2022年第52回 天文・天体物理若手夏の学校

素粒子・重力・宇宙論分科会　集録集

■ 謝辞

2022年度天文・天体物理若手夏の学校は、基礎物理学研究所を始め、国立天文台、光学赤外線天文連絡会、理論天文学宇宙物理学懇談会、天文教育普及研究会、日本天文学会からのご支援により成り立っております。事務局一同厚く御礼申し上げます。

素粒子・重力・宇宙論分科会

■ index

重宇 c01		講演キャンセル
重宇 c02	片山 友貴	統合摂動論の基礎と物質優勢期における原始ブラックホールの形成

————index へ戻る

重宇 a01

漸近的平坦な時空での量子重力理論に対するホログラフィック双対な場の理論の対称性

京都大学大学院 理学研究科
湊 恵太

漸近的平坦な時空での量子重力理論に対する ホログラフィック双対な場の理論の対称性

湊 恵太 (京都大学大学院 理学研究科)

Abstract

4 次元漸近的平坦な時空において Soft Graviton Theorem の tree-level の S-matrix と Virasoro 変換を生成する Charge の間に Ward Identity が成り立っていることが示され、これにより 4 次元漸近的平坦な時空のける量子重力理論が Virasoro 対称性を持つことが示された。

さらに、4 次元漸近的平坦な時空に対応する境界の場の理論が 2 次元共形場理論（CFT）であることが予想され、Holography 原理より 4 次元漸近的平坦な時空における量子重力理論の物理量が 2 次元 CFT を用いて計算できることが示唆される。

本稿では、(D. Kapec 2014) に基づき上記の内容をレビューする。

1 Introduction

量子重力理論の完成は物理学の長年の課題であるものの、未だ完成されていない。そこで、何らかの方法で量子重力理論の候補となる理論を制限しなければならない。ここで重要な役割を果たすのが、対称性である。ある理論と変換の組が与えられたとき、それらの S-matrix と Charge の間に Ward Identity が成り立っているかを調べることで、理論が与えられた変換に対して対象であるかどうかがわかる。AdS 時空の量子重力理論の持つ対称性については既に調べられている。一方、加速器を用いた衝突実験などの小さなスケールから宇宙論的なスケールまで、さまざまなスケールにおける現象が AdS 時空ではなく漸近的平坦な時空における現象として近似される。そこで、我々の住む時空における量子重力理論に対する理解を得るには、漸近的平坦な時空における量子重力理論の対称性を調べる必要がある。

この問題に答えを与えたのが D. Kapec 達である。彼らによって、漸近的平坦な時空の対称性として知られていた BMS 群を拡張した extended BMS 群の部分群である Virasoso 群が 4 次元漸近的平坦な時空の量子重力理論のもつ対称性であることが示された。

また、Holography 原理により、量子重力理論を低次元の場の理論で記述できる。このとき、これらふたつの理論は同じ対称性を持ち、また次元の差は時空の形から決まる。このことから、4 次元漸近的平坦な時空における量子重力理論に対応する場の理論を推測できる。

本稿では、まず 4 次元漸近的平坦な時空における量子重力理論の持つ対称性について議論する。次にその結果を用いて 4 次元漸近的平坦な時空における量子重力理論に対応する境界の場の理論の候補を紹介する。

2 Ward Identity

ある理論と変換の組が与えられたとき、もしその理論が与えられた変換に対して不変であれば、次式が成り立つ。

$$\langle out\,|[Q,\mathcal{S}]|\,in\rangle = 0 \tag{1}$$

この式は Ward Identity として知られている。ここで、S、Q はそれぞれ理論の S-matrix、Charge である。本稿では、後述するように 4 次元漸近的平坦な時空における Soft Graviton Theorem と Virasoro 変換に対してこの式が成り立っていることを示し、Virasoro 群が 4 次元漸近的平坦な時空における量子重力理論の持つ対称性であることを示す。

3 漸近的平坦な時空

続いて、4 次元漸近的平坦な時空における量子重力理論の対称性について考える。その候補として、まずは 4 次元漸近的平坦な時空の Null 無限遠での境界条件を変えない変換を考える。

まず、Null 無限遠における 4 次元漸近的平坦な時空の計量は、Bondi 座標

$$\begin{aligned} x^0 &= u + r = v - r & (2) \\ x^1 + ix^2 &= \frac{2rz}{1 + z\bar{z}} & (3) \\ x^3 &= \frac{r(1 - z\bar{z})}{1 + z\bar{z}} & (4) \end{aligned}$$

を用いて次式で与えられる (G. Barnich & C. Troessaert 2010)。

$$\begin{aligned} ds^2 &= -du^2 - 2dudr + 2r^2\gamma_{z\bar{z}}dzd\bar{z} \\ &\quad + \frac{2m_B}{r}du^2 + rC_{zz}dz^2 + 2g_{uz}dudz \\ &\quad + c.c. & (5) \\ &= -dv^2 + 2dvdr + 2r^2\gamma_{z\bar{z}}dzd\bar{z} \\ &\quad + \frac{2m_B}{r}dv^2 + rC_{zz}dz^2 + 2g_{vz}dvdz \\ &\quad + c.c. & (6) \end{aligned}$$

ただし、簡単のため未来（過去）方向の Null 無限遠を表すのに retarded null coordinate u（advanced null coordinate v）を用いる。

式 (5) および式 (6) の第 1 行目は Minkowski 時空の計量であり、2 行目以降がそこからのずれを表している。ここで、m_B、C_{zz}、g_{uz} などは Null 無限遠から見た内部の情報を表す物理量である。各項の r 依存性は Einstein eq. から決まっているが、

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_f + \xi_Y & (7) \\ \xi_f &= \left(1 + \frac{u}{2r}\right) Y^z\partial_z - \frac{u}{2r}D^{\bar{z}}D_zY^z\partial_{\bar{z}} \\ &\quad -\frac{1}{2}(u + r)D_zY^z\partial_r + \frac{u}{2}D_zY^z + c.c. & (8) \\ \xi_Y &= f\partial_u - \frac{1}{r}(D^zf\partial_z + D^{\bar{z}}f\partial_{\bar{z}}) \\ &\quad +D^zD_zf\partial_r & (9) \end{aligned}$$

で生成される変換はこの r 依存性を変えない (G. Barnich & C. Troessaert 2010)。これにより生成される群が BMS 群である。次節で BMS 群およびこれを拡張した extended BMS 群について簡単に説明する。

4 extended BMS 群

BMS 群とは、supertranslation（角度依存性をもつ時空並進）および Lorentz 群の半直積であり、生成子の数はそれぞれ無限個と 6 個である。また、これらの生成子はすべての角度 $(z, \bar{z}$ において正則である。supertranslation の生成子のうち角度依存性をもたないものと Lorentz 群の半直積からなる部分群を考えると、これは Poincare 群になっている。BMS 群についての詳細は (G. Barnich & C. Troessaert 2010) に記載されている。

量子重力理論の候補をさらに絞るためには、より強い対称性を考える必要がある。BMS 群において、Y が任意の $(z, \bar{z}$ において正則であるという条件を外し極を持つことを許すと、Lorentz 群が無限個の生成子を持つ Virasoro 群に拡張され、対称性が大きく広がる (A. Strominger. 2014)。そこで、Ward Identity を用いて Soft Graviton の散乱行列が Virasoro 対称性を持つことを示すことができれば、正しい量子重力理論は Virasoro 対称性を持たなければならないという強い制限を与えられる。なお、supertranslation と Virasoro 群の半直積で表される群は extended BMS 群と呼ばれ、(A. Strominger. 2014) および (T. He et al. 2014) で調べられている。

なお、Null 無限遠で定義される Virasoro 変換に対応する電荷は次式で与えられる。(D. Kapec 2014)

$$\begin{aligned} Q^{\pm} &= Q^{\pm}_H + Q^{\pm}_S \\ Q^{\pm}_H &= \pm i\sum_k \left[Y^{\pm z}(z_k)\partial_{z_k} - \frac{E_k}{2}D_zY^{\pm z}(z_k)\partial_{E_k}\right] \\ Q^{\pm}_S &= \mp\frac{1}{2}\int_{\mathcal{I}^{\pm}} dud^2z\ D^3_zY^{\pm z}u\partial_uC^z_{\bar{z}} & (10) \end{aligned}$$

ただし、E_k は k 番目の粒子のエネルギー、D_μ は共変微分である。また、Q_H、Q_S はそれぞれ粒子に作用する微分同相変換を生成する演算子、真空に Soft Graviton を生成する演算子である。

5 Soft Graviton Theorem

Soft (energy-less) particle を含む $n+1$ 粒子の散乱振幅 A_{n+1} は、soft particle を含まない n 粒子の散乱

振幅 A_n を用いて次のように書ける (Soft Theorem)。

$$\lim_{\omega\to\infty} A_{n+1}(\omega) = \lim_{\omega\to\infty}\left[\omega^{-1}S^{(0)} + \omega^0 S^{(1)} + \mathcal{O}(\omega)\right] A_n \quad (11)$$

ただし、ω は soft particle のエネルギー、$S^{(i)}$ は展開係数である。

ここで、

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \langle out\,|a_-(\omega q^\mu)\mathcal{S}|\,in\rangle \\ A_n &= \langle out\,|\mathcal{S}|\,in\rangle \end{aligned}$$

と置いて式 (11) に代入すると、

$$\begin{aligned} &\lim_{\omega\to 0}(1+\omega\partial_\omega)\,\langle out\,|a_-(\omega q^\mu)\mathcal{S}|\,in\rangle \\ =\ & S^{(1)-}\,\langle out\,|\mathcal{S}|\,in\rangle \end{aligned} \quad (12)$$

ただし、$S^{(1)-}$ は tree-level の Diagram の一部を直接計算することで次のように得られる。

$$S^{(1)-} = -i\sum_k \frac{p_{k\ \mu}\varepsilon^{-\mu\nu}q^\lambda J_{k\ \lambda\nu}}{p_{k\ \mu}q^\mu} \quad (13)$$

なお、ωq^μ、$p_{k\ \mu}$、$J_{k\ \mu\nu}$、$\varepsilon^{\pm\mu\nu}$ はそれぞれ soft graviton の四元運動量、k 番目の粒子の四元運動量、k 番目の粒子の角運動量、graviton の偏極ベクトルである。また、$a_\pm$ は $\pm$ に偏極した soft graviton の消滅演算子である。

6　Ward Identity (続き)

式 (10) を用いて式 (1) を変形すると、

$$\langle out\,|[Q_H,\mathcal{S}]|\,in\rangle + \langle out\,|[Q_S,\mathcal{S}]|\,in\rangle = 0 \quad (14)$$

したがって、Soft Graviton Theorem の S-matrix と Virasoro 変換の Charge の間にこの関係が満たされていれば、4 次元漸近的平坦な時空における量子重力理論は Virasoro 対称性を持つ。左辺第 1 項は式 (10) から簡単に計算出来て、

$$\begin{aligned} &\langle out\,|[Q_H,\mathcal{S}]|\,in\rangle \\ =\ & i\sum_k\left[Y^{\pm z}(z_k)\partial_{z_k} - \frac{E_k}{2}D_zY^{\pm z}(z_k)\partial_{E_k}\right] \\ &\times\langle out\,|\mathcal{S}|\,in\rangle \end{aligned} \quad (15)$$

である。

一方、左辺第 2 項は、graviton を mode 展開することで次のようになる (D. Kapec 2014)。

$$\begin{aligned} &\langle out\,|[Q_S,\mathcal{S}]|\,in\rangle \\ =\ & -\frac{i}{4\pi}\lim_{\omega\to 0}(1+\omega\partial_\omega) \\ &\int d^2z D_z^3 Y^z \varepsilon^+_{\bar{z}\bar{z}}\,\langle out\,|a_-(\omega q^\mu)\mathcal{S}|\,in\rangle \end{aligned} \quad (16)$$

この式の右辺に式 (11) と式 (13) を用いて計算を進めると、次式を得る。

$$\begin{aligned} &\langle out\,|[Q_S,\mathcal{S}]|\,in\rangle \\ =\ & -i\sum_k\left[Y^{\pm z}(z_k)\partial_{z_k} - \frac{E_k}{2}D_zY^{\pm z}(z_k)\partial_{E_k}\right] \\ &\times\langle out\,|\mathcal{S}|\,in\rangle \end{aligned} \quad (17)$$

式 (15) と式 (17) を式 (14) 左辺に代入すると、これはゼロになる。したがって、式 14 が成り立つ、これにより、4 次元漸近的平坦な時空における量子重力理論は Virasoro 対称性を持つことが示された。

7　Holography 原理

本稿の残りでは、これまでに得た結果から 4 次元漸近的平坦な時空における量子重力理論に対応する境界の場の理論を推測する。そのために、まずは Holography 原理について簡単に説明する。

Holography 原理とは、d 次元時空の量子重力理論が境界で定義された低次元の場の理論と等価であるという予想である (G. t'Hooft　1993)。なお、これらの 2 つの理論は同じ対称性を持つ。とくに有名なもののひとつに、AdS/CFT 対応がある。ここでは、d 次元 AdS 時空の量子重力理論と $d-1$ 次元の境界の場の理論が対応することが知られている。

8　境界の場の理論

一方、d 次元漸近的平坦な時空の場合、Null 無限遠を考えるため、境界の場の理論においては時間座標と動径座標の 2 つに対応する次元が落ち、$d-2$ 次元の場の理論が対応する。したがって、4 次元漸近的平坦な時空における量子重力理論に対応する境界の場の理論は 2 次元である。加えて、本稿前半での議

論より 4 次元漸近的平坦な時空における量子重力理論が Virasoro 対称性を持つことから、これに対応する境界の場の理論も Virasoro 対称性を持つ。

結局、4 次元漸近的平坦な時空における量子重力理論に対応する境界の場の理論は 2 次元で Virasoro 対称性を持つことが結論付けられた。このような場の理論として真っ先に思い浮かぶのが、2 次元 CFT である。このことから、4 次元漸近的平坦な時空における量子重力理論に対応する境界の場の理論は 2 次元 CFT であると示唆される。これにより、4 次元漸近的平坦な時空における量子重力理論の物理量が 2 次元 CFT を用いて計算できると予想される。

9 Conclusion

Ward Identity が成り立っているかどうか調べることで、4 次元漸近的平坦な時空における量子重力理論が Virasoro 対称性を持つことが示された。

また、この結果をもとに、4 次元漸近的平坦な時空における量子重力理論に対応する境界の場の理論は 2 次元 CFT であると予想される。

Reference

D. Kapec, V. Lysov, S. Pasterski & A. Strominger 2014, J. High Energ. Phys.

G. Barnich & C. Troessaert 2010, Phys. Rev. Lett.

A. strominger 2014, arXiv:1312.2229v2 [hep-th]

T. He, V. Lysov, P. Mitra & A. Strominger 2014, arXiv:1401.7026 [hep-th].

G. t ’ Hooft 1993, arXiv:gr-qc/9310026v2.

———index へ戻る

重宇 a02

静的および動的時空における Ryu-Takayanagi 公式と量子情報

近畿大学大学院 総合理工学研究科
井上 直人

静的および動的時空における Ryu-Takayanagi 公式と量子情報

井上　直人 (近畿大学大学院 総合理工学研究科)

Abstract

物理学分野における最終目標のひとつとして有名なのは量子重力理論の実現であろう。ホログラフィー原理から端を発し、現在ではその一例である AdS/CFT 対応が確かなものになりつつある。本稿では静的時空における代表的な AdS/CFT 対応として Ryu-Takayanagi 公式について触れ、さらにはその式に含まれる極小曲面（Ryu-Takayanagi 面）を光波面と解釈し直すことで動的時空へと拡張する Tsujimura-Nambu の提案について記す。

1 Introduction

ブラックホールは、もとは星だったものが重力崩壊することによって形成される天体である。見方を変えれば、ブラックホールはもとの星の情報を有していると考えることが出来よう。この情報量をエントロピーと定義した際に、J. Bekenstein と S. Hawking が 1970 年代前半にブラックホールのエントロピーが事象の地平面に比例しているとした Bekenstein-Hawking 公式

$$S = \frac{A}{4G_N} \tag{1}$$

を発表した。ここから、1990 年代前半に G. t'Hooft と L.Susskind はホログラフィー原理を提唱し、我々が体積に比例すると考えていたエントロピーとブラックホールのエントロピーの違いは次元による違いだと説明した。そして、この原理の具体例として J. Maldacena は 1997 年、反ド・ジッター (AdS) 時空とその境界に位置する共形場理論 (CFT) が等価であるとした AdS/CFT 対応を発表した。この対応から派生した概念の一つに Ryu-Takayanagi 公式というものがある。これは時刻一定面において AdS/CFT 対応を用いて共形場理論のエントロピー（エンタングルメント・エントロピー）を導出できるというものである。さらに、この公式を時間発展させる方法の一つとして光波面を用いる方法がある。

本稿 2 章では Ryu-Takayanagi 公式 [1] について解説を行い、3 章では光波面を用いた Ryu-Takayanagi 公式の時間発展 [2] について述べる。

2 Ryu-Takayanagi fomula

ブラックホールのエントロピーはブラックホールの事象の地平面内部が原理的に観測できないことによって生じる。これを重力側のエントロピーだとすると、これに対応する量子側のエントロピーは何であろうか。量子側にも重力側と同じ状況設定をしてみる。全体の系 $\mathcal{H}_{tot}$ において観測者がいる部分系 $\mathcal{H}_A$ に対して、部分系 $\mathcal{H}_B$ が観測できないとする。その時、部分系 A に制限されたエントロピーは同じく A に制限された縮約密度行列 ρ_A を用いて $S_A = -Tr_{\mathcal{H}_A}[\rho_A \log \rho_A]$ と表現され、これをエンタングルメント・エントロピーと呼ぶ。AdS/CFT 対応を考えれば、これは重力側の幾何学を用いて導出できそうである。

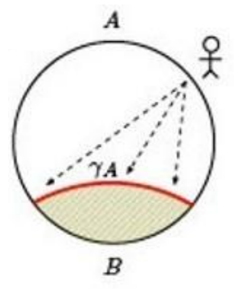

図 1: 境界に CFT を有する AdS 時空における極小曲面 γ_A(credit:Ryu-Takayanagi 2006)

図 1 のような状況を考える。先ほどと同様に部分系 A にいる観測者は部分系 B にアクセスできないと

する。もしバルクを通して B にアクセスしようとすると、何か γ_A のような曲面が遮断していそうである。これはブラックホールに対する事象の地平面によく似ている。さらに Bekenstein-Hawking 公式 (1) よりその曲面にエントロピーが内在していそうである。以上のことから S. Ryu と T. Takayanagi は時刻一定面において AdS 時空のバルクの幾何学から境界のエンタングルメント・エントロピーを導出できる公式

$$S_A = \frac{Area(\gamma_A)}{4G_N} \tag{2}$$

を導きだした。これを Ryu-Takayanagi 公式という。ここでの γ_A は平均曲率ゼロの極小曲面と呼ばれるものであり、面積最小の曲面となる。この曲面を Ryu-Takayanagi 面と呼ぶこともある。

3 Null wave front and Causal holographic information

Ryu-Takayanagi 公式 (2) を動的なものへ拡張する方法として、流れとして理解しようとする試みもある。AdS 境界から放射されるヌル測地線を考え、それによって自然に導出される因果的ホログラフィック情報がエンタングルメント・エントロピーと一致する条件について考察する。

3.1 Null wave front and Ryu-Takayanagi surface

本小節では光波面がブラックホールを含む AdS 時空 (BTZ 時空) の Ryu-Takayanagi 面に一致することを示す。

(2+1) 次元の BTZ 時空におけるヌル測地線は

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{l_{AdS}^2} - M\right)dt^2 + \left(\frac{r^2}{l_{AdS}^2} - M\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 \tag{3}$$

で記述できる ($-\pi \le \theta \le \pi$,M:BH 質量,l_{AdS}:AdS 半径)。それぞれの座標の初期値を $(t_0, r_0, \theta_0) = (0, \infty, 0)$ として $r_0 \to r$ へ変化したときの $\theta(r)$ と $t(r)$ はそれぞれ、

$$\theta(r) = \frac{1}{\sqrt{M}} \log \frac{\sqrt{r^2 - b^2\left(\frac{r^2}{l_{AdS}^2} - M\right)} + b\sqrt{M}}{r\sqrt{1 - \frac{b^2}{l_{AdS}^2}}} \tag{4}$$

$$t(r) = \frac{l_{AdS}}{M} \arctan\left(\frac{l_{AdS}}{b} \tan\left(\sqrt{M}\theta\right)\right) \tag{5}$$

と求まる (b: インパクトパラメーター)。そして光の軌道 $r_{NG}(\theta, b)$ と光波面の軌道 $r_{WF}(\theta, t)$ はそれぞれ (4)(5) より、

$$r_{NG}(\theta, b) = \frac{\sqrt{M}b}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{l_{AdS}^2}}} csch\left(\sqrt{M}\theta\right) \tag{6}$$

$$r_{WF}(\theta, t) = \frac{\sqrt{M} l_{AdS} \coth\left(\frac{\sqrt{M}t}{l_{AdS}}\right) sech\left(\sqrt{M}\theta\right)}{\sqrt{1 - \coth^2\left(\frac{\sqrt{M}t}{l_{AdS}}\right)\tanh^2\left(\sqrt{M}\theta\right)}} \tag{7}$$

と表すことが出来る。そして (7) は時刻一定面の (3) から別に求めることが出来る Ryu-Takayanagi 面

$$r_{RT}(\theta) = \frac{\sqrt{M} r_{min} sech\left(\sqrt{M}\theta\right)}{\sqrt{M - \frac{r_{min}^2}{l_{AdS}^2}\tanh^2\left(\sqrt{M}\theta\right)}} \tag{8}$$

の r_{min} を $r_{min} = \sqrt{M} l_{AdS} \coth\left(\frac{\sqrt{M}t}{l_{AdS}}\right)$ とすると光波面と Ryu-Takayanagi 面と一致することが示せた (図 2)。

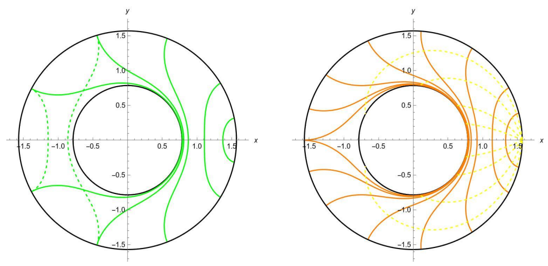

図 2: BTZ 時空における極小曲面 (左) と光波面 (右 (橙: 光波面、黄: 光線))

3.2 Causal holographic information and Entanglement entropy

エンタングルメント・エントロピーの類似概念として、因果的ホログラフィック情報

$$\chi_A = \frac{Area(\Xi_A)}{4G_N} \tag{9}$$

が存在する [3]。ここでの Ξ_A は境界領域 A で特徴づけられる the bulk causal wedge$\blacklozenge_A$ の交差面である (図 3)。これがエンタングルメント・エントロピーと

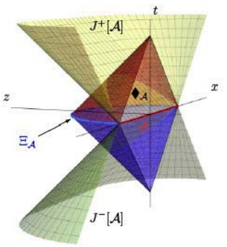

図 3: ポワンカレ AdS 時空の境界領域 A とそれに特徴づけられる影響領域と依存領域 (credit:Hubeny-Rangamani 2012)

一致する条件を本小節で述べる。

$x^\mu = (t, r, \theta, \dots)$ の宇宙定数を持つ球対称時空を考える。そして θ までの計量

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\theta^2 \tag{10}$$

を考える。ヌル測地線の接ベクトルは $k^i = \frac{dx^i}{d\lambda}$ と表す。この時空において時刻一定面の光波面の平均曲率 H は

$$H = \frac{f^{\frac{1}{2}}}{\omega\sqrt{h}} \left(\partial_r \left(\sqrt{h}k^r\right) + \partial_\theta \left(\sqrt{h}k^\theta\right)\right) \tag{11}$$

と求まる (ω : キリングベクトルの保存量, $\sqrt{h} : S^{d-1}$ 上の計量の行列式)。また、光波面の膨張率 Θ は

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{h}} \left(\partial_r \left(\sqrt{h}k^r\right) + \partial_\theta \left(\sqrt{h}k^\theta\right)\right) \tag{12}$$

と表せる。したがって、(11) と (12) より

$$H = \left(\frac{f^{\frac{1}{2}}}{\omega}\right)\Theta \tag{13}$$

と求まる。膨張率 Θ は Raychaudhuri 方程式

$$\frac{d\Theta}{d\lambda} = -\frac{\Theta^2}{d-1} - R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \tag{14}$$

に従う。今回、光波面は球対象であるとしていることからひずみや回転は (14) に現れない。また、宇宙定数を持つ真空時空ではリッチテンソルの項はなくなる。よって (14) より、

$$\Theta = \frac{d-1}{\lambda - \lambda_0} \tag{15}$$

と求まる (λ_0 は光波面の点源におけるアフィンパラメーター)。したがって、Θ は $\lambda \to \infty$ のときゼロとなる。これは (13) より光波面の平均曲率がゼロになることがわかり、極小曲面と一致することが示せた。つまり、光波面にひずみや回転がないことが $S_A = \chi_A$ の条件であることがとなる。そしてこの条件を満たすためには時空と光波面の強い対称性が必要となる。

4 Conclusion

Ryu-Takayanagi 公式は光波面によって時間発展させることが可能であり、その光波面によって導かれる因果的ホログラフィック情報は光波面にひずみや回転がない場合にエンタングルメント・エントロピーと一致することが分かった。

Reference

[1] S. Ryu & T. Takayanagi 2006, JHEP

[2] J. Tsujimura, & Y. Nambu 2020, entropy

[3] E. Hubeny & M. Rangamani 2012, JHEP

———index へ戻る

重宇 a03

時間依存する時空におけるホログラフィックなエンタングルメント・エントロピー

近畿大学大学院 総合理工学研究科
米尾 雄一郎

時間依存する時空におけるホログラフィックなエンタングルメント・エントロピー

米尾 雄一郎 (近畿大学大学院 総合理工学研究科)

Abstract

1997 年，量子重力理論の研究の中で，反ド・ジッター空間 (AdS) における重力理論と場の量子論である共形場理論 (CFT) の対応関係 (AdS/CFT 対応と呼ばれる) が J.Maldacena によって発見された．AdS/CFT 対応に基づいた研究の中で特筆すべき発展の一つが「Ryu-Takayanagi 公式」である．近年，量子情報理論，物性理論，量子コンピューターといった量子通信等の様々な分野で重要とされる概念に量子エンタングルメント (量子もつれ) があり，そのもつれの強さを測る量の一つにエンタングルメント・エントロピー (以下, EE) がある．Ryu-Takayanagi 公式は，量子論側で定義された EE が AdS 時空中で妥当な条件を課した曲面の面積すなわち重力理論側の幾何学量で与えられることを主張しており，このようにして求めた EE はホログラフィックな EE と呼ばれる．Ryu-Takayanagi 公式は，場の量子論では計算が複雑な相互作用する量子系の EE の計算を容易しただけでなく，派生研究として量子エンタングルメントによる時空の創発なども行われている．このように，Ryu-Takayanagi 公式を研究することで今後も豊かな示唆が得られると期待される．そこで本発表では，EE や RT 公式を適用する際の AdS 時空での曲面の条件付けについて簡潔触れた後，V.E.Hubeny，M.Rangamani，T.Takayanagi の論文 (2007) に基づいて，重力理論側の時空が時間依存する場合のホログラフィックな EE の計算について紹介する．

1 Introduction

1997 年に Maldacena によって発見され，多くのブレークスルーをもたらしている AdS/CFT 対応 [1] は「$d+2$ 次元の反ド・ジッター空間 (AdS) における量子重力理論 (超弦理論) はその境界上に住む $d+1$ 次元の共形場理論 (CFT) と等価である」ことを意味し，重力理論を含む宇宙全体と場の量子論との間につながりがあることが判明した．

近年，量子情報理論，物性理論，量子コンピューターといった量子通信等の様々な分野で用いられる概念に量子エンタングルメント (量子もつれ) がある．このもつれの強さを測る量の一つであるエンタングルメント・エントロピー (EE) [1] が注目されている[2] が，場の量子論側での EE の計算は一般に複雑で，相互作用のない自由場であっても 2 次元 CFT 以外は数値計算に頼らざるを得ず，相互作用する場では 3 次元以上は計算結果がほとんど知られていない．しかし 2006 年，AdS/CFT 対応と EE を結びつける試みから，ホログラフィックに EE を計算する方法が Ryu と Takayanagi によって提案 [2] され，その計算式は Ryu-Takayanagi 公式 (RT 公式) [3] と呼ばれる．また，RT 公式は静的時空において定義されたが，より一般的な時間依存する時空においてホログラフィックに EE を計算する方法が Hubeny, Rangamani，Takayanagi によって提案 [3] され，こちらは Hubeny-Rangamani-Takayanagi(HRT 公式) と呼ばれる．

そこで本発表では，EE や RT 公式を適用する際の AdS 時空での曲面の条件付けについて簡潔触れた後，V.E.Hubeny，M.Rangamani，T.Takayanagi の論文 (2007) に基づいて，重力理論側の時空が時間依存する場合のホログラフィックな EE の計算について紹介する．

[1] 以下では，必要に応じてエンタングルメント・エントロピーを EE と略記する．

[2] EE の注目例として，例えば，S.Sachdev「ひも理論で語る物質の科学」日経サイエンス 2013 年 4 月号などを参照されたい．

[3] 以下では，必要に応じて Ryu-Takayanagi 公式を RT 公式と略記する．

2 エンタングルメント・エントロピー

量子エンタングルメント (量子もつれ) とは，量子多体系 (多数の構成要素からなる量子系) において，部分系 A とそれ以外の系 B に分けた際の二つの系の間の量子的相関である．一般の量子多体系での量子エンタングルメントは以下のように定義される：まず，全体系を部分系 A と B の二つに重複なく分ける．これは，全体系を表す Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{\rm tot}$ を A と B に対応する Hilbert 空間 $\mathcal{H}_A$，$\mathcal{H}_B$ の直積に分解できることに対応する：

$$\mathcal{H}_{\rm tot} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \tag{1}$$

いま，基底状態の波動関数を $|\Psi\rangle$ とすると，全体系の状態が直積の形

$$|\Psi\rangle = |\Psi_1\rangle_A |\Psi_2\rangle_B \tag{2}$$

で書ける際には量子エンタングルメントは存在せず，直積の状態に書けない際は A と B の間に量子エンタングルメントが存在するという．このことは二つの電子スピン A，B からなる全体系 (2 量子ビット系という) を例に考えるとよい．いま，上向き，下向きのスピン状態をそれぞれ $|\uparrow\rangle$，$|\downarrow\rangle$ で表すと，$|\Psi\rangle = |\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B$ や $|\Psi\rangle = |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B$ のような直積状態では A，B のスピンは独立に決まっており，A と B に相関はない．一方で，$|\Psi\rangle = 1/\sqrt{2}(|\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B \pm |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B)$ という直積で書けない状態は A のスピンが上向き (下向き) と観測されると，B スピンは下向き (上向き) であるという相関がある．

エンタングルメント・エントロピーは，この相関の強さ (もつれの強さ) を測る量の一つである．いま，再び全体系が (1) 式のように分かれている状況を考える．まず全体系の密度行列 $\rho_{\rm tot}$ を $\mathcal{H}_B$ に対して部分対角和をとる (トレースアウトするという) 操作によって A に対する縮約密度行列 ρ_A が定義される：

$$\rho_A = {\rm Tr}_{\mathcal{H}_B}[\rho_{\rm tot}] \tag{3}$$

EE は，この ρ_A に対する Von Neumann エントロピー (情報エントロピー) として定義される：

$$S_A = -{\rm Tr}_{\mathcal{H}_A}[\rho_A \log \rho_A] \tag{4}$$

この量 S_A は A と B の量子エンタングルメントを測る量である．

3 Ryu-Takayanagi 公式と適用時の曲面の条件

いま，$d+2$ 次元の漸近 ${\rm AdS}_{d+2}$ 時空を考え，時空は時間依存しない (静的) と仮定する．このとき，時間一定面を選ぶと，$d+1$ 次元 ${\rm CFT}_{d+1}$ 側で定義された部分系 A とその補集合である系 B の間のエンタングルメント・エントロピー S_A は，Ryu，Takayanagi によって提案された以下の式 (RT 公式) で求めることができる：

$$S_A = \frac{{\rm Area}(\gamma_A)}{4\,G_N^{(d+2)}} \tag{5}$$

ここで，$G_N^{(d+2)}$ は $d+2$ 次元の Newton 定数，γ_A は漸近 ${\rm AdS}_{d+2}$ 内部 (bulk) に広がる co-dimension 2 の空間的曲面[4] のうち，面積最小の曲面 (minimal surface, 極小曲面) を表し，${\rm Area}(\gamma_A)$ は γ_A の面積を意味する．なお，極小曲面 γ_A を選ぶ際には，γ_A の端が A の端に一致 ($\partial\gamma_A = \partial A$) するように取り，さらには γ_A と A が同じトポロジー[5] を持つように選ぶ必要がある (図 1)．

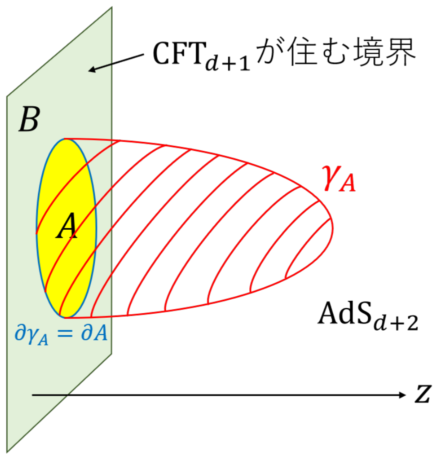

図 1: AdS/CFT 対応と極小曲面

[4] ここでの co-dimension 2 とは，bulk に対して次元が 2 つ低い，すなわち d 次元であることを意味する．

[5] より正確には，数学のホモロジーの立場で γ_A と A が等価であること (ホモロジー条件と呼ぶ) を要求する．

4 Ryu-Takayanagi 公式を用いた計算例

この章では，ホログラフィックな計算をどのように行うのかを掴むために AdS_3/CFT_2 での RT 公式を用いた計算例を紹介する．

4.1 グローバル AdS_3 時空

1+2 次元の AdS_3 は埋め込み先の時空となる時間が 2 つある 1+3 時空 $\mathbf{R}^{2,2}$

$$ds^2 = -dY_0^2 - dY_1^2 + dY_2^2 + dY_3^2 \tag{6}$$

内の超曲面

$$-(Y_0)^2 - (Y_1)^2 + (Y_2)^2 + (Y_3)^2 = -R^2 \tag{7}$$

として定義される．ここで，R は時空の大きさ (AdS 半径) である．この拘束条件 (7) を解くために，以下のようなグローバル座標を導入する：

$$\begin{aligned}\vec{Y} &= (Y_0, Y_1, Y_2, Y_3)\\ &= (R\cosh\rho\cos t, R\cosh\rho\sin t,\\ &\qquad R\sinh\rho\cos\theta, R\sinh\rho\sin\theta)\end{aligned} \tag{8}$$

このとき，AdS_3 時空の計量は，

$$ds^2 = R^2\left(-\cosh^2\rho\, dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2\rho\, d\theta^2\right) \tag{9}$$

と表される．このような時空をグローバル AdS_3 時空と呼び，$\rho\to\infty$ が CFT の住む境界 ($\mathbf{R}^1\times\mathbf{S}^1$) にあたる．

4.2 円周上における EE

いま，2 次元 CFT_2 は時間方向と長さ L の円周方向からなる場合を考える．このとき CFT_2 は円筒 $\mathbf{R}^1\times\mathbf{S}^1$ 上に定義されていることから，この時空を境界にもつグローバル AdS_3 時空 (9) を考える．この設定で境界における θ の線分 ($0\le\theta\le 2\pi l/L$) を部分系 A とした時のエンタングルメント・エントロピー S_A をホログラフィックに計算する．いま，RT 公式 (5) における co-dimension 2 の極小曲面 γ_A は時間 $t=$ 一定面における $\theta=0$ の点と $\theta=2\pi l/L$ の点を結ぶ最小長さの線分 (=測地線) であり，AdS_{d+2} での測地線は埋め込み先の時空 $\mathbf{R}^{2,d+1}$ の中で 2 次元平面と AdS_{d+2} が交わる部分空間で与えられる．よって，$\mathbf{R}^{2,2}$ 内のベクトルを

$$\begin{aligned}R\vec{x} &= (R\cosh\rho_0\cos t, R\cosh\rho_0\sin t, R\sinh\rho_0, 0)\\ R\vec{y} &= (R\cosh\rho_0\cos t, R\cosh\rho_0\sin t,\\ &\qquad R\sinh\rho_0\cos(2\pi l/L), R\sinh\rho_0\sin(2\pi l/L))\end{aligned} \tag{10}$$

とすると，$R\vec{x}$ と $R\vec{y}$ が張る 2 次元平面はパラメータ λ に依存する係数 $\beta(\lambda),\gamma(\lambda)$ を用いて，

$$\vec{X} = \beta(\lambda)\cdot(R\vec{x}) + \gamma(\lambda)\cdot(R\vec{y}) \tag{11}$$

で与えられ，いま $\beta(\lambda),\gamma(\lambda)$ として

$$\beta(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}\sinh(\lambda/R) \tag{12}$$

$$\gamma(\lambda) = \cosh(\lambda/R) - \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2-1}}\sinh(\lambda/R) \tag{13}$$

