワームホールの動径固有座標で、範囲は $-\infty < l < \infty$ である。よって、$l \to \pm\infty$ が漸近領域となる (図 2)。θ, φ, ψ は角度座標で、$\theta = \pi/2$ の時赤道面を表し、φ, ψ に関する角運動量が一致する（＝等角運動量）ようにしている。このような 5 次元等角運動量座標をとっているので、すべての計量関数は動径固有座標 l のみに依存するようにしても、4 次元非球対称時空の自由度と変わらない解析ができる。よって、ここで出てきたラプス関数 $e^a(l)$、非球対称性の歪み度 $q(l)$、角速度 $\omega(l)$、共形空間因子 $p(l)$ はすべて l のみに依存する形となる。また、ファントムスカラー場 $\phi(l)$ も l のみに依存する。なお、これ以降 $'$ は d/dl としている。

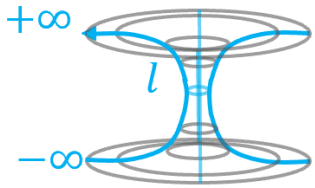


図 2: l の説明図

2.2 ファントム場の方程式と Einstein 方程式

ここからは上で仮定したファントムスカラー場と計量関数を求めるために必要な微分方程式を説明する。ファントム場の方程式は (1) から

$$\nabla_\mu\nabla^\mu\phi = 0 \Leftrightarrow \left(p\sqrt{h^3}\phi'\right)' = 0 \tag{5}$$

よって、定数 Q を使って

$$\phi' = \frac{Q}{p\sqrt{h^3}} \tag{6}$$

と置くことができ Q のことをスカラーチャージと呼び、微分方程式の解を決定するパラメータである。

残りの計量関数は p, q, a, ω の 4 つなので、必要な 4 つの方程式を Einstein 方程式から導くと以下のようになる。Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} = 0 (\mu, \nu \neq l) \tag{7}$$

を用いて、4 つの方程式が求められる。

$$p(l) = -c_1\frac{l}{\sqrt{l^2 + r_0^2}} + c_2\frac{l^2 + r_0^2/2}{l^2 + r_0^2} \tag{8}$$

$$\omega' = \frac{c_\omega}{h^{5/2}p^2e^{q-4a}} \tag{9}$$

$$\frac{3a'h'}{2h} + \frac{a'p' + pa''}{p} - \frac{c_\omega^2 e^{4a-q}}{2p^3h^4} = 0 \tag{10}$$

$$\frac{3q'h'}{2h} + \frac{q'p' + pq''}{p} - \frac{4(e^{2(q-a)} - 1)}{h} = 0 \tag{11}$$

よって、これらの微分方程式を使えば、解 p, a, q, ω を求めることできるが、Einstein 方程式として R_{ll} に関する方程式が残っている。

$$R_{ll} = -8\pi G\frac{Q^2}{h^3p^2} \tag{12}$$

これはファントムスカラー場の情報であるスカラーチャージ Q と計量を繋げることができる。これを constraint として求める。左辺を計量関数を用いて計算すると、

$$\begin{aligned} -8\pi G\frac{Q^2}{h^3p^2} = &-\frac{3p''}{2p} + \frac{q''}{2} - \frac{3h''}{2h} + \frac{3h'^2}{4h^2} + \frac{3p'^2}{2p^2} \\ &- 2a'^2 - \frac{q'^2}{2} + a'q' - \frac{p'}{p}\left(\frac{q'}{2} - a'\right) \\ &- \frac{h'}{4h}\left(q' + \frac{3p'}{p} - 4a'\right) + \frac{1}{2}e^{q-4a}hp\omega'^2 \end{aligned}$$

(11) で q'' を消去して、(8) で p'' を消去すると、

$$\begin{aligned} 4\pi GQ^2 = &-\frac{e^{4a-q}c_w^2}{4ph} + \frac{h^3}{4}[\left(4a'^2 - 2a'q' + q'^2\right)p^2 \\ &- 2\left(a' - q'\right)pp' - 3p'^2] \\ &+ h^2p^2\left(4 - e^{2(q-a)}\right) \\ &+ h^2p\left[p\left(q' - a'\right) - 3p'\right]l - 3hp^2l^2 \end{aligned} \tag{13}$$

となり、右辺は正の定数になることが constraint となる。

2.3 境界条件

漸近平坦の境界条件を課しており、

$$a(\pm\infty) = q(\pm\infty)$$

となる。また、$a, (q), \omega, \phi$ の境界条件はそれぞれ $l \to +\infty$ となるときに 0 にしており、以下のようになる。

$$\begin{aligned} &a(+\infty) = q(+\infty) = 0, \quad a(-\infty) = q(-\infty) = a_{-\infty} \\ &p(+\infty) = -c_1 + c_2, \quad p(-\infty) = c_1 + c_2 \\ &\omega(+\infty) = 0, \quad \omega(-\infty) = \omega_{-\infty} \end{aligned} \tag{14}$$

そして、これにより質量 M と角運動量 J を求めることができる。適当にスケールを変えた座標 $\bar{t}, \bar{\varphi}$ を使って、5 次元時空の場合計量は以下のように展開される (質量、角運動量はスケールを変えた後を強調するため $\bar{}$ を付けた)。

$$g_{tt}dt^2 \to -\left(1 - \frac{8G\bar{M}_{\pm}}{3\pi\bar{l}^2}\right)d\bar{t}^2 \tag{15}$$

$$g_{t\varphi}dtd\varphi \to -\frac{4G\bar{J}\sin^2\theta}{\pi\bar{l}^2}d\bar{t}d\bar{\varphi} \tag{16}$$

(15) や (16) のように展開されるために、(14) をもとに a, ω は以下のように展開される。

$$\begin{aligned} &l \to +\infty \\ &\quad a = -\frac{8G\bar{M}_- p_{-\infty}^{-1}}{3\pi l^2} + O\left(l^{-4}\right) \\ &\quad \omega = \frac{4G\bar{J}p_{-\infty}^{-2}}{\pi l^4} + O\left(l^{-6}\right) \\ &l \to -\infty \\ &\quad a = a_{-\infty} - \frac{8G\bar{M}_- p_{-\infty}^{-1} e^{a_{-\infty}}}{3\pi l^2} + O\left(l^{-4}\right) \\ &\quad \omega = \omega_{-\infty} + \frac{4G\bar{J}p_{-\infty}^{-2} e^{2a_{-\infty}}}{\pi l^4} + O\left(l^{-6}\right) \end{aligned}$$

なお、ω の漸近展開形を (9) から解析的に求めると、$l \to \pm\infty$ で l^{-4} の係数は同じになるため、角運動量 $\bar{J}$ は $\bar{J}_+ = \bar{J}_- = \bar{J}$ とする。

2.4 パラメータと自由度

上記から $Q, c_1, c_2, c_\omega, a_{-\infty}, \bar{M}_+, \bar{M}_-, \bar{J}$ が微分方程式を解く上で必要なパラメータである。しかし、計量関数 $p(l)$ は (3) から空間計量のオーバーオール因子なので、$p(l)$ に定数倍がかかっても、時間のスケールを変えることと同じである。よって、(8) から c_1, c_2 の 2 つ自由度あったものが c_1/c_2 の 1 つの自由度のみでよくなる。よって $c_2 = 1$ と固定して、c_1 のみをパラメータとして扱う。また、ω の漸近展開形から $\bar{J} = \bar{J}(c_1, c_\omega)$ とすることができるので、$\bar{J}$ も独立したパラメータではない。

次に解くべき微分方程式を見ると、(10) と (11) の a, q についての 2 階微分方程式を最初に解くことで、(9) も解くことができる。しかし、1 階微分方程式の constraint があるので方程式の自由度は $2\times2-1=3$ である。

よってパラメータは $c_1, c_\omega, a_{-\infty}, Q, \bar{M}_+, \bar{M}_-$ の 6 個であるが、手で与えられるのは $6-3=3$ 個で残りの 3 つのパラメータは解くときに決まるものである。本研究では $(c_1, c_\omega, a_{-\infty})$ を手で与えるパラメータとし、$(Q, \bar{M}_+, \bar{M}_-)$ は解いたときに求められるパラメータとする。

2.5 先行研究と本研究の相違点

先行研究 [3] では、上記で説明した簡単のため $c_1 = 0$ として、非対称ワームホール解を構成するために $a_{-\infty}$ の値を変化させていた。しかし、c_1 を 0 にしないことで、計量関数 $p(l)$ は非対称になり、それに伴って非対称ワームホール解を構成することが可能であると考えた。本研究では c_1 の自由度を見るため、$a_{-\infty}$ を固定し、非対称ワームホールを構成する。

3 結果

上記をもとに数値的に微分方程式を解いた結果が以下の図である。$l \to \pm\infty$ の範囲をコンパクト化するため以下では

$$l = \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) \quad (-1 < x < 1) \tag{17}$$

と座標変換したものを扱う。

図 3 と図 4 から計量関数の非対称な解、つまり非対称ワームホールを構成することができた。また、c_1

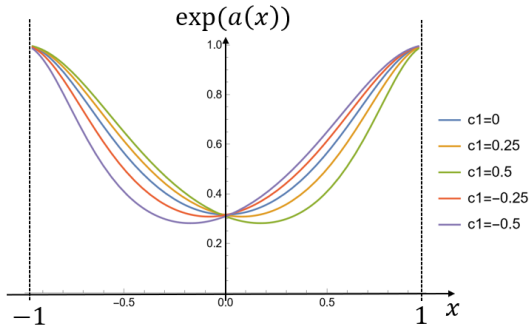


図 3: 計量関数 $a(x), q(x)$ と c_1 の依存性

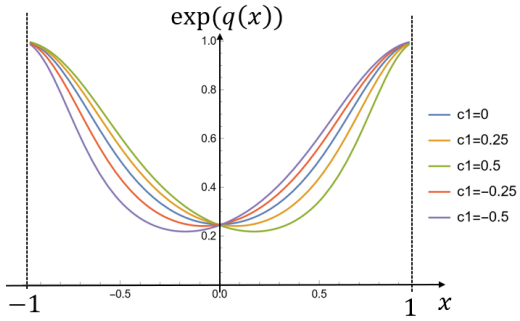


図 4: 計量関数 $q(x)$ と c_1 の依存性

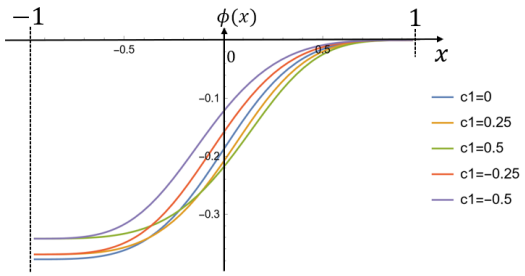


図 5: ファントムスカラー場 $\phi(x)$ と c_1 の依存性

を変化させると喉の位置が変化することがわかった。図 5 から c_1 を大きくするとスカラー場の絶対値が小さくなり、その必要性が軽減されることがわかった。また、c_1 の絶対値にもよらないことがわかった。

また、図 6 はエネルギー条件の破れを見たものである。ヌルベクトル k^μ として $\Xi = T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = -Q^2\frac{e^q}{p^2h^3}$ と表されたエネルギー密度を縦軸にしている。これを見ると c_1 を大きくするとエネルギー条件の破れが軽減されることがわかる。

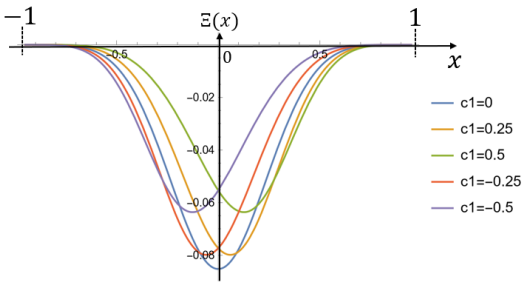


図 6: ファントムスカラー場 $\phi(x)$ と c_1 の依存性

4 結論

本研究では先行研究から c_1 というパラメータを加えたより一般的な解を構成し、c_1 がワームホールの非対称性に起因することがわかった。そして、c_1 の値を上げることで、エネルギー条件の破れが軽減された。しかし、c_1 の本質的な物理的な意味はわからず、それを突き止める必要がある。また、この自由度を用いて別のワームホールを構成することができるかもしれない。

Acknowledgement

私のこの研究をサポートしていただいた、共同研究者の皆様並びに研究室の皆様には感謝を申し上げます。

Reference

[1] M. S. Morris, & K. S. Thorne 1988, Am. J. Phys. 56, 395.

[2] P. E. Kashargin, & S. V. Sushkov 2008, Grav. Cosmol. 14, 80.

[3] V. Dzhunushaliev et al. 2013, Phys. Rev. D 88, 124028.

———index へ戻る

重宇 c05

確率格子シミュレーション

水口 由莉乃

確率格子シミュレーション

水口 由莉乃 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

インフレーションは、宇宙初期に指数関数的に空間膨張し、われわれの宇宙の種である初期ゆらぎを生成する機構である。この存在は Planck の観測からも支持されている一方、インフレーション機構の詳細な模型は未解明である。機構の解明には、ゆらぎの発展を追うことで解明が進むとされているが、非線形な成長をすると考えられているゆらぎには数値的手法が必要とされている。インフレーション中は、小さなゆらぎがほとんどとされているが、中には大きなゆらぎが生成する場合も考えられ、大きなゆらぎは、ダークマターの候補の 1 つとして注目されている原始ブラックホール (PBH) を生成するとされている。将来観測の点からも、LIGO-Virgo での観測や LISA や SKA といった誘導重力波の観測の期待が高まっている。しかしながら、その形成過程は特定の状況に対する解析的研究のみが進んでいることが問題視されている。[1]
そこで本発表では、非摂動論的手法である確率形式と格子シミュレーション組み合わせたコード (STOLAS: STOchastic LAttice Simulation) を用いて、PBH 形成に関する議論を行う。テストケースとして、chaotic inflation [2] と inflection [3] の 2 つの模型を取り上げ、今後の方向性について述べる。

1 Introduction

インフレーションは、「インフラトン (ϕ)」と呼ばれるスカラー場の量子ゆらぎ (初期ゆらぎ) を生成する機構で、その確率密度関数 (PDF:P_ζ) はガウス関数に近い形を取るとされている。そのため、一様な背景場 $\bar{g}_{\mu\nu}$ と小さなゆらぎ $\delta g_{\mu\nu}$ で記述されるような場合が大部分を占めていると考えられているが、中には大きなゆらぎ ($\bar{g}_{\mu\nu} \simeq \delta g_{\mu\nu}$) も考えられる。

このような大きなゆらぎは、曲率ゆらぎに変換された後、放射優勢期に過密度領域が重力崩壊して生成される「原始ブラックホール (PBH)」の種になるとされている。PBH はダークマターの候補として近年注目を集めており、観測面からも関心が高い一方、その形成に関する研究は、一部の場合に対して解析的研究が進められてきた。PBH の代表的先行研究としては、Press-Schechter 理論、Peak 理論が知られており、これらはさまざまな仮定のもと成立する理論である。例えば、ガウシアンな曲率ゆらぎ、単純な形成条件や質量の設定、ガウシアンな場合に知られているパワースペクトルなどである。[1] そこで本研究では、これらの仮定の妥当性や形成されるインフレーション模型について調査するため、インフレーション中に生成されるゆらぎの発展を、模型のみを初期条件とした数値シミュレーションを実装する。

2 確率形式と格子シミュレーション

2.1 確率形式

ゆらぎはホライズンを出ると古典化され、インフレーション中の情報が凍結して保存されると考えれているため、インフラトンの運動方程式を解くことで、機構の物理がわかるとされている。ここでは、運動方程式を導出するため、作用から出発する。

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\Big[-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)\Big] \tag{1}$$

ここで、$g^{\mu\nu}$ は FLRW 計量で ($g = \det g^{\mu\nu}$)

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

である。上記から、インフラトンの運動方程式は

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - a^{-2}\nabla^2\phi + V'(\phi) = 0 \tag{3}$$

と記述される。通常ゆらぎの発展を追う際には、$\bar{g}_{\mu\nu} \gg \delta g_{\mu\nu}$ を仮定する摂動論を用いるが、PBH 形成を考える本研究では近似が悪い。そこで、ゆらぎを古典化したモード (IR,super-horizon) と量子化されているモード (UV,sub-horizon) に分けて考えるこ

とで、大きなゆらぎに対しても良い近似が成り立つ形式 (確率形式 [4]) を導入する。確率形式における計量とインフラトンは以下のように記述される。

$$g_{\mu\nu} = g^{IR}_{\mu\nu} + g^{UV}_{\mu\nu} \tag{4}$$

$$\phi = \phi_{IR} + \hat{\phi}_{UV} (\hat{\phi}_{UV} \ll \phi_{IR}) \tag{5}$$

この形式は、ホライズンの外に出たスケールのみ (IR モード) に注目する、super-horizon における非線形なゆらぎに対する有効的場の理論となっている。したがって、局所的には FRLW が成立しており、確率形式を導入した場合のインフラトンの運動方程式をハミルトン形式でかくと、

$$\dot{\phi}_{IR} = \pi_{IR} + \xi_\phi \tag{6}$$

$$\dot{\pi}_{IR} = -3H\pi_{IR} - V'(\phi_{IR}) + \xi_\pi \tag{7}$$

となる。ここで、ξ は揺動項である。

2.2 揺動項の性質

本セクションでは、運動方程式に登場した揺動項について、詳しく見ていく。IR 場のインフラトンは、Fourie 空間で

$$\phi_{IR}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \phi_{\mathbf{k}}(t)(1 - \theta(k - \sigma a(t)H(t))) \tag{8}$$

と定義される。ここで、$\theta(k - \sigma a(t)H(t))$ は Heviside 階段関数で、$\sigma \ll 1$ を満たす。したがって、この式を (7),(8) に適用すると、揺動項は

$$\xi_\phi = \sigma a H^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \phi_{\mathbf{k}} \delta(k - \sigma a H) \tag{9}$$

$$\xi_\pi = \sigma a H^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \pi_{\mathbf{k}} \delta(k - \sigma a H) \tag{10}$$

である。

ここで、Bunch-Davies 真空を仮定すると、$\phi_{\mathbf{k}}$ がガウシアンであることから、$\langle\phi_{\mathbf{k}}\rangle = \langle\pi_{\mathbf{k}}\rangle = 0$ より、揺動項の期待値は $\langle\xi_\phi\rangle = \langle\xi_\pi\rangle = 0$ を満たさなければならない。したがって、揺動項はガウシアンであることが言える。ξ_ϕ の 2 点相関 (分散) を考えると、$(r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)$

$$\langle \xi_\phi(t, \mathbf{x}) \xi_\phi(t', \mathbf{x}') \rangle \simeq \frac{H^3}{(2\pi)^2} \frac{\sin(k_\sigma r)}{k_\sigma r} \delta(t - t') \tag{11}$$

となるので、ある等時刻スライスで見ると、$k_\sigma = \sigma a(t)H(t)$ となったモードが、IR 場に $H^3/(2\pi)^2$ の大きさで、sinc 関数に則ったノイズが追加されることが言える。したがって、$k_\sigma = \sigma a(t)H(t)$ ごとに ξ_ϕ が独立したガウシアンノイズとして扱える。なお、$\langle \xi_\pi(t, \mathbf{x}) \xi_\pi(t\prime, \mathbf{x}\prime) \rangle \simeq 0$ である。

2.3 格子シミュレーション

さらに、ここではシミュレーションで扱いやすくするため、インフラトンの運動方程式を無次元化し、確率形式と格子シミュレーションとの相性や実装されている中身について簡単に概要を説明する。

無次元化するために $dN = Hdt$ を用いると、

$$d\phi_{\mathbf{x}} = \frac{\pi_{\mathbf{x}}}{H(\phi_{\mathbf{x}}, \pi_{\mathbf{x}})} dN + \frac{H(\phi_{\mathbf{x}}, \pi_{\mathbf{x}})}{2\pi} dW_{\mathbf{x}} \tag{12}$$

$$d\pi_{\mathbf{x}} = -3\pi_{\mathbf{x}} dN - \frac{V\prime(\phi_{\mathbf{x}})}{H(\phi_{\mathbf{x}}, \pi_{\mathbf{x}})} dN \tag{13}$$

と表される。揺動項に注目すると、

$$\langle dW_{\mathbf{x}} dW_{\mathbf{x}'} \rangle = \frac{\sin(k_\sigma |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{k_\sigma |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \tag{14}$$

の関係がある。シミュレーションにおいて、このような相関をもったガウシアンノイズとして与えるため、

$$dW_{\mathbf{x}} = \left[\sum_i \frac{\sqrt{\Delta\Omega_i}}{2\sqrt{\pi}} [\cos(\mathbf{k}_\sigma \cdot \mathbf{x}) - \sin(\mathbf{k}_\sigma \cdot \mathbf{x})] dW_i \right] \tag{15}$$

として記述され、dW_i はガウス乱数としてノイズを与える。[5]

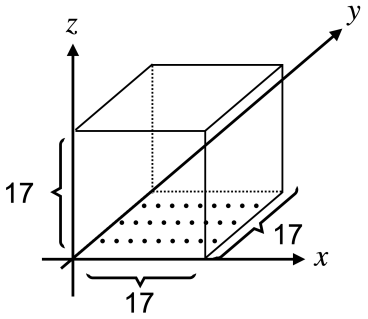


図 1: 立方格子のイメージ図

本研究で開発したコードでは、図 1 のような各格子間隔が 1 の立方格子を考え、各格子点において式 (13)(14) で記述される Langevin 方程式を解くことを想定しており、この立法格子が宇宙空間の一部を再現している。また、本シミュレーションでは共動座標を取り、膨張指数 N を forward 型 e-foldings で考

えるため、シミュレーション開始時 $N = 0.0$ で立方格子全体が sub-horizon となっている。そして終了時は、各格子点が全て super-horizon となるところで格子シミュレーションを止めることにする。

3 δN 形式

PBH 形成を考えるためには、各格子点でのインフレーション終了時の曲率ゆらぎの値が必要である。そのため、前セクションで格子シミュレーションを終了した際の N や $d\phi, d\pi$ の各格子点の値を保持し、インフレーション終了条件である $\epsilon = 1$(ϵ は slow-roll パラメータ) を満たすまで、ノイズがない場合のインフラトンの運動方程式を解く。これは、各格子点が super-horizon となったことで、各格子点で独立な発展し、さらなるノイズの寄与が少ないと考えるためである。[6] したがって、各格子点で格子シミュレーションの終了時の値を初期条件として、以下の運動方程式を解き各格子点での膨張指数を見積もる。

$$d\phi_{\mathbf{x}} = \frac{\pi_{\mathbf{x}}}{H(\phi_{\mathbf{x}}, \pi_{\mathbf{x}})} dN \tag{16}$$

$$d\pi_{\mathbf{x}} = -3\pi_{\mathbf{x}} dN - \frac{V'(\phi_{\mathbf{x}})}{H(\phi_{\mathbf{x}}, \pi_{\mathbf{x}})} dN \tag{17}$$

次に、インフレーション終了時の膨張指数を用いて、曲率ゆらぎを求める。以下のように、各格子点での平均膨張指数と各格子点の値との差がその点での曲率ゆらぎに値するという考え方があり、

$$\zeta_i = \mathcal{N}_i - \langle \mathcal{N} \rangle = \delta N_i \tag{18}$$

これを「δN 形式」という。この形式を用いることで、インフレーション終了時の各格子点の曲率ゆらぎの値を得ることができた。

4 Importance sampling

PBH 形成は、大きな曲率ゆらぎから生成されることは先に述べた。本研究のモチベーションとしては、これまでに示したシミュレーションを繰り返し (Direct sampling)、大規模サンプリングすることで、各モデルにおける曲率ゆらぎの PDF を得て、PBH 形成する模型やゆらぎの分布を見ようというものである。しかしながら、ゆらぎはこれまでの観測から、ほぼガウシアンに近い分布をしているため、大きなゆらぎは tail 部にあたり、Direct sampling では効率が良くない。そこで、本研究では、tail 部の確率を上げるためバイアスを手で入れて、後から重み付けすることで、効率よくサンプリングを行う。これを Importance sampling[7] という。実装した際には、滑らかなバイアスとなるよう $N = 3$ を中心としたガウシアンなバイアスを加えた。