を選ぶと，ベクトル $\vec{X}$ は拘束条件 (7) を満たす AdS_3 上のベクトルであることはすぐに確かめられる．ただし，$\alpha = 1 + 2\sinh^2\rho_0\sin^2(\pi l/L)$ とした．よって，測地線は $\mathbf{R}^{2,2}$ 内のベクトル $\vec{X}$ の軌跡で与えられる：

$$\begin{aligned}\vec{X} =& \frac{R}{\sqrt{\alpha^2-1}}\sinh(\lambda/R)\cdot\vec{x}\\ &+ R\left[\cosh(\lambda/R) - \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2-1}}\sinh(\lambda/R)\right]\cdot\vec{y}\end{aligned} \tag{14}$$

ここで，ベクトル $\vec{V}\equiv d\vec{X}/d\lambda$ を導入すると $\vec{V}$ は規格化されているから，求める測地線の長さは，

$$\text{Length} = \int_{\gamma_A} ds = \int\sqrt{g_{\mu\nu}V^\mu V^\nu} = \int d\lambda = \lambda_* \tag{15}$$

となり，γ_A の両端におけるパラメータ λ の差 λ_* で与えられることがわかる．内積の定義から，

$$\cosh(\lambda_*/R) = -\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|} = \alpha \tag{16}$$

であり，これをカットオフがとても大きな極限 ($e^{\rho_0}\gg 1$) の時に λ_* について解くと，

$$\lambda_* \simeq R\log\left(e^{2\rho_0}\sin^2(\pi l/L)\right) \tag{17}$$

が得られる．ここで RT 公式を用いると EE は，

$$S_A \simeq \frac{\lambda_*}{4\,G_N^{(3)}} = \frac{c}{3}\log\left(e^{\rho_0}\sin(\pi l/L)\right) \tag{18}$$

と求められる．なお，最後の変形では，Brown-Henneaux の関係式：$c = 3R/2G_N^{(3)}$ を用いた．

5 Hubeny-Rangamani-Takayanagi 公式での計算法

RT 公式は，時空が時間依存しない (静的) 場合において定義された．しかし，回転するブラックホールやブラックホールが形成・成長する過程のような時間依存する時空の場合にそのまま適用することができない．ここでブラックホールが登場する理由は，AdS/CFT 対応に基づくと，有限温度の CFT は AdS 時空にブラックホールが存在する状況に対応するからである．

Hubeny，Rangamani，Takayanagi らは Bousso が共変なエントロピー上限 (Bousso バウンドと呼ばれる) を求める際に導入したライトシート (非正 (≤ 0) な膨張率をもつ null 測地線束で成される null 超曲面) の概念を用い，RT 公式の共変化を行った．

その結果，$d+1$ 次元 CFT_{d+1} 側のある時間 t で定義された部分系 $\mathcal{A}_t$ とその補集合である系 $\mathcal{B}_t$ の間のエンタングルメント・エントロピー $S_{\mathcal{A}_t}(t)$ は，以下の式 (Hubeny-Rangamani-Takayanagi 公式) で求めることができる：

$$S_{\mathcal{A}_t}(t) = \frac{\mathrm{Area}\big(\mathcal{Y}^{\mathrm{ext}}_{\mathcal{A}_t}\big)}{4\,G_N^{(d+2)}} \tag{19}$$

ここで，$G_N^{(d+2)}$ は $d+2$ 次元の Newton 定数，$\mathcal{Y}^{\mathrm{ext}}_{\mathcal{A}_t}$ は AdS_{d+2} 内部 (bulk) に広がる co-dimension 2 の曲面のうち，微小変分しても面積が変わらない曲面 (extremal surface，極値曲面) を表し，$\mathrm{Area}\big(\mathcal{Y}^{\mathrm{ext}}_{\mathcal{A}_t}\big)$ は $\mathcal{Y}^{\mathrm{ext}}_{\mathcal{A}_t}$ の面積を意味する．なお，RT 公式の場合と同様に極値曲面 $\mathcal{Y}^{\mathrm{ext}}_{\mathcal{A}_t}$ を選ぶ際には，$\mathcal{Y}^{\mathrm{ext}}_{\mathcal{A}_t}$ の端を $\mathcal{A}_t$ の端に一致 ($\partial\mathcal{Y}^{\mathrm{ext}}_{\mathcal{A}_t} = \partial\mathcal{A}_t$) させ，$\mathcal{Y}^{\mathrm{ext}}_{\mathcal{A}_t}$ と $\mathcal{A}_t$ が同じトポロジーを持つように選ぶ必要がある．また，極値曲面が複数ある場合には，それらの中で一番面積が小さいのものを選ぶ．

Hubeny-Rangamani-Takayanagi 公式 (19) で求めた EE は，共変なホログラフィック・エンタングルメント・エントロピーと呼ばれ，時空を時間依存しない場合に制限すると RT 公式に還元される．

6 まとめ

量子論側で定義された EE が RT 公式を用いてホログラフィックに求められることがわかった．また RT 公式が Light-sheet を用いて時間依存する時空の場合に拡張できることも判明した．これらのホログラフィックな計算法は，場の量子論側では計算が困難な相互作用する場の EE の計算を容易にするなど場の量子論の理解に貢献している．また，派生研究として量子エンタングルメントによる時空の創発などが行われており，このことは量子情報理論を用いた量子重力理論への新たなアプローチを提供している．

Acknowledgement

コロナ禍の中，このような研究発表の場を設けていただいた夏の学校スタッフの皆様，ご支援いただいた全ての関係者の皆様に心より感謝申し上げます．また，本研究にあたってご指導とお力添えいただいた一般相対論・宇宙論研究室の皆様に，この場をお借りして心より感謝申し上げます．

Reference

[1] J. M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. **2** 231 (1998)

[2] S. Ryu and T. Takayanagi, Phys. Rev. Lett. **96** 181602 (2006); JHEP **0608** 045 (2006)

[3] V. E. Hubeny, M. Rangamani and T. Takayanagi, JHEP **0707** 062 (2007)

———index へ戻る

重宇 a04

重力波による Affleck-Dine 機構の検出可能性

名古屋大学大学院 理学研究科
中野 貴臣

重力波による Affleck-Dine 機構の検出可能性

中野　貴臣 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

現在の我々の宇宙は物質からできており、人間や星, 銀河などあらゆるものが物質から構成され、反物質はほとんどないことが分かっている。この物質・反物質の非対称性 (バリオン数生成) は、素粒子標準模型では説明できないため、現代の素粒子的宇宙論の主要な問題点の 1 つである。
この物質と反物質の非対称性を説明するためのアイデアの 1 つとして、Affleck-Dine 機構 [1] がある。Affleck-Dine 機構は、I. Affleck と M. Dine によって提唱されたモデルであり、超対称性理論 (SUSY) に基づくバリオン数生成機構である。この機構によると、スカラー凝縮体の真空期待値（VEV）の進化を通じて、宇宙のバリオン非対称性が生成される。このスカラー凝縮は、一般にノントポロジカルソリトン（Q-ball）に分裂すると考えられている。その後、生成されたバリオン数は一旦 Q-ball に取り込まれる。その後、Q-ball が崩壊することによってクォークなどにバリオン数を受け渡すことによって、宇宙のバリオン非対称性は生まれた。

1　イントロダクション

1.1　宇宙のバリオン非対称性

現在の宇宙には反粒子で構成される反物質はほとんど見られず、我々の宇宙は物質優勢である。ビッグバン元素合成の理論によれば、現在の宇宙に存在する水素やヘリウムなどの物質の存在比を実現するためには、

$$\eta^{\mathrm{BBN}} = 5.1\text{-}6.5 \times 10^{-10} \tag{1}$$

であればよい [2]。ここで η は baryon-to-photon ratio と言い、$\eta = \frac{n_{\mathrm{B}}-n_{\bar{\mathrm{B}}}}{n_\gamma}$ とし、$n_{\mathrm{B}}, n_{\bar{\mathrm{B}}}, n_\gamma$ はそれぞれバリオン数密度, 反バリオン数密度, フォトン数密度である。一方、宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) の観測からは

$$\eta^{\mathrm{CMB}} = (6.19 \pm 0.15) \times 10^{-10} \tag{2}$$

という結果が得られており [3]、理論と観測とが一致している。

1.2　Baryogenesis の必要性

では、この宇宙の物質・反物質の非対称性 (BAU) はいつから生まれたのか。現在の宇宙論では、軽元素合成以前の極初期にインフレーションと呼ばれる宇宙が指数関数的な急膨張があったと考えられている。なので、たとえインフレーション以前にバリオン数が存在しても、インフレーションによって薄められ、バリオン数はほぼ 0 になると考えられている。よって、インフレーションからビッグバン元素合成までの間にバリオン数を生成する機構 (Baryogenesis) を考える必要がある。

2　Affleck-Dine baryogenesis

2.1　超対称性理論

Affleck-Dine 機構は超対称性理論に基づくバリオン数生成機構であり、標準理論を超対称化した超対称標準理論は盛んに研究されている。超対称性 (SUSY) とは、ボソンとフェルミオンを結びつける対称性であり、超対称性理論はボソンとフェルミオンがペアで存在することを予言する。超対称性粒子としてクォークの対称性パートナーであるスクォーク、レプトンの超対称性パートナーであるスレプトンなどを考える。

2.2 Affleck-Dine 機構

Affleck-Dine 機構はスクォーク (スカラー場でクォークと同じバリオン数 1/3 を持つ超対称性粒子) がインフレーション中に大きな値を持つことによって宇宙にバリオン数が生成される。ここで、超対称性理論では、いくつかのスカラー場の線形結合を取るとポテンシャルがほとんど平坦な方向が存在し、ϕ^4 の term が消え、ポテンシャルが

$$V(\phi) = m_\phi^2 |\psi|^2 - |c_H| H^2(t) |\psi|^2 + \lambda^2 \frac{|\psi|^{2n-2}}{M^{2n-6}} + a m_{3/2} \lambda \frac{\phi^n}{nM^{n-3}} + c.c. \quad (3)$$

と書ける方向を探すことができる。具体的に AD 場のダイナミクスを考える。まず、インフレーション中から考えると、インフレーション中は非常に大きな真空のエネルギーを持っていて、その効果からスカラー場に対しても Hubble パラメーター程度の質量補正が出てきて、ワインボトル型のポテンシャルを持つようになり、大きな真空期待値を持つことになる。インフレーション後は Hubble パラメーターが時間とともに段々と小さくなっていき、$m_\phi^2 |\psi|^2 \geqq |c_H| H^2(t) |\psi|^2$ となってから、原点が安定点となり原点周りに振動を始める。また、元々大きな真空期待値を持っていたので、a-term $am_{3/2}\lambda\frac{\phi^n}{nM^{n-3}}$ は無視出来ないほど効いてくる。この term により、このポテンシャルは傾けられ、原点に向かって振動するときに位相方向にも振動し始める。また、バリオン数 B は、

$$B = \int dV \mathrm{Im}\left(\phi \partial_0 \phi^*\right) \quad (4)$$

と書けるので、この位相空間内での回転はバリオン数を持っていることを表す。

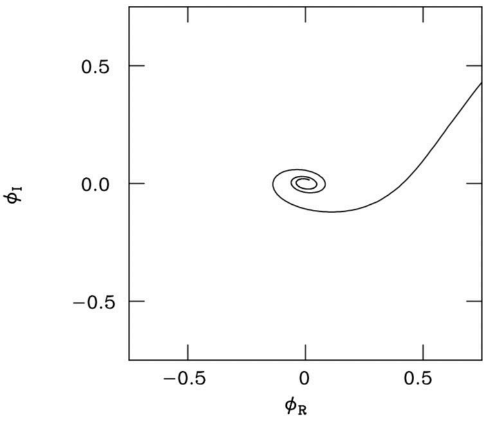

図 1: Affleck-Dine 場の振動例 [4]

3 Q-ball

3.1 複素スカラー場における Q-ball 解

Q-ball は、1985 年に Coleman が Affleck-Dine 機構とは関係なく、複素スカラー場の理論においてそのような配位が存在することを提唱したことから始まった [5]。状況としては、U(1) 対称性を持つある複素スカラー場を考えると、U(1) 対称性を持っている場合、ある保存量 Q が存在し、今の場合バリオン数に対応する。この保存量 (バリオン数)

$$Q[\psi] = i \int_x \left[\psi^\dagger \left(\partial_t - i\omega\right) \psi - \psi \left(\partial_t + i\omega\right) \psi^\dagger\right] \quad (5)$$

を一定に保ったまま、スカラー場の値を変化させ、スカラー場の持つエネルギー

$$E[\psi] = i \int_x \left[\left|\dot{\psi} - i\omega\psi\right|^2 + |\boldsymbol{\nabla}\psi|^2 + m_\phi^2 |\psi|^2 + V_{\mathrm{eff}}(|\psi|)\right] \quad (6)$$

が最小になるようなスカラー場の配位を考える。ここで、ポテンシャルがスカラー場の大きなところで $|\psi|^2$ よりも平坦になっていれば、エネルギーを最小化するスカラー場の配位は局所的で球対称になる。スカラー場が局所的に安定な配位を持つとき、その配位をソリトンと呼ぶ。また、今考えているような U(1) 対称性を持つ理論で現れるソリトンを Q-ball と呼ぶ。スカラー場だけ考えるとエネルギーが最小となる配位なので、Q-ball は安定となる。

3.2 Affleck-Dine 機構における Q-ball

Affleck-Dine 機構においてはスクォーク場というスカラー場が宇宙にバリオン数を生成する役割を果たす。このスカラー場のポテンシャルはスクォーク場の値が大きなところで平坦になっており、前節で

述べたように Q-ball 解を持つ。よって、Affleck-Dine 機構ではバリオン数が生成されるだけでなく、Q-ball が生成される可能性がある。実際、図 2 のように、スカラー場が持つわずかな空間的揺らぎが大きくなり、球状のスカラー場の固まり (Q-ball) が生成される。前節で Q-ball は安定であるとしたが、今我々はスカ

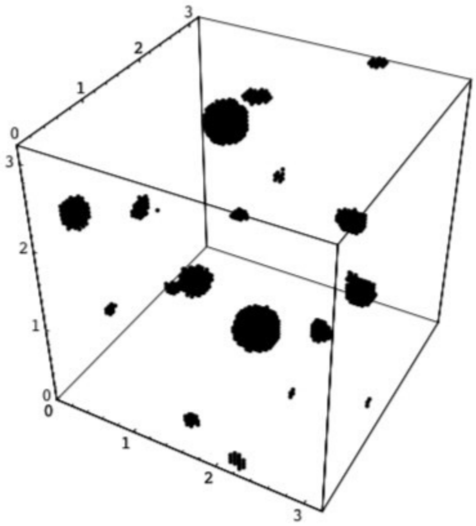

図 2: Affleck-Dine 機構における Q-ball 生成シミュレーション [6]

ラー場としてスクォークを考えている。ここで、スクォークは不安定であり、クォークと軽い超対称性粒子に崩壊する。この崩壊過程は Coleman の理論に

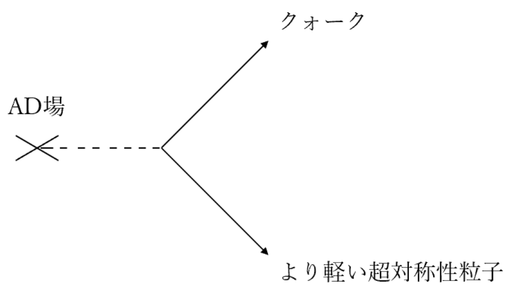

図 3: AD 場の崩壊過程

はなかったので、この過程を通して Q-ball は崩壊できる。このような過程を通して、Affleck-Dine 機構では宇宙にバリオンを生成する。

4 Conclusion

Affleck-Dine 機構は、AD 場がインフレーション中は大きな真空期待値を持っており、インフレーション後に振動を始めると同時に、ポテンシャルをズラす a-term から位相方向に回転を始めてバリオン数を生成する。そのとき、Q-ball という局在化した配位を形成する場合がある。そして、この Q-ball はスクォークで構成されているので、スクォークがクォークに崩壊することによって、宇宙のバリオン非対称を生み出す。

Acknowledgement

今回の論文のレビュー発表に際して、QG 研のスタッフや先輩方にお力添えいただけました。知識が少ないところサポートをし、真摯に対応していただきありがとうございました。

5 参考文献

1. I. Affleck and M. Dine, Nucl. Phys. B 249, 361 (1985)
2. J. Beringer et al. [Particle Data Group Collaboration], Phys. Rev. D 86, 010001 (2012)
3. E. Komatsu et al. [WMAP Collaboration], Astrophys. J. Suppl. 192, 18 (2011) [arXiv:1001.4538 [astro-ph.CO]]
4. arXiv:hep-ph/9507453v1
5. S.R. Coleman, Nucl. Phys. B 262 , 263 （1985）
6. S. Kasuya and M. Kawasaki Phys.Rev. D62 (2000) 023512 (2000)
7. G. White, L. Pearce, D. Vagie and A. Kusenko, Phys. Rev. Lett. 127, no.18, 18 (2021)

———index へ戻る

重宇 a05

最小限に修正された重力理論におけるブラックホールから伝播する重力波

立教大学 理学研究科
齋藤 仁

未提出

————index へ戻る

重宇 a06

重力波による修正重力理論の検証:エコーとゆがみ

東京大学大学院 理学系研究科
野瀬 観見

重力波による修正重力理論の検証：エコーとゆがみ

野瀬 観見 (東京大学大学院 理学系研究科物理学専攻 M1)

Abstract

宇宙の加速膨張やダークエネルギーなど、一般相対性理論 (GR) では解決できない問題のために、GR に代わるさまざまな理論が提案されている。本稿では、それらの検証に、連星ブラックホール (連星 BH) からの重力波 (GW) が利用できることを示した先行研究 (J.M.Ezquiaga et al. 2021) をレビューする。特定の修正重力理論に立脚せず現象論的に伝播方程式を変更し、その解を WKB 近似を用いて解析的に求めた。また、実際の GW の波形の GR からの変化とそれらの物理的な理由を具体的に示した。

1 Introduction

本稿がレビューする先行研究 (J.M.Ezquiaga et al. 2021) は、計量テンソル揺らぎ $h^{(+,\times)}$ の他にもう一つのテンソル揺らぎ $s^{(+,\times)}$ を予言する修正重力理論を仮定して、GW が一様等方宇宙をどう伝播するのかについて議論している。まず (J.B.Jimenez et al. 2020) と同様にして、GR でのテンソル揺らぎ $h^{(+,\times)}$ の伝播方程式を、係数を 2×2 行列とする二階線型微分方程式に拡張する (特定の修正重力理論に立脚させないために、行列の成分は全て任意にしておく)。一般にこれらの行列の成分は時間に依存しても良く、解を求めることはできない。しかし、GW の周期がハッブル時間より十分に小さい場合、Wentzel-Kramers-Brillouin(WKB) 近似 (又はアイコナール近似) を用いて解析的な解を求めることができる。宇宙論的距離を伝播した連星 BH からの GW はこの条件を満たしている。先行研究 (J.M.Ezquiaga et al. 2021) はまず、係数が 2×2 行列に拡張された二階線形微分方程式を、初期条件が Gaussian wavepacket であった場合について数値的に解き、解析的な解がこれと矛盾しないことを確かめた。そして、この解析的に求めた解を用いて、実際の連星 BH からのチャープ波が GR からどのように変化するのかを明らかにした。先行研究 (J.M.Ezquiaga et al. 2021) は合計 85 ページから成り、このレビューでは全てを網羅できないため、一部を抜粋して議論する。2 章で WKB 近似による解の求め方、3 章で実際のチャープ波の波形を見る。4 章でこれらの波形に物理的解釈を与える。

2 Methods

まず、GR において、$h^{(+,\times)}$ が満たす伝播方程式は次の一本の二階線形微分方程式である。

$$\frac{d^2}{d\eta^2}h^{(+,\times)} + 2\mathcal{H}\frac{d}{d\eta}h^{(+,\times)} + c^2k^2h^{(+,\times)} = 0 \quad (1)$$

$h^{(+,\times)}$ の他に $s^{(+,\times)}$ を予言する修正重力理論であれば、これは次のように拡張される。

$$[\hat{I}\frac{d^2}{d\eta^2} + \hat{\nu}(\eta)\frac{d}{d\eta} + \hat{C}(\eta)k^2 \pm \hat{\Pi}(\eta)k + \hat{M}(\eta)]\begin{pmatrix} h \\ s \end{pmatrix} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{\Phi} \equiv \begin{pmatrix} h \\ s \end{pmatrix}; \hat{W}(\eta) \equiv \hat{C}(\eta)k^2 \pm \hat{\Pi}(\eta)k + \hat{M}(\eta)$$

2.1 係数行列が全て時間依存しない場合

もしこの方程式の係数行列が全て時間依存しなければ

$$[\hat{I}\frac{d^2}{d\eta^2} + \hat{\nu}\frac{d}{d\eta} + \hat{W}]\begin{pmatrix} h \\ s \end{pmatrix} = 0 \quad (3)$$

であるが、この微分方程式であれば、解空間を 4 次元と考えて 4 つ独立解を見つけることで解くことができる。解を $\vec{\Phi} = \begin{pmatrix} h \\ s \end{pmatrix} = e^{i\theta_A\eta}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ だと仮定すると、式 (3) の左辺 [] 内の行列には Kernel があることになるので、

$$det[\hat{W} - \hat{I}\theta_A^2 + i\hat{\nu}\theta_A] = 0 \quad (4)$$

少し計算をして解を求めると、実数 ω_A と Γ_A を使って

$$\theta_{A\pm} = \pm\omega_A + i\Gamma_A \tag{5}$$

の 4 つがあることがわかる ($A = 1, 2$)。$\theta_{A\pm} = \pm\omega_A + i\Gamma_A$ のそれぞれに対応する固有ベクトルは

$$[\hat{W} - \hat{I}\theta_A^2 + i\hat{\nu}\theta_A]\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = 0 \tag{6}$$

から求められ、$\vec{\Phi}$ の一般解はこれら 4 つの独立解の線型結合となる。計算の結果、一般解は $\vec{H}_{0,\pm}$ を任意ベクトルとして

$$\vec{\Phi} = \hat{U}_-\hat{P}_-\vec{H}_{0,-} + \hat{U}_+\hat{P}_+\vec{H}_{0,+} \tag{7}$$

$$\hat{P} = \hat{P}_- = \hat{P}_+^* = \begin{pmatrix} e^{-i\omega_1\eta-\Gamma_1\eta} & 0\\ 0 & e^{-i\omega_2\eta-\Gamma_2\eta}\end{pmatrix}$$

$$\hat{U}_\pm = \frac{\hat{E}_\pm}{\sqrt{det(\hat{E}_\pm)}}$$

$$\hat{E}_\pm = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\hat{W}_{12}+i\hat{\nu}_{12}\theta_{2\pm}}{\hat{W}_{11}-\theta_{2\pm}^2+i\hat{\nu}_{11}\theta_{2\pm}}\\ -\frac{\hat{W}_{21}+i\hat{\nu}_{21}\theta_{1\pm}}{\hat{W}_{22}-\theta_{1\pm}^2+i\hat{\nu}_{22}\theta_{1\pm}} & 1\end{pmatrix}$$

となる。+ 方向に進む波のみを考えるため、式 (7) の $\hat{U}_-\hat{P}_-\vec{H}_{0,-}$ のみを取り出す。少し計算すれば、$\vec{\Phi}_0 = \begin{pmatrix}h_0\\ 0\end{pmatrix}$ として $\vec{\Phi} = \hat{U}_-\hat{P}_-\vec{H}_{0,-} = \hat{U}_-\hat{P}_-\hat{U}^{-1}\vec{\Phi}_0$ の第一成分は (s は検出されずかつ $s_0 = 0$)、

$$h(\eta, k) = \frac{h_0(k)}{1 - \hat{E}_{12}\hat{E}_{21}}(e^{-i\omega_1\eta-\Gamma_1\eta} - \hat{E}_{12}\hat{E}_{21}e^{-i\omega_2\eta-\Gamma_2\eta}) \tag{8}$$

と求められる。

2.2 係数行列に時間依存がある場合

一般解を求めることはできないので、連星 BH からの GW の周期がハッブル時間より十分短いことを利用して、WKB(アイコナール近似) を行う。1 つ方向に進む波の解として

$$\begin{aligned}\vec{\Phi} &= \hat{U}(\eta)\begin{pmatrix} e^{\frac{i}{\epsilon}\int_{\eta_0}^{\eta}\theta_1(\eta')d\eta'} & 0\\ 0 & e^{\frac{i}{\epsilon}\int_{\eta_0}^{\eta}\theta_2(\eta')d\eta'}\end{pmatrix}\\ &\quad\times(\vec{V}_0(\eta) + \epsilon\vec{V}_1(\eta) + \cdots)\\ &\equiv \hat{U}(\eta)\hat{P}_0(\eta,\eta_0)[\hat{Q}_0(\eta,\eta_0) + \epsilon\hat{Q}_1(\eta,\eta_0) + \cdots]\\ &\quad\times\hat{U}^{-1}(\eta_0)\vec{\Phi}_0\end{aligned} \tag{9}$$

を考え、さらにこれを代入する微分方程式を次のように変更しなければならない。

$$[\epsilon^2\hat{I}\frac{d^2}{d\eta^2} + \epsilon\hat{\nu}(\eta)\frac{d}{d\eta} + \hat{W}(\eta)]\begin{pmatrix}h\\ s\end{pmatrix} = 0 \tag{10}$$

この方程式が全ての ϵ の次数で成立していると考える。0 次と 1 次のみに着目すると

$$\epsilon^0 : \hat{W}\hat{U} - \hat{U}\hat{\theta}^2 + i\hat{\nu}\hat{U}\hat{\theta} = 0 \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\epsilon^1 &: (2\hat{U}\hat{\theta} + i\hat{\nu}\hat{U})\hat{P}_0\hat{Q}_0'(\eta,\eta_0)\\ &+(\hat{U}\hat{\theta}' + 2\hat{U}'\hat{\theta} + i\hat{\nu}\hat{U}')\hat{P}_0\hat{Q}_0(\eta,\eta_0) = 0\end{aligned} \tag{12}$$

$$\hat{\theta} \equiv \begin{pmatrix}\theta_1 & 0\\ 0 & \theta_2\end{pmatrix}$$

0 次の等式を注意深く見ると、今は $det(\hat{U}) \neq 0$ と考えて良いため、θ_1 と θ_2 はどちらも

$$\begin{aligned} & det[\hat{W}\hat{U} - \hat{U}\theta_A^2 + i\hat{\nu}\hat{U}\theta_A] = 0\\ \Leftrightarrow\quad & det[\hat{W} - \hat{I}\theta_A^2 + i\hat{\nu}\theta_A] = 0\end{aligned} \tag{13}$$

を満たす。従って式 (4) より、θ_A は、係数行列に時間依存がない場合と全く同様の形で、$\hat{W}$ と $\hat{\nu}$ の成分を使って求められることがわかった。また、$\hat{W}\hat{U} - \hat{U}\theta_A^2 + i\hat{\nu}\hat{U}\theta_A$ の A 列目は 0 ベクトルなので、$\hat{U}$ の A 列目 $\begin{pmatrix}\alpha_A\\ \beta_A\end{pmatrix}$ は

$$[\hat{W} - \hat{I}\theta_A^2 + i\hat{\nu}\theta_A]\begin{pmatrix}\alpha_A\\ \beta_A\end{pmatrix} \tag{14}$$

を満たすことがわかる。式 (6) から、$\hat{U}(\eta)$ も係数が時間依存しない場合と全く同じ形となることがわかる。

式 (11) の 1 次の等式からは、$\hat{A}_{WKB} \equiv \hat{P}_0^{-1}(2\hat{U}\hat{\theta} + i\hat{\nu}\hat{U})^{-1}(\hat{U}\hat{\theta}' + 2\hat{U}'\hat{\theta} + i\hat{\nu}\hat{U}')\hat{P}_0$ を使って、

$$\hat{Q}_0(\eta,\eta_0) = e^{-\int_{\eta_0}^{\eta}\hat{A}_{WKB}(\eta')d\eta'} \tag{15}$$

と $\hat{Q}_0$ が求まる。+方向に進む $\vec{\Phi}(\eta)$ の leading order は、$\theta_{A-} = -\omega_A + i\Gamma_A$ の二つを選択して

$$\vec{\Phi}(\eta) = \hat{U}_-(\eta)\hat{P}_{0-}(\eta,\eta_0)e^{-\int_{\eta_0}^{\eta}\hat{A}_{WKB}(\eta')d\eta'}\hat{U}_-^{-1}(\eta_0)\vec{\Phi}_{0-} \tag{16}$$

となる。ここで、$e^{-\int_{\eta_0}^{\eta}\hat{A}_{WKB}(\eta')d\eta'}$ の非対角成分は 0 になるという近似を使うと (断熱近似)、$s_0 = 0$ に

注意して、

$$h(\eta,k)=\frac{h_0(k)}{1-\hat{E}_{12}(\eta_0)\hat{E}_{21}(\eta_0)}\sqrt{\frac{det(\hat{E}(\eta_0))}{det(\hat{E}(\eta))}}$$
$$\times(e^{-i\int_{\eta_0}^{\eta}\omega_1 d\eta'-\int_{\eta_0}^{\eta}\Gamma_1 d\eta'}\hat{Q}_{0,11}(\eta,\eta_0)$$
$$-\hat{E}_{12}(\eta)\hat{E}_{21}(\eta_0)e^{-i\int_{\eta_0}^{\eta}\omega_2 d\eta'-\int_{\eta_0}^{\eta}\Gamma_2 d\eta'}\hat{Q}_{0,22}(\eta,\eta_0))$$
$$\equiv h_0[f_1(\eta,k)e^{-i\int_{\eta_0}^{\eta}\omega_1 d\eta'}+f_2(\eta,k)e^{-i\int_{\eta_0}^{\eta}\omega_2 d\eta'}] \tag{17}$$

が得られ、求めたい解を得ることができる。

式 (2) を WKB で解く場合、GR からのずれを考えるので、$\hat{\nu}$ には $2\mathcal{H}$ が既に含まれていると考えなければならないが、これを $\begin{pmatrix} ah \\ as \end{pmatrix}$ に関する微分方程式に書き直せば、$\hat{\nu}$ の対角成分から $2\mathcal{H}$ を消去できる ($(ck)^2 \gg \mathcal{H}^2, \mathcal{H}'$ に注意)。この $\begin{pmatrix} ah \\ as \end{pmatrix}$ を今までに述べた方法で求めていくことに注意すると、式 (17) から、我々が現在において観測する h は次のように求まる。

$$h(k,z_s)=h_{fid}(k,z_s)[f_1(k,z_s)e^{-i\int_0^{z_s}\frac{\Delta\omega_1(k,z_s)}{H(z)}dz}$$
$$+f_2(k,z_s)e^{-i\int_0^{z_s}\frac{\Delta\omega_2(k,z_s)}{H(z)}dz}] \tag{18}$$
$$\Delta\omega_A(k,z_s)\equiv\omega_A-ck$$

ここでは $h_{fid}(k,z_s)$ は連星 BH がどちらも等質量で face-on の場合において求めることとする。式 (18) の全ての k を二つの分散関係を用いて ω に直し、時間 t との間のフーリエ変換を実行すると、修正されたチャープ波が得られる。

3 Results

3.1 Friction mixing がある場合

Friction の行列 $\hat{\nu}$ に非対角成分がある例として次のような微分方程式が成り立つ場合を考える。

$$[\hat{I}\left(\frac{d^2}{d\eta^2}+(ck)^2\right)+\begin{pmatrix} 0 & -2\bar{\alpha}\mathcal{H} \\ 2\bar{\alpha}\mathcal{H} & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{d\eta}]$$
$$\times\begin{pmatrix} a(\eta)h(\eta,k) \\ a(\eta)s(\eta,k) \end{pmatrix}=0 \tag{19}$$

式 (18) に従ってチャープ波を表すと、図 1 のようになる ($\bar{\alpha}$ は定数、m_{1z} は等質量連星 BH の redshift component mass)。ここで、WKB 近似で解析的に解いた結果は

$$\omega_1(\eta)=\sqrt{c^2k^2+(\bar{\alpha}\mathcal{H})^2}-\bar{\alpha}\mathcal{H}$$
$$\omega_2(\eta)=\sqrt{c^2k^2+(\bar{\alpha}\mathcal{H})^2}+\bar{\alpha}\mathcal{H}$$
$$v_g=c^2k/\sqrt{c^2k^2+(\bar{\alpha}\mathcal{H})^2} \tag{20}$$

である。

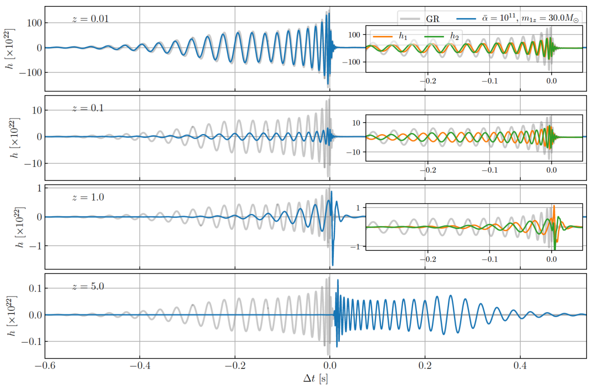

図 1: Friction mixing がある場合の波形

観測者からさほど遠くない連星 BH からの GW は、波の外側を結ぶ最大振幅が、距離 z に従って大小を繰り返しているのがわかる。またその振幅は GR の場合の振幅に比べて定数倍となっているように見える。さらに、観測者から遠ざかると、波形が次第にゆがみ、最終的に左右反転したような形の波が届くようになることがわかる。上から 3 つのパネルには、重ね合わされている二つの異なる固有振動数 ω_1 と ω_2 を持った波の様子も示されている。

3.2 Mass mixing がある場合

Mass の行列 $\hat{M}$ に非対角成分がある例として次のような微分方程式が成り立つ場合を考える。

$$[\hat{I}\left(\frac{d^2}{d\eta^2}+(ck)^2\right)+a(\eta)^2c^4\begin{pmatrix} m_h^2 & m_{hs}^2 \\ m_{hs}^2 & m_s^2 \end{pmatrix}]$$
$$\times\begin{pmatrix} a(\eta)h(\eta,k) \\ a(\eta)s(\eta,k) \end{pmatrix}=0 \tag{21}$$

チャープ波は図 2 のようになる (式 (21) の 3 つのパラメータは $m_{hs}^4 = m_h^2 m_s^2$、$m_g = m_s^2 + m_h^2$、$\tan^2\Theta_g = (m_{hs}/m_s)^4$ という関係式を満たしていて、後ろの 2 つは図 2 の上部で与えられている)。ここで、WKB 近似の結果は、k が大きい極限で

$$\omega_1^2(\eta) = c^2k^2$$
$$\omega_2^2(\eta) = c^2k^2 + a^2c^4m_g^2$$
$$\frac{v_{g,2}}{c} \approx 1 - \frac{a^2c^2m_g^2}{2k^2} \tag{22}$$

である。

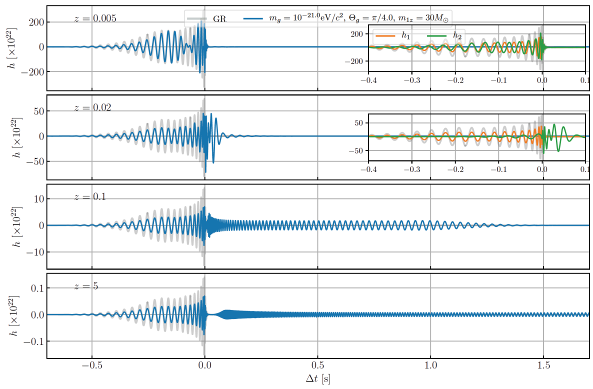

図 2: Mass mixing がある場合の波形

図 2 において一番上のパネルでは、振幅が突然小さくなる瞬間が訪れている。また、下の二つのパネルではエコーが起きていて、さらにそのエコーは通常の波形を左右反転させたような形になっている。

4 Discussion

まず最初に、簡単のために係数行列が時間依存しない場合を考えて、GR では起こらない現象としてどのようなものがあるかを考える。係数が時間依存する場合にも同じような現象が起こると考えられる。

一つ目はうなりである。GR では分散関係は $\omega = ck$ の一つであったが、今は $\omega = \omega_1$ と $\omega = \omega_2$ の二つの固有振動数が得られている。そのため、式 (8) の絶対値の 2 乗をとると $\cos(\Delta\omega - c)$ (c は定数、$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$) という項が現れるが、これがうなりを引き起こす原因である。

二つ目にはエコーがある。ω_1 と ω_2 の二つの固有振動数を k で偏微分すれば、二種類の波束の群速度が得られる。この二つの速度に違いがあれば、emission 時に一つの山だった波も、次第に二つの波束に分離することになる。よって観測者は同じ物理的対象 (超新星爆発など) から 2 回 GW を観測することになる。観測者からの距離が遠ければ遠いほど起こりやすくなると考えられる。

最後にゆがみ (broadening) がある。一つの波束に着目するとき、その群速度が k に依存していれば、波束はさまざまな k(従ってさまざまな速度) をもつ波で構成されるため、ひとりでに形がゆがんでいくことになる。

図 1 の上二つのパネルにおいて、波の外側を結ぶ最大振幅の、距離 z に従って大小を繰り返す挙動はうなりによるものだと考えられる。また、群速度は二つの波束で等しいが、k が大きいほど速いので broadening が起きる。最後には合体の瞬間の波が、inspiral の時の小さい k の波を追い越して先に観測されるようになる。

うなりをまとめる cos 波にも今までと同様に群速度を $\frac{\partial\Delta\omega}{\partial k}$ で定義できるが、Mass mixing がある場合、式 (22) より $\Delta\omega$ が k に依存しているのでこれは 0 とならず、節と腹の位置が時間によって変化することがわかる。これが図 2 の一番上のパネルで、振幅が突然小さくなる瞬間 (節) が訪れている理由である。さらにこの場合二つの群速度は異なるためエコーが起き、そのエコーの波形において合体の瞬間の波が inspiral の波を追い越している。

5 Conclusion

宇宙論的距離を伝播した連星 BH からの GW は、修正重力理論の検証に用いることができる。また、うなり、エコー、ゆがみによって GR からの波形の変化を説明できる。

Reference

Jose Maria Ezquiaga, Wayne Hu, Macarena Lagos & Meng-Xiang Lin 2021, arXiv:2108.10872v2

Jose Beltran Jimenez, Jose Maria Ezquiaga, & Lavinia Heisenberg 2020, arXiv:1912.06104v2

———index へ戻る

重宇 a07

光学機械振動子系のビーム模型の定式化と揺らぎの推定

九州大学大学院 宇宙物理理論研究室
七條 友哉

光学機械振動子系のビーム模型の定式化と揺らぎの推定

七條 友哉 (九州大学大学院 宇宙物理理論研究室 M2)

Abstract

自然界には 4 つの力が存在し、電磁気力、強い力および弱い力は量子力学に従うが、重力が量子力学に従っていることが検証されていない。もし重力が量子力学の枠組みに従うならば、重力の量子力学的重ね合わせ状態が観測できるはずである。重力は他の力に比べ非常に弱い力であり、重力の効果を大きくするために物体を巨視化してしまうと環境との相互作用により、物体を量子力学的状態に保つことが難しくなる。光学機械振動子は、重力波の検出にも応用されている光共振器と振動子とを組み合わせた力学系で、振動子の量子力学的状態の制御が可能になりつつある。例えば、[1] では重力の量子性の検証に向けて、7mg の振動子についてエネルギー散逸を大きく低減することに成功し、従来の限界より 2 桁ほど重い巨視的振動子の量子制御が可能になっている。この研究では、光共振器の片側の鏡を固定し、もう片側の鏡をひもでつるした振動子とする光学機械振動子の理論模型をビーム模型へ拡張し、その量子制御に向けた理論解析を行った。ビーム模型は、振動子をつるすひもや鏡が有限の大きさを持つ際に変形まで考慮したモデルであり、実際の実験により近い理論模型である。ビーム模型を導入すると鏡の運動が複雑化するため、周波数が小さい領域だけを考え、近似を行うことで、鏡の重心運動と回転運動に帰着することを示す。

1 導入

現代物理学は、マクロな現象を記述する一般相対性理論とミクロな現象を記述する量子力学の大きな二つの柱によって発展してきた。どちらも実験結果と整合の取れた優れた理論である。しかし、それぞれの実験的なスケールは、重力測定可能な物体の質量は 10^{-1}g であり、量子制御可能な物体は 10^{-8}g となっており、大きく隔たっている。両理論の統合に向けた検証実験は今のところ実現していない。本研究の大きな目的は重力測定と量子制御ができていないスケールである、メゾスコピックな領域に着目し、連続変位測定を行うことで標準量子限界に近づけることができるのかを検証することである。先行研究 [2] では、7mg の懸架鏡の変位を 10^{-14}m 程度の高い分解能で測定することができ、重力の量子性への検証が期待されている。より高精度の変位測定を行うためには、精密な理論模型が必要となってくる。本研究では鏡の回転と鏡がつるされているひもの運動まで考慮して、懸架鏡の変位をより正確に測定する理論を構築した。

2 ビーム模型

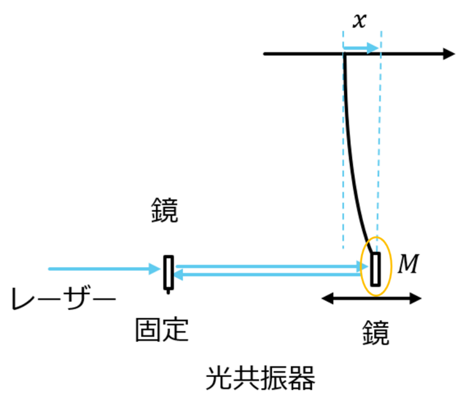

図 1: セットアップ

図 1 に示すように 2 つの鏡を距離 L だけ離して用意する。右側の鏡を動かないように固定し、右側の懸架鏡はひもと有限の大きさを持つ鏡からなるとする。左右の鏡 (光共振器) 内部に光子を閉じ込めることを考える。光共振器内の光は定在波となっており、右側の鏡と相互作用する。また、光子は鏡で完全に反射せず一部は鏡を透過するが、左の鏡の外からレーザーを照射することにより、減少していく光子を補うも

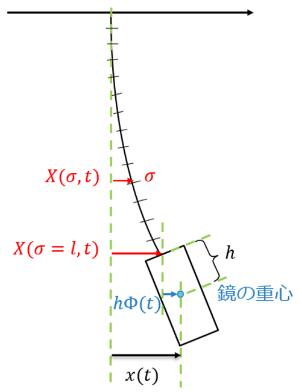

図 2: セットアップ (懸架鏡の詳細)

のとする。また、左の鏡を透過した光子を測定する。図 2 は懸架鏡の詳細について図示したものである。ひもについて、複素ヤング率 E、慣性モーメント I、単位長さあたりの質量 ρ を持つ。このひもの一端は天井に固定されており、距離 ℓ 離れたもう一方の端には、有限の大きさの鏡が取り付けられている。鏡は質量 M で、重心を中心に慣性モーメント J を持っている。鏡の重心からひもが取り付けられている位置までの距離は h である。鏡はひもに $T=Mg$ の張力を与える。簡単のため、ひもと鏡は 1 次元方向にのみ運動すると仮定する。ひも上に座標 σ を取ると、ひもの位置は、$0\le\sigma\le\ell$ の範囲で、関数 $X(\sigma,t)$ で記述される。ひもはせん断変形をしないと仮定すると、鏡の重心位置は $x(t)=X(\ell,t)+h\Phi(t)$ と表される。ここで、$\Phi(t)=x'(L,t)$($'$ は縦方向の σ 座標に対する微分を表す) とする。

この時、ひもの位置 $X(\sigma,t)$, 鏡の位置 $x(t)$, 鏡の傾き $\Phi(t)$ に対して共役な運動量を以下のように定義する ($\dot{}$ は時間微分を表す)。

$$\begin{aligned}\Pi(\sigma,t) &= \rho\dot{X}(\sigma,t)\\ p(t) &= M\dot{x}(t)\\ \Pi_{\Phi}(t) &= J\dot{\Phi}(t)\end{aligned} \tag{1}$$

よって全系のハミルトニアンは次のように与えられる。

$$\begin{aligned}H &= \int_0^{\ell} d\sigma\left\{\frac{1}{2\rho}\Pi^2(\sigma,t)+\frac{1}{2}T\left(\frac{\partial X(\sigma,t)}{\partial\sigma}\right)^2\right.\\ &\quad\left.+\frac{1}{2}EI\left(\frac{\partial^2 X(\sigma,t)}{\partial\sigma^2}\right)^2\right\}\\ &\quad+\frac{1}{2M}p^2(t)+\frac{1}{2J}\Pi_{\Phi}^2(t)+\frac{hT}{2}\Phi^2(t)\\ &\quad+\hbar\omega_c a^\dagger a-\hbar G_0 a^\dagger a x+i\hbar\varepsilon(a^\dagger e^{-i\omega_0 t}-ae^{i\omega_0 t})\end{aligned} \tag{2}$$

ここで、キャビティ内の光子は昇降演算子 $a,a^\dagger([a,a^\dagger]=1)$ を用いて表す。また、ω_c はキャビティ内の光子の周波数であり、$G_0(=\omega_c/L)$ は光子と鏡の結合定数である。$|\varepsilon|=\sqrt{2P\kappa/\hbar\omega_0}$ であり、P はキャビティの外から照射されるレーザーの出力、κ は鏡の減衰率 ω_0 はレーザーの周波数である。ひもと鏡とキャビティ内の光子の運動方程式は次で与えられる。

$$\rho\ddot{X} = T\frac{\partial^2 X}{\partial\sigma^2}-EI\frac{\partial^4 X}{\partial\sigma^4} \tag{3}$$

$$M\ddot{x} = -T\Phi+EI\left.\frac{\partial^3 X}{\partial\sigma^3}\right|_{\sigma=\ell}+\hbar G_0 a'^\dagger a' \tag{4}$$

$$J\ddot{\Phi} = -EI\left(\left.\frac{\partial^2 X}{\partial\sigma^2}\right|_{\sigma=\ell}+h\left.\frac{\partial^3 X}{\partial\sigma^3}\right|_{\sigma=\ell}\right) \tag{5}$$

$$\dot{a}' = iG_0a'x-\{\kappa+i(\omega_c-\omega_0)\}a'+\varepsilon \tag{6}$$

ここで、a^{in} は光子の真空揺らぎを表す。ただし、$a'\equiv ae^{i\omega_0 t}$ と定義しなおした。以下では a' を a と省略して書く。

次に、$X=\bar{X}+\delta X, x=\bar{x}+\delta x, \Phi=\bar{\Phi}+\delta\Phi, a=\bar{a}+\delta a$ の摂動を考える。($\bar{X},\bar{x},\bar{\Phi},\bar{a}$ は定常状態を表し、$\dot{\bar{X}}=\dot{\bar{x}}=\dot{\bar{\Phi}}=\dot{\bar{a}}=0$ である。) 定常解は次のように与えられる。

$$\bar{X}(\sigma) = \frac{\hbar G_0|\bar{a}|^2}{T}\sigma \tag{7}$$

$$\bar{x} = \frac{\hbar G_0|\bar{a}|^2}{T}(\ell+h) \tag{8}$$

$$\begin{aligned}|\bar{a}|^2 &= \frac{|\varepsilon|^2}{\kappa^2+\Delta^2}\\ \Delta &= \omega_c-\omega_0-G_0\mathcal{G}|a|^2\end{aligned} \tag{9}$$

ここで、$\mathcal{G}=\hbar G_0\bar{x}/T$ と定義した。

1 次の摂動方程式をまとめると、

$$\begin{aligned} \rho\delta\ddot{X} &= T\frac{\partial^2\delta X}{\partial\sigma^2} - EI\frac{\partial^4\delta X}{\partial\sigma^4} && (10)\\ M\delta\ddot{x} &= -T\delta\Phi + EI\left.\frac{\partial^3\delta X}{\partial\sigma^3}\right|_{\sigma=\ell} + \hbar G\delta A && (11)\\ J\delta\ddot{\Phi} &= -EI\left(\left.\frac{\partial^2\delta X}{\partial\sigma^2}\right|_{\sigma=\ell} + h\left.\frac{\partial^3\delta X}{\partial\sigma^3}\right|_{\sigma=\ell}\right) && (12)\\ \delta\dot{A} &= -\kappa\delta A + \Delta\delta B && (13)\\ \delta\dot{B} &= -\kappa\delta B - \Delta\delta A + G\delta x && (14) \end{aligned}$$

となる。ここで、新たな変数として $\delta A, \delta B, G$ を定義した。

$$\begin{aligned} \delta A &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta a + \delta a^\dagger)\\ \delta B &= \frac{1}{\sqrt{2}i}(\delta a - \delta a^\dagger)\\ G &= \sqrt{2}G_0\bar{a} \end{aligned}$$

フーリエ変換を

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}(t)e^{i\omega t} \qquad (15)$$

として書き直し、式 (10) に外力 F が加えられたとすると、

$$\begin{aligned} F &= -M\omega^2\delta x(\omega) + T\delta\Phi(\omega) - EI\left.\frac{\partial^3\delta X(\sigma,\omega)}{\partial\sigma^3}\right|_{\sigma=\ell}\\ &\quad -\hbar G\delta A(\omega) \qquad (16) \end{aligned}$$

と書ける。インピーダンス $Z(\omega)$ は外力 F を用いて次のように書ける。

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= \frac{F}{-i\omega\delta x} && (17)\\ &= \frac{K(\omega) - M\omega^2}{-i\omega} && (18) \end{aligned}$$

ここで、$K(\omega)$ は有効ばね定数を表し、

$$K(\omega) = \frac{T\delta\Phi(\omega) - EI\left.\frac{\partial^3\delta X(\sigma,\omega)}{\partial\sigma^3}\right|_{\sigma=\ell} - \hbar G\delta A(\omega)}{\delta x(\omega)} \qquad (19)$$

である。よって、定常状態の熱揺らぎのスペクトル密度 $\delta x^2(\omega)$ は揺動散逸定理を仮定すると次のように求まる。

$$\delta x^2(\omega) = \frac{4k_BT_0}{\omega^2}\mathrm{Re}\left[\frac{1}{Z(\omega)}\right] \qquad (20)$$

3 結果

パラメータの値については、[2] の実験を参考にし、次に示す。
$M = 7.71\times10^{-3}$ g, $T = 7.56$ g cm/s^2, $\rho = 1.72\times10^{-8}$ g/cm,$l = 1$cm,$h = 0.15$cm, $\hbar = 1.05^{-27}$ g cm^2/s, $J = 4.50\times10^{-5}$g cm^2,$E_0I = 3.58\times10^{-6}$g cm^3/ s^2,$k_B = 1.38\times10^{-16}$g cm^2/ K s^2,$T_0 = 10^{-2}$K, $\kappa = 2\pi\times8.2\times10^5$ Hz, $\Delta = -0.0292\times2\kappa$

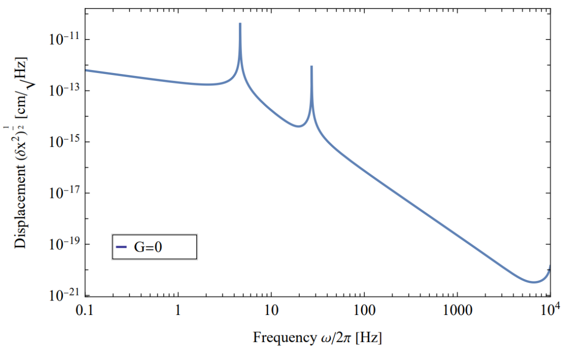

図 3: $T_0 = 10^{-2}$K の際、鏡の変位の揺らぎの 2 乗期待値のスペクトル解析。G=0 の時は、光子が鏡と相互作用せず、鏡は光子からの輻射圧を受けない。

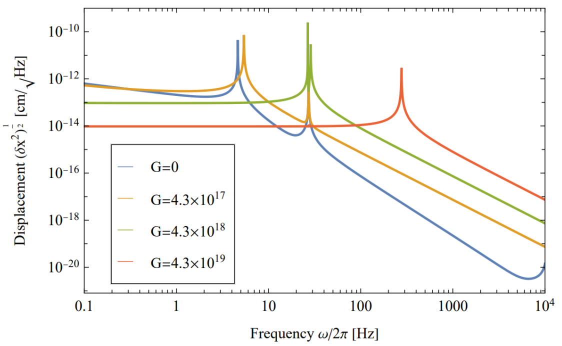

図 4: $T_0 = 10^{-2}$K の際、光子と鏡の相互作用 G を変化させたときの鏡の変位の揺らぎの 2 乗期待値のスペクトル解析。

図 3 に光子と鏡の相互作用がない場合 (G=0) について変位 $\sqrt{\delta x^2}$ のスペクトル密度を表した。このスペクトル密度は 2 つのピークが立っており、$\omega/2\pi =$ 4.9Hz は振り子モードの固有振動数であり、$\omega/2\pi =$ 31Hz は鏡の回転モードの固有振動数である。振り

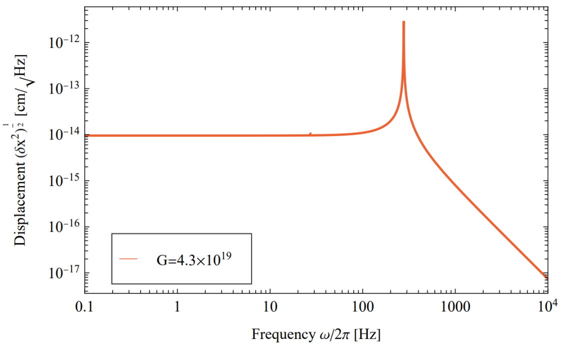

図 5: $T_0 = 10^{-2}$K の際、先行研究 [2] を再現する、鏡の変位の揺らぎの 2 乗期待値 $< \delta x >$ のスペクトル解析。

子モードは、鏡の重心と鏡の回転が同じ方向に運動するモード (鏡を質点として扱う際の運動) であり、鏡の回転モードは、鏡の重心と鏡の回転が逆方向に運動するモードである。図 4 に光子と鏡の相互作用を変化させた場合について変位 $\sqrt{\delta x^2}$ のスペクトル密度を表した。振り子モードは光子と鏡の相互作用 G が大きくなるほど、固有振動数が大きくなることがわかった。一方で鏡の回転モードの周波数は相互作用の大きさによらず一定である。図 5 では光子と鏡の相互作用が大きい場合について表した。光子と鏡の相互作用 G が大きい場合は鏡の回転モードは振り子モードに比べて無視できるほど小さいことが分かった。

4 議論

振り子モードの固有振動数は近似的に光子と鏡の相互作用 G の関数として次のように表せる。

$$\frac{1}{M}\left\{\frac{T}{\ell}\left(1+\frac{2}{\ell}\sqrt{\frac{EI}{T}}\right)-\frac{\hbar\Delta G^2}{\kappa^2+\Delta^2}\right\} \tag{21}$$

確かに、光子と鏡の相互作用 G が大きくなると、固有振動数も大きくなる ($\Delta < 0$)。一方で、鏡の回転モードの固有振動数は近似を用いて、

$$\frac{Th}{J}\left\{1+\frac{h}{\ell}+\left(\frac{1}{h}+\frac{2}{\ell}\right)\sqrt{\frac{EI}{T}}\right\} \tag{22}$$

と表せ、光子と鏡の相互作用 G によらない形となっているため、図 4 の結果と整合性が取れている。先行研究 [2] では光子と鏡の相互作用 G が大きい場合 ($G = 4.3 \times 10^{19}\mathrm{Hz/cm}$) を取り扱っていたため、鏡の回転モードを無視できていたが、光子と鏡の相互作用 G が小さい場合は、鏡の回転モードの影響は無視できない。特に、振り子モードの固有振動数と鏡の回転モードの固有振動数が等しくなる際の振る舞いについては今後、詳しく調べる必要がある。

5 結論

式 (3)〜(6) にてビーム模型の運動方程式を導出し、式 (16)〜(20) にてビーム模型における定常状態の揺らぎのスペクトルを計算した。光子と鏡の相互作用 G が大きい範囲 ($G = 4.3 \times 10^{19}\mathrm{Hz/cm}$) では鏡の回転モードによる影響が無視できることがわかった。今後の課題としては、振り子モードの固有振動数と鏡の回転モードの固有振動数が等しくなるような光子と鏡の相互作用 G について、鏡の回転モードが鏡の重心の変位に与える影響について調べる必要がある。また、変位の連続測定によるメカニカルスクイーズを行うことで量子状態が生成できるかをビーム模型において確認することが課題である。

6 参考文献

1. Seth B. Cataño-Lopez , Jordy G. Santiago-Condori, Keiichi Edamatsu and Nobuyuki Matsumoto, Phys. Rev. Lett. 124, 221102 (2020)

2. Nobuyuki Matsumoto and Naoki Yamamoto, arXiv:2008.10848 (2021)

———index へ戻る

重宇 a08

massive Brans-Dicke 理論と parameterized post-Einstein 形式を用いた重力波解析

早稲田大学大学院 先進理工学研究科
東野 優里香

massive Brans-Dicke 理論と parameterized post-Einstein 形式を用いた重力波解析

東野　優里香 (早稲田大学大学院 先進理工学研究科)

Abstract

massive Brans-Dicke 理論における、連星の合体イベント由来の重力波を計算し、parameterized post-Einstein 形式を用いて観測制限を与える。今回、一般相対論で予言される 2 つのテンソルモードに加えて、2 つのスカラーモードが導出される。エネルギー放射やエネルギー収支を導出した後、Stationary phase 近似を用いて周波数領域の重力波表示を計算する。その結果、スカラー質量が十分軽い場合の ω_0 の観測下限を導出した。

1　導入

一般相対論は、太陽系や連星パルサー等の多くの観測により裏付けられている。しかし、その多くは、静的で弱い線形な重力場を前提としており、動的な強い非線形な重力場での検証が必要である (Nicolás Yunes & Xavier Siemens 2013)。強い重力場における理論を検証する方法として、重力波が注目されている。2015 年に、重力波の直接観測に成功して以来、重力波の地上観測基地として LIGO(米)、VIRGO(仏・伊)、KAGRA(日) が利用されているほか、宇宙観測基地として LISA や DECIGO の建設計画も進められている。

重力波の波形を解析し、重力理論を検証する方法の一つに parameterized post-Einstein (ppE) 形式 (Nicolás Yunes & Frans Pretorius 2009) がある。ppE 形式は、観測に基づいたボトムアップ式の検証方法で、一般相対論で予想される周波数表示の重力波からのずれを理論を特徴づけるパラメータ (ppE パラメータ) で展開したものである。この形式を用いると、各 ppE パラメータに対して観測結果から制限をつけることが容易であり、ppE パラメータを構成する各種重力理論特有の定数に観測制限を与えることができる。

スカラーテンソル重力理論の代表例である massive Brans-Dicke 理論 (Justin Alsing et al. 2012) に対し、ppE 形式を用いて観測制限を与えることが目的である。今回は、先行研究 (Tan Liu et al. 2020) を参照し、レビューする。

ppE 形式を考える場合の多くは、スカラー場によって時空構造が影響を受けないようなブラックホール連星を想定しているが、中性子星・ブラックホール連星から放出された可能性のある重力波 (GW190814, GW200210_092254) も観測されている。ブラックホール連星を想定する場合では、スカラー場による補正が小さいが、重力波源に中性子星が含まれる場合、自発的スカラー化などによりスカラー場の影響が強く反映され、従来とは異なった制限が期待できる。

2　手順

massive Brans-Dicke 理論で重力波を計算すると、+モードと×モードに加えて、2 つのスカラーモード breathing モードと longitudinal モードを持つ。まず massive Brans-Dicke 理論の場の方程式を平坦な時空のまわりで展開して時間領域の重力波を計算し、Stationary phase 近似 (SPA) で周波数領域の重力波に変換する。

massive Brans-Dicke 理論の作用 (Jordan frame) は、スカラー場 ϕ、 カップリング関数 $\omega(\phi)$、ポテンシャル $V(\phi)$ に対して

$$
\begin{aligned}
S =& \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}\left[\phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} - V(\phi)\right] \\
&+ S_m[g_{\mu\nu}, \Psi_m] \qquad (1)
\end{aligned}
$$

と表される (Nicolás Yunes & Xavier Siemens 2013) (Justin Alsing et al. 2012)。計量 $g_{\mu\nu}$ とスカラー場 ϕ の背景場を $\eta_{\mu\nu}$、ϕ_0 とし、その周りの摂動をそれ

ぞれ $h_{\mu\nu}$、φ とする。また、$h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$ として、あらたな摂動 $\theta_{\mu\nu}$ を定義する。

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad \phi = \phi_0 + \varphi, \tag{2}$$

$$\theta_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu} - \frac{\varphi}{\phi_0}\eta_{\mu\nu}. \tag{3}$$

重力波源となる天体を点粒子とみなすと、今回エネルギー運動量テンソルは

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\sum_{A=1,2}\frac{u_A^\mu u_A^\nu}{u_A^0}m_A(\phi)\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x_A}), \tag{4}$$

u_A^μ は天体 A の四元速度、$\mathbf{x_A}$ は天体 A の位置座標を表す。天体 A の質量 m_A は、$m_A \equiv m_A(\phi_0)$、天体 A のセンシティビティ

$$s_A = \left.\frac{d\ln m_A(\phi)}{d\ln\phi}\right|_{\phi=\phi_0}, \; s'_A = \left.\frac{d^2\ln m_A(\phi)}{d(\ln\phi)^2}\right|_{\phi=\phi_0} \tag{5}$$

を用いて

$$m_A(\phi) = m_A\left[1 + s_A\frac{\varphi}{\phi_0} + \frac{1}{2}(s_A^2 + s'_A - s_A)\left(\frac{\varphi}{\phi_0}\right)^2\right] + O\left(\varphi^3\right) \tag{6}$$

と表せる。これらを用いて平坦な時空のまわりで展開した、弱い場の極限での方程式を導出し、ソースタームに近似を与えて場の方程式を解く。

2.1 時間領域での重力波表示

$g^{\mu\nu}$ と ϕ で作用全体 (1) の変分をそれぞれとると、2 つの独立な場の方程式

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\frac{V(\phi)}{\phi}g_{\mu\nu} &= \frac{8\pi}{\phi}T_{\mu\nu} + \frac{\omega(\phi)}{\phi^2}\left(\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha}\right) \\ &\quad + \frac{1}{\phi}(\phi_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\Box_g\phi) \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \Box_g\phi - \frac{1}{2\omega(\phi)+3}\left(\phi\frac{dV(\phi)}{d\phi} - 2V(\phi)\right) &= \frac{8\pi}{2\omega(\phi)+3}\left(T - 2\phi\frac{dT}{d\phi}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2\omega(\phi)+3}\frac{d\omega(\phi)}{d\phi}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} \end{aligned} \tag{8}$$

が得られる (Nicolás Yunes & Xavier Siemens 2013) (Justin Alsing et al. 2012)。ただし $T = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$ とする。

次に、弱い重力場の極限における場の方程式を導出する。$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ と $\phi = \phi_0$ を場の方程式 (7)(8) の真空解と仮定すると $V(\phi) = \frac{1}{2}V''(\phi_0)\varphi^2 + O(\varphi^3)$, $\omega(\phi) = \omega_0 + \omega_1\varphi + O(\varphi^2)$ を得る。テンソル場の方程式 (7) は、摂動 (2) を用いると、$\Box_\eta = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ として

$$\Box_\eta\theta_{\mu\nu} = -16\pi\tau_{\mu\nu} \tag{9}$$

$$\tau_{\mu\nu} = \frac{T_{\mu\nu}}{\phi_0} + t_{\mu\nu}, \qquad t_{\mu\nu} \equiv O(\theta^2, \varphi^2, \theta\phi) \tag{10}$$

と書ける。ただし、今回 Lorentz ゲージ条件 ${\theta_{\mu\nu}}^{,\mu} = 0$ を用いている。

同様に、スカラー場の方程式 (8) は、摂動 (2)(3) と Lorentz ゲージ条件を用いると、

$$(\Box_\eta - m_s^2)\varphi = -16\pi S \tag{11}$$

$$m_s^2 \equiv \frac{\phi_0}{2\omega_0+3}V''(\phi_0) \tag{12}$$

$$\begin{aligned} S = &-\frac{1}{16\pi}\left[\theta^{\mu\nu}\varphi_{,\mu\nu} + \left(\frac{1}{\phi_0} - \frac{\omega_1}{2\omega_0+3}\right)\varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha}\right. \\ &\left. -\frac{1}{2}m_s^2\phi\theta - \left(\frac{1}{\phi_0} + \frac{\omega_1}{2\omega_0+3}\right)m_s^2\varphi^2\right] \\ &- \frac{1}{4\omega_0+6}\left(1 - \frac{2\omega_1\varphi}{2\omega_0+3} - \frac{1}{2}\theta - \frac{\varphi}{\phi_0}\right)\left(T - 2\phi\frac{\partial T}{\partial\phi}\right) \\ &+ O(\theta^3, \theta^2\varphi, \theta\varphi^2, \varphi^3) \end{aligned} \tag{13}$$

と書ける。ここで、m_s はスカラー場の質量を表す。重力波源から十分離れた場所の万有引力定数を $G = 1$ とする単位系を用いているので、一般相対論との対応から、

$$1 = \frac{1}{\phi_0}\frac{2\omega_0+4}{2\omega_0+3} \tag{14}$$

が成り立つ。また、Brans-Dicke 理論は $\omega_0 \longrightarrow \infty$ とすると一般相対論に一致することから、

$$\xi = \frac{1}{\omega_0+2} \tag{15}$$

を導入する (Katerina Chatziioannou et al. 2017)。この 2 式 (14)(15) から、

$$\frac{1}{\phi_0} = 1 - \frac{\xi}{2} \tag{16}$$

が成り立つ。

Newton 極限での運動方程式を用いて、場の方程式 (9)(11) を ξ の 1 次まで解いていく。特に、等速円運動する連星系から放出される重力波を計算する。

ソースタームに Newton 極限を適用し、四重極放射までを仮定して解いていく。重力源と観測点との距離 D が十分離れている ($D \gg |\mathbf{r}'|$) とすると

$$\theta^{ij} = \frac{4\mu}{D}\left(1 - \frac{\xi}{2}\right)\frac{\tilde{g}m}{r}(\hat{v}^i\hat{v}^j - \hat{x}^i\hat{x}^j), \tag{17}$$

ただし $\mu = \frac{m_1 m_2}{m}$, $m = m_1 + m_2$、さらに、重力波源の重心系をとり、相対座標と相対速度をそれぞれ

$$r^i \equiv x_1^i - x_2^i = r\hat{x}^i, \qquad v^i \equiv v_1^i - v_2^i = v\hat{v}^i \tag{18}$$

$\tilde{g} = \frac{1}{\phi_0}\left[1 + (1-2s_1)(1-2s_2)(1+m_s r)\frac{e^{-m_s r}}{2\omega_0+3}\right]$ と書き下せる。

同様に、スカラー場の方程式 (11) を四重極放射までを仮定して解いていく。ソースタームは、post-Newton 展開で、ξ の 1 次まで計算する。遅延 Green 関数 $\mathcal{G}(t, \mathbf{x})$ を導入し、$\varphi = \varphi_B + \varphi_m$ のようにスカラー場を分解し、摂動部分を取り出すと

$$\begin{aligned}\frac{\varphi_B}{\phi_0} = \frac{\xi\mu}{D}\Bigg[&-\left(\frac{1}{2}\Gamma\tilde{g} + 2\Lambda\right)\frac{m}{r} - 2S\sqrt{\frac{\tilde{g}m}{r}}(\hat{v}\cdot\hat{N}) \\ &+ \frac{\Gamma\tilde{g}m}{r}\{(\hat{v}\cdot\hat{N})^2 - (\hat{x}\cdot\hat{N})^2\}\Bigg],\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\frac{\varphi_m}{\phi_0} = -\frac{\xi\mu}{D}\Bigg[&-I_1\left[\left(\frac{1}{2}\Gamma\tilde{g} + 2\Lambda\right)\frac{m}{r}\right] \\ &-2SI_2\left[\sqrt{\frac{\tilde{g}m}{r}}(\hat{v}\cdot\hat{N})\right] \\ &+\Gamma I_3\left[\frac{\tilde{g}m}{r}\{(\hat{v}\cdot\hat{N})^2 - (\hat{x}\cdot\hat{N})^2\}\right]\Bigg],\end{aligned} \tag{20}$$

ただし、$\hat{N}$ は重力波源から観測者に向かう単位ベクトル、J_1 は第 1 種 Bessel 関数、$u = \sqrt{1 + (\frac{z}{m_s D})^2}$、

$$\Gamma = 1 - \frac{2(m_1 s_2 + m_2 s_1)}{m}, \tag{21}$$

$$\Lambda = 1 - s_1 - s_2, \qquad S = s_1 - s_2, \tag{22}$$

$$I_n[f(t)] \equiv \int_0^\infty dz \frac{f(t - Du)}{u^n} J_1(z). \tag{23}$$

ゆえに、場の方程式の解を ξ の 1 次のオーダーまで求めることができた。求まった解 θ^{ij} (17) と、解 $\frac{\varphi}{\phi_0} = \frac{\varphi_B}{\phi_0}$ (19) $+\frac{\varphi_m}{\phi_0}$ (20) を使って、重力波の偏極モードを求める。重力波のモードは

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} h_b + h_+ & h_\times & h_x \\ h_\times & h_b - h_+ & h_y \\ h_x & h_y & h_L \end{pmatrix}_{xyz} \tag{24}$$

で与えられ、$\partial^2 h_{ij}/\partial t^2 = -R_{0i0j}$ と対応させると

$$h_+ = \frac{2\mu}{D}\left(1 - \frac{\xi}{2}\right)\frac{\tilde{g}m}{r}(1 + \cos^2\iota)\cos 2\Phi, \tag{25}$$

$$h_\times = \frac{4\mu}{D}\left(1 - \frac{\xi}{2}\right)\frac{\tilde{g}m}{r}\cos\iota\sin 2\Phi, \tag{26}$$

$$h_b = -\frac{\varphi}{\phi_0}, \tag{27}$$

$$h_L = -\frac{\xi\mu}{D}\int_0^\infty dz J_1(z)\left(\frac{1}{u^2} - 1\right)\psi, \tag{28}$$

$$\psi = \left[-2S\sqrt{\frac{\tilde{g}m}{r}}\frac{(\hat{v}\cdot\hat{N})}{u^2} + \frac{\Gamma\tilde{g}m}{r}\frac{(\hat{v}\cdot\hat{N})^2 - (\hat{x}\cdot\hat{N})^2}{u^3}\right]_{t-Du}$$

と書くことができる。

2.2 周波数領域での重力波表示

観測では、時間領域ではなく周波数領域の表記が必要なので、Keplar 周波数 F

$$2\pi F = \sqrt{\frac{\tilde{g}m}{r^3}} \tag{29}$$

を使って、r を F で書き直す。上記の時間表示の重力波を周波数表示に書き直すために、SPA を用いる。

時間領域の重力波 $h(t)$ が、振幅 $\mathcal{A}(t)$、位相 $l\Phi(t)$ を使って $h(t) = \mathcal{A}(t)e^{-il\Phi(t)} + \mathcal{A}^*(t)e^{il\Phi(t)}$ と書けるとすると、

$$\tilde{h}(f) = \frac{\mathcal{A}(t_0)}{\sqrt{l\dot{F}(t_0)}}e^{-i\Psi} \tag{30}$$

$$\Psi[F(t_0)] = 2\pi\int^{F(t_0)} dF'\left(l\frac{F'}{\dot{F}'} - \frac{f}{\dot{F}'}\right) + \frac{\pi}{4} \tag{31}$$

と変換できる。ただし、$F(t_0) = \frac{f}{l}$、$F(t) = \frac{\dot{\Phi}}{2\pi}$ と定義した。重力波のエネルギー放射

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\phi_0}{16\pi}\int D^2 d\Omega\left[\langle\dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2\rangle - \frac{2\omega_0 + 3}{\phi_0^2}\langle\phi_{,0}\phi_{,D}\rangle\right] \tag{32}$$

を計算し、$E = -\mu \frac{\tilde{g}m}{2r}$ から dE/dF を求めることで、式 (30)(31) の $\dot{F}$ を得ることができ、周波数表示を計算する。ただし、$\langle\rangle$ は空間平均を意味する。

2.3 ppE パラメータのフィッティング

ppE 形式のひな型は、以下で表される。

$$\tilde{h}(f) = \tilde{h}_{\rm GR}(f)\left[1 + \sum_k \alpha_k (\pi M_c f)^{\frac{a_k}{3}}\right] \times \exp\left[\sum_j i\beta_j (\pi M_c f)^{\frac{b_j}{3}}\right] + \gamma \tag{33}$$

一般相対論の周波数領域の重力波は

$$\tilde{h}_{\rm GR}(f) = \sqrt{\frac{5\pi}{96}} A^{\rm GR} \frac{M_c^2}{D} (\pi M_c f)^{-\frac{7}{6}} e^{-i\Psi_{\rm GR}}$$

$$\Psi_{\rm GR} = -2\pi f t_c + 2\Phi_c + \frac{\pi}{4} - \frac{3}{128}(\pi M_c f)^{\frac{5}{3}}$$

であったから、周波数表示の重力波と比較すると、massive Brans-Dicke 理論の ppE パラメータ $(\alpha^{\rm BD}, \beta^{\rm BD}, a^{\rm BD}, b^{\rm BD})$ と補正項 $\gamma^{\rm BD}$ が求まる。

$m_s \ll 1$ と仮定すると、$(\beta^{\rm BD}, b^{\rm BD})$ の組み合わせは以下で与えられる。

表 1: massive Brans-Dicke 理論の ppE パラメータ

$b_i^{\rm BD}$	$\beta_i^{\rm BD}$
-5	$-\frac{\xi}{128}\left\{(1-2s_1)(1-2s_2) - \frac{5}{2}\right\}$
-7	$-\frac{5\xi S^2}{3584}\left(\frac{\sqrt{(\dot{\Phi})^2 - m_s^2}}{\dot{\Phi}}\right)^3 \eta^{\frac{2}{5}}$
-9	$\frac{\xi}{3456}(1-2s_1)(1-2s_2) m_s^2 M_c^2 \eta^{-\frac{2}{5}}$
-11	$-\frac{5\xi}{7392}(1-2s_1)(1-2s_2) m_s^3 M_c^3 \eta^{-\frac{3}{5}}$

3 結果

現在建設中の Einstein Telescope が、GW0170817 と同様の重力波を観測した場合に観測可能な $\beta^{\rm BD}$ の範囲が計算されている (Katerina Chatziioannou et al. 2017)。$m_{\rm BH} = 5{\rm M}_\odot$, $m_{\rm NS} = 1.4{\rm M}_\odot$ を想定すると、$s_{\rm BH} = 0.5$, $s_{\rm NS} \sim 0.2$ であるので、ξ に対して

$$\xi < 2.3 \times 10^{-4} \tag{34}$$

という制限が計算できる。ゆえに、Einstein Telescope が massive Brans-Dicke 理論の存在を裏付けるには、この想定下では $\omega_0 > 2.1 \times 10^3$ が必要であると計算できる。

4 Discussion

今回、等速円運動する連星を重力波源としたので、天体が楕円運動するとどのように結果が変わるか確認したい。また、3 体系など、ほかの重力波源でもあてはまるように ppE 形式を拡張できるか確認したいと考えている。

5 Conclusion

以上のように、massive Brans-Dicke 理論の周波数領域の重力波をもとめ、ppE 形式にあてはめることで、観測による制限 $\omega_0 > 2.1 \times 10^3$ をあたえることができた。

今回、まず massive Brans-Dicke 理論の場の方程式を平坦な時空のまわりで展開し、2 つの摂動 $\theta_{\mu\nu}$ と φ に関する独立な場の方程式を導出した。場の方程式を解く際、四重極放射までを考えたので、ソースタームにそれぞれ Newton 近似と post-Newton 近似を考慮し、ξ の 1 次までで解を構成した。その解を使って、重力波の 2 つテンソルモードと 2 つのスカラーモードを導いた。その解は時間領域での重力波なので、stationary phase 近似を用いて周波数領域の重力波に変換し、観測制限と比較した。

Reference

Nicolás Yunes, & Xavier Siemens 2013, Living Reviews in Relativity

Nicolás Yunes, & Frans Pretorius 2009, Physical Review D

Justin Alsing, Emanuele Berti, Clifford M. Will, & Helmut Zaglauer 2015, Physical Review D

Tan Liu, Wen Zhao, & Yan Wang 2015, Physical Review D

Katerina Chatziioannou, Nicolás Yunes, & Neil Cornish 2017, Physical Review D

————index へ戻る

重宇 a09

f(ℚ) 重力理論と BH

名古屋大学大学院 理学研究科
山越 蒔士

$f(\mathbb{Q})$ 重力理論と BH

山越　蒔士 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

修正重力理論の中でも一般相対性理論 (GR) とは異なる時空の幾何構造を扱う $f(\mathbb{Q})$ 重力理論というものがある. これは計量と接続を独立な量として扱うことで, 既存の理論には見られないような物理を記述する可能性を秘めており, 注目されている. そこで今回レビューする [1] では $f(\mathbb{Q})$ において静的且つ球対称という条件の下での計量, 接続及び場の方程式の取りうる形を議論し, そのうえで GR における静的ブラックホール解である Schwarzschild 解に対する近似解や厳密解を実際に求める. またその解の有効性についても精査する.