5 Result

本研究では、chaotic inflation[2] と inflection[3] をテストケースとして用いた。各模型のポテンシャルは以下の通りである。ただし、どちらも初期条件は $\phi = 15.0, \pi = -0.1m^2$ とし、$N = 5.5$ を格子シミュレーション終了時刻とした。

- Chaotic inflation

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \tag{19}$$

  ただし、$m = 10^{-5}$(バイアス有の場合:10^{-2})。

- Inflection

$$V(\phi) = \frac{W_0^2}{\nu^3} \left[\frac{c_{\mathrm{up}}}{\sqrt[3]{\nu}} + \frac{a_{\mathrm{w}}}{e^{\frac{\phi}{\sqrt{3}}} - b_{\mathrm{w}}} - \frac{c_{\mathrm{w}}}{e^{\frac{\phi}{\sqrt{3}}}} + \frac{e^{\frac{2\phi}{\sqrt{3}}}}{\nu} \left(d_{\mathrm{w}} - \frac{g_{\mathrm{w}}}{r_{\mathrm{w}} e^{\sqrt{3}\phi}/\nu + 1} \right) \right] \tag{20}$$

表 1: 初期値

a_{w}	b_{w}	c_{w}	d_{w}	ν	W_0	c_{up}
0.02	1	0.04	0	1000	12.35	0.0382

g_{w}	r_{w}
$3.076278 \cdot 10^{-2}$	$7.0711067 \cdot 10^{-1}$

5.1 バイアスがない場合

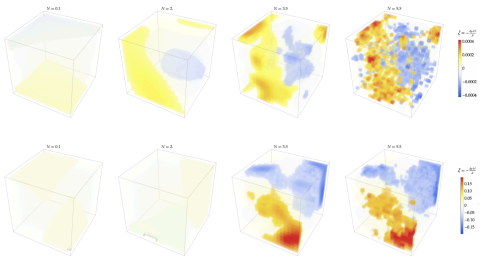


図 2: 左から $N = 0.1, 2, 3.5, 5.5$ のゆらぎの大きさを示す。上段が chaotic inflation, 下段が inflection。

chaotic inflation は典型的な模型で、大きなゆらぎを生成しないが、inflection は理論的に大きなゆらぎを生成するとされている。それぞれのモデルの最大値は、10^{-4} と 0.15 であった。時間発展でゆらぎが生成されていることがわかる。(図 2)

5.2 バイアスがある場合

ここでは、以下のようなバイアスを入れた方程式を解いた場合について、ゆらぎの 3D マップ (図 3) と曲率ゆらぎと原点からの距離依存性について示す。理論的には、chaotic inflation は sinc 関数に近い形を示すが、inflection の場合はずれることが知られている。

$$d\phi_{\mathbf{x}} = \frac{\pi_{\mathbf{x}}}{H(\phi_{\mathbf{x}}, \pi_{\mathbf{x}})} dN + \frac{H(\phi_{\mathbf{x}}, \pi_{\mathbf{x}})}{2\pi} (dW_{\mathbf{x}} + \mathcal{B}) \tag{21}$$

$$d\pi_{\mathbf{x}} = -3\pi_{\mathbf{x}} dN - \frac{V\prime(\phi_{\mathbf{x}})}{H(\phi_{\mathbf{x}}, \pi_{\mathbf{x}})} dN \tag{22}$$

$$\mathcal{B} = \tilde{b} \frac{1}{\Delta N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(N-N_b)^2}{2(\Delta N)^2}} \frac{\sin(k_\sigma |\mathbf{x}|)}{k_\sigma |\mathbf{x}|} dN \tag{23}$$

ただし、バイアスを入れる時刻を $N_b = 3.0$、その刻み幅を $\Delta N = 0.001$、その大きさ $\tilde{b}$ は chaotic inflation で 1.5、inflection で 3.0 とした。

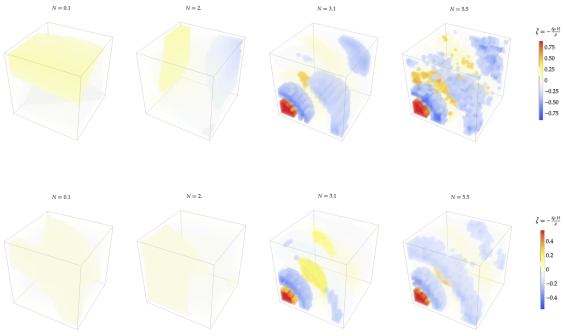


図 3: 左から $N = 0.1, 2, 3.1, 5.5$ のゆらぎの大きさを示す。上段が chaotic inflation, 下段が inflection の結果。$N = 3$ でバイアスを追加し、球殻状にゆらぎのゆらぎの過密度領域ができている。

さらに、各模型の曲率ゆらぎと原点からの距離依存性は、chaotic inflation の場合は、ほぼ sinc 関数に乗っているのに対し、inflection は少しずれることが理論的に考えられ、図 4 のような結果となる。

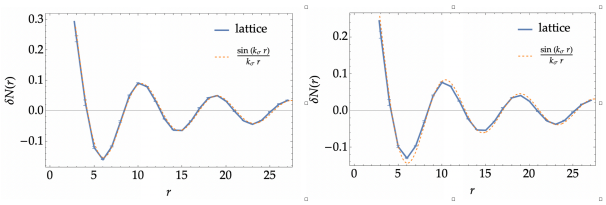


図 4: 左が chaotic inflation, 右が inflection の結果。青線が STOLAS の結果、オレンジ点線が理論値。

6 Discussion&Conclusion

本研究で開発したコード STOLAS は、曲率ゆらぎのプロファイルを得られた。これまでの実装から、5.2 で示したようにパラメータの値によっては、同じ模型でも曲率ゆらぎの値が変化することがわかった。今回は示していないが、PBH 形成条件の compaction function の計算を行ったところ、各模型で同じほぼ同じ大きさの曲率ゆらぎが得られたのに対して、ピークをとる閾値の値が異なることがわかった。これらは、模型に強く依存しており、曲率ゆらぎのプロファイルが重要であることを示している。

今後は、Importance sampling で大切な重み付けや compaction function の計算、さまざまなバイアスの取り方の検討を行い、大規模サンプリングを実装する。

Acknowledgement

共同研究者である多田祐一郎氏 (IAR)、村田知瞭氏 (立教大学) に感謝申し上げます。

Reference

[1] Naoya Kitajima et al, JCAP,2021

[2] A.D.Linde, 1983, Physics Letters B

[3] M. Biagetti et al, JCAP, 2018

[4] A. A. Starobinsky,Lect.Notes Phys., 1986

[5] D. S. Salopek and J. R. Bond,Phys. Rev. D, 1991

[6] Vennin, V., Starobinsky, A.A., Eur.Phys.J.C, 2015

[7] Jackson, Joseph H. P. et al, JCAP, 2022

———index へ戻る

重宇 c06

ブラックホール準固有振動における質量降着の影響

大橋 陸人

ブラックホール準固有振動における質量降着の影響

大橋 陸人 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

本発表では、現在私が研究している Schwarzschild ブラックホールに球対称かつ一定の質量降着がある場合の準固有振動について解説を行う。ただし、本研究は現在進行中であるため、背景となる物理の基礎知識や研究手法についてを重点的に解説する。

1 Introduction

一般相対性理論 (GR) は、様々な実験や観測によってその正確性が確かめられている重力理論であるが、初期宇宙のような量子論が本質的となる状況では破綻してしまうことが知られており、これを超える物理が必要とされている。そのため、今後さらなる精度の向上が見込まれる重力波の直接観測によって、GR を用いて予言される理論波形からのずれが見つかることが期待されている。

上記をふまえ、理論波形からのずれが確認された際に、それが GR では説明できないものであるかを確認するために、その他に考えられるずれの要因をあらかじめ考慮しておくことは有益である。本研究では特に、ブラックホール (BH) 連星合体の最終段階であるリングダウン段階において、質量降着があった場合にどのように波形が変化するかを検証する。

BH 連星が合体によって最終的に定常 BH を形成する場合、その直前の段階では、BH 背景時空における摂動を考えるブラックホール摂動論が有効となる。摂動の減衰振動の (複素) 振動数は合体後の BH の質量のみによって特徴付けられ、準固有振動 (quasinormal mode, QNM) と呼ばれる。QNM は合体過程における軌道などの影響を受けないため、GR の検証に適していると考えられる。

本発表では、第 2,3 章で Schwarzschild 背景における QNM の解説を行い、第 4 章で球対称降着が存在するときの背景の導出を行う。そして、第 5 章では数値計算で QNM 波形を出す際に必要な Double Null Formalism の解説を行う。

2 Schwarzschild ブラックホール摂動

Schwarzschild 背景時空 $g^{(b)}_{\mu\nu}$ 上の計量の摂動 $h_{\mu\nu}$ を考える。計量を

$$g_{\mu\nu} = g^{(b)}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{1}$$

とし、h の 1 次までで Einstein 方程式を求める。

2.1 テンソル球面調和関数

球面調和関数 $Y_lm(\theta,,\phi)$ は

$$\begin{aligned}(\partial_\theta^2 + \cot\theta\partial_\theta + 1/\sin^2\theta\partial_\phi^2)Y_{lm}(\theta,\phi)\\ = -l(l+1)Y_{lm}(\theta,\phi)\end{aligned} \tag{2}$$

を満たす $(\theta,,\phi)$ 上の関数であり、正規直交条件

$$\int d\Omega Y_{lm}(\theta,\phi)Y^*_{l'm'}(\theta,\phi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{3}$$

および完全性条件

$$\sum_{l,m} Y_{lm}(\theta,\phi)Y^*_{lm}(\theta',\phi') = \delta(\theta-\theta')\delta(\phi-\phi')/\sin\theta, \tag{4}$$

を満たす。同様に、テンソル球面調和関数 $t^{(i)}_{lm}(\theta,\phi)\quad(i=1,2,\ldots,10)$ を内積

$$\begin{aligned}\int d\Omega \delta^{\mu\alpha}_{(S)}\delta^{\nu\beta}_{(S)}(t^{(i)}_{lm})_{\mu\nu}(t^{(i)}_{lm})_{\alpha\beta},\\ \delta^{\mu\nu}_{(S)} := \mathrm{diag}\{1,1,1/r^2,1/(r^2\sin\theta)\}\end{aligned} \tag{5}$$

の意味で完全正規直交系となるように定義することができ (具体形は (中野寛之 & 佐合紀親 2022) を参照)、すなわち任意の対称テンソル $T_{\mu\nu}(t,r,\theta,\phi)$ を

$$T(t,r,\theta,\phi) = \sum_{i,l,m} T_{ilm}(t,r)t^{(i)}_{lm}(\theta,\phi) \tag{6}$$

と展開できる。 実は、Einstein テンソルにおいて異なる l, m は混ざり合わないことが確認できる。従って、各 l, m 成分ごとに分けて考えることができる。

2.2 パリティ

パリティ変換

$$P : (\theta, \phi) \to (\pi - \theta, \phi + \pi) \tag{7}$$

を考える。例えば、

$$PY_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^l Y_{lm}(\theta, \phi) \tag{8}$$

である。P の作用で $(-1)^l$ がでる場合を偶パリティ、$(-1)^{(l+1)}$ がでる場合を奇パリティと呼ぶ。$t^{(i)}_{lm}(\theta, \phi)$ の 10 成分のうち、7 成分が偶パリティ、3 成分が奇パリティである。実は、Einstein テンソルにおいて異なるパリティは混ざり合わないことが確認できる。

2.3 マスター方程式

計量の摂動 h をテンソル球面調和関数で展開し、Einstein 方程式を書き下し、まとめると、奇パリティについてのマスター方程式

$$\begin{aligned}[-\partial^2/(\partial t^2) + \partial^2/(\partial {r^*}^2) - V_l^{\rm odd}(r)]\psi_{lm}^{\rm odd}(t, r) \\ = S_{lm}^{\rm odd}(t, r), \\ r^* := r + 2M\ln(r/2M - 1)\end{aligned} \tag{9}$$