1 Introduction

一般相対性理論 (GR) は古典重力を記述する理論であり, 予測される内容が宇宙的なスケールで多くの観測結果と一致していることから、最も優れているとされている. しかし量子理論との非互換性や Hubble Tension, ダークエネルギーの起源といった問題も同時に抱えている。そこで GR 自体を拡張することで問題を解決しようとする修正重力が行われてきている.

このような修正重力理論の一種として, Symmetric Teleparallelism(ST) という GR とは異なる時空の幾何構造を扱う理論が存在する. これは metric-compatibility($\nabla g = 0$) を課さない代わりに捩れと曲率がゼロになることを仮定しており, 計量と接続を独立な量として考えている. この際に生じる非自明なスカラーから (境界項を除き) GR での Einstein-Hilbert 作用と等価な作用 (STEGR) を作ることが可能であることが知られている [2]. このスカラー量を non-metricity scalar と呼び, $\mathbb{Q}$ で表される. しかしこの STEGR では接続が単なるゲージ量になっており非物理的であることから, GR と異なる結果を得るためには何らかの拡張が必要とされている.

今回レビューする論文 [1] では接続がゲージでない物理的自由度を持つような非線形拡張である $f(\mathbb{Q})$ 重力理論を扱い, 球対称且つ静的な時空における計量及び接続の取り得る最も一般的な形を構築した上で, 解に関して議論する. その中で任意の関数 f に対して Schwarzschild 解 (GR 解) が存在し, それと同時に GR 解でないような近似/厳密解も存在することを示す.

2 Symmetric Teleparallelism

初めにアフィン幾何における 4 次元多様体 $\mathcal{M}$ を考える. 独立な幾何学的量は捩れ T, 曲率 R, non-metricity Q の 3 つであり, そのうち最初の 2 つの量はアフィン接続 Γ のみによって与えられる.

$$T^{\alpha}{}_{\mu\nu} := 2\Gamma^{\alpha}{}_{[\mu\nu]} \tag{1}$$

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} := 2\partial_{[\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu]\beta} + 2\Gamma^{\alpha}{}_{[\mu|\lambda|}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu]\beta} \tag{2}$$

本発表ではこの捩れと曲率がゼロになることを要請することで ST という幾何構造を扱っていく. 非自明な量としては non-metricity のみが残り, これは

$$Q_{\alpha\mu\nu} := \nabla_{\alpha}g_{\mu\nu} = \partial_{\alpha}g_{\mu\nu} - 2\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha(\mu}g_{\nu)\lambda} \tag{3}$$

で定義される. このテンソルから作られる 2 次の独立なスカラー量は 5 つ存在し, そのうち 4 つの項の線形結合によって GR を記述することが出来る. すなわち Einstein-Hilbert 作用と等価な作用である STEGR を作ることが可能である.GR でのリッチスカラー $\mathcal{R}$ に代わるスカラー量である non-metricity scalar は

$$\mathbb{Q} := -\frac{1}{4}Q_{\alpha\beta\gamma}Q^{\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{2}Q_{\alpha\beta\gamma}Q^{\beta\alpha\gamma} + \frac{1}{4}Q_{\alpha}Q^{\alpha} - \frac{1}{2}Q_{\alpha}\bar{Q}^{\alpha} \tag{4}$$

と書ける. ただし $Q_{\alpha} := Q_{\alpha\nu}{}^{\nu}$,$\bar{Q}_{\alpha} := Q^{\nu}{}_{\nu\alpha}$ である. $\mathbb{Q}$ と $\mathcal{R}$ の間の関係は

$$\mathbb{Q} = \mathcal{D}_{\mu}(Q^{\mu} - \bar{Q}^{\mu}) + \mathcal{R} \tag{5}$$

となっており $\mathcal{D}_{\mu}$ は GR での共変微分を表していることから, $\int d^4x\sqrt{-g}\,\mathbb{Q}$ は境界項を除いて Einstein-Hilbert 作用と一致していることがわかる. ただしこ

の STEGR では ST の接続が境界項にだけ現れており, 場の方程式に寄与するのは GR での接続 (Levi-Civita 接続) 部分のみである. それと同時に物理的自由度も全て計量に含まれてしまっているため, 接続が非物理的なゲージ量になってしまっている.

そこで $\mathbb{Q}$ を単体で扱うのではなく, 非線形な拡張である $f(\mathbb{Q})$ 重力理論に焦点を当てる. 作用は

$$\mathcal{S}[g,\Gamma;\lambda,\rho] := \int_{\mathcal{M}} d^4x \left(\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, f(\mathbb{Q}) + \lambda_\alpha{}^{\beta\mu\nu} R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} + \rho_\alpha{}^{\mu\nu} T^\alpha{}_{\mu\nu}\right) + \mathcal{S}_{\mathrm{matter}} \tag{6}$$

と書ける. ここで $\lambda_\alpha{}^{\beta\mu\nu}$, $\rho_\alpha{}^{\mu\nu}$ はラグランジュ乗数である. f は任意の関数であるが, 非自明な場の方程式を得るために $df(\mathbb{Q})/d\mathbb{Q} \neq 0$ という条件を課しておく. このような作用を考えることで接続は一般的に境界項に吸収されなくなり, 物理的自由度を持つようになる.

式 (6) から計量と接続に関しての場の方程式はそれぞれ

$$\mathcal{M}_{\mu\nu} := \frac{2}{\sqrt{-g}} \nabla_\alpha[\sqrt{-g} P^\alpha{}_{\mu\nu} f'(\mathbb{Q})] + f'(\mathbb{Q}) q_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(\mathbb{Q}) g_{\mu\nu} - T_{\mu\nu} = 0 \tag{7}$$

$$\mathcal{C}_\alpha := \nabla_\mu \nabla_\nu (\sqrt{-g} f'(\mathbb{Q}) P^{\mu\nu}{}_\alpha) = 0 \tag{8}$$

となる. ここで $T_{\mu\nu}$ はエネルギー運動量テンソルであり, $P^\alpha{}_{\mu\nu}$, $q_{\mu\nu}$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} P^\alpha{}_{\mu\nu} &:= \frac{1}{2}\frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial Q_\alpha{}^{\mu\nu}} \\ &= -\frac{1}{4} Q^\alpha{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} Q_{(\mu}{}^\alpha{}_{\nu)} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} Q^\alpha \\ &\quad - \frac{1}{4}(g_{\mu\nu} \bar{Q}^\alpha + \delta^\alpha_{(\mu} Q_{\nu)}) \end{aligned} \tag{9}$$

$$q_{\mu\nu} := \frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial g^{\mu\nu}} = P_{(\mu|\alpha\beta} Q_{\nu)}{}^{\mu\nu} - 2P^{\alpha\beta}{}_{(\nu} Q_{\alpha\beta|\mu)} \tag{10}$$

で与えられる. 静的且つ球対称という条件の下でこの方程式の真空解を求めることが本発表での目的である.

3 Symmetry Reduction

場の方程式 (7),(8) を実際に解くにあたって, 対称性等からパラメータ (g, Γ) や場の方程式 $(\mathcal{M}, \mathcal{C} = 0)$ のとりうる形を決定することが出来る. そのためこの節では捩れゼロ, 曲率ゼロ, 静的, 球対称の 4 つの条件から前述した要素がどのような形に制限されるのかを精査する. しかしそれぞれに関して細かく議論していくと非常に膨大かつ煩雑な計算量になってしまうため, 本集録では大まかな方針を紹介する程度に留める.

まず計量に関して. 静的球対称の下で計量のとりうる最も一般的な形は

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{tt} & g_{tr} & 0 & 0 \\ g_{tr} & g_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{\theta\theta}\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{11}$$

と書ける. しかし多様体に対して微分同相な写像を考えることで非対角成分 g_{tr} をゼロにし, $\mathcal{S}^2$ の部分において $g_{\theta\theta}$ が r^2 となるような簡単な形に書き直すことが出来る. 具体的にはまずリーマン多様体として底空間 $\mathcal{B} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ とファイバー $\mathcal{F} = \mathcal{S}^2$, そして $\mathcal{B}$ 上の正値関数として $f : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_{>0}$ を導入することで多様体を $\mathcal{M} := \mathcal{B} \times_f \mathcal{F}$ と書き表し, 計量を構成する. そこから座標変換と非対角成分を消すような微分同相写像 $\phi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ を用いることで簡易化を行うことが出来る. 結果的に計量は

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{tt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{12}$$

という形を考えれば良いことになる.

次に接続に関して. 元々の成分の数は 64 だが, 条件からその中での非自明な量や関係式を得ることが出来る. 大まかな方針は一つ一つの条件を素直に課していくだけである. 結果的に全ての仮定を満たすような解の集合は二つ存在するが, 片方の解の集合は double scaling limit を通してもう片方の解と一致するため, 実質的に解は一つに定まる. このとき独立な成分は 6 つ $(c,\ k,\ \Gamma^t{}_{rr}(r),\ \Gamma^t{}_{\theta\theta}(r),\ \Gamma^r{}_{rr}(r),\ \Gamma^r{}_{\theta\theta}(r))$, 非自明

な成分は 16 個存在し, 2 つの微分方程式が成り立つ必要がある. 逆に以上の要素さえ満たされればどのような形の接続をとっても良いことになる.

最後に場の方程式に関して. ここでは求めた計量と接続の形から方程式の構造について触れた後に, 先んじて非対角成分を解くことでさらなる簡易化を試みる. 取りうる形はそれぞれ

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M}_{tt} & \mathcal{M}_{tr} & 0 & 0 \\ \mathcal{M}_{tr} & \mathcal{M}_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{M}_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{M}_{\theta\theta}\sin^2\theta \end{pmatrix} = 0 \tag{13}$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{C}_t \\ \mathcal{C}_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \tag{14}$$

となる. ここで $\mathcal{M}_{tr}$ について考えてみると

$$\mathcal{M}_{tr} = \frac{1}{2}\left(k - 2c\,(2c-k)\Gamma^t{}_{\theta\theta}\right)\partial_r\mathbb{Q}\, f''(\mathbb{Q}) = 0 \tag{15}$$

となっており, ここで $\partial_r\mathbb{Q} = 0$ または $f''(\mathbb{Q}) = 0$ を満たすような解を取ってきてしまうと, 最終的に GR 解以外の解が得られなくなってしまう. そこで $(k - 2c(2c-k)\Gamma^t{}_{\theta\theta}) = 0$, つまり

$$\Gamma^t{}_{\theta\theta} = \frac{k}{2c(2c-k)} \quad (\text{for c} \neq 0,\ \text{k} \neq 2\text{c}) \tag{16}$$

または単純に $c = k = 0$ という解を以降用いていく. $\Gamma^t{}_{\theta\theta}$ が式 (16) の形である時, $\mathcal{C}_t = 0$ は常に満たされる. 以上より残った場の方程式の成分は $\mathcal{M}_{tt}$, $\mathcal{M}_{rr}$, $\mathcal{M}_{\theta\theta}$, $\mathcal{C}_r$ である.

4 Approximate Solution

ここから実際に真空解を求める. それにあたってまず独立な量として残っている接続の 6 成分の形を決めておく. 今重力的な寄与は全て non-metricity に含まれていることから, 重力がない平坦な時空を考えた時に Q はゼロになると仮定するのが自然である. この時独立な接続は

$$\{c, k, \Gamma^t{}_{rr}, \Gamma^t{}_{\theta\theta}, \Gamma^r{}_{rr}, \Gamma^r{}_{\theta\theta}\} = \{0, 0, 0, 0, 0, -r\} \tag{17}$$

という値をとれば良い [3, 4](ただし必ずしもこの形を取る必要性はない). このとき場の方程式から

$$g_{tt}\, g_{rr} = \text{const.} \tag{18}$$

という形が求まり, GR で見られる関係 $g_{tt} \propto 1/g_{rr}$ が得られる. 式 (18) は f の形に依らないため, 任意の f に対して接続が式 (17) の形をとれば GR 解 (またはそれに似た形) が常に得られることがわかる. しかし私たちは GR では見られないような解も得たいため少し拡張したうえで方程式を解く.

ここでは $f(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} + \alpha\mathbb{Q}^2$ という関数の形を考える. ただし α は微小量である. 仮に α がゼロならば GR と等しいことから, GR 解に対しての近似解が得られることが予想される. そこで計量 g_{tt}, g_{rr} と式 (17) の唯一の非自明量 $\Gamma^r{}_{\theta\theta}$ が摂動部分を含んで

$$\begin{aligned} g_{tt} &= g_{tt}^{(0)} + \alpha g_{tt}^{(1)} + \alpha^2 g_{tt}^{(2)} \\ g_{rr} &= g_{rr}^{(0)} + \alpha g_{rr}^{(1)} + \alpha^2 g_{rr}^{(2)} \\ \Gamma^r{}_{\theta\theta} &= -r + \alpha\gamma^{(1)} + \alpha^2\gamma^{(2)} \end{aligned} \tag{19}$$

という形を取るという仮定をおく. $g_{tt}^{(0)}, g_{rr}^{(0)}$ はそれぞれ GR 解である. ここで α の 2 次のオーダーまで考慮する理由としては 1 次までの場合, 計量と接続に関する方程式がそれぞれデカップリングになっているためである. 式 (19) から解を求めると

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -\left(1 - \frac{2M_{\text{ren}}}{r}\right) + \alpha^2\frac{\mu}{r}\ln\left(\frac{r}{r^*}\right) \\ g_{rr} &= -\frac{1}{g_{tt}} \end{aligned} \tag{20}$$

となる. ただし M_{ren} は GR 解における質量 M を用いて次の形で定義している.

$$2M_{\text{ren}} := 2M + \alpha\, c_2 + \alpha^2\left(c_3 - 16M^2(3c_6 + c_7)\right) \tag{21}$$

また c_i は全て積分定数, r^* は対数関数内の次元をゼロにするために導入された定数を表している. ここで注目すべき量は μ である. これは

$$\mu := 48M^2 c_7 \tag{22}$$

で表され, これが GR 解とは異なるような近似解を実現する際に重要になるパラメータとなっている. そこでこの量をブラックホールを区別する新しい物理量,

つまり毛としてみなすことが出来る. 求めた計量は r が大きくなるにつれて摂動部分が支配的になっていくことから, この近似解は r が小さい領域でのみ背景解と比較することが出来る.

5 Exact Solution

前節では近似解を導出したがこの節では真空における厳密解を求める. 関数としては $f(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^\kappa$ を考える. ここで κ はゼロではない実数である. また独立な接続量に関して $\Gamma^r{}_{\theta\theta} = -\lambda r$ という形を仮定しておく. ここでパラメータ λ は定数であり, この値を場の方程式を通して求めると

$$\lambda = 1, \quad \frac{5 - 8\kappa + 4\kappa^2}{5 - 14\kappa + 8\kappa^2} \tag{23}$$

となる. しかし $\lambda = 1$ をとってしまうと式 (17) と同じ形になり, GR 解しか得られなくなってしまうため, もう一方の値を用いることにする. そのうえで計量を求めると

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -\left(\frac{r}{r_T}\right)^\beta \left(1 - \left(\frac{r_s}{r}\right)^{-\gamma}\right) \\ g_{rr} &= \frac{C}{1 - \left(\frac{r_s}{r}\right)^{-\gamma}} \end{aligned} \tag{24}$$

となる. ここで r_s は Schwarzschild 半径, r_T は重力的な時間の遅れを表すスケール量, β, γ, C は κ から決まる定数である. これは GR 解からの摂動として求めたわけではないため, 厳密解になっている. 以上より $f(\mathbb{Q})$ 重力理論に関して GR 解でないような近似/厳密解が存在することがわかった.

最後に式 (24) の振る舞いについて少し議論する. $r \to \infty$ という極限において計量は GR 解と同様の漸近平坦な振る舞いをする必要があるため, 実際にそうなっているかを確認する. まず g_{rr} は

$$\lim_{r\to\infty} g_{rr} = C \tag{25}$$

となっている. $C = 1$ ならば漸近平坦だが, C がこの値となるような κ はそもそもゼロであったり式 (24) を求めるにあたって省かれる値をとってしまっているため, 仮定が満たされていない. 次に g_{tt} は

$$\lim_{r\to\infty} g_{tt} = -\lim_{r\to\infty} \left(\frac{r}{r_T}\right)^\beta \tag{26}$$

となっており, β が正で発散, 負でゼロになる. $\beta = 0$ ならば漸近平坦になるが, これに関しても実現するための κ の値が省かれているといった問題を抱えてしまっていることから, r が十分大きい領域における計量の振る舞いは漸近平坦性を満たしておらず, 解としては不十分なものになっていることがわかった.

6 Summary

今回考えた f の形では近似解や厳密解が得られたが, いずれも有効な領域が絞られており, 何らかの問題を抱えてしまっていることから非物理的なものである. ただ重要な点としては $f(\mathbb{Q})$ 重力理論から GR では見られないような解が得られるといった部分であり, 振る舞いに問題がなく, 太陽系テスト等を突破するような物理的な関数の形が見つかる可能性がある. そういった面で発展性のある理論になっており, そのような厳密解を探すことが今後の展望である.

Reference

[1] F. D'Ambrosio et al., Phys. Rev. D 105 (2022) 2, 024042

[2] J. Beltrán Jiménez, L. Heisenberg, and T. Koivisto, Phys. Rev. D 98 (2018) 4, 044048

[3] Z. Dehao, Eur. Phys. J. C 82 (2022) 4, 303

[4] L. Rui-Hui and Z. Xiang-Hua, Phys. Rev. D 103 (2021) 12, 124001

————index へ戻る

重宇 a10

D 次元時空に対する摂動と Tidal Love Number の関係

立教大学大学院 理学研究科
飯塚 颯見

D 次元時空に対する摂動と Tidel Love Number の関係

飯塚　颯見 (立教大学大学院 理学研究科)

Abstract

本発表では [1] をレビューする。D 次元 Schwarzschild(-anti-)de Sitter 時空におけるブラックホール摂動論を考え、その解析解から Tidal Love Number を計算する。その結果、D 次元 Schwarzschild ブラックホール由来の Tidal Love Number は全てのタイプにおいてある値をもつことがわかった。一方、4 次元を考えた場合、Tidal Love Number は恒等的に 0 となることがわかった。

1　Introduction

連星系を成す星は各々に潮汐力が働いて歪む。星が歪む度合いは Tidel Love Number（TLN）と呼ばれるパラメータで記述でき、重力波を用いて評価することができる。この量は 4 次元時空において、ブラックホール以外の星では TLN$\neq 0$ であるが、ブラックホールでは TLN$= 0$ となることが知られている。従って、重力波観測から TLN を読み取ることで天体を区別することができる。また、高次元時空において TLN を調べた先行研究では、$D(D \geq 4)$ 次元のシュバルツシルトブラックホール周りにスピン $S = 2$ の静的な場を摂動として加えた状況で TLN を解析すると、$D > 4$ のスカラーモードとテンソルモードでは、TLN$\neq 0$ であることが示された。一方、$D = 4$ の場合、全てのモードで TLN$= 0$ になることが示された。このことから、TLN$= 0$ となるのは $D = 4$ の時のみ起こる現象であると予想され、時空の次元と TLN の関係は理論的な側面からも興味深い対象となる。

本発表では、時空の次元と TLN の関係について紹介する。まず、D 次元 Schwarzschild(-anti-)de Sitter 時空 (S(-a-)dS 時空) にテンソル場の摂動を加えることを考える。そして、摂動の従う方程式から解析解を求め、まだ未検証だったベクトルモードを含む全てのモードについて TLN を調べる。最後に、その結果を用いて $D = 4$ でのみ TLN$= 0$ となるのか検証する。

2　ニュートン力学における潮汐力トイモデル

二つの星 A、B が十分遠方に存在している状況を考える。星 B の重力ポテンシャル U_B は、自分の重力ポテンシャルと、星 A から摂動的に加わる重力ポテンシャル δU_B の和で表すことができる。

$$U_B = -\frac{GM}{r} + \delta U_B$$

星 A と星 B が十分遠方まで離れていることから、この摂動量の従う方程式はラプラス方程式である。

$$\Delta \delta U_B = 0$$

ここで、摂動量を球面調和関数で展開すると

$$\delta U_B = \delta U'_B(r) Y_{LM}(\theta, \phi)$$

となる。これをラプラス方程式に代入し、変数分離すると、動径座標の成分の従う方程式は

$$\left[\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d}{dr}\right) - \ell(\ell+1)\right] \delta U'_B = 0$$

となる。この方程式の一般解は

$$\delta U'_B = C r^L + D r^{-L-1}$$

である。ここで、この一般解の各項を

r^L：外場
r^{-L-1}：星 B の摂動に対する応答

と解釈する。 その時、r^L の係数と r^{-L-1} の係数比 D/C を Tidal Love Number(TLN) と呼ぶ。一般相対論においても、このように係数比を取って TLN とする。

3 ブラックホール摂動論

D 次元の静的かつ球対称な線素を仮定し、真空で宇宙項入りのアインシュタイン方程式

$$G^{\mu}{}_{\nu} + \Lambda\delta^{\mu}{}_{\nu} = 0$$

を解く。すると、D 次元 S(-a-)dS 時空における線素が

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2_{S^{D-2}}$$
$$f(r) = 1 - \frac{2r^2\Lambda}{(D-1)(D-2)} - \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}$$
$$d\Omega^2_{S^{D-2}} = d\theta^2_{D-2} + \sin^2\theta_{D-2} d\Omega^2_{S^{D-3}}$$

となる。この時空における線形化されたテンソル場の作用は

$$\begin{aligned} S = \int d^D x\sqrt{-g}\Big[& -\frac{1}{2}\nabla_\lambda h_{\mu\nu}\nabla^\lambda h^{\mu\nu} + \nabla_\lambda h_{\mu\nu}\nabla^\nu h^{\mu\lambda} \\ & - \nabla_\mu h \nabla_\nu h^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\nabla_\mu h\nabla^\mu h \\ & + \frac{2\Lambda}{D-2}\left(h^{\mu\nu}h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h^2\right)\Big] \end{aligned}$$

である。上式に現れる $h_{\mu\nu}$ を次のように分解すると

$$\begin{aligned} h_{tt} &= \sum_{L,M} f(r)H_0(t,r)Y_L^M \\ h_{tr} &= \sum_{L,M} H_1(t,r)Y_L^M \\ h_{rr} &= \sum_{L,M} f(r)^{-1}H_2(t,r)Y_L^M \\ h_{ti} &= \sum_{L,M}\left[\mathcal{H}_0(t,r)\nabla_i Y_L^M + h_0(t,r)Y_{i\ L}^{(T)M}\right] \\ h_{ri} &= \sum_{L,M}\left[\mathcal{H}_1(t,r)\nabla_i Y_L^M + h_1(t,r)Y_{i\ L}^{(T)M}\right] \\ h_{ij} &= \sum_{L,M} r^2\big[\mathcal{K}(t,r)\gamma_{ij}Y_L^M \\ &\quad + G(t,r)\nabla_{(i}\nabla_{j)T}h_2(t,r)\nabla_{(i}Y_{j)L}^{(T)M} \\ &\quad + h_T(t,r)Y_{ij\ L}^{(TT)M}\big] \end{aligned}$$

となる。これらをスカラータイプ、ベクトルタイプ、テンソルタイプに整理する。そして、[1] に従って場を再定義するとそれぞれのタイプについての運動方程式が

$$\frac{d^2\Psi_T}{dr_*^2} + (\omega^2 - V_T(r)) = 0 \tag{1}$$
$$\frac{d^2\Psi_{RW}}{dr_*^2} + (\omega^2 - V_{RW}(r)) = 0 \tag{2}$$
$$\frac{d^2\Psi_Z}{dr_*^2} + (\omega^2 - V_Z(r)) = 0 \tag{3}$$

となる。上から、テンソルタイプ、ベクトルタイプ、スカラータイプの方程式である。r_* は亀座標と呼ばれる座標で $dr_* = f(r)dr$ で与えられ、$r_* \to -\infty$ が $r \to r_S$ に対応している。また、それぞれの方程式に表れている有効ポテンシャルは

$$\begin{aligned} V_T(r) &= f\frac{L(L+D-3)+2(D-3)}{r^2}f^2 * \\ &\quad \frac{D(D-14)+32}{4r^2} + ff'\frac{D-6}{2r} - \frac{4\Lambda f}{D-2} \\ V_{RW}(r) &= f\frac{(L+1)(D-4+L)}{r^2} + f^2\frac{(D-4)(D-6)}{4r^2} \\ &\quad - ff'\frac{D+2}{2r} - \frac{4\Lambda f}{D-2} \\ V_Z(r) &= \frac{f\hat{V}_Z(r)}{4(D-2)r^2H(r)^2} \end{aligned}$$

という形をしている。式 (1) で与えられるテンソルタイプは、D(≥ 5) 次元時空を考えた時のみ現れる量である。

4 Tidal Love Number

式 (1) に注目する。

Schwarzschild 極限 $\Lambda \to 0$ をとり、無質量で静的な場合を考える。次に、無次元の動径関数を次のように導入する。

$$x \equiv \left(\frac{r_s}{r}\right)^{D-3}$$

また、この動径座標を用いて場を再定義する。

$$u(x) \equiv x^{\frac{D+2L-4}{2(D-3)}} 2(D-3)\Psi_T(r(x))$$

すると、場の従う方程式 (1) は

$$x(1-x)u''(x) + xu'(x) - \left(\hat{L}+1\right)^2 u(x) = 0 \tag{4}$$
$$\hat{L} = \frac{L}{D-3} \tag{5}$$

となる。ここで、あえてこの方程式を

$$x(1-x)u''(x)+[c-(a+b+1)x]u'(x)-abu(x)=0 \tag{6}$$

とかく。パラメータ a, b, c は

$$a \equiv \hat{L}+1, \quad b \equiv \hat{L}+1, \quad c \equiv 2\hat{L}+2$$

である。式 (6) は超幾何微分方程式と呼ばれる方程式であり、解析的に解く方法はよく知られている。そこで、その方法に従って次のような場合分けを行う。

(i) $\hat{L}$ は整数でも半整数でもない

(ii) $\hat{L}$ が半整数

(iii) $\hat{L}$ が整数

(i) の時
ブラックホールを考える上で、適切な解の境界条件はホライズンで正則である。今の場合、その条件を満たす解は

$$u(x) = A\,{}_2F_1\left[\hat{L}+1, \hat{L}+1; 1; 1-x\right]$$

この解は $u(1) = A$ なので、確かにホライズンで正則である。これを $x = 0$ 周りで展開し、x を r に戻すと

$$\begin{aligned} u(r \to \infty) \simeq A\left(\frac{r}{r_S}\right)^{L+D-3} &\left(\frac{\Gamma(2\hat{L}+1)}{\Gamma(\hat{L}+1)^2}\left(\frac{r}{r_S}\right)^{L}\right. \\ &+\cdots+\frac{\Gamma(-2\hat{L}-1)}{\Gamma(-\hat{L})^2}\left(\frac{r_S}{r}\right)^{L+D-3} \\ &\left.+\ldots\right) \end{aligned} \tag{7}$$

式 (7) の第一項は振幅 A を持つ外部潮汐場、第二項は系の応答を表している。よって、TLN はその二つの項の係数比をとって

$$\begin{aligned} k_T &= \frac{\Gamma(-2\hat{L}-1)}{\Gamma(-\hat{L})^2}\frac{\Gamma(\hat{L}+1)^2}{\Gamma(2\hat{L}+1)} \\ &= \frac{2\hat{L}+1}{2\pi}\frac{\Gamma(\hat{L}+1)^4}{\Gamma(2\hat{L}+2)^2}\tan(\pi\hat{L}) \end{aligned}$$

と、求めることができる。同様の手順で (ii)、(iii) の場合についても求めることができる。その結果、TLN は、
(ii) の時

$$k_T = \frac{(-1)^{2\hat{L}}(D-3)\Gamma(\hat{L}+1)^2}{(2\hat{L})!(2\hat{L}+1)!\Gamma(-\hat{L})^2}\log\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

ただし、r_0 は実験によって決まる長さスケールである。
(iii) の時

$$k_T = 0$$

となる。

他のタイプについても、同様の方針で TLN を求めることができる。スカラータイプ、ベクトルタイプ、テンソルタイプの TLN をまとめて示すと以下のようになる。
テンソルタイプ ($D \geq 5$)

$$k_{\mathrm{T}} = \begin{cases} \dfrac{2\hat{L}+1}{2\pi}\dfrac{\Gamma(\hat{L}+1)^4}{\Gamma(2\hat{L}+2)^2}\tan(\pi\hat{L}) & \text{(i)} \\ \dfrac{(-1)^{2\hat{L}}(D-3)\Gamma(\hat{L}+1)^2}{(2\hat{L})!(2\hat{L}+1)!\Gamma(-\hat{L})^2}\log\left(\dfrac{r_0}{r}\right) & \text{(ii)} \\ 0 & \text{(iii)} \end{cases} \tag{8}$$

ベクトルタイプ ($D \geq 4$)

$$k_{\mathrm{RW}} = \begin{cases} (2\hat{L}+1)\frac{\Gamma\left(\hat{L}+2+\frac{1}{D-3}\right)^2\Gamma\left(\hat{L}-\frac{1}{D-3}\right)^2}{\Gamma(2\hat{L}+2)^2}\frac{\sin\left[\pi\left(\hat{L}+\frac{1}{D-3}\right)\right]\sin\left[\pi\left(\hat{L}-\frac{1}{D-3}\right)\right]}{\pi\sin(2\pi\hat{L})} & \text{(i)} \\ \dfrac{(-1)^{2\hat{L}}(D-3)\Gamma\left(\hat{L}-\frac{1}{D-3}\right)\Gamma\left(\hat{L}+2+\frac{1}{D-3}\right)}{(2\hat{L}+1)!\Gamma\left(-\hat{L}-1-\frac{1}{D-3}\right)\Gamma\left(-\hat{L}+1-\frac{1}{D-3}\right)}\log\left(\frac{r_0}{r}\right) & \text{(ii)} \\ 0 & \left(\hat{L}-\frac{1}{D-3}=\frac{L-1}{D-3}\ \text{が整数}\right) \end{cases} \tag{9}$$

スカラータイプ ($D \geq 4$)

$$k_{\mathrm{Z}} = -\frac{1}{4^{2\hat{L}+1}}\frac{(L+D-3)(L+D-2)^2}{L(1-L)^2}\frac{\Gamma(\hat{L})\Gamma(\hat{L}+2)}{\Gamma\left(\hat{L}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\hat{L}+\frac{3}{2}\right)}\tan(\pi\hat{L}) \quad \text{一般の } \hat{L},\text{D} \tag{10}$$

5 Results

最終的な結果は、式 (8)、式 (9)、式 (10) である。式 (8) より、$D \geq 5$ の高次元において、テンソルモードの TLN は値を持つことがわかった。また、ベクトルタイプについては、$D = 4$ の時、3 個目の場合にそ応答するので、4 次元時空における TLN は 0 になることがわかる。一方、高次元時空を考えると、TLN は他の場合の値も取るので 0 にはならない。最後に、スカラータイプについて考える。$\hat{L} = \frac{L}{D-3}$ なので、$D = 4$ の時、$\hat{L} = L$ である。すなわち、式 (10) 中

の $\tan(\pi\hat{L})$ は常に 0 を与える。従って、$D = 4$ の時スカラータイプの TLN は 0 になる。一方、高次元の時、$\hat{L}$ は整数以外の値も取りうるので、常に 0 とはならない。

6 Conclusion

本発表は [1] のレビューを行った。その結果、D 次元 Schwarzschild ブラックホール由来の TLN は何かしらの値を持ち、常に 0 とはならないことがわかった。一方で、4 次元 Schwarzschild ブラックホール由来の TLN を調べると、恒等的に 0 になることがわかった。

今後の展望としては、4 次元時空中の Schwarzschild ブラックホール由来の TLN が 0 になる理由は考える余地がある。また、本発表では、Schwarzschild ブラックホールに注目して一般の次元で TLN を調べた。他のブラックホールについても TLN を一般の次元で調べることは価値のあることだと考えられる。

Acknowledgement

天文・天体物理若手夏の学校を企画・運営してくださったスタッフの皆様、ご支援いただいた皆様に心より感謝申し上げます。また、日頃から議論をしていただいている理論物理学研究室の方々に、この場を借りて感謝を申し上げます。

Reference

[1] L. Hui, A. Joyce, R. Penco, L. Santoni and A. R. Solomon, JCAP **04**, 052 (2021)

————index へ戻る

重宇 a11

photon sphere の一般化「dark horizon」

京都大学 基礎物理学研究所
天羽 将也

photon sphereの一般化「dark horizon」

天羽 将也 (京都大学 基礎物理学研究所)

Abstract

本発表では，ブラックホール（BH）にまつわる概念について再考する．数理的に厳密には，BH は「未来光的無限遠と因果的曲線で結べない領域」として定義され，BH の外から BH の中を観測することはできない．一方，現実的には，わずかに BH の外の領域についても，そこからの光などを遠方で観測することはほとんど不可能である．静的球対称な時空においては，シャドウとして暗く見える領域の境界は photon sphere で与えられることが分かっており，また photon sphere に関する数理的に豊富な性質も明らかにされている [1]．しかし，対称性がない時空においては，photon sphere の定義は機能しない．対応する概念をどう定式化すべきか，まだ研究者の間で合意に達していない．そこで本発表では，未来光的無限遠への光の到達条件 [2,3] をもとに，photon sphere を対称性を課さない時空に一般化した dark horizon を導入する．そして，現実の BH を良い近似で記述する Kerr BH において，dark horizon の形状を明らかにし，シャドウとの関係について議論する．

1 Introduction

宇宙には，光すら脱出できないほどの強重力を生み出す天体が存在し，これをブラックホール（BH）と呼ぶ．近年、電波望遠鏡を用いたイベント・ホライズン・テレスコープ・プロジェクトにより，BH が影として暗く写る「シャドウ」が撮影され [4]，電磁波観測を用いた BH 探査の幕開けとなった．静的球対称な時空では，BH の周りを回り続ける光の軌道の集まりが，photon sphere と呼ばれる球面をなし（Schwarzschild では半径 $3M$），photon sphere はシャドウ観測において観測できる実質的な限界を与える．加えて，photon sphere は，その面積が質量によって制限される [5] などの性質も分かっており，数理的観点からも豊富な性質も持つ．一方，現実の BH は回転しているため，静的球対称という条件は成り立たず，既存の photon sphere の定義が適用できない．そこで，より一般的な時空において，photon sphere と同様の役割を果たす概念の定式化を目指した研究がなされてきた [6–11]．

本発表では，BH の少し外側の特徴的な構造を定式化した inner dark horizon および outer dark horizon という 2 つの新しい定義を，一般の漸近的平坦時空において導入し，これらの定義の妥当性を議論する．

2 定義の直感的な説明

本章では，定義の直感的な説明を行う．

十分な微分可能性をもつ時空において，時空の各点で，光的ベクトルの方向が分かれば，その方向に放たれた光が未来光的無限遠に到達するかどうかが決まる．未来光的無限遠に到達する光的ベクトルを集めて時間一定面に射影した，**脱出円錐（escape cone）**を考えよう．静的球対称時空の場合，脱出円錐の境界は真円を描く.（典型的な）photon sphere 上では，この真円が大円（接空間上で球面と球の中心を通る平面との交線）となる（図 1）．この特徴をもとに，photon sphere を一般化したのが dark horizon である．

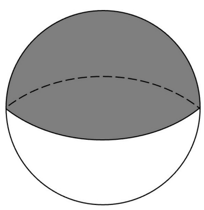

図 1: Schwarzschild 時空の photon sphere$r = 3M$ における脱出円錐（赤色）の図．photon sphere では大円により脱出球面の内外が分けられる．