および偶パリティについてのマスター方程式

$$\begin{aligned}[-\partial^2/(\partial t^2) + \partial^2/(\partial {r^*}^2) - V_l^{\rm even}(r)]\psi_{lm}^{\rm even}(t, r) \\ = S_{lm}^{\rm even}(t, r)\end{aligned} \tag{10}$$

が得られる。ここで、$\psi_{lm}^{\rm odd/even}(t, r)$ はマスター変数と呼ばれ、h の各成分はこれらが求まれば自動的に求まる。また、$S_{lm}^{\rm odd/even}(t, r)$ は摂動源であり、エネルギーテンソル T の成分を用いて書ける。$V_l^{\rm odd/even}(r)$ はポテンシャル項と呼ばれる。

3 ブラックホール準固有振動

摂動源がない場合 $S_{lm}^{\rm odd/even}(t, r) = 0$ を考える。$r^* \to \pm\infty (r \to \infty, r \to 2M)$ において $V_l(r) \to 0$ であるため、方程式の形から $\psi_l(t, r) \sim e^{-i\omega(t \pm r^*)}$ のような解が考えられる。そこで、境界条件

$$\psi_l(t, r) \to \begin{cases} A_l^{\rm ref} e^{-i\omega(t - r^*)} & (r^* \to +\infty) \\ A_l^{\rm trans} e^{-i\omega(t + r^*)} & (r^* \to -\infty) \end{cases} \tag{11}$$

を課すと、$2M\omega$ が以下のように求まる (一部を示す)(E. W. Leaver 1985)。

	$l = 2$	$l = 3$
n	ω_n	ω_n
1	(0.747343, −0.177925)	(1.198887, −0.185406)
2	(0.693422, −0.547830)	(1.165288, −0.562596)
3	(0.602107, −0.956554)	(1.103370, −0.958186)
4	(0.503010, −1.410296)	(1.023924, −1.380674)
5	(0.415029, −1.893690)	(0.940348, −1.831299)

図 1: $2M\omega$ の計算結果の一部

4 球対称降着が存在するときの背景

論文 (E. Babichev et al. 2012) に基づき、Schwarzschild 時空に球対称かつ定常な降着がある場合の背景を摂動的に与える。Eddington-Finkelstein (EF) 座標 (V, r, θ, ϕ) は $dV = d\theta = d\phi = 0$ が Null 測地線となるような座標系である。一般の球対称線素は次のように書ける。

$$\begin{aligned}ds^2 = &-(1 - 2M(V, r)/r)e^{2\lambda(V,r)}dV^2 \\ &+2e^{\lambda}(V, r)dVdr + r^2 d\Omega^2\end{aligned} \tag{12}$$

Schwarzschild のときは、$M(V, r) = M_0, \lambda(V, r) = 0$ となる。$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}(r)$ として Einstein 方程式を解き、V を適当にとれば、

$$\begin{aligned}M(V, r) &= M_0 + AV + 4\pi \int_{r_0}^{r} {T_0}^0(r) r^2 dr \\ \lambda(r) &= -4\pi \int_{r_0}^{r} {T_1}^0(r) dr\end{aligned} \tag{13}$$

となる。ここで、$A := -4\pi {T_0}^1 r^2$ は定数である。

次に、完全流体のときの $T_{\mu\nu}$ を求める。降着は十分小さいとし、真空背景上を運動しているとみなす。$u := -dr/ds > 0$ を 4 元速度の r 成分の大きさとすると、

$$\begin{aligned}{T_0}^0 &= (\rho\sqrt{f_0 + u^2} - pu)/(\sqrt{f_0 + u^2} + u), \\ {T_1}^0 &= -(\rho + p)/(\sqrt{f_0 + u^2} + u)^2\end{aligned} \tag{14}$$

と求まる。ただし $f_0 := 1 - 2M_0/r$。ρ, p, u は状態方程式と $\nabla^{(0)}_\nu {T_\mu}^\nu = 0$ を解いて求める。

5 Double Null Formalism

背景が時間に依存するので、ψ を振動数で展開せず数値的に解くことを考える。本研究では double null formalism (Ehud Eilon & Amos Ori 2016) を用いることを考えている。 Double null 座標 (U, V, θ, ϕ) では、球対称線素は一般に次のように書ける。

$$ds^2 = -e^{\sigma(U,V)} dU dV + r(U,V)^2 d\Omega^2 \tag{15}$$

未知関数 r, σ をまとめて x と表すと、Einstein 方程式は

$$x_{,UV} = F(x, x_{,U}, x_{,V}) \tag{16}$$

のような形になることが知られている。double null formalism はこのような方程式を数値的に解く方法である。 初期条件として、ある $U = U_0, V \geq V_0$ および $U \geq U_0, V = V_0$ における x の値を指定する。従って、下図の $x|_1, x|_2, x|_3$ が既知のときに $x|_4$ を求める方法を考える。 まず、点 0 における種々の値

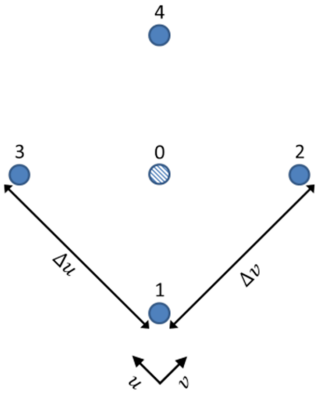


図 2: 格子点の配置

を 2 次精度で

$$x_{,UV}|_0 = (x|_4 - x|_3 - x|_2 + x|_1)/\Delta U \Delta V + O(\Delta^2) \tag{17}$$

$$\begin{aligned} x_{,U}|_0 &= (x|_3 - x|_1 + x|_4 - x|_2)/2\Delta U + O(\Delta^2), \\ x_{,V}|_0 &= (x|_2 - x|_1 + x|_4 - x|_3)/2\Delta V + O(\Delta^2) \end{aligned} \tag{18}$$

$$x|_0 \cong (x|_2 + x|_3)/2 + O(\Delta^2) \tag{19}$$

と書く。これらを (5) に代入することで、$x|_4$ の代数方程式が得られる。ただし、非線形代数方程式を避けるために、以下の 2 つの段階を踏む。

1. (7) の代わりに、1 次精度の

$$\begin{aligned} x_{,U}|_0 &= (x|_3 - x|_1)/\Delta U + O(\Delta), \\ x_{,V}|_0 &= (x|_2 - x|_1)/\Delta V + O(\Delta) \end{aligned} \tag{20}$$

を (5) に代入し、線形方程式を解く。このときの解を $\tilde{x}|_4$ (3 次精度) とする。

2. (7) の $x|_4$ を $\tilde{x}|_4$ に置き換えて (5) に代入し、線形方程式を解く。 $x|_4$ が 4 次精度で求まる。

Reference

中野寛之, & 佐合紀親 2022, 朝倉書店

E. W. Leaver 1985, Proc.Roy.Soc.Lond.A 402

E. Babichev, V. Dokuchaev, & Yu. Eroshenko 2012, Class. Quantum Grav. 29 115002

Ehud Eilon, & Amos Ori 2016, Phys. Rev. D 93, 024016

———index へ戻る

重宇 c07

HSC 3 年目と BOSS のデータを用いた一般相対性理論の検証

谷田 幸貴

HSC 3年目とBOSSのデータを用いた一般相対性理論の検証

谷田 幸貴 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

現在、重力を記述する理論としては、一般相対性理論が広く支持されている。実際に、一般相対性理論からの予言は太陽系スケール程度の観測においてはよく一致することがわかっている。その一方で、宇宙論的な大スケールにおいては、一般相対性理論で正しく重力を説明できるかは定かではない。特に、宇宙の加速膨張の発見により宇宙論スケールでの重力理論の修正に関する研究が盛んに行われており、一般相対性理論の代替となる修正重力モデルが多く提唱されている。

本研究では、Hyper Suprime-Cam 3年目 (HSC-Y3) のデータと Sloan Digital Sky Survey(SDSS) の銀河カタログに基づく、宇宙論的弱重力レンズ、銀河弱重力レンズ、銀河クラスタリングという3つの2点相関関数 (3×2pt) と Redshift-space distortion(RSD) を組み合わせて、重力理論を検証することを目指す。また、解析の際、我々は特定の重力理論を用いるのではなく、一般相対性理論を現象論的に変更する、より具体的には、非相対論的物質が感じる重力と相対論的物質が感じる重力を変更する理論モデル (μ-Σ パラメータ) を用いる。

本発表では、上記の 4 つの観測量に基づく擬似データの解析により、理論モデルの妥当性を確認する。

1 研究背景

1.1 ΛCDM モデルと S8 テンション

2000年代に入り、宇宙マイクロ波背景放射 (Cosmic Microwave Backgroud; CMB) やバリオン音響振動を含む、様々な宇宙論的観測量の精密測定によって、標準宇宙モデルとして「ΛCDM モデル」が確立し、これは宇宙膨張と構造形成の相互作用をよく説明する。特に、ΛCDM モデルは、Ia 型超新星の観測によって確認された宇宙の加速膨張を、未知のエネルギー (宇宙定数 Λ) が引き起こすとして説明する。

しかし、最近の精密観測によって、ΛCDM モデルの綻びが見え始めてきた。特に、ここ数年では、ΛCDM モデルのパラメータ $S_8(\equiv \sigma_8\sqrt{\Omega_m/0.3};\ \sigma_8$ は宇宙構造の凹凸具合、Ω_m は物質のエネルギー密度) に基づく検証が盛んに行われている。S_8 は、初期宇宙の観測量 CMB、後期宇宙の観測量、大規模構造 (Large-Scale Structure; LSS) によって測定される。すばる望遠鏡 Hyper Suprime-Cam(HSC) による、宇宙的情報を最大限取り出すとされる”3x2pt 解析”の最新結果 (Sugiyama et al. 2023) も含め、ΛCDM モデルが正しいと仮定すると、CMB の推定する S_8 の値に比べ、LSS の推定する S_8 の値が小さい傾向があることが指摘されている (S_8 テンション)。この事実は、ΛCDM モデルを超える新たな物理を示唆している可能性がある。

1.2 修正重力理論とその探査

一方で、宇宙論では、重力物理が近年注目を集めている。特に、宇宙論スケールにおいて一般相対性理論 (General Relativuty; GR) を修正することによって、ΛCDM モデルと異なり、未知の宇宙定数 Λ なしに、宇宙の加速膨張を説明できる可能性がある (修正重力理論)。現状、太陽系スケールのような小スケールにおいては、非常に高い精度で、重力が GR で正しく記述されることが確かめられている。しかし、宇宙論スケールにおいては、重力が GR に従うかを精度良く確かめられていない。

この検証を目指し、近年では LSS の観測量である、銀河クラスタリングと弱重力レンズに感度のある、μ(非相対論的物質の感じる重力)、Σ(光子の感じる重力) という2つのパラメータに対する制限が注目されている (Abbott et al. 2023)。膨張宇宙では μ, Σ は一般には時間進化し、一般の重力理論では $\mu \neq \Sigma$ となる。一方で、GR ではスケール・時間に依らず $\mu = \Sigma = 1$ が成立する (等価原理)。したがって、μ, Σ を導入することによって、銀河観測を介して、正

しい重力法則を見出せる可能性がある。

2　理論モデルと観測データ

まず、2.1 では、重力を検証するために必要な現象論的パラメータ μ, Σ を導入する。そして、2.2 と 2.3 では、それらのパラメータを制限・推定するために本研究で用いる宇宙論的観測量、3x2pt と赤方偏移空間歪み (Redshift Space Distortion) を導入する。

2.1　2 つの現象論的パラメータ μ, Σ

まず、背景時空として平坦なフリードマン・ルメートル・ロバートソン・ウォーカー (FLRW) 計量を仮定し、ニュートンゲージを採用すると、

$$ds^2 = -(1+2\Phi)dt^2 + a(t)^2(1-2\Psi)dx^i dx^j \delta_{ij}, \quad (1)$$

となり、$a(t)$ はスケール因子、Φ はニュートン・ポテンシャル、Ψ は空間曲率である。Φ と Ψ が微小な揺らぎとすれば、線形の揺らぎ方程式の解として Φ と Ψ が得られる。特に、準静的近似を仮定すると、Poisson 方程式と lensing 方程式が以下のように与えられる。

$$k^2\Phi = -4\pi G a^2 \bar{\rho}_m \delta_m \times \mu(k,\ z), \quad (2)$$

$$k^2(\Phi+\Psi) = -8\pi G a^2 \bar{\rho}_m \delta_m \times \Sigma(k,\ z). \quad (3)$$