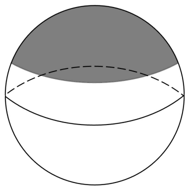

図 2: 脱出円錐（灰色）のイメージ図．脱出円錐の外部に完全に含まれる大円が存在する．この場合は inner dark domain の元かつ outer dark domain の元である．

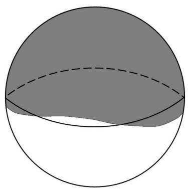

図 3: 脱出円錐（灰色）のイメージ図. 脱出円錐の外部に完全に含まれる大円も，脱出円錐の内部に完全に含まれる大円も，ともに存在しない．この場合は inner dark domain の元でないが，outer dark domain の元である．

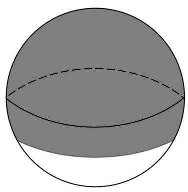

図 4: 脱出円錐（赤色）のイメージ図．脱出円錐の内部に完全に含まれる大円が存在する．この場合は inner dark domain の元でも outer dark domain の元でもない．

具体的には，次のようにして inner dark horizon と outer dark horizon を定める．一般の時空では，脱出円錐の境界は真円とは限らないことに注意して，脱出円錐の構造を 3 パターンに分類する．まず，脱出円錐の外部に完全に含まれる大円が存在する場合について，対応する時空上の点は，inner dark domain の元かつ outer dark domain の元であるとする（図 2 ）．次に，脱出円錐の外部に完全に含まれる大円も，脱出円錐の内部に完全に含まれる大円も存在しない場合について，inner dark domain の元でないが，outer dark domain の元であるとする（図 2 ）．最後に，脱出円錐の内部に完全に含まれる大円が存在する場合について，inner dark domain の元でも outer dark domain の元でもないとする（図 4 ）．このようにして定めた inner dark domain と outer dark domain について，それらの境界を，それぞれ **inner dark horizon** と **outer dark horizon** と呼び，2 つの総称を **dark horizon** とする．大まかに言えば，dark horizon は脱出円錐が大きい領域と小さい領域の境目になっている．

3 性質

本章では，2 章で導入した 2 種類の dark horizon について，代表的な性質をまとめる．

性質 3.1. Minkowski 時空において，inner dark horizon，outer dark horizon はいずれも存在しない．

性質 3.1 は，dark horizon の存在には重力の効果が必要であることを意味している．

次に，4 次元漸近的平坦時空で未来光的無限遠近傍を考える．u を遅延時間，r を動径座標，x^I を角度座標とする．このとき，計量は次のように r^{-1} で展開される [12,13].

$$
\begin{aligned}
g_{uu} &= -1 + mr^{-1} + \mathcal{O}\left(r^{-2}\right), \\
g_{ur} &= -1 + \mathcal{O}\left(r^{-2}\right), \\
g_{IJ} &= \omega_{IJ} r^2 + h^{(1)}_{IJ} r + \mathcal{O}\left(r^{0}\right), \\
g_{uI} &= \mathcal{O}\left(r^{0}\right).
\end{aligned}
$$

但し，ω_{IJ} は平坦な空間における単位 2 次元球面の計量である．以下，$\dot{}$ を u 微分とする．光的測地線の光的無限遠到達条件 [2,3] を用いて，次の性質が成り立つことが分かる．

性質 3.2. 脱出円錐で射影する時間一定面を，$t := u+r =$const. で与える．$\Omega_{IJ} := \omega_{IJ} - \frac{1}{2}\dot{h}^{(1)}_{IJ} + \frac{1}{2}\dot{m}\omega_{IJ}$ が正定値であること，および $\dot{m} \leq 0$ を仮定する．このとき，BH 時空において，inner dark horizon と outer dark horizon は共に存在する．

ここで，Ω_{IJ} の正定値性は，遠方でのエネルギー流が，プランク光度以下であることとおよそ対応して

おり，$\dot{m} \le 0$ は，光的エネルギー条件と対応している．このことは，典型的な時空では，仮定が満たされていることを意味する．性質 3.2 は，性質 3.1 と合わせて，dark horizon の存在が，強い重力場の存在と密接な関係にあることを示唆している．

性質 3.3. 典型的な時空（2 章での脱出円錐の 3 つの分類により得られる時空の 3 つの領域のそれぞれが連結な時空）において inner dark horizon は outer dark horizon より内側，もしくは一致する．

このことは，inner dark horizon dark horizon の inner 及び outer という名称の由来である．

性質 3.4. 観測や面積不等式に重要なクラスの photon sphere はすべて，inner dark horizon かつ outer dark horizon である．

性質 3.4 は，dark horizon が観測や面積不等式に重要なクラスの photon sphere の一般化であることを意味している．

4　具体的な時空における解析

本章では，dark horizon の静的球対称性からのずれに対する挙動を理解するために，定常回転 BH 解である Kerr 解，および球対称動的な時空の解である Vaidya 時空における形状をまとめる．

まず，Kerr 時空

$$ds^2 = -\frac{\Sigma\Delta}{A}dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{A}{\Sigma}\sin^2\theta\left(d\varphi - \frac{2ar}{A}dt\right)^2, \qquad (1)$$

を考える．ここで，$\Sigma := r^2 + a^2\cos^2\theta$，$\Delta := r^2 - 2Mr + a^2$，$A := \left(r^2 + a^2\right)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta$ である．解析の結果を図 5 にまとめる．outer dark horizon は，回転軸上の無限遠の観測者が見たシャドウと一致している．inner dark horizon の各点は，回転軸から外れた無限遠方向にいる観測者が見たシャドウと対応しているが，具体的な関数形など，詳細は今後の課題である．図 5 より，回転の効果が inner dark horizon と outer dark horizon の違いを生んでいることが示唆される．

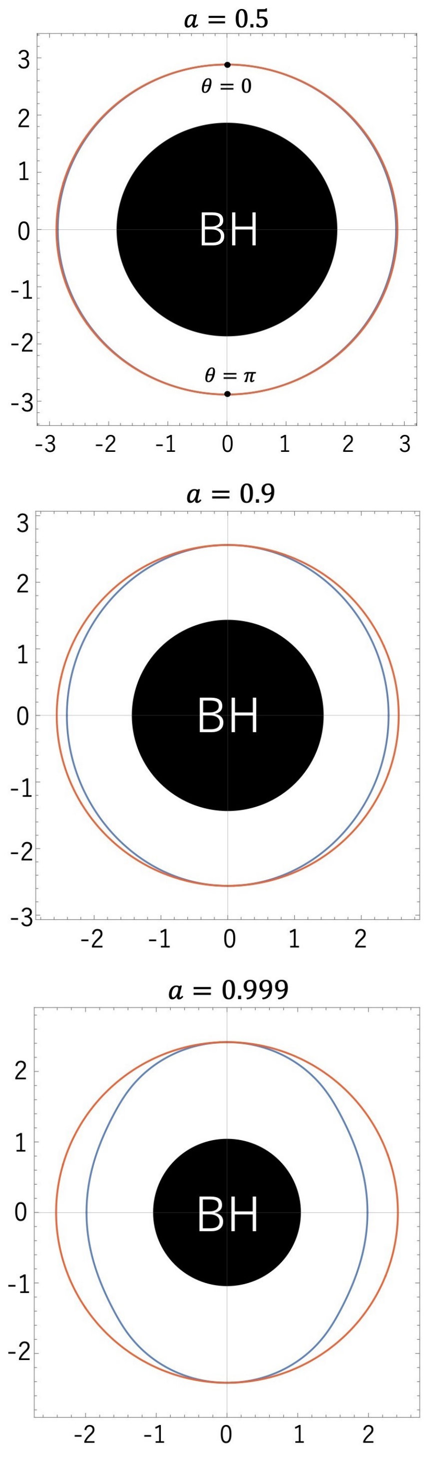

図 5: $a = 0.5, 0.9, 0.999$ のときの inner dark horizon（青色）と outer dark horizon（朱色）．質量を $M = 1$ としてプロット．

次に，outgoing Vaidya 時空

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2m(u)}{r}\right)du^2 - 2dudr + r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2\right). \qquad (2)$$

を考える．このとき，球対称性から，inner dark horizon と outer dark horizon は一致する．これら dark horizon の半径の時間発展は，図 6 のようにもとまる．dark horizon の半径は $3m(u)$ より小さくなるか，あるいは一致しているが，このことは，dark horizon は未来の光の軌道に依存した概念であり，$m(u)$ が広義単調減少していることに起因している．

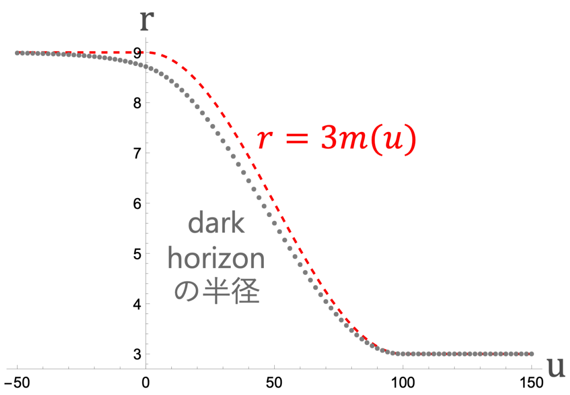

図 6: outgoing Vaidya 時空における，$3m$（灰色）に対する，dark horizon（灰色）の図．

5 考察

静的球対称時空で便利な概念である photon sphere について，現実的な時空への一般化として，inner dark horizon と outer dark horizon を提唱し，その性質を調べた．

今後は，photon sphere の場合と同様，dark horizon についても面積不等式が成り立つかどうか調べたい．また，ブラックホールのシャドウの形が実際に調べられた他の複数の時空について dark horizon の形状を明らかにし，観測との対応を精査したい．

Acknowledgement

本発表では，名古屋大・泉圭介講師，同・白水徹也教授，東京電機大・富川祥宗准教授，大阪公立大・吉野裕高准教授との共同研究に基づくものです．日頃の議論，ご指導に感謝申し上げます．

Reference

[1] C. M. Claudel, K. S. Virbhadra and G. F. R. Ellis, "The Geometry of photon surfaces," J. Math. Phys. **42**, 818-838 (2001).

[2] M. Amo, K. Izumi, Y. Tomikawa, H. Yoshino and T. Shiromizu, "Asymptotic behavior of null geodesics near future null infinity: Significance of gravitational waves," Phys. Rev. D **104**, no.6, 064025 (2021).

[3] M. Amo, K. Izumi, Y. Tomikawa, H. Yoshino and T. Shiromizu, "Asymptotic behavior of null geodesics near future null infinity III: Photons towards inward directions," [arXiv:2208.00822 [gr-qc]] (2022).

[4] K. Akiyama *et al.* [Event Horizon Telescope], "First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole," Astrophys. J. Lett. **875**, L1 (2019).

[5] R. Q. Yang and H. Lu, "Universal bounds on the size of a black hole," Eur. Phys. J. C **80** no.10, 949 (2020).

[6] T. Shiromizu, Y. Tomikawa, K. Izumi and H. Yoshino, "Area bound for a surface in a strong gravity region," PTEP **2017**, no.3, 033E01 (2017).

[7] H. Yoshino, K. Izumi, T. Shiromizu and Y. Tomikawa, "Extension of photon surfaces and their area: Static and stationary spacetimes," PTEP **2017**, no.6, 063E01 (2017).

[8] L. M. Cao and Y. Song, "Quasi-local photon surfaces in general spherically symmetric spacetimes," Eur. Phys. J. C **81**, 714 (2021).

[9] H. Yoshino, K. Izumi, T. Shiromizu and Y. Tomikawa, "Transversely trapping surfaces: Dynamical version," PTEP **2020**, no.2, 023E02 (2020).

[10] M. Siino, "Causal concept for black hole shadows," Class. Quant. Grav. **38**, no.2, 025005 (2021).

[11] M. Siino, "Black hole shadow and wandering null geodesics," Phys. Rev. D **106**, no.4, 044020 (2022).

[12] H. Bondi, M. G. J. van der Burg and A. W. K. Metzner, "Gravitational waves in general relativity. VII. Waves from axisymmetric isolated systems," Proc. Roy. Soc. Lond. A **269**, 21-52 (1962).

[13] R. K. Sachs, "Gravitational waves in general relativity. VIII. Waves in asymptotically flat space-times," Proc. Roy. Soc. Lond. A **270**, 103-126 (1962).

———index へ戻る

重宇 a12

soft hair を帯びたブラックホールの熱力学

京都大学大学院 理学研究科 基礎物理学研究所
小林 元

soft hair を帯びたブラックホールの熱力学

小林　元 (京都大学大学院 理学研究科 基礎物理学研究所)

Abstract

ブラックホール (BH) 熱力学の研究は，重力の定式化と熱力学が密接な関係にあることを示してきた．定常 BH は，その解を特徴づける少数のパラメータが熱力学と類似の関係式を満たすことや Hawking 輻射として知られる熱的輻射を伴うことなどにより，熱力学系として理解されてきた．[2] では，時空の等長変換に対する Noether charge として BH のエントロピーを定式化して熱力学第一法則を導出し，対称性を通じた重力理論の熱力学的性質の理解が進んだ．[3],[4] では，共形無限遠において非自明に作用する漸近対称性に付随して，BH の事象の地平面に soft hair という微視的自由度が生じることが提案され，BH の情報喪失問題の解決が試みられた．今回は [1] に基づき，BH 熱力学の第一法則を，漸近対称性の局所的な生成電荷である BMS momentum flux の保存則として導出し，soft hair の持つ熱力学的意味について議論する．

1　Introduction

[2] による等長変換群の生成電荷としての BH のエントロピーの定式化により，対称性を通じて重力理論と熱力学との対応が系の詳細に依らない普遍的な形で理解されるようになった．一方，場の理論や重力理論などゲージ不変性や一般座標変換不変性を持つ系において，境界において非自明に作用するゲージ変換を large gauge transformation (LGT) と呼び，一般に edge mode と呼ばれる物理的自由度をもたらす．近年，この自由度は holography 原理の起源の理解という観点から注目を集めている．BH が存在する時空における例として地平面上の soft hair が提案され ([3],[4])，情報喪失問題に対する答えの一端を担うと期待されている．以上 2 つの観点から，soft hair(境界の微視的自由度) は定常 BH の縮退した状態数を説明するのに役立つのか，LGT の生成電荷は [2] のような熱力学的な意味を持つのかという疑問がある．

本稿では [1] をもとに，Einstein-Maxwell 理論を例に位相空間の定式化を通じて，LGT の生成電荷の意味づけを与える．時空内部の flux を通じて共形無限遠と孤立 BH の地平面における生成電荷を局所的に対応付け，各天球方向において成立する熱力学第一法則を導出する．そこで地平面上の微視的自由度の間の熱のやり取りが記述され，時空内部の摂動を通じた境界の自由度への熱の流入があることを確かめる．

2　準備と定式化

2.1　Einstein-Maxwell 理論と位相空間

4 次元時空 $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ 上の重力場と電磁場の孤立系を考える[1]．Einstein-Maxwell 作用 $S = \int_{\mathcal{M}} L$ において[2]，ラグランジアン密度は $L = \frac{1}{16\pi G}\epsilon R + \frac{1}{2e^2}\mathcal{F}\wedge *\mathcal{F}$ である[3]．場の微小変分は場の配位空間上の 1-形式として定式化される．Lagrangian 密度 L の変分 δL は[4]

$$\delta L = \epsilon E^{\mu\nu}_{\mathrm{Einstein}}\delta g_{\mu\nu} + E_{\mathrm{Maxwell}}\wedge\delta\mathcal{A} + d\theta \qquad (1)$$

である[5]．運動方程式 $E^{\mu\nu}_{\mathrm{Einsitein}} = 0$，$E_{\mathrm{Maxwell}} = 0$ の下で $\delta L = d\theta$ である．on-shell に制限した配位空間を解空間と呼ぶ．$\omega = \delta\theta$ の Cauchy 面 Σ 上での積分

$$\Omega = \int_\Sigma \omega = \int_\Sigma \delta\theta = \delta\int_\Sigma \theta = \delta\Theta \qquad (2)$$

において Ω は解空間の閉 2-形式であり，presymplectic form と呼ぶ[6]．$\Theta = \int_\Sigma \theta$ を presymplectic potential という．Ω の縮退方向，すなわち任意の接方向 $\hat{\delta}$

---

[1] $\mathcal{A}$ を $\mathcal{M}$ 上の $U(1)$ ゲージ理論の接続，R を計量 $g_{\mu\nu}$ に対するスカラー曲率，$\mathcal{F} = d\mathcal{A}$ とする．

[2] 境界項は省略する．

[3] $\epsilon = \sqrt{-g}d^4x$ は $\mathcal{M}$ の体積 4-形式，$*$ は hodge star を表す．また，G, e は，重力場と電磁場の結合定数である．

[4] θ は時空における 3-形式かつ場の配位空間における 1-形式

[5] Einstein-Maxwell 理論に対する θ のあらわな形は $\theta[\delta] = \frac{1}{16\pi G}\epsilon_\mu(g^{\mu\alpha}\nabla^\nu\delta g_{\alpha\nu} - \nabla^\mu\delta g) + \frac{1}{e^2}\delta\mathcal{A}\wedge *\mathcal{F}$ である．

[6] $\delta^2 L = d\omega = 0$ より Ω は $\partial\Sigma$ が固定されているならば Cauchy 面の取り方によらない．

に対し[7]，$\alpha(\hat{\delta}) = \Omega(\hat{\delta}', \hat{\delta}) = 0$ ならば $\hat{\delta}'$ は非物理的な変換であり，この冗長な自由度を取り除くことで物理的位相空間を定式化できる．特に $\alpha(\hat{\delta}') = -\delta H$ と完全 1-形式となる時，H は $\hat{\delta}'$ の生成電荷であり，presymplectic form の縮退方向に沿って不変である．物理的自由度は生成電荷の値によって特徴づけられる．

2.2 ゲージ不変性と BMS 変換

Einstein-Maxwell 理論は一般座標変換とゲージ変換に対する不変性を持つ．これらの変換による計量とゲージ接続の変化 $\hat{\delta}_{\chi,\lambda}$ は，$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \mathcal{L}_\chi g_{\mu\nu}$, $\mathcal{A} \to \mathcal{A} + \mathcal{L}_\chi \mathcal{A} + d\lambda$ である．この変換のうち，large gauge transformation (LGT) は，Ω の非縮退方向になるという意味で物理的な変換を記述し，境界のない理論が持っていた対称性の一部が破れ，境界に物理的自由度を生じる．以下ゲージ変換の生成電荷を計算していく．閉 3-形式 $J_{\chi,\lambda} = \theta(\hat{\delta}_{\chi,\lambda}) - \chi \cdot L$ から $J_{\chi,\lambda} = dQ_{\chi,\lambda}$ を満たす 2-form として，

$$Q_{\chi,\lambda} = \frac{1}{16\pi G} * d\chi + \frac{1}{e^2}(\chi \cdot \mathcal{A} + \lambda) * \mathcal{F} \tag{3}$$

とする[8]．on-shell で presymplectic form は，

$$\Omega(\hat{\delta}_{\chi,\lambda}, \hat{\delta}) = -\int_{\partial\Sigma} \{\delta(Q_{\chi,\lambda}) - Q_{\delta\chi,\delta\lambda} - \chi \cdot \theta(\hat{\delta})\} \tag{4}$$

である．$\partial\Sigma$ における $\delta\chi, \delta\lambda$ の選択に依らないので，$\delta\chi|_{\partial\Sigma} = \delta\lambda|_{\partial\Sigma} = 0$ とする．可積分性を妨げる残りの式 (4) の第三項は，χ を $\partial\Sigma$ の接方向にとれば消える． $H = \int_{\partial\Sigma} Q_{\chi,\lambda}$ がゲージ変換の生成電荷となる．

漸近平坦時空は, Bondi 座標における計量の $r \to \infty$ での漸近条件により定式化される．この漸近条件を保つような LGT として BMS 変換を導入する．

- $\mathscr{I}^+{}_-$: future null infinity の $u \to -\infty$ 極限
- $\mathscr{I}^+$ への漸近条件を考えるとき，retarded Bondi 座標 (u, r, Θ^A) を取り，$g_{rr} = g_{rA} = 0$[9], $\partial_r \det\left(\frac{g_{AB}}{r^2}\right) = 0$ とゲージ固定する．
- 計量の漸近条件は $g_{AB} = r^2\gamma_{AB} + rC_{AB} + \cdots$,
$$\begin{aligned} g_{uu} &= -1 + \frac{2m_b}{r} + \cdots, \\ g_{ur} &= -1 + \frac{1}{32r^2} C_{AB}C^{AB} + \cdots, \\ g_{uA} &= \frac{1}{2} D^B C_{AB} + \frac{1}{r}\left(\frac{2}{3}N_A + \cdots\right) + \cdots. \end{aligned}$$
となり，非物理的なゲージ変換は $\{m_b, N_A, C_{AB}\}$ を変えない．
- ゲージ場の漸近条件は retarded radial gauge ($\mathcal{A}_r = 0$, $\mathcal{A}_u|_{\mathscr{I}^+} = 0$) の下で以下のようになる．
$$\mathcal{A} = \left(\frac{1}{r}E(u, \Theta^A) + \cdots\right) du + (A_A(u, \Theta^A) + \cdots) d\Theta^A$$
- BMS 変換は，Lie 微分 $\mathcal{L}_\xi(\cdots)$ が漸近条件を保つようなベクトル場 ξ によって生成される．
$$\xi|_{\mathscr{I}^+} = \left[f + \frac{u}{2} D_A Y^A\right] \partial_u + Y^A \partial_A \tag{5}$$
f は S^2 上の任意関数で supertlanslation の生成子，Y^A は S^2 上の共形 Killing 方程式を満たし，Lorentz 変換またはその Virasoro 生成子への拡張としての superrotation の生成子である．
- $\mathcal{A}_r = 0$ を保つため $\mathcal{A} \to \mathcal{A} + d\tau$ を伴う．$\tau|_{\mathscr{I}^+} = \varepsilon(\Theta^A)$ で，$\mathscr{I}^+$ で残る U(1) ゲージ変換を表す．

BMS 変換 $\chi = \xi$, $\lambda = \tau$ の生成電荷は[10],

$$H[f, Y, \varepsilon] = \int_{\mathscr{I}^+{}_-} \left[mf + j_A Y^A + q\varepsilon\right] \tag{6}$$

$$m(\Theta) = {}^2\epsilon \left.\frac{m_b}{4\pi G}\right|_{u\to-\infty}, \; q(\Theta) = {}^2\epsilon \left.\frac{E}{e^2}\right|_{u\to-\infty},$$
$$j_A(\Theta) = {}^2\epsilon \left.\left(\frac{N_A}{8\pi G} + \frac{EA_A}{e^2}\right)\right|_{u\to-\infty}$$

である[11]．m, j_A, q は，$\mathscr{I}^+_-$ の各点に作用する微小変換の生成電荷であり，境界の微視的な物理的自由度を記述する．定常軸対称時空においてこれらの局

[7] on-shell を保つ変換 $\hat{\delta}$ は解空間上の接ベクトルとみなす．

[8] $\cdot$ は内部積である．

[9] $u =$(一定) なる null 超曲面族の法ベクトルが $n^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu u$ であるため，$g^{uu} = 0$ および $n^\mu \partial_\mu \Theta^A = 0 \Rightarrow g^{uA} = 0$ である．逆行列をとり，$g_{rr} = g_{rA} = 0$ となる．

[10] (4) の計算において第 3 項が消えるような境界条件として，$N_{AB} = \partial_u C_{AB}$ と $\partial_u A_A$ は $\mathscr{I}^+{}_-$ へ漸近する極限で $1/|u|$ よりも早く減衰するとする．これらは $\mathscr{I}^+$ を通過する輻射のエネルギーの有限性を意味する．また境界における変分は $\delta f = \delta Y^A = \delta\varepsilon = 0$ を選ぶ．

[11] ${}^2\epsilon$ は $\sqrt{\gamma} d^2\Theta$ の $\mathscr{I}^+{}_-$ への引き戻しで定義される面積要素である．

所的な flux は，時空内部の対称性および自明なゲージ変換から定まる Noether 電荷 $Q_{\chi,\lambda}$ を $\mathscr{I}^+_-$ の座標で計算したものになる[12]．BMS の生成電荷は，$\mathscr{I}^+_-$ で bulk の対称性から定まる flux 2-form に非自明な変換関数をかけて積分したものになる．

時空内部の対称性となる Killing vector χ とゲージ関数 λ を用いて[13]，

$$\theta(\delta_{\chi,\lambda}) = J_{\chi,\lambda} + \chi \cdot L \overset{\text{on-shell}}{=} dN[\chi,\lambda] = 0$$

なる閉 2-形式 $N[\chi,\lambda]$ においても[14]，LGT 生成電荷との対応について $Q_{\chi,\lambda}$ と同様であり[15]，非自明な変換関数を用いて大域的な生成電荷の保存則から微分形式として微視的な保存則を導ける．

2.3 LGT 生成電荷の時空内部への拡張

Cauchy 面 Σ が $\mathscr{I}^+{}_-$ 以外の境界 $S = \partial\Sigma \setminus \mathscr{I}^+{}_-$ を持つ場合，時空の内部に自由度がなければ，閉 2-形式 N の flux が生成する流れに沿って $\mathscr{I}^+{}_-$ の LGT 生成電荷を S における生成電荷に対応させる．

1. 閉 2-形式 N と Σ 上の関数 F から，$F|_{\mathscr{I}^+_-} = f$，$H_\Sigma[F] = \int_{\partial\Sigma} FN = \int_\Sigma dF \wedge N$.
2. $dF \wedge N|_\Sigma = 0 \Rightarrow n_\mu(*N)^{\mu\nu}\partial_\nu F|_\Sigma = 0 \Rightarrow H_\Sigma[F] = 0$ である[16]．F は Σ 上で $n_\mu(*N)^{\mu\nu}$ に沿って一定として，真空解における $\mathscr{I}^+{}_-$ と S の間で LGT 生成電荷の保存則が成り立つ．F の解を通じて LGT の変換パラメータを時空内部に拡張できる．

具体的には $n_\mu(*N)^{\mu\nu}$ の生成する流れの端点を結ぶ全単射を $U_N : \partial\Sigma \to \partial\Sigma$ として[17]，$H_\Sigma[F] = 0$ より

$$\int_{\mathscr{I}^+_-} fN = \int_{U_N(\mathscr{I}^+_-)} (f \circ U_N)N = \int_S FN$$

により大域的な保存則が成り立つ．$N|_{\mathscr{I}^+{}_-} = U_N^* N|_S$ で，これが N の微視的な対応である．

[12] m は定常 Killing vector ∂_t，j_A は回転 Killing vector $\psi = \psi^A\partial_A$，q は自明な U(1) ゲージ変換から計算した $Q_{\chi,\lambda}$ である．
[13] 変換 $\hat{\delta}_{\chi,\lambda}$ により，計量とゲージ場は不変となるとする．
[14] N は presymplectic potential の $\partial\Sigma$ での被積分関数である．
[15] $N[\partial_t,0]|_{\mathscr{I}^+_-} = \frac{1}{2}m$，$N[\psi,0]|_{\mathscr{I}^+_-} = j_A\psi^A$，$N[0,\lambda]|_{\mathscr{I}^+_-} = \frac{1}{2}q$ と対応し，$Q_{\chi,\lambda}$ と定数係数だけ異なる．
[16] Σ の法ベクトルを n とした．
[17] 時空内部の自由度がないので湧き出しがないので $\partial\Sigma$ 以外で端を持たない．

3 BH 熱力学の微視的な保存則

漸近平坦時空における定常軸対称孤立荷電 BH 解を考える．$\partial\Sigma = \mathscr{I}^+{}_- \cup S$ で S は分岐面である．

1. 定常 Killing vector: $k = \partial_t$
   回転 Killing vector: $\psi = \partial_\psi = \psi^A\partial_A|_{\mathscr{I}^+_-}$
2. BH の静電ポテンシャル Φ, 角速度 Ω
3. event horizon の法ベクトルは $\xi = k + \Omega\psi$

最初の例として，$N := N[\xi,\Phi]$ の保存則から微視的な Smarr の公式を導く．

$$N[\xi,\Phi] := \frac{1}{16\pi G} * d\xi + \frac{1}{2e^2}\left\{\xi \cdot (\mathcal{A} \wedge *\mathcal{F}) + \Phi * \mathcal{F}\right\}$$

1. $N|_{\mathscr{I}^+_-} = \frac{1}{2}m + \Omega\psi^A j_A + \frac{1}{2}\Phi q$ ，$N|_S = \frac{\kappa}{8\pi G}a$
2. κ: horizon の表面重力,[18] a: horizon の面積要素
3. 微視的な対応は自明で Smarr の公式
   $\frac{1}{2}m + \Omega\psi^A j_A + \frac{1}{2}\Phi q = \frac{\kappa}{8\pi G}U_N^* a$ を得る[19].

3.1 微視的な熱力学第一法則

$\omega(\hat{\delta}_{\xi,\Phi},\hat{\delta}) = -dT[\xi,\Phi] = 0$ とすると[20]，

$$T[\xi,\Phi] = \delta(Q_{\xi,\Phi}) - Q_{\delta\xi,\delta\Phi} - \xi \cdot \theta[\hat{\delta}] \tag{7}$$

で，$T|_{\mathscr{I}^+{}_-} = \delta m + \Omega\psi^A\delta j_A + \Phi\delta q$, $T|_S = \frac{\kappa}{8\pi G}\delta a$ となる．ω の Cauchy 面 Σ 上の積分により，

$$\delta M + \Omega\delta J + \Phi\delta Q = \frac{\kappa}{8\pi G}\delta A \tag{8}$$

と大域的な保存則としての熱力学第一法則を導ける．

on-shell 変分 $\hat{\delta}$ により微視的な対応は自明ではない．変分された後の場及び汎関数に $'$ をつける．T を N とそれ以外に分けて $T = M - N$ として

$$M = N' + \frac{1}{2e^2}\delta\left(\xi \cdot (\mathcal{A} \wedge *\mathcal{F}) + \Phi * \mathcal{F}\right) - \xi \cdot \theta[\hat{\delta}]$$

[18] $\xi^\nu\nabla_\nu\xi^\mu = \kappa\xi^\mu$
[19] 今回．horizon を外から内へ通り抜ける flux 量で熱力学法則を記述していることに注意.
[20] T は presymplectic form 式 (4) の $\partial\Sigma$ での被積分関数である.

となる．$dM = dT + dN = 0$ で，N と M について各々2.3 節で議論した対応を適用すると，$\mathscr{I}^+{}_-$ で $v = w = z$ となる関数から

$$\int_{\mathscr{I}^+{}_-} zT = \int_{S_M} (v \circ U_M)M - \int_{S_N} (w \circ U_N)N$$
$$T|_{\mathscr{I}^+{}_-} = U_N^*((U_M \circ U_N^{-1})^* M|_S - N|_S)$$

となる．$U_M \circ U_N^{-1}$ は $S \to S$ への微分同相写像で恒等写像に十分近いため，ベクトル場 $\hat{l}$ で生成される微小変換として[21]，

$$U_M^* M|_S - U_N^* N|_S = U_N^*(M + \mathcal{L}_{\hat{l}} M - N)|_S$$
$$= U_N^*(T + d(\hat{l} \cdot N))|_S$$

となる．以上より T についての保存則として

$$\delta m + \Omega\psi^A \delta j_A + \Phi\delta q = \frac{\kappa}{8\pi G} U_N^*[\delta a + d(\hat{l} \cdot a)] \quad (9)$$

を得る．$\frac{\kappa}{2\pi} = T$ は BH の温度，$s = \frac{a}{4G}$ は分岐面におけるエントロピー密度で，各点における微視的状態の数を表す．$J = \hat{l} \cdot s$ として (9) の右辺第二項 TdJ の寄与は，分岐面 S 内で生じる微視的な熱流に対応し，微視自由度間のエネルギーのやり取りを記述する．この微視熱流項は N と M の時空内部での flux としての差に由来し，$dJ \neq 0$ は bulk の場の摂動を介して境界の各点で熱が出入りすることを示唆する．

4 まとめと展望

Section 2 では Einstein-Maxwell 理論を例に，物理的変換の生成電荷を位相空間を通じて定式化した．共形無限遠での各方向で定義される生成電荷を，バルクに自由度がない場合に Noether 電荷の flux を介して時空の内部領域の微視的な生成電荷と対応させた．境界から時空の内部に積分曲線を伸ばしていく考え方は，holographic entanglement entropy における極小曲面と類似しており，N の holographic な解釈ができるかは興味深い問題である．

Section 3 では，定常 BH 解において，presymplectic potential Θ と presymplectic form Ω の $\partial\Sigma$ での被積分関数 N および T から Smarr の公式と熱力学第一法則を導いた．N については場の変分は含まないので微視的な保存則は単に時空の 2-form に置き換えればよいだけであった．T については，on-shell 変分を含んだため時空内部の flux の変化を考慮する必要があり，非局所的な地平面上の接ベクトル $\hat{l}$ で記述される微視的熱流項が現れた．閉曲面で積分すればこの熱流の寄与は消えるが，非自明な関数をかけて積分すると大域的保存則にもこの影響が残り，LGT 生成電荷の保存則や表面重力が一定にならない動的な BH が従う熱力学法則が輻射を通じた開放系として記述される．特に時空内部に自由度がある場合や Killing が取れない動的 BH への拡張は今後の課題である．また，今回は微視的自由度としての熱力学第一法則を導いたため，熱力学量との対応が分かりやすい位相空間の取り方を提案したことになる．地平面や共形無限遠における生成電荷の flux がなす Poisson 代数はそれぞれ研究されているが，両者の関係の議論はあまりされていない．さらなる研究を進めて BH 熱力学における縮退した自由度について理解を深めることで，情報喪失問題の解決や重力の熱力学的性質の起源の解明につながると期待される．

Acknowledgement

お忙しい中議論や助言に時間を割いてくださった基礎物理学研究所宇宙グループ，京都大学天体核研究室の皆様と今回発表の機会を設けていただくにあたり尽力してくださったすべての方に御礼申し上げます．

Reference

[1] J. Kirklin, “Localisation of Soft Charges, and Thermodynamics of Softly Hairy Black Holes,” Class. Quant. Grav. **35**, no.17, 175010 (2018). [arXiv:1802.08145 [hep-th]]

[2] R. M. Wald, “Black hole entropy is the Noether charge,” Phys. Rev. D **48**, no.8, R3427-R3431 (1993). [arXiv:gr-qc/9307038 [gr-qc]]

[3] S. W. Hawking, M. J. Perry and A. Strominger, “Soft Hair on Black Holes,” Phys. Rev. Lett. **116**, no.23, 231301 (2016). [arXiv:1601.00921 [hep-th]]

[4] S. W. Hawking, M. J. Perry and A. Strominger, “Superrotation Charge and Supertranslation Hair on Black Holes,” JHEP **05**, 161 (2017) [arXiv:1611.09175 [hep-th]].