ここで、μ, Σ はそれぞれ物質クラスタリング、弱重力レンズに対する重力定数 G からの変更を表す。

また本研究では、μ, Σ の具体的な関数形として、Dark Energy Survey 3 年目 (DES-Y3) の先行研究 (Abbott et al. 2023) と同じ、以下を採用する。

$$\mu(z) = 1 + \mu_0 \frac{\Omega_\Lambda(z)}{\Omega_{\Lambda 0}}, \quad (4)$$

$$\Sigma(z) = 1 + \Sigma_0 \frac{\Omega_\Lambda(z)}{\Omega_{\Lambda 0}}, \quad (5)$$

ここで、$\Omega_\Lambda(z)$ は、宇宙定数 Λ の密度パラメータであり、$\Omega_{\Lambda 0}$ はその現在値である。この仮定は、GR からのずれが宇宙膨張に関連しているはずであるという自然な考えに動機づけされている。また、この仮定では、宇宙初期において GR が復元され、重力理論が GR である場合は $\mu_0 = \Sigma_0 = 0$ に対応する。つまり、重力に感度がある宇宙論観測量を介して、μ_0, Σ_0 の値を推定・制限できれば、その仮定の中において、GR との整合性を検証することができる。

2.2　3 つの 2 点相関関数 (3x2pt)

本研究では、μ_0, Σ_0 を制限する上での、基準となる宇宙論的観測量として 3x2pt を用いる。3x2pt は、弱重力レンズと銀河クラスタリングによる、3 つの 2 点相関関数、すなわち宇宙論的弱重力レンズ (銀河像の歪みの自己相関)、銀河弱重力レンズ効果 (銀河と弱重力レンズの歪みの相互相関関数)、銀河銀河クラスタリング (銀河の自己相関関数) で構成され、ΛCDM 解析において構造成長を最大限探査できることが知られている。μ, Σ を導入した場合の、これらの式は、線形銀河バイアスが成り立つスケールにて以下のように表される。

$$\xi_\pm^{\alpha\beta}(\theta) = \int \frac{ldl}{2\pi} J_{0,4}(l\theta) P_\kappa^{\alpha\beta}(l,\ \mu) \times \Sigma^2, \quad (6)$$

$$\Delta\Sigma(R; z_l) = \bar{\rho}_0 \int \frac{kdk}{2\pi} J_2(kR) b P_{mm}(k, z,\ \mu), \quad (7)$$

$$w_p(R, z_l) = \int_0^\infty \frac{kdk}{2\pi} J_0(kR) b^2 P_{mm}(k, z,\ \mu) \times \Sigma, \quad (8)$$

ここで、b は線形バイアス、$J_0(x)$、$J_2(x)$、$J_4(x)$ は 0 次、2 次、4 次のベッセル関数である。ΛCDM 解析における 3x2pt は、$\mu = \Sigma = 1$ の場合に相当する。

本研究で扱うデータとしては、すばる望遠鏡 Hyper Suprime-Cam 3 年目 (HSC-Y3) の 3x2pt 解析 (Sugiyama et al. 2023) と同様のもの、つまり HSC-Y3 の銀河像カタログと、Sloan Digital Sky Survey(SDSS) DR11 の銀河カタログを用いる。

2.3　赤方偏移空間歪み

上の表式より、3x2pt は、μ_0, Σ_0 にも一定感度があることがわかるが、その一方で、DES-Y3 において、3x2pt のみによる解析では、μ_0 を、強く制限できないことが確認されている。この点を鑑み、本研究では、非相対論的物質に対する重力のみに依存する $f\sigma_8$ を組み合わせることによって、非相対論的物質に対する重力と光子に対する重力を独立に検証することを目指す。$f\sigma_8$ は、「銀河の 3 次元分布が、重力の影響によって銀河それぞれが持つ特異速度により、実際の分布とは異なって観測される現象」、赤方偏移空間歪み (Redshift Space Distortion; RSD) の

観測により決まるパラメータであり、理論的には

$$f(z;\mu) \equiv \frac{\mathrm{dln}(D_+(z(a);\mu))}{\mathrm{dln}a} = -\frac{1+z}{D_+(z;\mu)}\frac{\mathrm{d}D_+}{\mathrm{d}z}, \tag{9}$$

$$\sigma_8^2(z;\mu) \equiv \int_0^\infty \frac{k^2\mathrm{d}k}{2\pi^2} W^2(k\times 8[Mpc/h]) P_{mm}(k,z;\mu), \tag{10}$$

によって求められる。ここで、線形成長因子 $D_+(z;\mu)$ はマターパワースペクトル $P_{mm}(k,z;\mu)$ を用いて

$$D_+(z;\mu) = \sqrt{\frac{P_{mm}(k,z;\mu)}{P_{mm}(k,z=6.0;\mu)}}, \tag{11}$$

により求められる。

データとしては、本研究では、SDSS Baryon Oscillation Spectroscopic Survey(BOSS) にて測定された赤方偏移空間歪みから得られた $f\sigma_8(z)$ のデータ [Main Galaxy Sample(Howlett et al. 2014); BOSS Galaxy(Alam et al. 2017); eBOSS LRG(Bautista et al. 2021),(GilMar'in et al. 2020); eBOSS ELG(Tamone et al. 2020)(Mattia et al. 2021)] を用いる。それぞれのサンプル銀河の赤方偏移と、測定された $f\sigma_8(z)$ の平均値および標準偏差は表 1 の通りである。

	Main Galaxy Sample	BOSS Galaxy	BOSS Galaxy	eBOSS LRD	eBOSS ELG
z	0.15	0.38	0.51	0.7	0.85
$f\sigma_8(z)$	0.53	0.500	0.455	0.448	0.315
$\sigma[f\sigma_8(z)]$	0.16	0.045	0.038	0.041	0.095

表 1: 各サンプル銀河の赤方偏移と、測定された $f\sigma_8(z)$ の平均値及び標準偏差

3 マルコフ連鎖モンテカルロ法によるパラメータフィッティング

3.1 MCMC

本研究では、マルコフ連鎖モンテカルロ法 (Markov Chain Monte Carlo; MCMC) により、観測データにベストフィットするパラメータを推定し、その値の誤差を制限する。この計算には、Python パッケージ emcee(Foreman-Mackey et al. 2012) を用いる。MCMC では、ベイズの定理に基づき、観測データ D が得られた場合のパラメータの値の組が Θ となる確率を表す事後確率分布 $P(\boldsymbol{\Theta}|D)$ が

$$P(\boldsymbol{\Theta}|D) = \frac{L(D|\Theta)P_{prior}(\boldsymbol{\Theta})}{\int L(D|\Theta)P_{prior}(\boldsymbol{\Theta})\mathrm{d}\boldsymbol{\Theta}}, \tag{12}$$

で与えられると仮定しており、$P(\boldsymbol{\Theta}|D)$ が最大となる領域周辺のパラメータほど、多くサンプリングされる。ここで、$L(D|\Theta)$ は、パラメータ Θ が与えられた時に観測データ D が実現する確率、尤度関数であり、$P_{prior}(\boldsymbol{\Theta})$ は与えられた Θ が実現する確率を表す事前確率分布である。本研究では、尤度関数を以下の形で与える。

$$\mathrm{ln}L(D|\boldsymbol{\Theta}) \equiv \mathrm{ln}L_{3\times 2pt}(D|\boldsymbol{\Theta}) + \mathrm{ln}L_{RSD}(D|\boldsymbol{\Theta}), \tag{13}$$

$$L_{3\times 2pt}(D|\Theta) \equiv -\frac{1}{2}(\boldsymbol{d}_{model}(\boldsymbol{\Theta}) - \boldsymbol{d}_{data})\boldsymbol{C}^{-1} (\boldsymbol{d}_{model}(\boldsymbol{\Theta}) - \boldsymbol{d}_{data}), \tag{14}$$

$$L_{RSD}(f\sigma_{8;data}(z_n), (\sigma[f\sigma_{8;data}]|\Theta) \equiv -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{5}(d_{model}\frac{(f\sigma_{8;data}(z_n;\boldsymbol{\Theta}) - f\sigma_{8;data}(z_n))^2}{\sigma[f\sigma_{8;data}]}, \tag{15}$$

ここで、$\boldsymbol{d}$ は 3x2pt のデータベクトルの組み合わせ、$\boldsymbol{C}$ は共分散行列を表す。

3.2 擬似データを用いたパラメータ推定

制限の強さを確認し、理論モデルの妥当性を検証するために、本研究で用いる全ての観測量に対応する擬似データを作成し、これを解析する。擬似データは、コード CosmoLike(Elisabeth Krause and Tim Eifler et al. 2012) によって数値的に得られる、物質パワースペクトル $P_{mm}(k,z;\mu)$ を用いて、2.2 と 2.3 の理論モデル (6)-(11) より与える。ここで、3x2pt の共分散行列は、HSC-Y3 の擬似データ解析と同様のものを用いる。

4 結果

以下、GR($\mu_0 = \Sigma_0 = 0$) を仮定して作成した擬似データの解析結果について、3x2pt のみの解析と、3x2pt と RSD の同時解析の結果を扱う。

4.1 3x2pt のみによる擬似データ解析

図 2 は、3x2pt 解析の結果である。左図は b を固定した場合、右図は b を固定しない場合である。どちらも $\mu_0 = \Sigma_0 = 0$ とは 1σ 内で一致している。その一方で、右図は、左図と異なり、μ_0 については全く制限できていない。

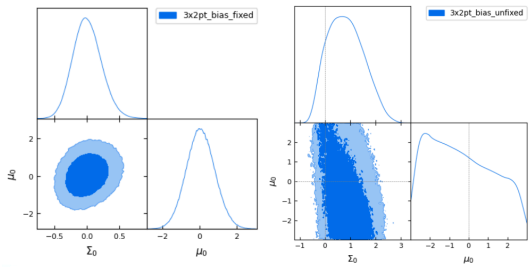


図 2: 3x2pt 解析による μ_0, Σ_0 への制限の様子 (左図:b を固定している/右図:b を固定していない)

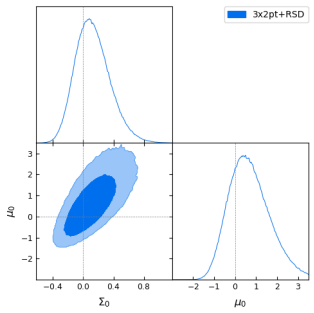


図 3: 3x2pt+RSD の同時解析による μ_0, Σ_0 への制限の様子 (b は固定していない)

4.2 3x2pt と RSD の擬似データ同時解析

一方で、RSD を組み合わせた同時解析の結果は、図 3 のようになった。μ_0 の値が負の部分は強く制限ができ、これも 1σ 内で $\mu_0 = \Sigma_0 = 0$ と一致している。推定値の範囲は以下のようになった。

$$\Sigma_0 = 0.13^{+0.18}_{-0.26}, \tag{16}$$

$$\mu_0 = 0.72^{+0.74}_{-1.2}, \tag{17}$$

5 考察

まず、4.1 の結果について議論する。3x2pt の解析において、b の固定の是非によって、制限の可否が変化するのは、3x2pt 解析の特徴による。3x2pt は、ΛCDM 解析において、b とその他の宇宙論パラメータとの縮退を解く、銀河弱重力レンズ効果と銀河-銀河クラスタリングの同時解析 (2x2pt) を包含するという強みがある。一方で、μ, Σ を含む本解析では、b を含む宇宙論パラメータと、新たなパラメータ μ_0, Σ_0 が縮退するため、b を固定しないとき、μ_0, Σ_0 が制限できない結果になった。この傾向は、DES-Y3 解析においても確認されている。

次に、4.2 における、3x2pt と RSD の同時解析が、特に μ_0 の負の値について、3x2pt のみの解析より強い制限に繋がるという結果も、DES-Y3 解析における、3x2pt と他の低赤方偏移観測量の同時解析による結果の傾向と一致し、結果の妥当性を示唆している。

6 結論

本解析を通じて、本手法の妥当性が確認できた。さらに、DES-Y3 の実データの解析結果と比較することによって、推定の傾向においても、推定結果の妥当性が確認できた。今後は、理論面と観測面両方による、系統誤差を考慮した解析を行う。

Reference

Sugiyama et al.(2023), arXiv:2304.00705

Abbott et al.(2023), Phys. Rev. D 107, 083504

Howlett et al.(2000),The Astronomical Journal, Vol.120

Alam et al.(2017), Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. 470,p. 2617, 9 2017.