[21] $\hat{l}$ は変分 $\delta g_{\mu\nu}, \delta\mathcal{A}$ の 1 次のオーダーだが，局所的な場として記述できない．

———index へ戻る

重宇 a13

ミンコフスキー空洞内の荷電ブラックホール爆弾

日本大学大学院 理工学研究科
小塚 友裕

未提出

———index へ戻る

重宇 a14

splashback 半径による重力理論の制限可能性

名古屋大学大学院 理学研究科
谷田 幸貴

splashback 半径による重力理論の制限可能性

谷田　幸貴 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

現在、重力を記述する理論として一般相対性理論が用いられている。しかし、この理論は太陽系スケールなどの観測事実を矛盾なく説明する一方で、宇宙論的スケールにおいても成り立つかについては未だ良い精度で検証されていない。これを受けて、一般相対性理論を宇宙論的スケールで拡張した修正重力理論のモデルが多く考えられている。

修正重力理論の制限のための観測量として考えられているものの１つとして splashback 半径がある。splashback 半径とは銀河や銀河団の物理的境界を特徴づける量であり、観測的には密度勾配の値が急激に落ち込み、それが最小となる位置として見ることができる。

本発表では、(Adhikari et al. 2018) をもとに銀河団スケール（数 Mpc 程度) を特徴付ける splashback 半径について議論する。この論文では、修正重力理論の一つである $f(R)$ 重力理論と一般相対性理論それぞれにおける splashback 半径をシミュレーションで計算した。具体的には、銀河団に降着する物質の質量の関数として、それぞれの重力理論で splashback 半径の位置変化の挙動にどのような違いが出るのかを調べた。その結果、銀河団に落下する物質の質量の違いまで考慮すれば、実際に LSST などの将来観測を用いて splashback 半径を観測することにより、その挙動の違いから重力理論を制限できる見込みが十分にあることがわかった。

1 Introduction

1.1 The current status of gravity

1915 年、Einstein が一般相対性理論 (GR) を提唱した。それ以来、太陽系スケールなどのさまざまな実験の観測により、その正しさが検証され、現在ではこれが重力理論として広く受け入れられている。そして、この GR を基に、現在観測によって確認されている宇宙の加速膨張は宇宙定数 Λ を導入することで説明されている（標準 ΛCDM 宇宙モデル)。しかし、その宇宙定数の物理的解釈が未だに定まっていないことが課題としてある。また、観測面においても、太陽系スケールより大きいスケールなどでは未だに精度良く確かめることができていないという現状がある。そこで最近、この重力理論の制限のための観測量として注目を集めているのが以下で導入する splashback 半径なのである。

1.2 splashback

2014 年に、(Diemer et al. 2015) によって、ダークマターハロー (宇宙の平均エネルギー密度の約 $\frac{1}{4}$ を占めるダークマターが自らの重力で集まった領域) の外縁の非常に狭い範囲で、密度分布が $\frac{d(log\rho)}{d(logr)} \sim -4$ に及ぶ非常に急な勾配を持つことがわかった。ここで、ρ は密度、r はハロー中心からの距離を表す。この急な勾配は、ハローに落下してきたさまざまなダークマター粒子の軌道がほぼ同じ位置で重なることによって生じ、この位置は落下した粒子の軌道の遠点にほぼ対応する。このうち、ハローから見て最も外側にある急勾配は、宇宙膨張から切り離される位置である turnaround 半径から落下し始めて、初めての遠点の位置に一致する。この時、この粒子が落下後初めて遠点に到達することを splashback といい、その splashback の位置を splashback 半径という。これらの位置関係の概略図は下図のようになる。

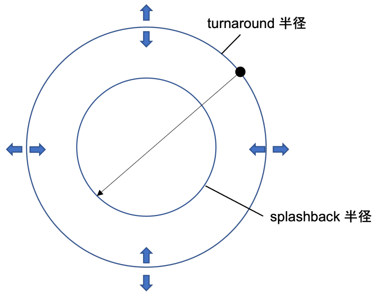

図 1: splashback 半径と turnaround 半径の位置関係

2 Theory

2.1 $f(R)$ gravity

本研究で扱う修正重力理論のモデルである $f(R)$ 重力理論は、GR における Einstein-Hilbert action

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}R. \tag{1}$$

において、Ricci scalar である R をその R による関数を含む $R + f(R)$ に置き換えることで得られる以下の action

$$S = \frac{1}{2\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}(R + f(R)). \tag{2}$$

を持つ。ここで、$\kappa = 8\pi G$ であり、g は計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の行列式を表す。GR の場合は、変数を計量のみとして (1) の変分を考えれば、以下の Einstein 方程式が得られる。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \tag{3}$$

$T_{\mu\nu}$ はエネルギー運動量テンソルである。一方で、$f(R)$ 重力理論では、(2) について GR と同様に計量のみを変数としてその変分を考えると、修正された Einstein 方程式

$$G_{\mu\nu} + f_R R_{\mu\nu} - (\frac{f}{2} - \Box f_R)g_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu f_R = \kappa T_{\mu\nu}. \tag{4}$$

が得られる。

$$\Box \equiv \nabla^\mu\nabla_\mu, \tag{5}$$

はダランベルシアンという演算子である。また $f_R \equiv \frac{df}{dR}$ とする。

次に、今回扱う $f(R)$ の具体的な形を決める必要がある。今回は以下の Hu-Sawicki モデルの形を用いる

$$f(R) = -m^2\frac{c_1(\frac{R}{m^2})^n}{c_2(\frac{R}{m^2})^n + 1}. \tag{6}$$

ここで、c_1,c_2,n はモデルパラメータであり、$\frac{c_1}{c_2} = 6\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}$,$m^2 = \Omega_m {H_0}^2$ である。

2.2 Dynamical Friction

1.2 ではハローを構成する質点の質量は、ダークマター粒子として全て同じであるとして splashback を導入した。実際には、ハローに重い物質 (銀河など）が落下する場合、その物質は軽い質点を繰り返し重力散乱し、その際に、その重い物質から軽い質点に運動量が移るため、重い物質は減速する。これを dynamical friction といい、以下の式で表される

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{G^2M\rho}{v^3}\mathbf{v}f(\frac{v}{\sqrt{2}\sigma}). \tag{7}$$

ここで、M は周囲の物質に対して速度 $\mathbf{v}$ を持つ物質の質量、$\rho(r)$ は周囲の密度分布、σ は周囲の物質の速度分散を表す。また、関数 $f(x)$ は $f(X) = erf(X^2) - \frac{2X}{\sqrt{\pi}}e^{-X^2}$ と表される。

この時、重い物質は、ハローへの落下中に大きく減速し、エネルギーを失うことになるので、これに伴い、splashback 半径の位置もダークマター粒子のそれと比べ、小さくなることが想定される。

2.3 Toy model for splashback

上で述べたように、密度の急激な変化は splashback 半径の位置付近で起きる。つまり、その変化の位置を知るには、重力崩壊後、splashback がどこで起きるのかを見る必要がある。この splashback の位置は、簡単な球対称の重力崩壊モデルで決まることがわかっているおり、ここでは、簡単のため ΛCDM の場合を説明する。このモデルでは、まず始めの球対称な shell の運動では、その shell の内側の質量 M は一定、つまり shell 同士が重なる shell-crossing は起きないと仮定する。この時、shell の運動方程式は

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}r. \tag{8}$$

となる。しかし、ヴィリアル領域に shell が入ると上の shell-crossing が無視できないので、式 (8) を M が一定として使えるのはヴィリアル化する $r = \frac{r_{ta}}{2}$ までとする。$r_{\rm ta}$ は turnaround 半径であり、物質が落下し始める半径に対応する。この $r = \frac{r_{ta}}{2}$ 以降は、ハローの全体質量 $M_{\rm tot}$ が $M_{\rm tot} \propto a^s$ で大きくなるとして、この質量が以下のように常に NFW プロファイルの形で分布するとする。

$$M(r) = M_{\rm tot} \frac{f_{\rm NFW}(\frac{r}{r_s})}{f_{\rm NFW}(\frac{R}{r_s})} \tag{9}$$

ここで、r_s は NFW プロファイルのスケール半径であり、関数 $f_{\rm NFW}(x)$ は $f_{\rm NFW}(x) = log(1+x) - \frac{x}{1+x}$ に従う。これらを用いると、splashback は $\dot{r} = 0$ に対応するので、それから splashback の位置がわかる。

3 Results

実際に、シミュレーションで得られる、$f(R)$ と GR における密度勾配の変化の様子を、重いサブハロー、軽いサブハロー、ダークマター粒子それぞれの場合で表したのが図 2 である (Adhikari et al. 2018)。横軸はハローの中心からの距離、縦軸は密度勾配を表している。また、図 2 内の $v_{\rm p}$ はサブハローの peak velocity で、この値が大きいほど、サブハローの質量が大きいことに対応する。つまり、このグラフでは黒線の $v_p < 300$ が軽いサブハロー、青線の $v_p > 400$ が重いサブハローを表している。

まず、図 2 の赤実線と赤点線を見てみると、それぞれ GR と $f(R)$ におけるダークマター粒子が落下することによって生じる splashback の位置、つまり密度の急勾配が見てとれるが、この位置が両者ではとんど変化しないことが読み取れる。次に、サブハローの場合をみると、まず軽いサブハローでは、GR でも $f(R)$ でもほとんどダークマター粒子の場合の splashback の位置と変わっていないことがわかる。その一方で、重いサブハローを見ると、青点線の $f(R)$ の方が青実線の GR の場合よりも大きい splashback 半径が現れ、結果、ダークマター粒子の splashback 半径の位置と比べると、$f(R)$ の方がその位置の変化が小さいことがわかる。

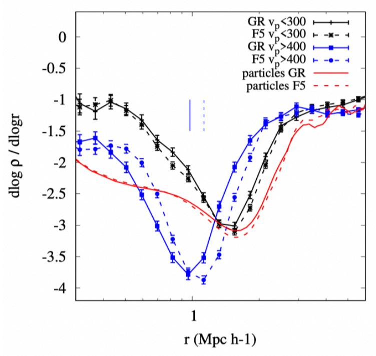

図 2: $f(R)$ と GR の splashback 半径の位置の比較

4 Discussion

GR に比べ $f(R)$ の方で、質量が大きくなることによる splashback 半径の変化が小さくなるのは、GR より $f(R)$ の重力が強いために、サブハローの落下速度が速くなり、結果、サブハローに対する摩擦の影響が GR より小さくなったからであると考えられる。これは、観測において、銀河の分布を見れば、その質量の違いにより splashback がどう変化するのかによって、$f(R)$ と GR を区別できるであろうことを示唆している。

5 Conclusion

本研究では、シミュレーションにより、$f(R)$ と GR の場合で splashback を比較し重力理論を制限できる可能性があることを確かめた。nDGP など他の重力モデルについても銀河の分布を見れば、同じように区別できることがわかっている (Adhikari et al. 2018)。一方、観測面においては、LSST の将来観測では調べる範囲が 3-4 倍になることで統計誤差が数パーセントに抑えられるとされているので、今後は、現在 10%にも及ぶといわれる系統誤差を同じレベルまでに抑えられるようにすることが課題となる。

Reference

Adhikari et al.(2018), JCAP11

Adhikari et al.(2014), JCAP11

Diemer & Kravtsov(2014),Astrophys. J. 789, 1

Hu & Sawicki (2007),Phys. Rev. D 76

———index へ戻る

重宇 a15

Spherical collapse in Generalized massive gravity

立教大学大学院 理学研究科
高寺 俊希

Spherical collapse in Generalized massive gravity

高寺 俊希 (立教大学大学院 理学研究科)

Abstract

近年観測されている宇宙の後期加速膨張は、現代宇宙論における重要な未解決問題の一つである。加速膨張はダークエネルギーの存在を仮定することで説明できるが、ダークエネルギーの代替案として重力理論の修正についての研究も盛んに行われている。ダークエネルギーの代替として修正重力理論を考える場合、重力理論の修正は観測結果と整合する形で行わなければならない。具体的には、少なくとも太陽系スケールでの重力は一般相対論と一致しなければならない。これを実現する機構として、重力の非線形効果に由来する "遮蔽機構" と呼ばれる機構がある。本講演では主に、遮蔽機構の一種である "Vainshtein 機構" と、重力の非線型性を取り扱う方法の一種である球対称崩壊モデルについてのレビューをおこなう。

1 Introduction

現在標準的な重力理論は一般相対論であり、太陽系スケールでの観測結果を高い精度で説明している。しかし、宇宙論的長距離では、重力が一般相対論の予言からずれる可能性もある。実際、Ia 型超新星の観測から明らかになった宇宙の加速膨張は、重力理論を修正することで説明することができる可能性があり、近年修正重力理論の研究が盛んに行われている。

重力理論の修正は、観測と整合するように行う必要がある。太陽系スケールの観測結果は一般相対論を支持するため、少なくとも、短距離での重力は一般相対論に一致しなければならない。一般に、重力を修正すると新たな自由度が生まれる。太陽系スケールで、修正重力理論が一般相対論の結果を再現するためには、この新たな自由度を遮蔽する必要がある。一部の修正重力理論には、非線形効果によってこれを自動的に遮蔽する仕組みがある（遮蔽機構）。本研究では、遮蔽機構の一種である Vainshitein 機構について調べていく。Vainshtein 機構は、作用の中の、空間の２階微分項によって引き起こされる。

近年、遮蔽機構を持つ重力理論の一つとして、Generalized massive gravity（GMG 理論）が提案された [1]。「重力子は質量を持つことが原理的に可能なのか？」という疑問の解決に向けて、重力を伝える重力子が質量を持つ重力理論の研究が長年行われていたが、整合的な理論を構築することは困難であった。しかし、近年の修正重力理論の進展によって、整合的な理論がいくつか提案されており、その一つが GMG 理論だ。GMG 理論は宇宙の後期加速膨張を説明し [2]、かつ遮蔽機構の存在が確認されている [3]。

本研究では今後、構造形成のように物質の配位が時間変化する場合に、GMG 理論が持つ Vainshtein 機構がどのようにはたらくのかを調べる。初めに、GMG 理論の非線形効果の取り扱い方を定式化する。一般に重力の非線形効果の解析は困難を伴うが、物質の分布として球対称崩壊モデルを考えることで、非線形効果を保ちつつ解析的に取り扱うことが可能になる。

2 Vainshtein 機構

遮蔽機構の一種である Vainshtein 機構は、空間の 2 階微分項が重要になってくる。ここでは具体的にスカラー・テンソル理論の一種を例に取り、Vainshtein 機構の働き方を見ていく。

次のような作用を持つスカラー・テンソル理論を考える。

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& -\frac{1}{4}\tilde{h}^{\mu\nu}\mathcal{E}^{\alpha\beta}_{\mu\nu}\tilde{h}_{\alpha\beta} \\ & -\frac{1}{2}(\partial\pi)^2 - \frac{1}{2\Lambda^3}(\partial\pi)^2\partial^2\pi - \frac{\tilde{h}^{\mu\nu}T_{\mu\nu}}{2M_{\rm Pl}} - \frac{\pi T}{M_{\rm Pl}}\end{aligned} \tag{1}$$

ここで、$\tilde{h}^{\mu\nu}\mathcal{E}_{\mu\nu}^{\alpha\beta}\tilde{h}_{\alpha\beta}$ は線形化アインシュタインテンソル、$\tilde{h}^{\mu\nu} := h_{\mu\nu} + 2\pi\eta_{\mu\nu}$ は計量の摂動、π はスカラー場の摂動で、$T = T^{\mu}{}_{\mu}$ はエネルギー運動量テンソルのトレース、$M_{\rm Pl} := 1/\sqrt{8\pi G}$ は換算プランク質量である。また、Λ^3 はエネルギーの次元を持ったパラメーターであり、スカラー場 π がダークエネルギーの代替となる場合は、$\Lambda^3 \sim M_{\rm Pl}{H_0}^2$ である。

簡単のために物質分布として静的球対称で非相対論的なものを仮定すると、

$$T_{\mu\nu} = \rho(r)\delta_\mu^0\delta_\nu^0 \tag{2}$$

$$\tilde{h}_{00} = -2\tilde{\Phi}(r) \tag{3}$$

$$\tilde{h}_{ij} = -2\tilde{\Psi}(r)\delta ij \tag{4}$$

となり、スカラー場の揺らぎ π の運動方程式と計量の運動方程式は次のようになる。

$$r^2\pi' + \frac{2}{\Lambda^3}r(\pi')^2 = -\frac{\mathcal{M}}{4\pi M_{\rm Pl}} \tag{5}$$

$$\tilde{\Psi} - \tilde{\Phi} = 0 \tag{6}$$

$$\frac{1}{r^2}\left(r^2\tilde{\Psi}'\right)' = \frac{\rho}{2M_{\rm Pl}} \tag{7}$$

ここで $\mathcal{M} := 4\pi\int^r \rho(s)s^2 ds$ は半径 r 内に含まれる質量。(5)、(6)、(7) を連立して解き、重力ポテンシャル $\Phi = \tilde{\Phi} - \pi$、$\Psi = \tilde{\Psi} + \pi$ を求めると、次の Vainshtein 半径 r_V

$$r_V := \left(\frac{\mathcal{M}}{8\pi M_{\rm Pl}}\right) \tag{8}$$

の内側と外側で振る舞いが変わることがわかる。チルダ付きの重力ポテンシャルは

$$\frac{\tilde{\Phi}}{M_{\rm Pl}} \simeq \frac{\tilde{\Psi}}{M_{\rm Pl}} \simeq -\frac{\mathcal{M}}{8\pi M_{\rm Pl} r} \tag{9}$$

と求められるが、$r \ll r_V$（小スケール）では (5) の非線型項が効き、$\pi \ll 1$ であることがわかる。つまり、

$$\Phi \simeq \tilde{\Phi},\ \Psi \simeq \tilde{\Psi} \tag{10}$$

となり、一般相対論の結果に一致する。一方 $r \gg r_V$（大スケール）では (5) の線型項が効き、$\pi \sim 1$ となり、結果として重力ポテンシャル Φ, Ψ は一般相対論の結果からずれる。

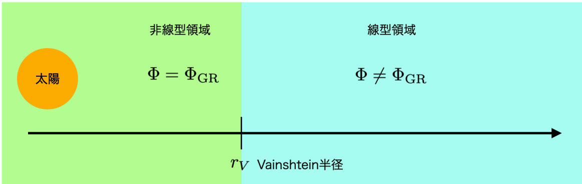

図 1: Vainshtein 機構

3 Spherical collapse in general relativity

Vainshtein 機構が働く Vainshtein 半径の内側では、物質の密度揺らぎが 1 より大きくなり、非線形な取り扱いが必要となる。非線形性を解析的に取り扱う方法として球対称崩壊モデルがあり、まずは一般相対論の場合の球対称崩壊モデルのレビューを行う [6, 7]。背景時空として FLRW 時空を考えると、非相対論的な流体の運動方程式と連続の式は次のようになる。

$$\dot{\boldsymbol{v}} + H\boldsymbol{v} + \frac{1}{a}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} = -\frac{1}{a}\boldsymbol{\nabla}\Phi \tag{11}$$

$$\dot{\delta} + \frac{1}{a}\boldsymbol{\nabla}\cdot[(1+\delta)\boldsymbol{v}] = 0 \tag{12}$$

ここで δ、$\boldsymbol{v}$、a、H、Φ は、それぞれ流体の密度揺らぎ、流体の速度場、スケールファクター、ハッブルパラメーター、重力ポテンシャルである。物質の分布として球対称 top-hat 型を考えると、(11)、(12) は

$$\ddot{\delta} - \frac{4}{3}\frac{\dot{\delta}^2}{1+\delta} + 2H\dot{\delta} = \frac{1}{a}(1+\delta)\boldsymbol{\nabla}^2\Phi \tag{13}$$

となる。(13) は密度揺らぎ δ の非線型項を含んでおり、線形近似はおこなわずに得られた式である。そのため、(13) と、重力ポテンシャルを決定するポアソン方程式 (14)

$$\boldsymbol{\nabla}^2\Phi = 4\pi G\bar{\rho}\delta \tag{14}$$

を連立して解くことで密度揺らぎの時間発展を非線型領域まで解析することができる。ここで $\bar{\rho}$ は背景時空での物質のエネルギー密度である。

4 Generalized massive gravity

GMG 理論は、dRGT 理論 [4, 5] と呼ばれる、整合的な有質量重力理論を拡張したもので、次の作用

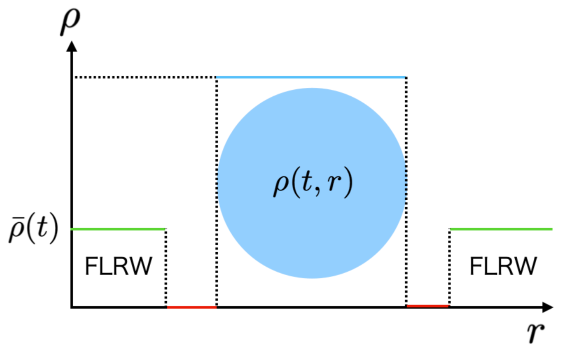

図 2: top-hat 型の物質分布

を持った理論である。

$$S = \frac{M_P^2}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\left[R + 2m^2\sum_{n=0}^{4}\alpha_n(\phi^a\phi_a)\mathcal{U}_n[\mathcal{K}]\right] \tag{15}$$

ここで m は重力子の質量、$\mathcal{U}_n$ はポテンシャルで、次のように定義された $\mathcal{K}$ の関数となっている。

$$\mathcal{K}^\mu_\nu := \delta^\mu_\nu - (\sqrt{g^{-1}f})^\mu_\nu \tag{16}$$

$$[\mathcal{K}] := \mathcal{K}^\mu_\mu \tag{17}$$

$$\tag{18}$$

また、$f_{\mu\nu}$ は fiducial metric と呼ばれ、Stückelberg 場 $\phi^a \quad (a = 0,1,2,3)$ というスカラー場を用いて

$$f_{\mu\nu} := \eta_{ab}\partial_\mu\phi^a\partial_\nu\phi^b \tag{19}$$

と定義される。また α_n は質量パラメーターといい、ϕ^2 の関数である。

5 今後の展望:Spherical collapse in Generalized massive gravity

本研究では今後、上で紹介した GMG 理論を用いて、球対称崩壊モデルの解析を行う。一般相対論の場合との差異として、重力を修正したことによりいくつかの基礎方程式の形が変わる。例えば、GMG 理論における背景時空の重力場の方程式は、

$$3\left(H^2 - \frac{\kappa}{a^2}\right) = m^2L + \frac{\rho}{M_P^2}, \tag{20}$$

$$2\left(\dot{H} + \frac{\kappa}{a^2}\right) = m^2J(r-1)\xi - \frac{\rho}{M_P^2}, \tag{21}$$

$$3HJ(r-1)\xi = \dot{L} \tag{22}$$

となる。ここで L、J は Stückelberg 場の関数であり、重力が修正されたために現れた。また、(22) は Stückelberg 場の方程式である。(20)、(21) は、GMG 理論における δ の時間発展を決める式を導出する際に利用される。また、重力ポテンシャルを決定する (14) の形も修正される。したがって、GMG 理論における密度揺らぎ δ の時間発展の様子は一般相対論の場合からずれてくることが期待される。しかし一方で、もし Vainshtein 機構がはたらくならば、重力の修正の効果は見えなくなり、結果は一般相対論と一致するはずである。本研究では、修正された密度揺らぎの発展方程式を解くことで、Vainshtein 機構の有無とそのはたらき方を調べる。

Acknowledgement

たくさんの議論と助言をして下さった理論物理学研究室の皆様と間仁田侑典さんに心より感謝申し上げます。

Reference

[1] C. de Rham, et al., Phys. Rev, D 90, 024050, (2014).

[2] M. Kenna-Allison, et al., Phys. Rev, D 101, 084014, (2020).

[3] A. E. Gümrükçüoğlu, et al., JCAP 09, 023, (2021).

[4] C. de Rham & G. Gabadadze, Phys. Rev, D 82, 0044020, (2010).

[5] C. de Rham, G. Gabadadze, & A. J. Tolley, Phys. Rev. Lett. 106, 231101, (2011).

[6] 松原隆彦,『現代宇宙論　時空と物質の共進化』, 東京大学出版会, 2010.

[7] S. Dodelson, F. Schmidt, "Modern cosmology", Academic press, 2021.

————index へ戻る

重宇 a16

Null Energy Condition を満たすバウンス宇宙モデル

福島大学大学院 共生システム理工学研究科
橋本 勇輝

Null Energy Condition を満たすバウンス宇宙モデル

橋本 勇輝 (福島大学大学院 共生システム理工学研究科)

Abstract

近年提唱されている宇宙論の１つに，バウンス宇宙論がある．バウンス宇宙論とは，宇宙が収縮から膨張（もしくは膨張から収縮）へと転じるとする理論である．従来のバウンスモデルでは，ヌル・エネルギー条件（Null Energy Condition，NEC）の破れを必要としていたが，NEC の破れには解の不安定性を引き起こすなどの問題があり，いかにして解の不安定性を取り除くかが重要な研究テーマだった [?, ?]．しかし最近，空間曲率が正であるという条件下であれば，NEC を破ることなくバウンスが実現可能である事が示された [?]．これにより，安定したバウンスモデルの構築が可能になるのではないかと期待されている．本発表では，先行研究 [?] に基づき Null Energy Condition を満たすバウンスモデルの数値解析を行い，その結果について考察する．

1　導入

インフレーションモデルは，ビッグバン宇宙論が抱えていた地平線問題や平坦性問題などを解決し，かつ Planck 衛星による宇宙背景輻射（CMB）などの観測結果と整合性がとれているものもいくつか存在することから，現在最も有力な宇宙モデルである．しかし，初期特異点問題や，初期条件の微調整問題などもあり，更なる研究が進められている．

バウンス宇宙論は，インフレーション理論の代替理論の１つで，地平線問題や平坦性問題，初期特異点問題などを解決することができる．これまでの研究では，平坦な宇宙においてバウンスを実現するためには，重力理論に物理的に矛盾が生じないよう通常の物質やスカラー場に対して課すヌル・エネルギー条件の破れが必要だった．だが，ヌル・エネルギー条件の破れは解の不安定性を引き起こすことなどの問題点もあり，その不安定性を回避するために様々な工夫をしなければならなかった．最新の研究では，空間曲率が正のもとであれば，ヌル・エネルギー条件を満たすバウンスモデルが可能であることが示された．これにより，より単純な形で，安定したバウンスモデルの構築が期待されている．

本発表では，先行研究に基づき，Null Energy Condition を満たすバウンスモデルについてスカラー場の方程式とフリードマン方程式を数値的に解き，その振る舞いについて考察する．

2　バウンスに必要な条件

バウンスが起こるためには，バウンスポイント，すなわち $H = 0$ のとき，ハッブルパラメーター H の時間微分が $\dot{H} > 0$ となる必要がある．これについて，フリードマン方程式，状態方程式 $w = \frac{p}{\rho}$ を変形して得られる式

$$\dot{H} = -\frac{1}{2M_P^2}\rho(1+w) + \frac{K}{a^2} \tag{1}$$

に基づき考える．

平坦な宇宙，すなわち $K = 0$ のとき，$\dot{H}$ は

$$\dot{H} = -\frac{1}{2M_P^2}\rho(1+w) \tag{2}$$

であり，物質エネルギー密度 ρ が常に正であることから，$\dot{H} > 0$ となるのは状態方程式 w が

$$1 + w < 0 \; i.e., \; w < -1 \tag{3}$$

となるときであることが分かる．これは，全物質エネルギー密度がバウンスの瞬間に消滅することを意味している．

NEC は次の式で表される．

$$\begin{aligned} NEC \quad &\Leftrightarrow \quad T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \rho + p \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \rho(1+w) \geq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

k^μ, k^ν はヌル・ベクトルである．NEC が満たされているときは，$H > 0$ のとき，エネルギー保存則をハッブルパラメーターで書き換えた次の式

$$\dot{\rho} + 3H\rho(1+w) = 0 \tag{5}$$

から，$\dot{\rho} < 0$ なので，膨張すれば物質エネルギー密度は減少し，$H < 0$ となる収縮時には $\dot{\rho} > 0$ となり物質密度エネルギーは増加する．また，バウンス時の状態方程式に関する条件式 (??) と NEC(??) を比較すると，バウンスが起こる際には NEC の破れ $\rho(1+w) < 0$ が生じていることが分かる．したがって，平坦な宇宙のもとでは，バウンスを引き起こすために NEC の破れが必要であると考えられる．この，NEC の破れを生じる特殊な流体をファントムあるいはゴースト凝縮体 (ghost-condensate) と呼ぶ．

2.1　BKL 不安定性

NEC の破れによって生じる不安定性のほかに，BKL 不安定性がある．BKL 不安定性とは，あらゆる初期の非等方性が，宇宙がビッグクランチに向かい収縮するにつれ不安定となることである．この不安定性により，それが収縮段階において増幅され，$P < \rho$ となった時にバウンスが途絶えてしまうという事が起こる [?].

BKL 不安定性を避けられ得る方法として，Ekpyrotic 収縮がある．これは，ポテンシャルが負の指数関数の形である Ekpyrotic モデルの，状態方程式 $w > 1$ を仮定した，ゆっくりとした収縮相で，ビッグクランチが近づきポテンシャルの影響がほとんどなくなるまで続く．この Ekpyrotic 収縮により，初期の非等方性を含む収縮宇宙が，一様で等方的な宇宙へと収束し BKL 不安定性が回避できる．近年では，従来の Ekpyrotic モデルにゴースト凝縮を結合させた新しいバウンスモデル（New Ekpyrotic モデル）などもある．

3　Null Energy Condition を満たすバウンス宇宙モデル

3.1　理論

本モデルでは，FRW 計量で記述される一様等方背景のもと，以下の一般相対論に実スカラー場を結合させた，ジョルダン・フレーム作用を考える．

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left(\frac{1}{2} M_P^2 R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi - \frac{\alpha}{2} R \varphi^2 - \bar{V}(\varphi) \right) \tag{6}$$

ここで，M_P はプランク質量，φ はスカラー場の振幅，α は定数である．

スカラー場 φ のポテンシャル $\bar{V}(\varphi)$ は次の式で表される．

$$\bar{V}(\varphi) = V_0 + \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \frac{\beta}{3}\varphi^3 + \frac{\lambda}{4}\varphi^4 \tag{7}$$

ここで，V_0，β，λ は定数，$m = 10^-8 M_P$ である．

また，スカラーポテンシャル $V(\varphi)$ は次の式で表される．

$$V(\varphi) = \bar{V}(\varphi) + \frac{\alpha}{2} R \varphi^2 \tag{8}$$

スカラー曲率 R はスカラー場 φ の質量項として働く．

エネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ は

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} =& (1-2\alpha)\nabla_\mu\varphi\nabla_\nu\varphi - \frac{1}{2}(1-4\alpha) g_{\mu\nu} g \\ & - \alpha\beta\nabla_\alpha\varphi\nabla_\beta\varphi - g_{\mu\nu}(\frac{1}{2}\alpha R\varphi^2 + \bar{V}(\varphi)) \\ & + \alpha R_{\mu\nu}\varphi^2 - 2\alpha\varphi\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi + 2g_{\mu\nu}\alpha\varphi\Box\varphi \end{aligned} \tag{9}$$

となり，これより物質エネルギー密度 ρ と圧力 p はそれぞれ以下の式で表される．

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \left(\frac{\alpha}{2} + \bar{V}(\varphi)\right) - 3\alpha\frac{\ddot{a}}{a}\varphi^2 \tag{10}$$

$$\begin{aligned} p =& \frac{1}{2}(1-4\alpha)\dot{\varphi}^2 - \left(\frac{\alpha}{2} + \bar{V}(\varphi)\right) \\ & + \alpha\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2H^2 + 2\frac{k}{a^2}\right)\varphi^2 - 2\alpha\varphi\ddot{\varphi} \end{aligned} \tag{11}$$

同時に，スカラー曲率 R は，

$$6\left(\dot{H} + 2H^2 + \frac{k}{a^2}\right) = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) + 2\frac{k}{a^2}\right) \tag{12}$$

で与えられる．

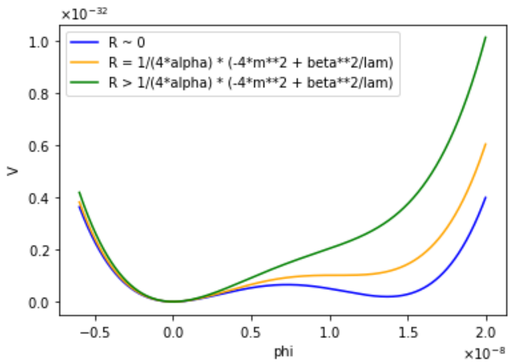

図 1: スカラーポテンシャル $V(\varphi)$ のスカラー曲率 R による変化．R ははじめ非常に小さく，バウンスに近づくにつれて値が大きくなり，その影響を受けてポテンシャルも変化する．

3.2 数値解析

スカラー場 φ の運動方程式は次の式で表される．

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \tag{13}$$

フリードマン方程式は次の通り．

$$H^2 = \frac{1}{3M_P^2}\rho - \frac{k}{a^2} \tag{14}$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2M_P^2}(\rho + p) + \frac{k}{a^2} \tag{15}$$

また，加速度方程式は，$\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a}$ より，

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6M_P^2}(\rho + 3p) \tag{16}$$

で与えられる．さらに，スカラー曲率 R，ハッブルパラメーターの時間微分 $\dot{H}$ は，次のように変形できる．

$$R = \frac{4\bar{V}(\varphi) - (1-6\alpha)\dot{\varphi}^2 + 6\alpha\phi\ddot{\varphi}}{M_P^2 - \alpha\varphi^2} \tag{17}$$

$$\dot{H} = \frac{\left(-\frac{1}{2} + \alpha\right)\dot{\varphi}^2 + \alpha\varphi\ddot{\varphi}}{M_P^2 - \alpha\varphi^2} \tag{18}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{3}\frac{(1-3\alpha)\dot{\varphi}^2 - \bar{V}(\varphi) - 3\alpha\varphi\ddot{\varphi}}{M_P^2 - \alpha\varphi^2} \tag{19}$$

これらの式を基に，適当な初期条件を与え数値解析を行った．しかし，解析プログラムにエラーが発見されたため，今回は先行研究より図を抜粋し掲載する．

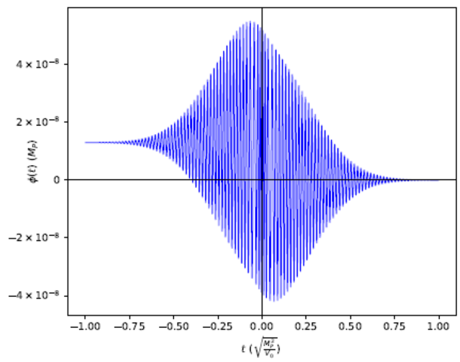

図 2: スカラー場の振幅 φ の振る舞い [?].

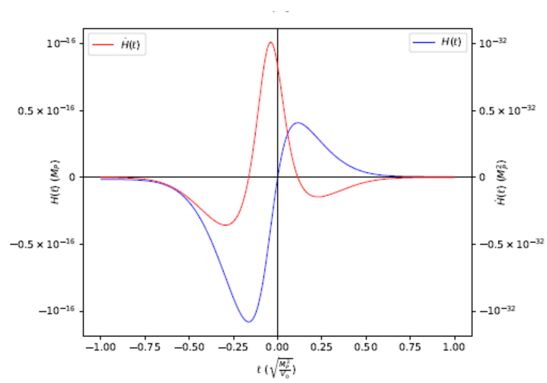

図 3: ハッブルパラメーター H と $\dot{H}$ の振る舞い [?].

スカラー場の振幅 φ は，R の増大と共に強制振動のように振る舞い，$\dot{H}$ が最大値の時，φ も最大値となる．その後減衰振動的に振る舞い，値は 0 に収束する．さらに，バウンス時には $\dot{H} > 0$ となっていることが確認できる．

4 結論

今回は，Null Energy Condition を満たすバウンス宇宙モデルを先行研究に基づき実際に数値解析を行った．その結果は芳しくないものだったが，修正し，今後の研究へと活かしたい．

Reference

[1] Jean-Luc Lehners, Phys. Rept., 465:223–263, 2008.

[2] Yi-Fu Cai, Damien A. Easson, and Robert Brandenberger, JCAP, 08:020, 2012.

[3] Ozen¸c Gungor and Glenn D. Starkman, JCAP, 2021(04):003, 2021.

[4] D. Battefeld and Patrick Peter, Phys. Rept., 571:1–66, 2015.

———index へ戻る

重宇 a17

膨張宇宙における重力メモリー効果

近畿大学 総合理工学研究科
橋本 祥吾

膨張宇宙における重力メモリー効果

橋本　祥吾 (近畿大学 総合理工学研究科 M1)

Abstract

一般相対論の物理的帰結として代表的な現象の一つに、重力波がある。重力波はコンパクトな天体の連星衝突や超新星爆発などによって発生する。重力波が干渉計を通過すると、時空が伸縮することによって干渉計の相対位置が振動するということはよく知られている。重力波の通過後、しばらく時間が経過すると、その振動が落ち着き元の位置に戻るはずである。しかし、それらの干渉計は元の位置に戻らず、重力波が通過した後でも形が変化したままの状態となる。これを重力メモリーという。重力以外の外力が働いていない物体は測地線という軌跡に沿って運動する。近接する測地線の空間的な間隔の変化は測地線偏差の式によって記述される。重力波が通過することで測地線も振動することから、摂動を考慮した測地線偏差の式が得られ、この式を積分することで重力メモリー効果に関する式が得られる。このメモリー効果は、漸近平坦な時空のみの現象ではなく、膨張宇宙における重力波に対しても起こりうる。宇宙膨張の効果が通常の重力メモリー効果にどのような影響を与え得るのかは宇宙論の観点からも重力波天文学の観点からも興味深い問題である。本発表では、 A.Kehagias と A.Riotto の論文 [1] を元に膨張宇宙における重力メモリー効果を解説する。

1　Introduction

一般相対論の物理的帰結として代表的な現象の一つに、重力波がある。重力波はコンパクトな天体の連星衝突や超新星爆発などによって発生する。重力波が干渉計を通過すると、時空が伸縮することによって干渉計の相対位置が振動する。重力波の通過後、しばらく時間が経過すると、その振動が落ち着き元の位置に戻るはずであるが、それらの干渉計は元の位置に戻らず、重力波が通過した後でも形が変化したままの状態となる。これを重力メモリーという。近接する測地線の空間的な間隔の変化は測地線偏差の式によって記述される。ここで摂動を考慮した場合の測地線偏差の式を得ると、この式を積分することで重力メモリー効果に関する式が得られる。このメモリー効果は、漸近平坦な時空のみの現象ではなく、膨張宇宙における重力波に対しても起こりうる。本発表では、まず摂動を考慮した測地線偏差の式から重力メモリー効果に関する式が得られることを説明し、平坦時空の場合と膨張時空の場合の重力メモリー効果の式を比較し、A.Kehagias と A.Riotto の論文 [1] にて用いられているグリーン関数から、重力メモリー効果の具体的な形を導出し議論する。

2　線形化されたアインシュタイン方程式

ここではまず計量がほとんどミンコフスキー的であるとしてそれからの小さな揺らぎを考える。このとき計量を、

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h^{\mu\nu} \qquad (h \ll 1) \tag{1}$$

とおき、h の 1 次までのアインシュタイン方程式を考える。このとき $h_{\mu\nu}$ はミンコフスキー時空上で定義されたテンソルと考える。この計量を用いて計算すると、

$$\begin{aligned}\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} = &-\Box h_{\mu\nu} + h_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{,\nu} + h_{\nu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{,\mu} \\ &-h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}(h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - \Box h)\end{aligned} \tag{2}$$

が得られ、ここで $h = h^{\alpha}{}_{\alpha}$、$\Box = \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta$ とした。これが線形化されたアインシュタイン方程式の一般形となる。

2.1　TT(Transverse-Traceless) ゲージ

ある計量を無限小の座標変換によって不変にする変換をゲージ変換という。このゲージをうまく固定す

ることで、物理的内容を変化させることなく方程式を簡単にすることができる。ここで次のようなゲージ条件を課す。

$$A^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0, \quad A^{0\mu} = 0, \quad A = \eta_{\mu\nu}A^{\mu\nu} = 0 \tag{3}$$

ここで、2 番目のゲージ条件は縦波成分を 0 にするような条件、3 番目はトレース成分を 0 にする条件で、これらのゲージ条件を特に TT ゲージ条件という。TT ゲージ条件を平坦時空の場合の線形化されたアインシュタイン方程式に課すと、次のような式が得られる。

$$h_{ij}^{\mathrm{TT}}{}'' - \nabla^2 h_{ij}^{\mathrm{TT}} = 16\pi G T_{ij}^{\mathrm{TT}} \tag{4}$$

膨張する時空の場合では、次の式が得られる。

$$h_{ij}^{\mathrm{TT}}{}'' + 2\mathcal{H}h_{ij}^{\mathrm{TT}}{}' - \nabla^2 h_{ij}^{\mathrm{TT}} = 16\pi a^2 G T_{ij}^{\mathrm{TT}} \tag{5}$$

ここで、$\mathcal{H}$ はハッブルパラメータ、a はスケール因子を表す。

3 測地線偏差の式

今、近接する 2 つの自由落下している物体を考える。すなわち重力以外の外力が働いていない物体で、それは測地線に沿って運動する。これを記述するのが測地線方程式である。また、2 つの物体の空間的な間隔は時空の曲率のために時間とともに変化する。この空間的な間隔をベクトル X^i とする。このベクトルが時間変化によってどのように変化するかを記述するものが測地線偏差の式である。ここで、ベクトル X^i についての測地線偏差の式は以下のように記述できる。

$$\frac{\mathrm{d}^2 X^i}{\mathrm{d}\tau^2} = -C^i{}_{0j0}X^j\left(\frac{\mathrm{d}X^0}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 \tag{6}$$

ここで、摂動を考慮した計量でワイルテンソルを計算し、先に説明した TT ゲージ条件を同じように課すと、以下のように書き換えられる。

$$\frac{\mathrm{d}^2 X^i}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{1}{2}\partial^2_{\tau\tau}h^i{}_j^{\mathrm{TT}}X^j \tag{7}$$

得られたこの式を積分することで重力メモリー効果に関する式が次のように得られる。

$$\Delta X^i = \frac{1}{2}X^j\Delta h^i{}_j^{\mathrm{TT}} \tag{8}$$

4 重力メモリー効果

測地線偏差の式から得られた変化量 $\Delta h_{ij}^{\mathrm{TT}}$ が重力メモリー効果を表している。この h_{ij}^{TT} について具体的な形を見ていく。今、質量 m の 4 元運動量 $p^\alpha = mu^\alpha$ とする源を考える。その源の運動の作用は、

$$\mathcal{S} = -m\int d\lambda\sqrt{-g_{\mu\nu}u^\mu(\lambda)u^\nu(\lambda)} \tag{9}$$

となる。ここで上式から、グリーン関数を用いて (5) 式を解くと h_{ij}^{TT} についての式が得られる。

$$h_{ij}^{\mathrm{TT}} = -\sqrt{4\pi G}\left[\int \mathrm{d}^4x' a^4 G^R_{ij\rho\sigma}(x,x')T^{\rho\sigma}(x')\right]^{\mathrm{TT}} \tag{10}$$

これは膨張宇宙の場合の式であるが、スケール因子を 1 とすることで、平坦時空の場合の式が得られる。例として、速度 u^μ で軌道 $s(\lambda)$ 上を自由に運動する n 個の粒子が $\tau = 0$ で衝突し、その後速度 u'^μ で離れる場合を考える。そのときのエネルギー運動量テンソルは、

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\int \mathrm{d}\lambda\delta^{(4)}(x - s(\lambda))\sum_{A=1}^{n}\Bigg(& m_A\frac{u_A^\mu(\lambda)u_A^\nu(\lambda)}{\sqrt{-g_{\mu\nu}u_A^\mu u_A^\nu}}\theta(-\tau) \\ &+ m_A\frac{u_A'^\mu(\lambda)u_A'^\nu(\lambda)}{\sqrt{-g_{\mu\nu}u_A'^\mu u_A'^\nu}}\theta(\tau)\Bigg) \end{aligned} \tag{11}$$

となる。ここで、用いていたグリーン関数を次のように 2 つの成分に分ける。

$$G^R_{ij\rho\sigma}(x,x') = \overline{G}^R_{ij\rho\sigma}(x,x') + \widehat{G}^R_{ij\rho\sigma}(x,x') \tag{12}$$

上式の第 1 項目は光円錐上、つまりミンコフスキー時空上を進む遅延グリーン関数になっており、第 2 項目は光円錐の内部を進むグリーン関数になっている。従って、グリーン関数を含んでいる h_{ij}^{TT} も 2 つのパートに分けることができる。

$$h_{ij}^{\mathrm{TT}} = \overline{h}_{ij}^{\mathrm{TT}} + \widehat{h}_{ij}^{\mathrm{TT}} \tag{13}$$

このとき、$\overline{h}_{ij}^{\mathrm{TT}}$, $\widehat{h}_{ij}^{\mathrm{TT}}$ はそれぞれ、

$$\overline{h}_{ij}^{\mathrm{TT}} = -\sqrt{4\pi G}\left[\int \mathrm{d}^4x' a^4 \overline{G}^R_{ij\rho\sigma}(x,x')T^{\rho\sigma}(x')\right]^{\mathrm{TT}} \tag{14}$$

$$\widehat{h}_{ij}^{\mathrm{TT}} = -\sqrt{4\pi G}\left[\int \mathrm{d}^4x' a^4 \widehat{G}^R_{ij\rho\sigma}(x,x')T^{\rho\sigma}(x')\right]^{\mathrm{TT}} \tag{15}$$

と書ける。(14),(15) 式にそれぞれグリーン関数と (11) 式を代入すると以下の式が得られる。

$$\overline{h}_{ij}^{\mathrm{TT}} = -\left(\frac{G}{4\pi}\right)^{1/2}\frac{1}{a(\tau)}\sum_A^n\left(\frac{p_i^A p_j^A\big|_{\lambda_0}}{(x^\alpha - s^\alpha(\lambda_0))p_\alpha^A}\right)^{\mathrm{TT}} \tag{16}$$

$$\widehat{h}_{ij}^{\mathrm{TT}} = \left(\frac{G}{4\pi}\right)^{1/2}\frac{1}{a(\tau)\tau}\left(\sum_A^n m_A v_i^A v_j^A\right)^{\mathrm{TT}} \cdot\left(\int_{\tau_m}^{\tau_0}\mathrm{d}\tau'\frac{\gamma(\tau')}{\tau' a^5(\tau')}+\cdots\right) \tag{17}$$

ここで、γ は $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\lambda}$ で、τ_m は過去の時間を表している。それぞれ、(16) 式を light-cone propagation、(17) 式を tail という。(16) 式を見てみると、右辺に 4 元運動量 P が存在する。この運動量 P は重力波からのもので、それが左辺の h_{ij}^{TT} というメモリー効果を記述していることから、重力波によって重力メモリー効果が生じることが分かる。また、(17) 式を見てみると、スケール因子のマイナス 6 乗のスケールになっており、light-cone propagation よりも tail の効果は非常に小さいことが分かる。

light-cone propagation は光円錐上を通ることから、真っ先に重力波検出器に検出される。一方、tail は光円錐の内部を進み、light-cone propagation よりも後に検出される。これは、平坦時空では現れない効果で、時空曲率 (宇宙膨張) が存在するためにこのような効果が現れると考えられる。

5 今後の展望

本発表では平坦時空の場合と膨張宇宙の場合について、重力波による重力メモリー効果を確認した。今後はブラックホール時空において、重力メモリー効果がどのように記述できるかについて考えていきたいと思う。

Reference

[1] A.Kehagias and A.Riotto, BMS in cosmology, JCAP 05,(2016)059

———index へ戻る

重宇 a18

FRW 宇宙モデルにおける BMS 対称性

近畿大学大学院 総合理工学研究科
中村 真

FRW 宇宙モデルにおける BMS 対称性

中村 真 (近畿大学大学院 総合理工学研究科)

Abstract

時空の理想的な観測点である無限遠を表す光的無限遠における観測者の集団に重力波が到達すると、通常の振動的な振る舞いの他に、観測者同士の相対的な位置が重力波の通過前後で永続的に変化するという非振動的なメモリー効果が得られる。最近、このメモリー効果は、無限次元の漸近的な対称性である BMS(Bondi-Metzner-Sachs) 対称性と深く関係していることが明らかになった。時空の対称性は時空計量を不変に保つ一方で、漸近的な対称性は十分遠方のみにおける対称性であり、時空内部においては必ずしも計量の不変性を要請しない。そのため BMS 対称性は時空内部の対称性とは大きく異なる様相を示す。また漸近平坦な時空のみでなく、開いた膨張宇宙においてもメモリー効果の可能性が議論されている。本発表では論文 [1] ラベルに基づいて、減速膨張する平坦な Friedmann-Robertson-Walker(FRW) 宇宙モデルにおける計量摂動のゲージ変換の振る舞いを詳しく調べることで FRW 宇宙モデルにおける重力メモリー効果と BMS 対称性について解説する。

1 Introduction

BMS 対称性は十分遠方で成り立つ漸近的な対称性である。また BMS 対称性は、BMS 変換の生成子が角度成分の任意関数で与えられる無限次元の対称性を持つ。
本発表では、論文 [1] に基づいて、FRW 宇宙モデルにおける BMS 対称性とメモリー効果の関係について解説する。

はじめに FRW 時空における時空の大域的構造を示すペンローズ図と、無限遠方で時空計量を扱うため計量をうまく書き換える。

FRW 時空を背景時空とした摂動を含む計量について、摂動計量をベクトル ξ の方向に移動させることで変換する。それにより摂動計量の各成分が ξ を用いた形で表され、計量の各成分に現れる関数の摂動が得られる。このようにして ξ により生成された摂動計量が、漸近平坦性の条件を満たす場合に、ベクトル場 ξ は漸近対称性 (BMS 対称性) を生成するという。

メモリー効果とは光的無限遠における観測者の集団に重力波が到達し通過すると、振動的な振る舞いだけでなく、通過前と通過後で相対的な位置が永続的に変化する。BMS 対称性とメモリー効果を関連付けるために、無限遠において BMS 検出器の集団を考える。この集団の測地線の間隔を測地線偏差の式からはじめて、測地線の間隔と測地線の接ベクトルを求めたのち、微分方程式を解くことで、通過前後の隣接する測地線の間隔の変化を求めることが出来る。その後角度方向の BMS 変換から測地線の間隔の変化であるメモリー効果との関係を結びつけることが出来る。

2 FRW 宇宙モデル

FRW(Friedmann-Robertson-Walker) 宇宙モデルとは一様等方な空間が膨張するような宇宙モデルである。

空間的に平坦な場合の FRW 宇宙モデルにおいて状態方程式 w として、線素は

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dr^2 + r^2 d\Omega_2^2), a(t) = (t/t_0)^{2/(3(w+1))} \tag{1}$$

として表すことが出来る。共形時間 $d\tau = dt/a(t)$ 用いて、

$$ds^2 = (\tau/\tau_0)^{2q}(-d\tau^2 + dr^2 + r^2 d\Omega_2^2) \tag{2}$$

ここで減速パラメータ $q = 2/(3w+1)$ として表した。また Bondi 座標 $(u = \tau - r, r, \theta, \phi)$ を用いて

$$ds^2 = ((u+r)/L)^{2q}(-du^2 + 2dudr + r^2 d\Omega_2^2) \tag{3}$$

2.1 ペンローズ図

空間的に平坦な場合のペンローズ図は

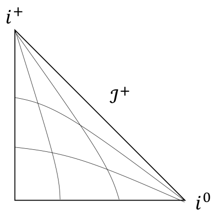

図 1: 減速膨張する平坦な FRW 宇宙のペンローズ図

2.2 光的無限遠

ペンローズ図は、時空計量の共形変換

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu} \tag{4}$$

を用いて描くことが出来る。ここで Ω は滑らかな関数で共形因子は $\Omega \to 0, d\Omega \neq 0$ と選ぶ　従って線素は

$$\tilde{ds}^2 = \Omega^2 ds^2 \tag{5}$$

と書き表すことが出来る。

Bondi 座標における FRW 宇宙の線素は、

$$ds^2 = ((u+r)/L)^{2q}(-du^2 + 2dudr + r^2 d\Omega^2) \tag{6}$$

より $\Omega^2 = ((u+r)/L)^{-2q} r^{-2}$ として r 一定の 3 次元の線素 ds_3^2 は

$$ds_3^2 = -du^2/r^2 + d\Omega^2 \tag{7}$$

この 3 次元の線素において光的無限遠 $r = \infty$ では

$$d\tilde{s}^2 = -du^2 * 0 + d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \tag{8}$$

無限遠方以外の角度成分 (θ, ϕ) と区別するために無限遠方での角度成分を $z = \exp(i\phi)\cot(\frac{\theta}{2})$
$, \bar{z} = \exp(-i\phi)\cot\frac{\theta}{2}$ として

$$d\Omega_2^2 = 4/(1+z\bar{z})^2 \quad d\tilde{s}^2 = -0{*}du^2 + 4/(1+z\bar{z})^2 \tag{9}$$

3 BMS 対称性

漸近対称性である BMS 対称性を記述するために、背景時空を FWR 宇宙とする摂動計量を考える。背景の計量と摂動計量について適切なベクトル場を用いることで、十分遠方において元の計量と一致することが FRW 時空で確認することが出来る。

まず、Bondi 座標 $(u, r, z, \bar{z})$ で背景時空である FRW 時空において、

$$ds^2 = (\frac{u+r}{L})^{2q}(-du^2 + 2dudr + 2r^2\gamma_{z\bar{z}}dzd\bar{z}) \tag{10}$$

$\gamma_{z\bar{z}} = \frac{2}{(1+z\bar{z})^2}$ を表す。
摂動計量 $\delta g_{\mu\nu}$ として、摂動を含めた計量は

$$ds^2 = (\frac{u+r}{L})^{2q}(-du^2 + 2dudr + 2r^2\gamma_{z\bar{z}}dzd\bar{z} \tag{11}$$
$$+\delta g_{\mu\nu}dx_B^\mu dx_B^\nu) \tag{12}$$

$\delta g_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu}(u, r, z, \bar{z})$ とする。$\delta g_{\mu\nu}$ は $\xi^\mu = (\xi^u, \xi^r, \xi^z, \xi^{\bar{z}})$ によって以下のように変換される。

$$\delta g_{\mu\nu} \to \delta\tilde{g}_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} + \partial_\rho \bar{g}_{\mu\nu}\xi^\rho + \bar{g}_{\mu\rho}\partial_\nu\xi^\rho + \bar{g}_{\rho\nu}\partial_\mu\xi^\rho \tag{13}$$

$\bar{g}_{\mu\nu}$ は背景の FRW 宇宙の計量を表す。

Boudi ゲージに似たゲージ [1] から

$$\delta\bar{g}_{rr} = \delta\bar{g}_{rz} = \delta\bar{g}_{r\bar{z}} = 0 \tag{14}$$

とする。この条件のもとで線素は [1]

$$\begin{aligned} ds^2 = (\frac{u+r}{L})^{2q}(&-du^2 + 2dudr + 2r^2\gamma_{z\bar{z}}dzd\bar{z} \\ &+Ndu^2 + \frac{2m}{r}du^2 + 2r^2\gamma_{z\bar{z}}Cdzd\bar{z} \\ &+2Edudr + \frac{2F}{r}dudr \\ &+rC_{zz}dz^2 + rC_{\bar{z}\bar{z}}d\bar{z}^2 + 2r\gamma_{z\bar{z}}C_{z\bar{z}}dzd\bar{z} \\ &-2U_z dudz - 2U_{\bar{z}}dud\bar{z} + \cdots) \end{aligned} \tag{15}$$

$N, m, C, C_{zz}, C_{\bar{z}\bar{z}}, C_{z\bar{z}}, E, F$ は $(u, z, \bar{z})$ の関数。

ここで BMS 変換 [[2],[3]]

$$u \to u - f, \tag{16}$$

$$r \to r - D^z D_z f, \tag{17}$$

$$z \to z + \frac{1}{r}D^z f, \tag{18}$$

$$\bar{z} \to \bar{z} + \frac{1}{r}D^{\bar{z}} f \tag{19}$$

ここで $f = f(z, \bar{z})$ とする。この変換はベクトル ξ を

$$\xi = -f\partial_u - D^z D_z \partial_r + \frac{1}{r} D^z f \partial_z + \frac{1}{r} D^{\bar{z}} f \partial_{\bar{z}} \quad (20)$$

により生成される。
このベクトル場によって、各関数の摂動、δC_{zz} などを求めることが出来る。

4 メモリー効果

メモリー効果とは検出器の集団の位置が重力波の通過前後で永続的に相対的な位置関係が変化する効果である。このメモリー効果は、自由落下する検出器の集団の測地線の相対的な位置関係を調べることで求めることができる。

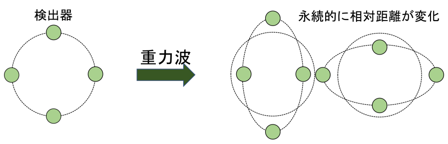

図 2: メモリー効果

5 メモリー効果と BMS 対称性

2 つの測地線を結ぶベクトル X^μ と測地線の接ベクトル u^μ を用いて測地線偏差の式は

$$\frac{D^2 X^\mu}{d\lambda^2} = -R^\mu_{\nu\rho\sigma} X^\mu u^\nu u^\sigma \quad (21)$$

と表される。ここで、$\frac{D}{d\lambda} = u^\mu \nabla_\mu$ を表す。
この式と X^2 の共変微分から常微分方程式を立て、解くことで初期位置 $X(0)$ との比較が出来る。
$X^2 = X^\mu X^\mu$ として

$$\begin{aligned} \frac{D^2 X^2}{d\lambda^2} &= 2g_{\mu\nu} X^\mu \frac{D^2 X^\nu}{d\lambda^2} + 2g_{\mu\nu} \frac{DX^\mu}{d\lambda} \frac{DX^\nu}{d\lambda} & (22) \\ &= 2X \frac{d^2 X}{d\lambda^2} + 2\left(\frac{dX}{d\lambda}\right)^2 & (23) \end{aligned}$$

従って

$$X \frac{D^2 X}{d\lambda^2} = -R_{\mu\rho\nu\sigma} X^\mu X^\nu u^\rho u^\sigma + \Xi \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \Xi &= g_{\mu\nu} \frac{DX^\nu}{d\lambda} \frac{DX^\nu}{d\lambda} - \left(\frac{dX}{d\lambda}\right)^2 & (25) \\ &= g_{\mu\nu} \frac{DX^\nu}{d\lambda} \frac{DX^\nu}{d\lambda} - \frac{1}{X^2} X_\mu X_\nu \frac{DX^\nu}{d\lambda} \frac{DX^\nu}{d\lambda} & (26) \\ & & (27) \end{aligned}$$

以下では $\Xi = 0$ として計算する。

検出器の位置を $X^\mu_{BMS}(u) = (u, r_0, z_0, \bar{z}_0)$ $r_0, z_0, \bar{z}_0$ 定数とする。接ベクトル $V^\mu_{BMS} = \frac{dX^\mu_{BMS}}{d\lambda} = (\frac{du}{d\lambda}, 0, 0, 0)$ $\hat{X}^\mu = X^\mu / X$ として、

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{d\lambda} &= -\omega X & (28) \\ \omega &= R_{\mu\rho\nu\sigma} \hat{X}^\mu \hat{X}^\nu u^\rho u^\sigma & (29) \end{aligned}$$

$u^\mu = V^\mu_{BMS}, \hat{X}^z = 1/\sqrt{g_{z\bar{z}}}$ と

$$R_{uzuz} = -\frac{1}{2}\left(\frac{r_0}{L}\right)^{2q} \partial_u^2 C_{zz} \quad (30)$$

を用いて微分方程式を解くと

$$X(\lambda) = X(0)\left[1 + \frac{(1+z\bar{z})^2}{8r_0}(C_{zz} + C_{\bar{z}\bar{z}})\right] \quad (31)$$

重力波の通過前 $X(\lambda_1)$ 通過後を $X(\lambda_2)$ としてその差 $\Delta X = X(\lambda_2) - X(\lambda_1)$ は

$$\Delta X = (1+z\bar{z})^2 \frac{X(0)}{8r_0}(\Delta C_{zz} \frac{\delta z}{\delta \bar{z}} + C_{\bar{z}\bar{z}} \frac{\delta \bar{z}}{\delta z}) \quad (32)$$

また、BMS 変換

$$(z, \bar{z}) \to (z + \delta z, \bar{z} + \delta \bar{z}) = (z + \frac{D^z f}{r}, \bar{z} + \frac{D^{\bar{z}f}}{r}) \quad (33)$$

から ΔX が BMS 変換と関係することが分かる。

6 Conclusion

漸近平坦時空の光的無限遠で知られている BMS 対称性が、平坦な FRW 宇宙モデルにおける光的無限遠にも存在することが分かった。また、FRW 宇宙においても重力メモリー効果が存在し、それは FRW 宇宙の BMS 対称性と関係していることが明らかになった。

Acknowledgement

指導教員の石橋明浩教授と研究室のメンバーには感謝申し上げます。

Reference

[1] A. Kehagias and A.Ritto , BMS in cosmology ,JCAP 05, (2016)059

[2] H. Bondi, M.G.J. van der Burg and A.W.K. Metzner, Gravitational waves in general relativity.7. Waves from axisymmetric isolated systems, Proc. Roy. Soc. Lond. A 269 (1962) 21

[3] R.K. Sachs, Gravitational waves in general relativity. 8. Waves in asymptotically flat space-times, Proc. Roy. Soc. Lond. A 270 (1962) 103

———index へ戻る

重宇 a19

AdS instability

名古屋大学大学院 理学研究科
上道 恵也

AdS instability

上道　恵也 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

一般相対論の基礎方程式である Einstein 方程式の解の内、最も対称性の高いものを極大対称時空と呼ぶ。極大対称時空は定数の宇宙項で特徴づけられ、負の宇宙項を持つものを AdS 時空と呼ぶ。空間の遠方で AdS 時空に漸近する時空 (漸近 AdS 時空) の性質は、AdS/CFT 対応の文脈からも興味の対象となっている。また、AdS 時空の境界には実効的な障壁が存在し、それに起因する不安定性（AdS instability）からブラックホールが形成されるという指摘もある。この点も漸近 AdS 時空に対する関心を与えている。

本講演ではスカラー場を用いた漸近 AdS 時空の安定性解析について議論する。スカラー場の初期条件をガウス分布で与え、その振幅を変えるとどうなるかを数値的に解析した結果を紹介する。またその後にこの不安定性の原因を探るため非線形摂動解析も行い、スカラー場のエネルギーの低いモードから高いモードに移ることを見る [1]。

1　Introduction

AdS(anti-de Sitter) 時空は宇宙定数 Λ が負のアインシュタイン方程式の maximally 対称性な真空解で、

$$ds^2 = -(1+r^2/l^2)dt^2 + \frac{1}{(1+r^2/l^2)}dr^2 + \sin^2 x d\Omega^2 \tag{1}$$

となる。ここで l^2 は $l^2 = -3/\Lambda$ となる AdS 半径と呼ばれるものである。$d\Omega^2$ は 2 次元球面の metric である。ここから $r = l\tan x$ と置き換えると、

$$ds^2 = \frac{l^2}{\cos^2 x}(-dt^2 + dx^2 + \sin^2 x d\Omega^2) \tag{2}$$

となる。x の範囲は $0 < x < \pi/2$ となり、無限遠の境界というのは $x \to \pi/2$ のことである。timelike な測地線を AdS 時空上に書くと、図 1 の曲線のようになる。つまり、測地線は無限遠で反射し、また同じ位置に戻るのである。AdS 時空は閉じ込められた箱のようになり、この無限遠の境界を AdS 境界という。

他の maximally 対称性なアインシュタイン方程式の真空解である Minkowski 時空や de Sitter 時空ではエネルギーを無限遠に放射できるため非線形で安定する任意の小さな摂動が無限に成長することはない、AdS 時空での安定性は調べられていなかった。

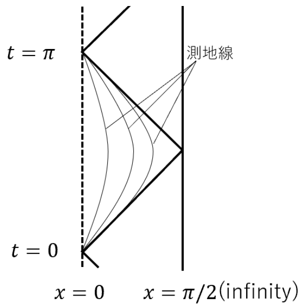

図 1: AdS 時空 ([[2]] を下に作成)

2　Model

今回は AdS 時空での Einstein-massless-scalar field を用いる。つまり、作用としては

$$S = \int d^4x\sqrt{|g|}\left[\frac{1}{16\pi G}(R-2\Lambda) - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi\right] \tag{3}$$

のように表され、運動方程式は

$$G_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = 8\pi G\left(\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(\nabla\phi)^2\right) \tag{4}$$

$$g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi = 0 \tag{5}$$

となる。そして、metric として

$$ds^2 = \frac{l^2}{\cos^2 x}(-Ae^{-2\delta}dt^2 + A^{-1}dx^2 + \sin^2 x d\Omega^2) \tag{6}$$

と仮定する。これは $x \to \pi/2$ で $\phi = 0, A = 1, \delta = 0$ となるようにして、AdS 境界になるようにしている。このように無限遠で AdS 境界になる時空は漸近 AdS 時空と呼ばれ、AdS 時空の反射するという性質を用いることができる。$\dot{f}$ は $\partial_t f$、f' は $\partial_x f$ を表すとする。場を $\Phi = \phi', \Pi = A^{-1}e^{\delta}\dot{\phi}$ のように再定義して、(4) 式から (6) 式を連立させて解くと、Φ, Π, A, δ に関する微分方程式が出てくる。

$$\dot{\Phi} = (Ae^{-\delta}\Pi)', \dot{\Pi} = \frac{1}{\tan^2 x}(\tan^2 x A e^{-\delta}\Phi)' \tag{7}$$

$$A' = \frac{1 + 2\sin^2 x}{\sin x \cos x}(1 - A) - \sin x \cos x A(\Phi^2 + \Pi^2), \tag{8}$$

$$\delta' = -\sin x \cos x(\Phi^2 + \Pi^2) \tag{9}$$

ここで、AdS 半径 l は消え、$x = 0$ 周りでテイラー展開すると、

$$\phi(t,x) = f_0(t) + \mathcal{O}(x^2), \delta(t,x) = \mathcal{O}(x^2) \tag{10}$$

$$A(t,x) = 1 + \mathcal{O}(x^2) \tag{11}$$

また、$\rho = \pi/2 - x$ とし、$\rho = 0(x = \pi/2)$ 周りでテイラー展開すると、

$$\phi(t,x) = f_\infty(t)\rho^3 + \mathcal{O}(\rho^5), \delta(t,x) = \delta_\infty(t) + \mathcal{O}(\rho^6) \tag{12}$$

$$A(t,x) = 1 - 2M\rho^3 + \mathcal{O}(\rho^6) \tag{13}$$

となる。数値計算をする上で、場の初期条件として Gaussian-type を使う。

$$\Phi(0,x) = 0, \Pi(0,x) = \frac{2\epsilon}{\pi}\exp\left(-\frac{4\tan^2 x}{\pi^2\sigma^2}\right) \tag{14}$$

この初期条件は $\sigma = 1/16$ とするが、振幅 ϵ を変化させていく。そして、波束が崩壊する条件は $A(t,x) = 0$ で、このとき apparent horizon ができ、Black hole ができるとしている。

3 Results

$A(t,x) = 0$ となる時に $x = x_H$ として (x_H は horizon 半径)、ϵ を変化させると x_H の分布がどこになるのかを見る。

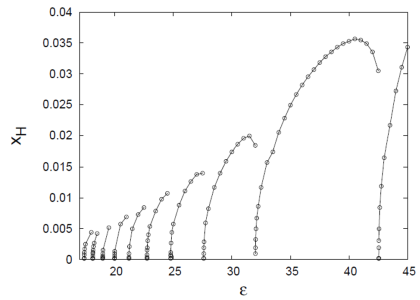

図 2: horizon 半径と振幅の関係 ([1])

図 2 の中にある○が apparent horizon ができた時の振幅と位置を表している。図 2 を右から見て、ϵ が小さくなると $x_H = 0$ になるまで小さくなる。この時の振幅を ϵ_0 とし、さらに振幅を小さくすると x_H は極値を持ち 0 になる。再びを $x_H = 0$ になる振幅を ϵ_1 とし、同様にして $\epsilon_n(n = 0, 1, 2, ...)$ とつけていく。図 2 では n が増加することで、相似の曲線が現れる。この曲線は始めの ϵ_0 までは波束が AdS 境界まで行かず重力崩壊を起こすが、さらに小さい振幅だと波束が AdS 境界での反射して中心に行くことで重力崩壊をすることを表している。よって、n は AdS 境界で反射した回数を表している。$\Lambda = 0$ でも $\epsilon > \epsilon_0$ では図 2 と同様の振る舞いをするが、$\epsilon < \epsilon_0$ では apparent horizon が現れない。よって、ブラックホールを形成するための振幅の閾値が存在する。これに対して、AdS 時空ではどんなに小さな振幅でもブラックホールを形成することができるように読み取れる。これが AdS 時空の不安定性-AdS instability となっている。しかし、n が大きくなると計算のコストがかかるので、中心部に限っての波束の重力崩壊を見る。

中心でのリッチスカラーは

$$R(t,0) = -2\Pi^2(t,0)/l^2 - 12/l^2 \tag{15}$$

となる。これは振動しており、その包絡線と時間の関係を取ったのが図 3 である。図 3 の上図から始めの段階では時間一定で、次の段階で指数的に増加し、最後に重力崩壊することがわかる。この時間一定の間が ϵ^{-2} に比例しているとし、横軸を $\epsilon^2 t$ に取ったのが、図 3 の下図である。ここから任意の振幅でも図 3 と同様の段階を経て、重力崩壊することがわかる。

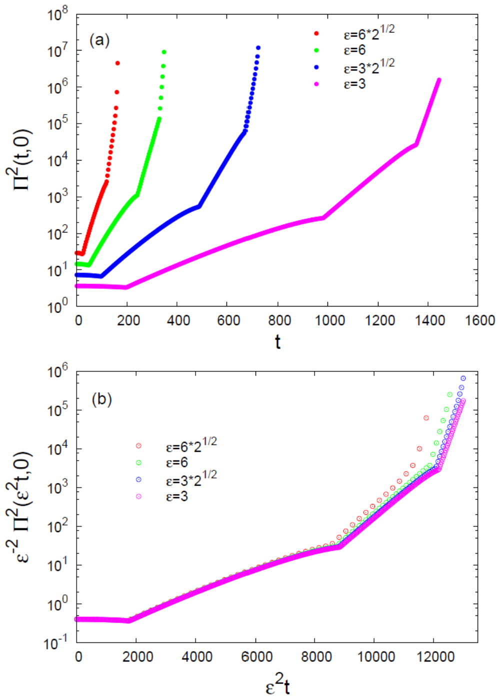

図 3: 初期値 ϵ に対する $\Pi^2(t,0)$ の変化 ([1])

4 Discussion

ϕ, A, δ を (4), (5) 式から ϵ で展開すると

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{2j+1}\epsilon^{2j+1}, A = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_{2j}\epsilon^{2j}, \delta = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{2j}\epsilon^{2j} \tag{16}$$

となる。これらを微分方程式 (7-9) 式に代入する。ϵ の 1 次では

$$\begin{aligned} &\ddot{\phi}_1 + L\phi_1 = 0, \\ &L = -\frac{1}{\tan^2 x}\partial_x\left(\tan^2 x\partial_x\right) \end{aligned} \tag{17}$$

のような形になる。この L の固有値 ω_j^2, 固有関数 $e_j(x)$ は超幾何関数 ${}_2\mathrm{F}_1$ を使って

$$\begin{aligned} &\omega_j^2 = (3+2j)^2, \\ &e_j(x) = d_j \cos^3 x {}_2\mathrm{F}_1(-j, 3+j, \frac{3}{2}; \sin^2 x) \end{aligned} \tag{18}$$

となる。関数の内積として

$$(f,g) = \int_0^{\pi/2} f(x)g(x)\tan^2 x dx$$

とする。$d_j = (16(j+1)(j+2)/\pi)^2$ で、$e_j(x)$ は $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ となり直交している。また、固有値が正なので時間に関して 17 は単振動の方程式になっており、解は安定する。固有モードの重ね合わせで解は

$$\phi_1(t,x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cos(\omega_j t + \beta_j)e_j(x) \tag{19}$$

のように表せる。また、ϵ の 2 次では

$$\begin{aligned} A_2(t,x) &= \frac{\cos^3 x}{sinx}\int_0^x \left(\dot{\phi}_1(t,x)^2 + \phi_1'(t,x)^2\right)\tan^2 ydy, \\ \delta_2(t,x) &= -\int_0^x \left(\dot{\phi}_1(t,x)^2 + \phi_1'(t,x)^2\right)\sin y\cos ydy \end{aligned} \tag{20}$$

となる。これらを使って、ϵ の 3 次では非同次方程式になる。

$$\begin{aligned} &\ddot{\phi}_3 + L\phi_3 = S(\phi_1, A_2, \delta_2), \\ &S = -2(A_2+\delta_2)\ddot{\phi}_1 - (\dot{A}_2 + \dot{\delta}_2)\dot{\phi}_1 - (A_2' + \delta_2')\phi_1 \end{aligned} \tag{21}$$

これを $c_j(t) = (\phi_3, e_j), S_j = (S, e_j)$ とフーリエ級数で書くと、

$$\ddot{c}_j + \omega_j^2 c_j = S_j \tag{22}$$

となる。この形は強制振動であり、S_j が $\cos\omega_j t$ や $\sin\omega_j t$ に比例する項を持つと、共鳴する。これら共鳴項を持つ条件として、$\omega_j = \omega_{j_1} + \omega_{j_2} - \omega_{j_3}$ となるような整数の組 (j_1, j_2, j_3) を持つことが導かれる。しかし、一般的な初期条件では共鳴項を消すことができず、永年方程式となる。初期条件としてまずは $(\phi, \dot{\phi})_{t=0} = \epsilon(e_0(x), 0)$ のような one-mode で考えてみる。この時、S_0 のみ共鳴項を含むが、(19) 式の位相を調整することで、共鳴項を消し安定にすることができる。しかし、次に初期条件として $(\phi, \dot{\phi})_{t=0} = \epsilon(e_0(x) + e_1(x), 0)$ のような two-mode では不安定になる。なぜならば、S_0, S_1 の共鳴項を消せるが、S_2 の共鳴項を消すことはできず $c_2(t) \sim t\sin 7t$ のような永年項が残るからである。ここから n-mode の初期条件では n に比例して、取り除くことができない共鳴項の数が増加すると予想される。低次のモードが混ざり合い、高次の共鳴モードへ移るので、エネルギースペクトルをより高い周波数になると考えられる。定量的に見るために $(e_j', e_k') = \omega_j^2\delta_{jk}$ となるような e_j' を使っ

て、$\Phi_j = (\sqrt{A}\Phi, e'_j), \Pi_j = (\sqrt{A}\Pi, e_j)$ と定義する。j-mode のエネルギーに対応する $E_j(= \Pi_j^2 + \omega_j^{-2}\Phi_j^2)$ を表したものが図 4 である。これは Parseval sum を使って、全エネルギー $M = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(A\Phi^2 + \Pi^2)\tan^2 x dx = \sum_{j=0}^{\infty} E_j(t)$ となる。

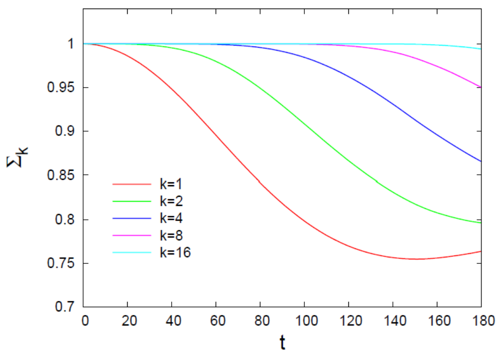

図 4: エネルギー割合の変化 ([1])

図 4 では初期条件は two-mode である $\phi(0,x) = \epsilon(e_0(x)/d_0 + e_0(x)/d_1)$ としており、$\Sigma_k = \frac{1}{M}\sum_{j=0}^{k} E_j$ と定義している。ここから低次のエネルギー割合は時間が経つと小さくなっていき、高次のエネルギー割合が大きくなる。

5 Conclusion

漸近 AdS 空間のもとで Einstein-massless-scalar 場を考えると、波束が境界で反射するので数値計算からどんなに小さな摂動でも不安定性を示すことがわかった。この現象は共鳴モードが混ざり合うことで、より高エネルギーの周波数へと移るということが原因であると結論づけられた。この結論から Λ が負であることの役割や AdS/CFT とどのように対応するかを解明することが今後の課題となる。

Acknowledgement

今回の論文の review 発表に対して、特に QG 研の皆様にはとても助けてもらいました。私の知識がない中、質問をしても真摯に対応していただき本当にありがとうございました。

Reference

[1] P. Bizon & A. Rostworowski, Phys. Rev. Lett. 107 031102 (2011)

[2] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry An Introduction to General Relativity*, Cambridge University Press, (2019)

[3] G.Martinon, arXiv:1708.05600 (2017)

———index へ戻る

重宇 a20

原始ブラックホール形成における数値シミュレーション手法

名古屋大学大学院 理学研究科
大橋 陸人

原始ブラックホール形成における数値シミュレーション手法

大橋 陸人 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

本発表では、Friedman-Robertson-Walker(FRW) 宇宙における球対称ブラックホール形成の数値シミュレーションに、初めて擬スペクトル法を用いることに成功した論文 (A. Escrivà 2020) のレビューを行う。タイトルにもある通り、本発表ではその数値計算手法に特に焦点を当てて説明する。