Bautista et al.(2021), MNRAS, Vol. 500, No. 1

GilMar'in et al.(2020), MNRAS, Vol. 498, No. 2

Tamone et al.(2020), MNRAS, Vol. 499, No. 4

Mattia et al.(2021), MNRAS, Vol. 501, No. 4

Foreman-Mackey et al.(2012),Publications of the Astronomical Society of the Pacific, Vol. 125

Krause and Eifler(2012), Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. 470

———index へ戻る

重宇c08

Creation of Fluctuations during Inflation and δ N Fomula

中野 貴臣

未提出

———index へ戻る

重宇 c09

正則ブラックホールと情報損失問題

末藤 健介

正則ブラックホールと情報損失問題

末藤　健介 (大阪公立大学大学院 理学研究科)

Abstract

現在理論物理学が抱えている深刻な問題のひとつに情報損失問題がある．これは量子論とブラックホールの融合ができていないことに起因する問題であり，情報損失問題解決に向けて日夜多くの研究が行われている．今回ここではその解決策の一つとして考えれている特異点のないブラックホールについて紹介する．

1　Introduction

Hwking はブラックホール (BH) 時空上で量子場を考えることで，BH 近傍から Planck 分布に従う粒子生成が行われること，つまり BH は温度を持つことを示した．これにより BH はエネルギーを失っていき，最終的に蒸発しきると考えられた．しかし，Schwarzschild BH や Kerr BH といった既知の BH が蒸発しきると，これらの持つ特異点の影響により時空から BH に関する情報が失われユニタリティーが破れ量子論を展開できなくなる (幾何学的に解釈するとこれは時空が Globally hyperbolic でないということである)(図 1)．これが情報損失問題である．

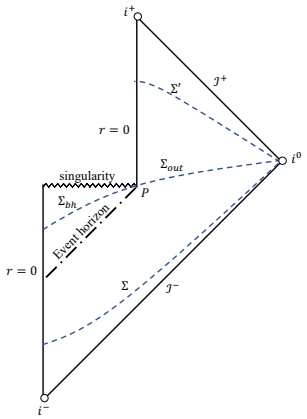


図 1: 蒸発する Schwarzschild BH の Penrose diagram

情報損失問題を解決するアプローチとして，曲率特異点を持たない BH(正則 BH) を用いる手法がある．Einstein 方程式の解として予言される BH の多くは曲率特異点を持つ．しかし量子重力理論ではこのような発散は生じず正則 BH が解になると考えられる．また，情報損失問題を克服した重力と量子論の統合理論が量子重力理論であるので，正則 BH では情報損失問題が生じないと考えられ，多くの研究が行われている．

2　球対称時空における正則 BH となる条件

ここでは球対称時空において，曲率特異点が生じないための条件について述べる (Frolov 2016)．一般の球対称時空

$$ds^2 = -F(r)A^2(r)dv^2 + 2A(r)dvdr + r^2d\Omega^2 \quad (1)$$

を考える．この時空において曲率を計算すると Ricci スカラーと Weyl テンソルの 2 乗は

$$\begin{cases} R &= F'' + \frac{4}{r}F' - 2\frac{F-1}{r^2} + \frac{1}{A}\left(2FA'' + 3F'A' + \frac{4}{r}FA'\right) \\ C &= C_{\alpha\beta\gamma\delta}C^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(F'' - \frac{2}{r}F' + 2\frac{F-1}{r^2} + \frac{1}{A}\left(2FA'' + 3F'A' - \frac{2}{r}FA'\right)\right) \end{cases} \quad (2)$$

と計算できる．これより $r=0$ において発散の可能性があることがわかり，

$$\begin{cases} F &= 1 \pm \frac{r^2}{l^2} \\ A &= A_0 + A_2r^2 \end{cases} \quad (3)$$

で展開されるとき，特異点が解消される．特に Schwarzschild BH や Reissner-Nordström BH では $A(r)=1$ であるので，この場合時空中心が de Sitter, Anti de Sitter 時空の様に振る舞えれば特異点が解消されるということがわかる．

3 球対称正則 BH のモデルとその蒸発

球対称時空において正則 BH が満足する条件が明らかになったので，ここでは具体的なモデルについて考えよう．Schwarzschild BH を例に考えると

$$F(r) \sim \begin{cases} 1 \pm \frac{r^2}{l^2} & (r \sim 0) \\ 1 - \frac{2M}{r} & (\text{遠方}) \end{cases} \tag{4}$$

を満足する $F(r)$ を考えればよい．ここで，$F(r)$ が r についての多項式関数 $P(r), Q(r)$ を用いて $F(r) = \frac{P(r)}{Q(r)}$ と表現できる場合のみを考える．(4) を満たしこの多項式の冪が最も小さくなる関数 $F(r)$ は

$$F = 1 - \frac{2ml^2}{r^3 + 2ml^2} \tag{5}$$

である．これを Hayward BH という．parameter l の意味を考えよう．Hayward BH の Kretschmann スカラーは $r = 0$ で

$$K = \frac{24}{l^4} \tag{6}$$

と評価できる．parameter l が導入されたことでこの値が有限になることができたが，Schwarzschild BH ではこの値は発散していたのでこの値はとても大きい，つまり l は非常に小さいことが物理的に要求される．このような長さの次元を持つ parameter としては Planck 長が候補に挙げられる．つまり Hayward BH は量子効果を取り込んだことにより曲率が発散せず Planck scale で表現できたことになる．

この時空の質量 m が Hawking radiation により変化する状況を考える (Frolov 2016),(Hayward 2006)．つまり (5) の質量 m を advanced time v に依存した $m(v)$ の形にした時空を取り扱う．時空の設定として ingoing null が降り積もり BH の質量が増加し，その後蒸発により BH の質量が減っていくプロセスを考える．この様子を Penrose diagram で評価すると時空構造は Minkowski 時空と同相になる．つまり蒸発において Globally hyperbolicity が保たれ情報損失問題が生じない時空構造になっていることがわかる．

4 Discussion

以上のように正則 BH が蒸発しきるモデルでは時空構造が Globally hyperbolic になり情報損失問題が生じなくなる．ポスターセッションでは Reissner-Nordström BH の特異点を解消し，蒸発させたモデルや蒸発可能性についても紹介する予定である．

Reference

V. P. Frolov, Notes on Non-Singular Models of Black Holes, Phys. Rev. D 94, 104056 (2016).

S. A. Hayward, Formation and Evaporation of Nonsingular Black Holes, Phys. Rev. Lett. 96, 031103 (2006).

著者 D, 著者 E, & 著者 F 2015, 発行元 3

———index へ戻る

重宇 c10

次世代の銀河サーベイに向けた新しい銀河クラスタリング解析手法の確立

野瀬 観見

次世代の銀河サーベイに向けた新しい銀河クラスタリング解析手法の確立

野瀬　観見 (東京大学大学院理学系研究科)

Abstract

ダークエネルギー (Λ) と冷たいダークマター (CDM) を主な構成要素とする標準宇宙 (ΛCDM) モデルは、わずか 6 つのパラメタを指定するだけで現在までの宇宙の各構成要素の密度の揺らぎの時間進化を記述できる理論モデルである。 ΛCDM は宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) などの観測結果を非常によく再現している。しかし、CMB から推定されるパラメタと宇宙後期の物質密度揺らぎから推定されるパラメタが違う可能性が指摘されており、新しい物理の兆候として期待されている。より良い精度をもつ後期宇宙の物質密度揺らぎの解析手法の開発が求められている。

宇宙後期の物質密度揺らぎからパラメタ推定する手法の一つとして、銀河分布の統計量を理論予測し、それを観測結果と比較する銀河クラスタリング解析がある。これは、二点相関関数やそれをフーリエ変換した統計量であるパワースペクトルが赤方偏移空間で持つ、視線方向に対する角度依存性が ΛCDM パラメタに依存することを利用する手法である。近年の広天域化した銀河サーベイでは銀河への視線方向は全データで平行とはみなせないが、(Scoccimarro 2015) はそのような状況下での非等方パワースペクトルの推定式を導出し、広天域銀河データからの統計量の FFT(高速フーリエ変換) を用いた低コストな測定を可能にした。

本稿では観測データの解析手法に焦点を当てた (Scoccimarro 2015) のレビューを、ポスター発表の際よりも詳細に行う。最後に、銀河の選択効果を取り入れ理論モデルを改良することに焦点を当てた自身の研究について紹介する。

1 Introduction

現代宇宙論の標準的な理論模型は CDM モデルと呼ばれ、最低 6 つのパラメタを指定するだけで、宇宙の構成要素の時間発展を記述できる。この模型は宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) の温度非等方性を精度良く説明する。しかし、現在の宇宙の構造の成長度を表すパラメタの推定値が、CMB の温度非等方性の観測と後期宇宙の物質密度揺らぎの観測との間で異なる可能性が指摘されている。これはダークマター、ダークエネルギーの性質によるものかもしれず、宇宙論パラメタのさらに精度良い測定が宇宙論の課題の一つである。

宇宙論パラメタの推定法の一つに、銀河クラスタリングというものがある。これは、銀河分布の赤方偏移空間での統計量について、理論と観測を比較する方法である。銀河までの距離は赤方偏移 z で与えられるが、銀河は物質の密度が高い方へ特異速度を持つため、ドップラー効果でこの距離が視線方向にずれてしまう (図 1)。このため統計量も視線方向に歪むことになり、この歪み方が宇宙論パラメタに依存している。

実際に銀河クラスタリングでよく使用される統計量は 2 点相関関数 $\xi(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) = \langle \delta_g(\mathbf{x}_1)\delta_g(\mathbf{x}_2)\rangle$ をフーリエ変換したパワースペクトル $P_g(\mathbf{k})$

$(\langle \delta_g(\mathbf{k_1})\delta_g(\mathbf{k_2})\rangle = (2\pi)^3\delta_D(\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2})P_g(\mathbf{k_1}))$

である。赤方偏移空間では、$\mathbf{k}$ と視線方向の角度によって $P_g(\mathbf{k})$ が変化する。

また、銀河クラスタリングの理論モデルは、銀河までの視線方向が全て平行だと仮定した時に、$P_g(\mathbf{k})$ の非等方性を与えるものである (図 2)。

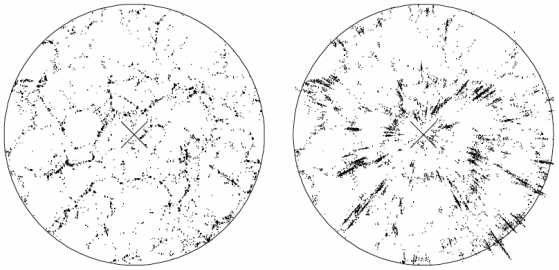


図 1: 実空間と赤方偏移空間でのダークマター密度のピークの分布の比較。ダークマターの分布は N 体シミュレーションで求められた。(Taruya et al. 2001) より抜粋。

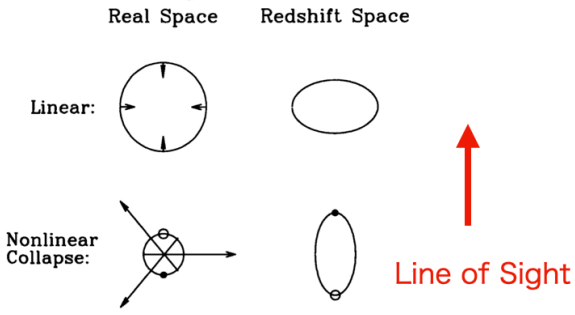


図 2: RSD による銀河密度の歪み。

2 Methods

まずは研究 (Scoccimarro 2015) をレビューする。サーベイ領域の広天域化にともなって、観測データ中の各銀河までの視線方向は全て平行だとは見なせなくなった (図 3)。そこで (Scoccimarro 2015) は、

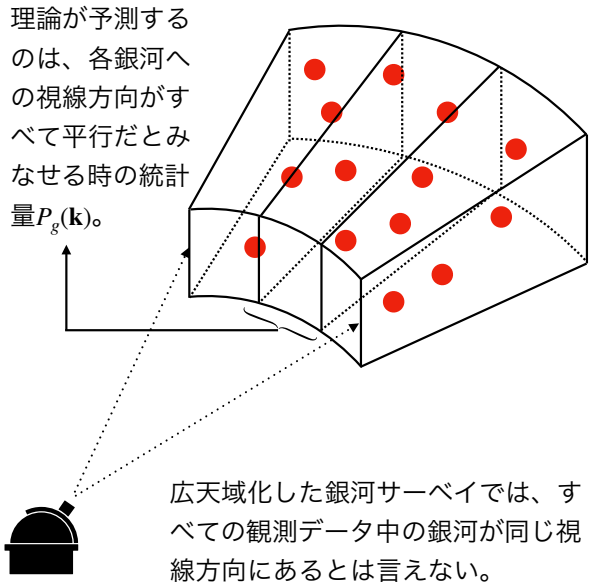


図 3: 銀河サーベイの広天域化に伴って発生した問題点。

広天域化した観測データから、理論モデルと比較できるパワースペクトル $P_g(\mathbf{k})$ とその非等方性をどのように推定するかについて議論した。

最初に、(Scoccimarro 2015) はそれが次のように与えられることを示した (Natural Estimator)。

$$\hat{P}_l(k) = (2l+1)\int \frac{d\Omega_k}{4\pi}\int \frac{d^3x_1}{(2\pi)^3}\frac{d^3x_2}{(2\pi)^3}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}}\mathcal{L}_l(\hat{k}\cdot\hat{x}) \times \delta_s(\mathbf{x_1})\delta_s(\mathbf{x_2}) \quad (\mathbf{y}=\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2},\ \mathbf{x}=\frac{1}{2}(\mathbf{x_1}+\mathbf{x_2})) \tag{1}$$

この (1) 式の導出を行う。まず次のようなパワースペクトル密度 (素片) の推定量を定義する。

$$\hat{P}_{local}(\mathbf{k},\mathbf{x}) \equiv \int \frac{d^3y}{(2\pi)^3}\delta_s(\mathbf{x}+\mathbf{w}_1)\delta_s(\mathbf{x}+\mathbf{w}_2)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \quad (\mathbf{w}_1=\mathbf{y}/2,\ \mathbf{w}_2=-\mathbf{y}/2) \tag{2}$$

これはフーリエ変換を行うことで別の表式に変形できる。

$$\hat{P}_{local}(\mathbf{k},\mathbf{x}) \equiv \int d^3q\delta_s(\mathbf{k}+\mathbf{q}/2)\delta_s(\mathbf{k}-\mathbf{q}/2)e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \tag{3}$$

これが正しくパワースペクトル密度の推定量となっていることは次のようにして確かめられる。

$$\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3}\hat{P}_{local}(\mathbf{k},\mathbf{x}) = |\delta_s(\mathbf{k})|^2 \tag{4}$$

右辺の期待値は確かにパワースペクトルである (ここで、これまで式の中に現れた $\delta_s(\mathbf{x})$ は無次元ではなく、無次元の揺らぎが観測領域の体積の平方根 $\sqrt{V}$ で割られたものであることに注意せよ。$(2\pi)^3\delta_D(0)=V$)。

これにルジャンドル多項式をかけたものを観測領域の空間全体で積分し、次の式を得る。

$$\hat{P}_l(k) = (2l+1)\int \frac{d\Omega_k}{4\pi}\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3}\hat{P}_{local}(\mathbf{k},\mathbf{x})\mathcal{L}_l(\hat{k}\cdot\hat{x}) \tag{5}$$

k の立体角積分は半径 k の球面を中心とする幅 δk の球殻中での平均を意味する。つまり、

$$\int \frac{d\Omega_k}{4\pi}F(\mathbf{k}) \equiv \int_k \frac{d^3q}{N_k}F(q) \qquad N_k \equiv \int_k d^3q = 4\pi k^2\delta k. \tag{6}$$

(5) 式の積分変数を適切に変数変換すれば、(1) 式が得られる。

しかし、(1) 式のままでは二つの空間積分が分離せず、この 2 重空間積分の合計 grid 数を N とすると、計算量が N^2 となってコストが高い。そこで (Scoccimarro 2015) は $\mathcal{L}_l(\hat{k}\cdot\hat{x}) \to \mathcal{L}_l(\hat{k}\cdot\hat{x}_1)$ という近似

を行い、次のような形に分離した。

$$\hat{P}_l(k) = (2l+1)\int \frac{d\Omega_k}{4\pi}\delta_l(\mathbf{k})\delta_0(-\mathbf{k}),$$
$$\delta_l(\mathbf{k}) \equiv \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\delta_s(\mathbf{x})\mathcal{L}_l(\hat{k}\cdot\hat{x}) \tag{7}$$

これは (5) 式の被積分関数である $\hat{P}_{local}(\mathbf{k},\mathbf{x})\mathcal{L}_l(\hat{k}\cdot\hat{x})$ は $\hat{P}_{local}(\mathbf{k},\mathbf{x})\mathcal{L}_l(\hat{k}\cdot\hat{x}_1)$ にほぼ等しいと考える近似である (local plane parallel approximation, 図 4)。パ

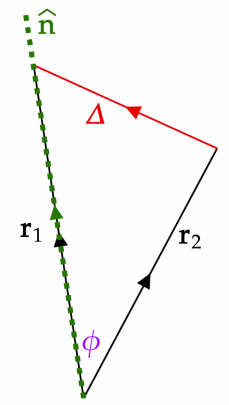


図 4: Local plane parallel approximation の概念図。パワースペクトル素片中では視線方向が一定だと考え、視線方向を中点から端点へ移す近似。

ワースペクトル素片を考える小さな領域では、視線方向が全て並行であると考えるのである。これにより、次のような単純な FFT のみで非等方性を計算できるようになった。

$$\delta_2(\mathbf{k}) = \frac{3}{2}\hat{k}_i\hat{k}_j Q_{ij}(\mathbf{k}) - \frac{1}{2}\delta_0(\mathbf{k}),$$
$$Q_{ij} \equiv \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\delta_s(\mathbf{x})\hat{x}_i\hat{x}_j,$$
$$\delta_4(\mathbf{k}) = \frac{35}{8}\hat{k}_i\hat{k}_j\hat{k}_l\hat{k}_k Q_{ijlk}(\mathbf{k}) - \frac{5}{2}\delta_2(\mathbf{k}) - \frac{7}{8}\delta_0(\mathbf{k}),$$
$$Q_{ijlk} \equiv \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\delta_s(\mathbf{x})\hat{x}_i\hat{x}_j\hat{x}_l\hat{x}_k. \tag{8}$$

$\delta_0(\mathbf{k})$ で 1 回の FFT が、$\delta_2(\mathbf{k})$ で 6 回の FFT、$\delta_4(\mathbf{k})$ では新たに 15 回の FFT が必要となる。つまり合計 22 回の FFT で $\hat{P}_4$ まで計算することができる。(1) 式の 2 重空間積分の合計 grid 数を N とすると、計算量は N^2 から $N\log N$ に落ちたことになる。

最後に、実際の銀河のデータからどのようにして $\delta_s(\mathbf{x})$ を作るのかを簡単に紹介する。

$$\delta_s(\mathbf{x}) \to \frac{w(\mathbf{x})[n_g(\mathbf{x}) - \alpha n_r(\mathbf{x})]}{(I_{22})^{\frac{1}{2}}}$$
$$I_{22} \equiv \alpha\sum_{j=1}^{N_r}\bar{n}(\mathbf{x}_j)w^2(\mathbf{x}_j) \tag{9}$$

を代入すれば良い。$n_g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_g}\delta_D(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)$ は観測された銀河の数密度、$n_r(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_r}\delta_D(\mathbf{x}-\mathbf{x}_j)$ は観測的な効果 (遠くの銀河ほど見えにくい、など) を考慮した一様分布である。観測的宇宙論の業界用語でこれのことを random と呼ぶ。$w(\mathbf{x}_j)$ は FKP weight と呼ばれ、S/N 比を最大にする重みである。ディラックのデルタ関数により、(8) 式の $\delta_l(\mathbf{k})$ は離散フーリエ変換の形になる。

3 Results

Natural Estimator((1) 式) を使い観測データから $P_g(\mathbf{k})$ とその非等方性を測定する試みはすでになされていたが、(Scoccimarro 2015) や (Bianchi et al. 2015) は (7) 式を用いて測定し、どの程度計算が早くなるかを議論した。以下に示すのは BOSS の DR11、CMASS NGC という銀河カタログをシミュレーションで再現した 50 個の模擬銀河カタログから $P_g(\mathbf{k})$ とその非等方性の平均値を測定した結果である。

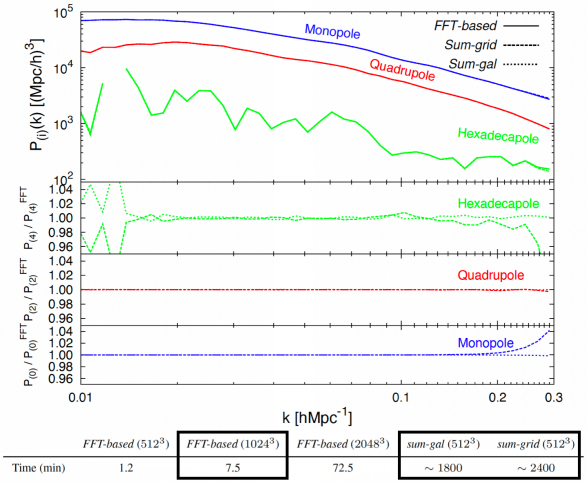


図 5: (Bianchi et al. 2015) より抜粋。グラフでは、表中の黒枠の 3 つを比較している。

4 Discussion

図 5 のグラフで注目するべきは下の P_l/P_l^{FFT} のグラフである。比較している 3 つは、空間積分を分離する近似を使った (7) 式を異なる方法で計算した結果である。Sum-は FFT を使わずに計算した結果。Sum-gal は空間を grid 化しなかった場合の計算結果 ((7) 式の正しい積分値)、Sum-grid は空間を grid 化した場合の結果。FFT-based を含め、空間を grid 化すると、波の波長が grid の間隔より小さくなる (つまり波数 k が大きい) と分布を trace することができなくなり、必ず誤差が発生する (これを aliasing 効果と呼ぶ)。比較している FFT-based((7) の計算) の結果は grid の数が 1024^3 なので aliasing の効果は見られない。grid の数が 512^3 となれば、同様に FFT-based にも aliasing 効果が現れると考えられる。

表に示すのは、1 個の BOSS の DR11、CMASS NGC を再現した模擬銀河カタログに基づいて計算した際に要した時間。Sum-gal にも grid の数が示されているが、これは $\int \frac{d\Omega_k}{4\pi}$ を計算するために k 空間だけは grid 化しているためである。Sum-gal と Sum-grid では本来なら Sum-gal の方が精度が高いのでより時間を要するはずであるが、カタログから $\delta_s(\mathbf{x})$ を計算する際には (9) 式で示したように、random という観測的な効果を考慮した一様分布を作らなければならず、これが原因でこのようなことになっている。

5 Conclusion

まず計算の速さとしては、同じ grid 数では、FFT-based の計算の方が Sum-より 1000 倍以上計算が早い。Natural Estimator は Sum-よりもはるかに遅いので、Natural Estimator と比べるとさらに改善されていることになる。grid 数を増やして aliasing 効果を軽くしても (512^3 から 1024^3 へ) なお Sum-と比べて数百倍軽い。

次に計算の精度に関して、Natural Estimator に比べた精度は (Philcox & Slepian 2014) で議論されている。当然 Natural Estimator に比べて精度は落ちてしまうが、(7) 式の精度は $\mathcal{O}(\theta_{max}^2)$ で、BAO scale ($\theta \sim 0.1$) では十分有効である。これにより、銀河クラスタリング解析の手法に Break through がもたらされた。

6 My work and future

以上のようにして、観測データから赤方偏移パワースペクトル $P_g(\mathbf{k})$ とその非等方性が得られるが、宇宙論パラメタを精度よく推定するためには、Introduction で述べた理論モデルも改良する必要があり、これが私の現在の研究テーマである。

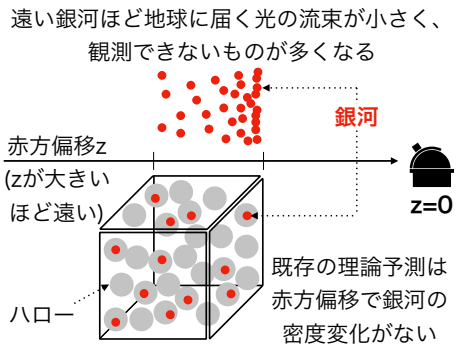


図 6: 自身の研究の紹介。

私が改良しようとする理論モデルは N 体シミュレーションに基づくモデルである。既存の理論モデルでは、シミュレーション領域内で銀河密度が一様な場合の $P_g(\mathbf{k})$ を予測するが、私はここに改善の余地があると考える。実際の観測データには遠くの銀河ほど見えにくいという銀河の選択効果が含まれている (図 6) が、この効果を考慮した理論モデルを作るべきである。

2024 年から科学運用開始が予定されている PFS は、$z = 0.8 \sim 2.4$ という遠方銀河まで観測でき、まさに次世代の銀河サーベイと呼べる。そのデータが得られる前に、観測・理論の両方の観点から、より精度の良い銀河クラスタリング解析手法を確立することが、今後の重要な課題である。

Reference

Roman Scoccimarro 2015, arXiv: 1506.02729v2

Atsushi Taruya, Hiromitsu Magira, Yi Peng Jing, & Yasushi Suto 2001, Publ. Astron. Soc. Japan 53, 155-167

Scott Dodelson 2003, Modern Cosmology

Oliver Philcox, & Zachary Slepian 2014, arXiv: 2102.08384v2

Davide Bianchi, Hector Gil-Marin, Rossana Ruggeri, & Will J. Percival 2015, arXiv:1505.05341v2

————index へ戻る

重宇c11

重力波による原始ブラックホールの探索

村上 靖洋

重力波による原始ブラックホールの探索

村上　靖洋 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

本発表では、重力波を用いて太陽質量未満のブラックホール（BH）を探索する手法について紹介する。現在までに電磁波や重力波による観測であらゆる天体が発見されてきたが、未だ太陽質量未満の天体の発見には至っていない。また、太陽質量未満の天体は既存の星形成理論では説明することができないため、太陽質量未満の天体の発見は宇宙初期に形成された原始ブラックホール（PBH）の発見の可能性が出てくる。そこで本研究は、これまでの重力波観測による太陽質量未満の探索の簡略化を踏まえた上で、より高精度な探索を行うことを目標とする。この探索を行う際に、重力波信号は質量が軽くなるほど長い信号になってしまうため、計算コストの問題が生じてくる。そこで Focused Reduced Order Quadrature(FROQ) という手法 (Soichiro Morisaki & Vivien Raymond 2020) を応用することで計算コスト削減の実装を試みて、太陽質量未満の天体の探索を目指す。

1　研究背景

1.1　重力波

重力波とは、時空の歪みが光速で伝播する現象のことで、電磁波に比べて物質透過性が非常に高いという特異な性質を有すことから、これまでの観測手法とは全く異なるアプローチを提供する。2015 年 9 月にアメリカの重力波観測施設 LIGO によって初観測された重力波天体は、約 30 太陽質量のブラックホール（BH）の連星合体という初観測以前に見つかっていた BH に比べると重く、電磁波でしか宇宙を見ていなかった我々にとって予想外のイベントであった。その後 3 回の長期観測を経て、約 90 個の重力波イベント (その大半が連星 BH) が発見され、宇宙には我々の想像以上に BH があることが明らかとなった。

重力波を数式で表す最も簡単な形は、計量を背景と線型的な揺らぎの成分に分解できるとして、アインシュタイン方程式を線型近似することで導出できる。よりアインシュタイン方程式を解析的に解こうとする試みで Post-Newton 近似（PN 近似）と呼ばれる近似があり、これを用いて解くことで、より正確な重力波振幅を得ることができる。

1.2　太陽質量未満の天体を求めて

これまでに多くの BH が見つかっていることは記したが、この重力波イベントの中には、既存の星形成理論が禁止する質量を持つ重力波天体の存在も確認された。例えば、GW190521 ($150M_{\odot}$) や GW190814 ($2.6M_{\odot}$) などである。このような結果は、重力波の台頭によりこれまで我々が知り得ていなかった宇宙の一面を垣間見るとともに、これまでの常識に囚われない探索をすることの重要性を浮き彫りにした。そこで近年、未だに存在が確認されていない太陽質量未満の探索に注目が集まってきた。

太陽質量未満の探索の意義は、理論上存在は予言されている原始ブラックホール (PBH) を発見できる可能性にある。PBH とは、宇宙誕生直後の宇宙が超高密度であった時期に，周りよりも高密度の領域が圧縮されてできた BH のことで、大質量星が自身の重力によって崩壊して出来たとされる天体起源の通常の BH とは全く異なる起源を有する。PBH は宇宙初期を知る手掛かりの一つであり、未だ正体不明な暗黒物質の候補にもなっている。これまでに様々な観測で PBH の存在量に制限がつけられてきたが、実は太陽質量未満の質量帯において、重力波が一番強い制限を与えている (図 1)。最近では図 1 の質量帯よりもさらに軽い BH の探索も始まっている (Andrew L. Miller et al. 2021)。現在 4 回目の長期重力波観測 O4 が実施されており、さらに観測データは蓄積されていく。本研究は将来的に観測データから太陽質量未満の天体の発見を目的とする。

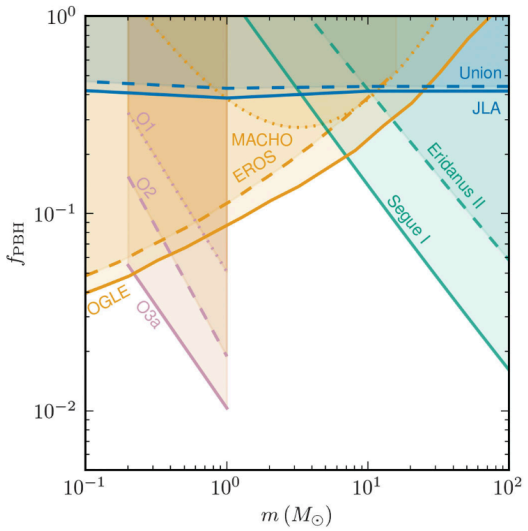


図 1: O3 までの結果から求めたダークマターの内 PBH の割合を表したグラフ。太陽質量未満の天体の中で重力波による観測が一番強い制限を与えていることがわかる。(R. Abbott et al. 2022A)

2 研究手法

2.1 先行研究での近似

これまでの太陽質量未満の探索には以下に記すような近似を施しており、いささか簡略化し過ぎている節がある。１つは、Ligo-Vergo が行っている（0.1-1）太陽質量の探索では観測データのうち低振動数側のデータを切り捨てた解析を行なっている (R. Abbott et al. 2022B)。一般に質量が軽い連星合体ほど信号が長くなることが知られており、計算コストを減らすためにこの研究では 45Hz 未満のデータを捨てた解析となっている。一方で実際の重力波検出器は約 10Hz から感度があるので、データの削除が信号対雑音比である SNR（つまり感度）を失うことにつながっている。

もう一つに重力波波形を相対論から近似で導く際に、どこまでの近似を取るかを考える必要がある。観測データから重力波波形を見つけるためには、事前にアインシュタイン方程式から理論的に導いたテンプレート波形というものを用意しておく必要がある。さらに軽い質量帯での探索では、天体のスピンを考慮に入れていなかったり、PN 近似の最低次までしか考慮に入れていなかったりする (Andrew L. Miller et al. 2021)。当然より高次の微少量まで考慮した近似ほど計算コストが高くなる。テンプレート波形が実際の波形と数サイクルでもずれていると感度が悪くなってしまうので、できるだけ近似は高次まで取れるようにしたい。

これらの先行研究による太陽質量未満の探索をより高精度にやり、PBH の発見を目指すのが本研究の目標である。そこでこれらの近似により SNR が何が原因でどれほど落ちるかを検討し、計算コストのバランスを考えてどこまでの近似を取るかを明らかにする。

2.2 テンプレートバンクの作成

連星合体からの重力波を探索するには、重力波観測器から来る雑音の海の中から真の信号を抽出するためにマッチドフィルター法が用いられ、本研究でもこの手法で信号解析を行う。この手法は、理論的に計算されたテンプレート波形を事前にあらゆるパラメータで計算し (テンプレートバンク)、それを観測データと比較して真の重力波信号を見つけ出すという手法 (マッチドフィルター) である (図 2)。

このテンプレートバンクを先ほど記した近似をどこまで取るかなどを考慮して制作していく。テンプレートバンクを作成するコードは複数存在し、本研究では Tree bank(Manifold bank)(Chad Hanna et al. 2022) と呼ばれるコードを使用しようと考えている。

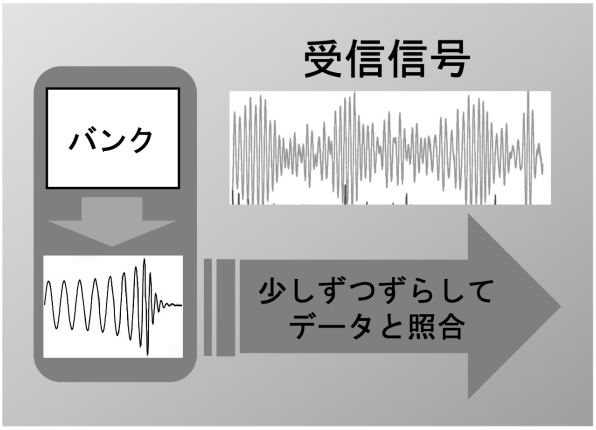


図 2: マッチドフィルター法の概略図。観測データの中からあらかじめ用意したテンプレート波形を比較して雑音の中から信号を掘り出す。

2.3 マッチドフィルター法の実装

本研究で扱うこととなる太陽質量未満のような低質量の重力波信号は非常に長い信号になってしまい、観測データとテンプレート波形の相関を取る計算コストがとても多くなる。例えば $1M_{\odot}$ の連星だと合体までに約 2 分なのに対し、$0.1M_{\odot}$ の連星だと約 19 時間もかかる信号となり、計算コストが膨大となる。

そこで連星合体のパラメータ推定解析を高速化するという動機で作成された Focused Reduced Order Quadrature(FROQ) という手法 (Soichiro Morisaki & Vivien Raymond 2020) を本研究のマッチドフィルター法の高速化に応用することを考えている。

また、この FROQ という手法には ROQ 基底というデータが必要になり、このデータは太陽質量未満の連星信号の解析において少なくとも数ペタバイト以上の膨大なデータとなる。このデータの問題も連星合体信号の周波数が単調増加することを利用して、データを削減する手法が提案されている (Soichiro Morisaki 2021)。

これら手法を応用し、先行研究よりも長いデータを用いたマッチドフィルター解析を可能とすることを目指す。

3 展望

先行研究に対して制限を広げるとどのくらい SNR が変化するかを調べた結果、観測データの削除をなくすと、約 40 %良くなることがわかった。現在の本研究はテンプレートバンクの作成のためにテンプレートバンクの作成方法を勉強中である。終わり次第作成に努め、現在観測中の O4 の結果を踏まえて太陽質量未満の探索に臨む予定である。また本研究は、将来の O5 観測やその他建設予定中の重力波観測器による将来観測にもつながってくる。

Reference

R. Abbott et al. 2022A, Phys. Rev. Lett. , 129, 061104

Andrew L. Miller et al. 2021, Physics of the Dark Universe, 32, 100836

R. Abbott et al. 2022B, arXiv:2212.01477

Chad Hanna et al. 2022, arXiv:2209.11298

Soichiro Morisaki, & Vivien Raymond 2020, Phys. Rev. D, 102, 104020

Soichiro Morisaki 2021, Phys. Rev. D, 104, 044062