1 Introduction

原始ブラックホール (PBH) とは、放射優勢期に宇宙摂動が重力崩壊したことにより、初期宇宙に形成された可能性のあるブラックホールである。PBH は初期宇宙の密度揺らぎの分布における高い非線形ピークの結果として生成される可能性がある。ただし、これまでに得られたしきい値の解析的な見積もりはかなり貧弱であり、数値的な手法が有用であるとされている。

これらのシミュレーションは、曲がった時空における相対論的流体の運動を記述する Misner-Sharp 方程式を解くことによって行われる。今回レビューする論文 (A. Escrivà 2020) では、一般相対論においてすでに多くの成功を収めている擬スペクトル法を、初めて PBH の形成シミュレーションに用い、しきい値をこれまでよりさらに高精度で計算することに成功している。

本発表では、まず 2 節で Misner-Sharp 方程式を導入し、その解析手法を簡単に説明する。その後、第 3 節で擬スペクトル法とその長所について解説し、第 4 節で数値計算の結果と考察をまとめる。

2 Misner-Sharp 方程式

Misner-Sharp 方程式 (C. W. Misner & D. H. Sharp 1964) は球対称の相対論的流体の運動を記述する。線素を

$$ds^2 = -A(r,t)^2dt^2 + B(r,t)^2dr^2 + R(r,t)^2d\Omega^2, \tag{1}$$

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + sin^2(\theta)d\phi^2 \tag{2}$$

とする。また、

$$\frac{1}{A(r,t)}\frac{\partial R(r,t)}{\partial t} \equiv D_tR \equiv U(r,t), \tag{3}$$

$$\frac{1}{B(r,t)}\frac{\partial R(r,t)}{\partial r} \equiv D_rR \equiv \Gamma(r,t), \tag{4}$$

$$M(r,t) \equiv \int_0^R 4\pi R^2\rho(\frac{\partial R}{\partial r})dr \tag{5}$$

とすると、

$$\Gamma = \sqrt{1 + U^2 - \frac{2M}{r}} \tag{6}$$

が成り立つ。$M(r,t)$ は Misner-Sharp 質量と呼ばれる。このとき、Misner-Sharp 方程式

$$D_tU = -(\frac{\Gamma}{\rho+p}D_rp + \frac{M}{R^2} + 4\pi Rp), \tag{7}$$

$$D_tR = U, \tag{8}$$

$$D_t\rho = -\frac{\rho+p}{\Gamma R^2}D_r(UR^2), \tag{9}$$

$$D_tM = -4\pi R^2Up, \tag{10}$$

$$D_rM = 4\pi\Gamma\rho R^2, \tag{11}$$

$$D_rA = \frac{-A}{\rho+p}D_rp \tag{12}$$

が成り立つ。境界条件は $R(r=0,t)=0, U(r=0,t)=0, M(r=0,t)=0, D_rp(r=0,t)=0$ となる。

流体の状態方程式を $p=\omega\rho$ とする。シミュレーション領域の外側で FRW 時空と一致させるという条件から、式 (12) は解析的に解くことができ、

$$A(r,t) = (\frac{\rho_b(t)}{\rho(r,t)})^{\frac{\omega}{\omega+1}}, \rho_b(t) \equiv \rho_0(\frac{t_0}{t})^2, \rho_0 \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi} \tag{13}$$

となる。このとき、Misner-Sharp 方程式を次のように書き直すことができる。

$$\dot{U} = -A(\frac{\omega}{1+\omega}\frac{\Gamma^2}{\rho}\frac{\rho'}{R'} + \frac{M}{R^2} + 4\pi R\omega\rho), \quad (14)$$

$$\dot{R} = AU, \quad (15)$$

$$\dot{\rho} = -A\rho(1+\omega)(2\frac{U}{R} + \frac{U'}{R'}), \quad (16)$$

$$\dot{M} = -4\pi A\omega\rho U R^2. \quad (17)$$

ここで、$\dot{} \equiv \frac{\partial}{\partial t}, ' \equiv \frac{\partial}{\partial r}$ である。

ここで、compaction 関数 $C(r)$ を定義する。具体的には、

$$C(r,t) \equiv \frac{2[M(r,t) - M_b(r,t)]}{R(r,t)}. \quad (18)$$

各時刻における $C(r)$ の最大値を $C_{max} = C(r_m)$ とすると、$C_{max} \gtrsim 1$ のときに PBH が形成される。(V. Faraoni et al. 2017) 超地平線スケールでは (1) は

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(\frac{dr^2}{1-K(r)r^2} + r^2 d\Omega^2) \quad (19)$$

と近似できる。(M. Shibata & M. Sasaki 1999)

$$\epsilon(t) \equiv \frac{R_H(t)}{a(t)R_m} << 1, R_H(t) \equiv 1/H(t) \quad (20)$$

として、ϵ の leading term まで求めると、

$$A(r,t) = 1 + \epsilon^2(t)\tilde{A}(r), \quad (21)$$

$$R(r,t) = a(t)r(1+\epsilon^2(t)\tilde{R}(r)), \quad (22)$$

$$U(r,t) = H(t)R(r,t)(1+\epsilon^2(t)\tilde{U}(r)), \quad (23)$$

$$\rho(r,t) = \rho_b(t)(1+\epsilon^2(t)\tilde{\rho}(r)), \quad (24)$$

$$M(r,t) = \frac{4\pi}{3}\rho_b(t)R(r,t)^3(1+\epsilon^2(t)\tilde{M}(r)), \quad (25)$$

$$\tilde{\rho}(r) = \frac{3(1+\omega)}{5+3\omega}(K(r) + \frac{r}{3}K'(r))r_m^2, \quad (26)$$

$$\tilde{U}(r) = \frac{1}{5+3\omega}K(r)r_m^2, \quad (27)$$

$$\tilde{A}(r) = -\frac{\omega}{1+\omega}\tilde{\rho}(r), \quad (28)$$

$$\tilde{M}(r) = -3(1+\omega)\tilde{U}(r), \quad (29)$$

$$\tilde{R}(r) = -\frac{\omega}{(1+3\omega)(1+\omega)}\tilde{\rho}(r) + \frac{1}{1+3\omega}\tilde{U}(r), \quad (30)$$

となる。したがって、$K(r)$ が与えられ、その r 微分が計算できれば、Misner-Sharp 方程式は ϵ の t についての常微分方程式となる。

3 擬スペクトル法

(A. Escrivà 2020) では、時間発展には 4 次の陽的 RungeKutta 法を用い、r 微分の計算には擬スペクトル Chebyshev コロケーション法を用いている (詳細な説明は (J. P. Boyd 2000) にも記載されている)。

まず、$[-1,1]$ で定義された関数 $f(x)$ について考える。$N_{cheb}+1$ 個の点 $x_k = \cos(k\pi/N_{cheb}), k = 0,1,...,N_{cheb}$ において $f(x)$ と一致する関数 $f_{N_{cheb}}(x)$ で $f(x)$ を近似する。従って、$L_k(x_i) = \delta_{ki}$ を満たす関数 $L_k(x)$ を用いて、

$$f_{N_{cheb}}(x) = \sum_{k=0}^{N_{cheb}} L_k(x)f(x_k) \quad (31)$$

と書ける。次に、Chebyshev 多項式 $T_k(x)$ を

$$T_k(\cos\theta) \equiv \cos k\theta \quad (32)$$

で定義すると、

$$L_k(x) = \frac{(-1)^{k+1}(1-x^2)T'_{N_{cheb}(x)}}{\bar{c}_k N_{cheb}^2(x-x_k)} \quad (33)$$

と書ける。ここで、$k=0,N$ ならば $\bar{c}_k = 2$、それ以外なら $\bar{c}_k = 1$ である。これを用いると p 階導関数は次のように求められる。

$$f_{N_{cheb}}^{(p)}(x_i) = \sum_{k=0}^{N_{cheb}} L_k^{(p)}(x_i)f(x_k). \quad (34)$$

Chebyshev 微分行列 $D_{i,j}^{(p)} \equiv L_j^{(p)}(x_i)$ を定義すると、

$$D_{i,j}^{(1)} = \frac{\bar{c}_i}{\bar{c}_j}\frac{(-1)^{i+j}}{x_i - x_j}, (i \neq j), i,j = 1,...,N_{cheb}-1, \quad (35)$$

$$D_{i,i}^{(1)} = -\frac{x_i}{2(1-x_i^2)}, i = 1,...,N_{cheb}-1, \quad (36)$$

$$D_{0,0}^{(1)} = -D_{N_{cheb},N_{cheb}}^{(1)} = \frac{2N_{cheb}^2+1}{6} \quad (37)$$

と求まる。ただし、$D^{(1)}$ の対角項を計算する際には、恒等式

$$D_{i,i}^{(1)} = -\sum_{j=0,j\neq i}^{N_{cheb}} D_{i,j}^{(1)} \quad (38)$$

を用いる。

擬スペクトル法は有限差分と比較して以下の 2 つの点において特に優れている。

・誤差は、有限差分では $1/N^v, v > 0$ のように減少するのに対し、擬スペクトル法では N_{cheb} について指数関数的に減少する。
・有限差分では近接点のみを考慮して導関数を計算するのに対し、擬スペクトル法ではすべての点の値を考慮してグローバルに計算される。

なお、$f(x)$ は $[-1, 1]$ でフィットされていたが、実際には $[r_{min}, r_{max}]$ において数値計算を行う。(A. Escrivà 2020) では以下の線形写像を用いている。

$$\tilde{x}_k \equiv \frac{r_{max} + r_{min}}{2} + \frac{r_{max} - r_{min}}{2} \tag{39}$$

4　数値計算の結果と考察

まず、PBH に興味があるので、宇宙は放射優勢であるとして、$\omega = 1/3$ とする。また、時間発展における初期条件を $t_0 = 1, a_0 = 1, H_0 = 1/2$ とし、曲率を

$$K(r) = \mathcal{A} e^{-\frac{1}{q}(r/r_m)^{2q}} \tag{40}$$

とする。ここで、定数 $\mathcal{A}$ は曲率振幅と呼ばれる。計算時間を短縮するため、時間発展の刻み幅には共形時間ステップ

$$dt = dt_0 (\frac{t}{t_0})^{\alpha}, \alpha \equiv \frac{2}{3}(1+\omega) \tag{41}$$

を用いる。

$C_{max} \geq \delta_c$ のときに PBH が形成されるようなしきい値 δ_c を定義すると、δ_c の q 依存性は図 1 のようになる。ただし $dt_0 = 10^{-3}, N_{cheb} = 400$ としている。

また、$q = 1$　$(\delta_c = 0.49774 \pm 2 \cdot 10^{-5})$ における超臨界、未臨界、臨界の場合の時間発展はそれぞれ図 2、図 3、図 4 のようになる。ただし、$dt_0 = 10^{-3}, N_{cheb} = 800$ としている。 図 2 では、時間とともに C_{max} は増加し PBH を形成していることが分かる。逆に、図 3 では C_{max} は減少し PBH は形成されないことが分かる。図 4 では流体は内側に向かう部分と外側に向かう部分の 2 つに分かれていることが分かる。これによって間に密度の低い領域が生まれ、この領域が流体を再吸引することで、流体はさらに加速し、PBH 形成を最後まで追うことは不可能になる。

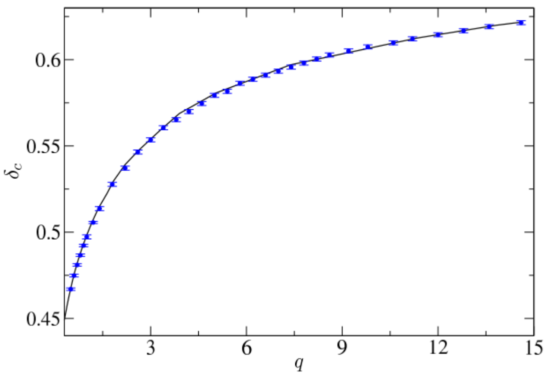

図 1: δ_c の q 依存性

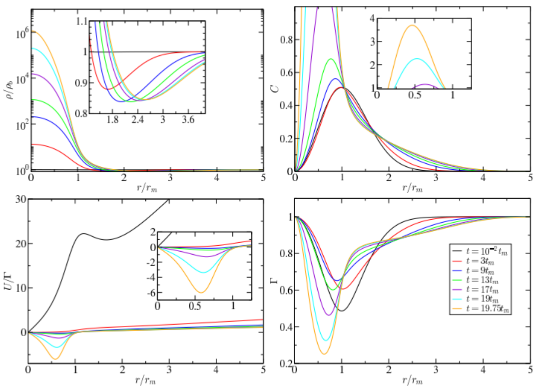

図 2: 超臨界における時間発展

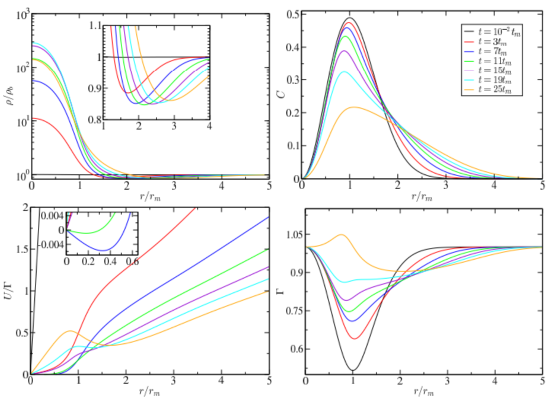

図 3: 未臨界における時間発展

Reference

A. Escrivà 2020, 1Phys.Dark Univ. 27

C. W. Misner & D. H. Sharp 1964, Phys. Rev. 136

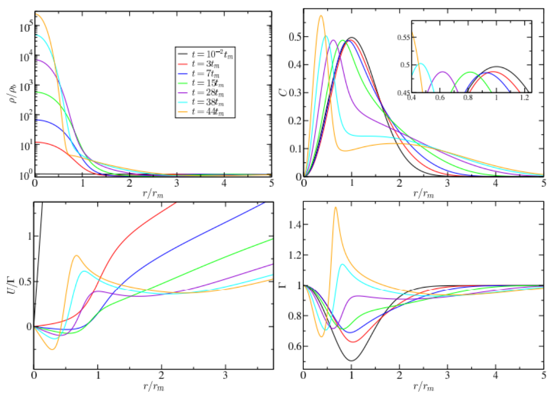

図 4: 臨界付近における時間発展

V. Faraoni, G. F. R. Ellis, J. T. Firouzjaee, A. Helou, & I. Musco 2017, Phys. Rev. D 95

M. Shibata & M. Sasaki 1999, Phys. Rev. D 60

J. P. Boyd 2000, DOVER

———index へ戻る

重宇 a21

背景重力波エネルギースペクトルの上限値の推定について

大阪公立大学大学院 理学研究科
覺 依珠美

背景重力波エネルギースペクトルの上限値の推定について

覺 依珠美 (大阪公立大学大学院 理学研究科)

Abstract

背景重力波の特徴はその振幅が重力波検出器雑音に比べて極めて小さいことと，予測のできない確率論的な波形を持っていることである．そのため，現在重力波観測の主流である地上のレーザー干渉計を 2 台以上用いて，得られた信号の相関を取ることにより解析を行うという手法が取られている．

これまで第 1 次観測 (“O1”, 2015 年 11 月-2016 年 1 月), “O2”(2016 年 11 月-2017 年 8 月), “O3”(2019 年 4 月-2020 年 3 月) と 3 度に渡る国際共同観測が行われてきており，O1,O2 ではアメリカにあるレーザー干渉計 LIGO で，O3 では LIGO とイタリアにあるレーザー干渉計 Virgo で観測されたデータを用いて背景重力波の探索がそれぞれ行われてきた．しかし，これまでの解析では，各観測において背景重力波存在の証拠の発見には至らず，背景重力波の上限値が推定された．これによると，臨界密度で規格化した重力波のエネルギー $\Omega_{\rm GW}(f)$ について上限値 5.8×10^{-9} (信頼度 95%, 周波数に依存しない場合)[1] と求められている．

本集録では，地上での背景重力波の観測方法と上限値の推定方法について述べる．

1 Introduction

背景重力波 (stochastic gravitational wave background, SGWB) とは，数多くの弱い重力波のインコヒーレントな重ね合わせである．その起源は大きく分けて 2 種類ある．1 つは天体起源によるものである．2015 年に世界で初めて観測された重力波は連星ブラックホールを波源とするものであった．このような連星合体や超新星爆発が遠方で発生した場合に生成される重力波は，地球に到達するまでに非常に弱い重力波となり，重ね合わせによって個々の重力波に分離できなくなってしまう．このような天文学的重力波を観測することができれば，それぞれの天体現象の詳細な理解に貢献できると期待されている．

もう 1 つは宇宙初期に起源を持つものである．これには宇宙紐の振動や結合によるもの，インフレーションによるものなどが考えられる．特に，宇宙初期の量子揺らぎから生成される重力波は，インフレーションによってその波長が引き伸ばされ，一般相対性理論に従う重力波として伝播する，現在我々が観測できる最古の宇宙の姿としては，宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) がある．CMB は宇宙誕生から約 38 万年後の宇宙の晴れ上がりによって放射された光を観測することによって得られたものである．しかし，これより過去の宇宙については，プラズマ状態から光が直進できず，電磁波での観測は不可能である．一方，重力波は同様に光速で伝搬し，かつ物質と相互作用しないという特徴を持っている．よって，このような宇宙論的重力波を観測することによって，インフレーション理論を裏付ける証拠になると期待されている．また，インフレーションの進行には未だ様々な議論がされており，これらのインフレーションモデルを決定できる可能性もある．

2 SGWB の特徴

SBGW を特徴づけるにあたり，定常で Gaussian, また等方的で無偏極な重力波であると仮定する．このような仮定から，ある波の相関を取ると

$$\left\langle \tilde{h}_A^*(f,\hat{\boldsymbol{n}})\tilde{h}_A(f',\hat{\boldsymbol{n}}')\right\rangle = \delta(f-f')\frac{\delta^2(\hat{\boldsymbol{n}},\hat{\boldsymbol{n}}')}{4\pi}\delta_{AA'}\frac{1}{2}S_h(f) \tag{1}$$

と表せる．ここで $\tilde{h}(f)$ は $h(t)$ をフーリエ変換したものであり，$\hat{\boldsymbol{n}}$ は偏角を含めた重力波の伝搬方向，A は重力波のプラス偏極とクロス偏極を表し， $S_h(f)$ は SGWB のパワースペクトル密度である．

また，一般的に SGWB のエネルギー密度は，

$$\Omega_{GW} \equiv \frac{\rho_{GW}}{\rho_c} \tag{2}$$

のように臨界密度 $\rho_c = 3c^2H_0^2/8\pi G$ で規格化された無次元量で表される．ここで，H_0 は現在のハッブル定数，ρ_{GW} は SGWB によって運ばれるエネルギー密度である．一方，SGWB のスペクトル密度は

$$\Omega_{GW}(f) \equiv \frac{1}{\rho_c}\frac{d\rho_c}{d\log f} \tag{3}$$

で表され，$S_h(f)$ とは

$$\Omega_{GW}(f) = \frac{4\pi^2}{3H_0^2}f^3S_h(f) \tag{4}$$

のように関係している．また，$\Omega_{GW}(f)$ は冪乗の形でも表すことがあり，

$$\Omega_{GW}(f) = \Omega_\alpha\left(\frac{f}{f_{\mathrm{ref}}}\right)^\alpha \tag{5}$$

となる．ここで Ω_α は SGWB の強度を表し，インフレーション起源の重力波の場合は $\alpha = 0$, つまり $\Omega_{GW}(f) = \Omega_\alpha$ となる．今回は上記のような $\alpha = 0$ の場合を考える．

3　2 台の検出器を用いた相関

現在行われている天体起源の地上での重力波観測における信号解析方法としては，matched filter 法という手法が取られている．これは，ある統計量 (s,h) が

$$(s,h) = 4\int_0^\infty \frac{\tilde{s}^*(f)\tilde{h}(f)}{S_n(f)}df \tag{6}$$

のように表される方法である．ここで $\tilde{s}(f)$ は観測された生データ，$\tilde{h}(f)$ は理論波形 $S_n(f)$ は検出器のパワースペクトル密度である．実際に重力波信号が含まれていた時にこの統計量は大きな値になり，ある閾値を設定したときに (s,h) が閾値よりも大きい値をとると重力波信号が含まれている可能性があると判定する．一般に検出器の感度は $\sqrt{S_n(f)}$ で表されるため，感度の良い周波数帯では SNR が大きく，感度の悪い周波数帯では小さくなるようにフィルタリングすることができる．

しかし SGWB の場合，1 台の検出器では，波形がノイズのようにランダムに変動するので予測することができず，matched filter 法を使うことができない．そのため，2 台以上の検出器を用いて，観測された信号の相関を取ることで解析を行うという手法がとられている．

3.1　Overlap reduction function

ここで，簡単のために 2 台の検出器の相関を取ることを考える．検出器のラベルを $k = 1, 2$ として，観測された信号を $s_k(t) = h_k(t) + n_k(t)$ ($h_k(t)$ は重力波信号，$n(t)$ はノイズ) と表すとする．この時，$h_k(t) \ll n_k(t)$ であるとした時，

$$Y := \int_{-T/2}^{T/2}dt\int_{-T/2}^{T/2}dt' s_1(t)s_2(t)Q(t-t') \tag{7}$$

という量を考える．ここで T は観測時間であり，$Q(t-t')$ は $|t-t'| \to \infty$ で急速に $Q(t-t') \to 0$ となるようなフィルター関数である．この時，信号対雑音比 (SNR, S/N で表す) が最大になるような Q を考える．Y をフーリエ変換すると，

$$Y \simeq \int_{-\infty}^{\infty} df\tilde{s}_1^*(f)\tilde{s}_2(f)\tilde{Q}(f) \tag{8}$$

となる．SNR について，S は重力波信号があるときの集合平均であり，N は重力波信号がなくノイズのみである時の Y の標準偏差である．よって，2 つの検出器間でノイズの相関がない，つまり $\langle\tilde{n}_1^*(f)\tilde{n}_2(f)\rangle = 0$ とすると，(1) より S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\infty}^{\infty} df \left\langle\tilde{s}_1^*(f)\tilde{s}_2(f)\right\rangle\tilde{Q}(f) \\ &= \frac{T}{2}\int_{-\infty}^{\infty} df S_h(f)\Gamma(f)\tilde{Q}(f) \end{aligned} \tag{9}$$

と求められる．ここで

$$\Gamma(f) \equiv \int\frac{d^2\hat{\boldsymbol{n}}}{4\pi}\int\frac{d\psi}{2\pi}\left[\sum_A F_1^A(\hat{\boldsymbol{n}})F_2^A(\hat{\boldsymbol{n}})\right]\exp\left[i2\pi f\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\frac{\Delta\boldsymbol{x}}{c}\right] \tag{10}$$

と置き，$\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1$ である．

この $\Gamma(f)$ は *overlap reduction function* と呼ばれ，2 台の検出器間の相関に対する指標となっている．まず，検出器間の位置差については $\exp[i2\pi f\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\Delta\boldsymbol{x}/c]$ の部分に表れている．$2\pi f\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\Delta\boldsymbol{x}/c \gg 1$ つまり $\Delta x \gg \bar{\lambda}$ ($\bar{\lambda}$ は重力波の波長) の時，この部分は急速に振動するため，検出器間で同じ時刻に観測した波の位相差が大きくなってしまうので，異なる重力波を観測したと見なされる．次に，検出器にはその設置されたアームの向きによって，感度の良い方向と悪い方向が存在する．そのため，2 台の検出器間での角度感度

の違いを考慮する必要があり，$\sum_A F_1^A(\hat{\boldsymbol{n}})F_2^A(\hat{\boldsymbol{n}})$ の部分に表れる．この値は各検出器によって固有の値を示すため定数となるが，2 台の検出器が同じ位置にあり，アームの向きが重なるような時に最大値 F_{12} をとる．例えば，2 台のレーザー干渉計では $F_{12} = 2/5$ であることが知られている．これを用いると，overlap reduction function は

$$\gamma(f) = \frac{\Gamma(f)}{F_{12}} \tag{11}$$

のように角度感度の部分によって規格化された形で表されることもある．よって，$\Delta\boldsymbol{x} = 0$ で検出器が重なっている時に $|\gamma(f)| = 1$ となって最大値をとり，最も相関があるといえる．図 1 は，アメリカのレーザー干渉計 LIGO について，ハンフォードとリビングストンにある検出器についての overlap reduction function である．

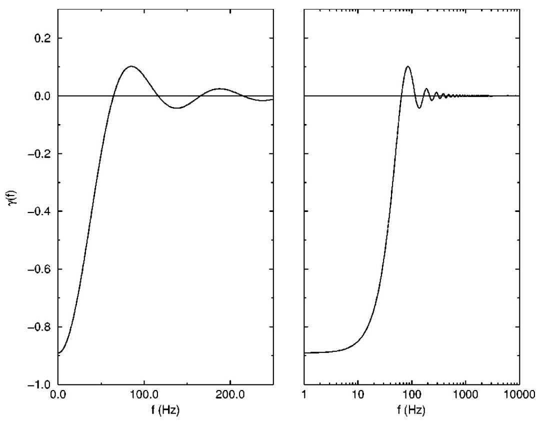

図 1: LIGO Hanford と LIGO Livingston の組み合わせにおける overlap reduction function $\gamma(f)$．縦軸は左図が linear，右図が $\log_{10}$ でプロットされている．(引用：[2])

3.2 SNR と Ω_α の関係

一方，N について，

$$\begin{aligned} N^2 &= \left[\langle Y^2\rangle - \langle Y\rangle^2\right]_{h=0} \\ &= \frac{T}{4}\int_{-\infty}^{\infty} df|\tilde{Q}(f)|^2 S_{n,1}(f)S_{n,2}(f) \end{aligned} \tag{12}$$

となる．よって，SNR は (9), (12) より，

$$\frac{S}{N} = T^{\frac{1}{2}}\frac{\int_{-\infty}^{\infty} df S_h(f)\Gamma(f)\tilde{Q}(f)}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} df|\tilde{Q}(f)|^2 S_n^2(f)\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{13}$$

となり，SNR は $T^{\frac{1}{2}}$ に比例することがわかる．$S_n^2(f) = S_{n,1}(f)S_{n,2}(f)$ とした．

ここで，2 つの複素関数 $A(f), B(f)$ についてのスカラー積を

$$(A, B) = \int_{-\infty}^{\infty} df A^*(f)B(f)S_n^2(f) \tag{14}$$

と定義すると，

$$\frac{S}{N} = T^{\frac{1}{2}}\frac{\left(\tilde{Q}(f), \frac{\Gamma(f)S_h(f)}{S_n^2(f)}\right)}{\left(\tilde{Q}(f), \tilde{Q}(f)\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{15}$$

となるので，SNR を最大化するには

$$\tilde{Q}(f) = \mathrm{const.}\frac{\Gamma(f)S_h(f)}{S_n^2(f)} \tag{16}$$

とすればよいことがわかる．

以上より，

$$\Omega_\alpha = \frac{S}{N}\cdot\frac{4\pi^2}{3H_0^2}\left[2T\int_0^{\infty} df\frac{\Gamma^2(f)}{f^6 S_n^2(f)}\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{17}$$

のようにして Ω_α が求められる．また，2 台のレーザー干渉計を観測に用いた場合は

$$\Omega_\alpha = \frac{S}{N}\cdot\frac{10\pi^2}{3H_0^2}\left[2T\int_0^{\infty} df\frac{\gamma^2(f)}{f^6 S_n^2(f)}\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{18}$$

となる．

4 実際の観測について

実際に観測を行う場合，それぞれの検出器のノイズは定常ではなく，$S_{n,k}(f)$ は時間変化する．そのため，

$$T = \sum_{I=1}^{m} T_I \tag{19}$$

のように，観測時間 T を 2 台の検出器でノイズが定常であると近似できる長さ T_I で n 個に区切る．こ

の時，データの区切りに対応するよう，観測データからの相関統計量 Y を

$$Y_{tot} = \frac{\sum_I \lambda_I Y_I}{\sum_I \lambda_I} \tag{20}$$

のように λ_I を用いて加重平均をとるようにする．この時，異なる区間のノイズは無相関であるとすると，

$$\begin{aligned} S_I &\equiv T_I \int_0^\infty df S_h(f)\Gamma(f)\tilde{Q}(f) \equiv \mu T_I, \\ N_I &\equiv \frac{T_I}{4}\int_{-\infty}^\infty df|\tilde{Q}(f)|^2 S_n^2(f;I) \equiv T_I \sigma_I^2 \end{aligned} \tag{21}$$

となる．ここで $S_n(f,I)$ は I 番目の区間でのノイズのスペクトル密度， σ_I^2 は Y_I の分散である．ここで，実数要素 a_I, b_I をもつ 2 つのベクトルのスカラー積を

$$(a,b) \equiv \sum_I a_I b_I \sigma_I^2 T_I \tag{22}$$

とすると，SNR は

$$\frac{S}{N} = \mu \frac{\left(\lambda_I, \sigma_I^{-2}\right)}{\left(\lambda_I, \lambda_I\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{23}$$

となる．よって，$\lambda_I = \sigma_I^{-2}$ の時 SNR は最大になるので，

$$Y_{opt} = \frac{\sum_I \sigma_I^{-2} Y_I}{\sum_I \sigma_I^{-2}} \tag{24}$$

という値が導かれる．実際の観測ではこの Y_{opt} を用いて Ω_α を求めている．この時，

$$\Omega_\alpha = \frac{S}{N}\cdot\frac{4\pi^2}{3H_0^2}\left[2\int_0^\infty df \frac{\Gamma^2(f)}{f^6}\sum_{I=1^m}\frac{T_I}{S_n^2(f;I)}\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{25}$$

となり，(Y) 式と比べると，

$$\frac{1}{S_n^2(f)} \to \sum_{I=1}^m \frac{T_I}{S_n^2(f;I)} \tag{26}$$

のような変更をすることによって，実際の観測における解析に対応している．

5 Conclusion

今回は SGWB の観測にあたり，2 台の検出器から得られたそれぞれのデータの相関からエネルギー密度を求める方法を紹介した．2 台の検出器を用いて観測を行う場合，overlap reduction function によってその相関関係が表され，検出器間の距離が重力波の波長に比べて十分小さく，同じ位置，同じ向きに検出器が配置されている場合に最も相関のある重力波を検出できることが示されている．

この関数を用いて，特に宇宙初期のインフレーションを起源とする重力波に注目した場合，$\Omega_{GW}(f) = \Omega_\alpha$ であることを用いることを考えた．この方法では Ω_α は (17) のように表され，現在主に観測に使用されているレーザー干渉計では (18) のように求められる．

一方で実際に観測を行う際は，検出器のノイズが定常でないことから，観測時間を短く区切って解析を行う．この時，2 台の検出器の相関統計量から実際の観測に即して修正され，(25) のように求められる．

6 今後の展望

本集録では SGWB のエネルギー密度について点推定的な導出にとどまったが，実際行われている解析では区間推定を用いて上限値が推定されている．今後はこのような区間推定の方法を学び，実データを用いて実際に推定を行いたいと考えている．

Reference

[1] R. Abbott *et al.* (LIGO Scientific Collaboration, Virgo Collaboration, and KAGRA Collaboration). “Upper limits on the isotropic gravitational-wave background from Advanced LIGO and Advanced Virgo ’ s third observing run”. Phys. Rev. D 104, 022004.(2021)

[2] Bruce Allen, & Joseph D. Romano. “Detecting a stochastic background of gravitational radiation: Signal processing strategies and sensitivities”. Phys. Rev. D 59, 102001.(1999)

[3] Michele Maggiore. “gravitational Waves Volume1: Theory and Experiments”. Oxford University Press, 2008.

[4] Jolien D. E. Creighton, & Warren G. Anderson. “gravitational-Wave Physics and Astronomy”. WILEY-VCH, 2011.

[5] 川村静児. “重力波物理の最前線”. 2018, 共立出版.

[6] 安東正樹. “重力波とはなにか”. 2016, 講談社.

———index へ戻る

重宇 a22

Pulsar Timing Array による重力波検出の原理

熊本大学大学院 自然科学教育学部
齋藤 俊之

Pulsar Timing Array による重力波検出の原理

齋藤 俊之 (熊本大学大学院 自然科学教育学部)

Abstract

距離が正確に測定できたパルサーが数個あれば重力波の波源の位置が正確にわかると予想されている。波源の位置を計算する際 earth term と pulsar term を考慮して幾何学的遅延の計算を行うが、その計算で遅延を正確に求めるには地球とパルサーの距離が正確に測定される必要がある。本研究ではパルサーの距離不定性が重力波源の位置の推定にどれほど影響するのか調べるため、重力波による光の到着時間の差の波形を含むパルサーの仮想的なデータを作成し、ベイズ的パラメータ推定を用いて重力波源の位置のパラメータ (θ , φ) の事後分布を求める。

1 Introduction

重力波を検出する方法として Pular Timing Array(以下、P T A) がある。パルサーとは、磁極からビーム状の電磁波を放射しながら非常に安定した周期で自転する中性子星である。このビームは地球の方向へ向いたときにのみ検出されるため、地球からはパルサーの自転周期と同じ周期のパルスが観測される。パルス周期の安定性を利用して、パルスの到着時刻を精密に予測でるが、地球とパルサーの間に重力波が存在すると、時空が歪むことでパルスの伝播経路が変化し、パルスの到着時刻も変化する。この変化を Timing residual (タイミング残差) という。PTA では、数年 十数年に渡りタイミング残差を観測することで nHz μ Hz の低周波重力波を検出する。この観測期間の逆数が重力波の観測可能周波数に対応している。今のところ低周波重力波の検出に至ってはいないが、今後数年以内に検出できると期待されている。 現在進行しているプロジェクトとして北米の North American Nanohertz Observatory for Gravitational waves (NANOGrav)、欧州の European Pulsar Timing Array (EPTA)、豪州の Parkes Pulsar Timing Array (PPTA)、これら 3 つのプロジェクトや他国のプロジェクトのデータを共有して解析を行う International Pulsar Timing Array (IPTA) がある。

2 2 Methods

パルサーからの電波パルスを電波望遠鏡で数週間程度観測し、得られたシグナルをパルスごとに bin に切り各 bin を足し合わせ folding する。folding し得られたデータを比較することでタイミング残差を測定する。

2.1 2.1Timing residual

地球・パルサー間の重力波による赤方偏移は次のように書ける。

$$h_{ij} = h_{ij}(t - px) = h_{ij}[\omega_0 \lambda\ (1 + pn)] \tag{1}$$

$$z = -\frac{1}{2(1+\gamma)} n^i n^j [h_{ij}(\lambda_s) - h_{ij}(0)] \tag{2}$$

赤方偏移の時間微分は、重力波よる光の到着時間の変化 s(t) と見なされる。重力波源が円軌道のブラックホール連星だった場合、

$$s(t) = F^+ \Delta\ s_+(t) - F^\times \Delta\ s_\times(t) \tag{3}$$

$$\Delta\ s_{+,\times}(t) \equiv s_{+,\times}(t) - s_{+,\times}(t_p) \tag{4}$$

$$s_+(t) = \frac{(G\,\mathrm{M})^{5/3}}{c^4 D_L \omega\ (t)^{1/3}}[cos2\Phi(1 + cos^2 i)sin2\phi(t)$$

- 2sin2 ψ cos(i)cos2$\Phi(t)$](5)

$$s_\times(t) = \frac{(G\,\mathrm{M})^{5/3}}{c^4 D_L \omega\ (t)^{1/3}}[cos2\Phi(1 + cos^2 i)sin2\phi(t)$$

＋ 2sin2 ψ cos(i)cos2Φ(t)](6)

$$F^{+} = \frac{1}{2}\frac{(\hat{N}\boldsymbol{\cdot}\hat{p})^2 - (\hat{E}\boldsymbol{\cdot}\hat{P})^2}{(1+p\cdot k)} \tag{7}$$

$$F^{\times} = \frac{(\hat{N}\boldsymbol{\cdot}\hat{p})(\hat{E}\boldsymbol{\cdot}\hat{P})}{(1+p\cdot k)} \tag{8}$$

$s_{+,\,\times}(t)$ を earth term、$s_{+,\,\times}(t_p)$ を pulsar term といい、パラメータは、偏光角 ψ、チャープ質量 M、距離 D_L、傾斜角 i、初期振動数 ω、初期位相 φ、連星の方向である。

2.2 2.2 fitting

パルサーのスピン減速率や周期を真の値に近づけ、時間の 1 乗・2 乗に比例する成分を取り除く。fit をした後に残るタイミング残差が重力波シグナルの候補となる。

Reference

earching for and Identifying Pulsars

———index へ戻る

重宇 a23

再加熱期の予測と重力波によるポテンシャルの区別

名古屋大学大学院 理学研究科 宇宙論研究室
水口 由莉乃

再加熱期の予測と重力波によるポテンシャルの区別

水口 由莉乃 (名古屋大学大学院 理学研究科 宇宙論研究室)

Abstract

主にインフレーション期の描像はスカラー場のポテンシャルで表現される。よって、ポテンシャルの形状を制限することはインフレーション期の解明につながる。しかし、インフレーションモデルの一部は観測量に対して、しばしば縮退を示すことが知られている。本発表では、最も単純なモデルである単一場スローロールインフレーションのうち、観測の予測と一致するモデルとして T-model と E-model に着目し、縮退を解くことを目的とする。まず 2 つのモデルがそれぞれ縮退することを式から確認し、インフレーション後の宇宙を作りだす再加熱期に焦点を当てる。特に、再加熱期の期間や温度を理論的に、状態パラメータと観測量であるスペクトル指数を用いて表される。さらに、原始重力波は状態パラメータに直接感度があるとされている。これらの再加熱期における特徴を用いた結果、縮退を解くことができた。なお、本発表は [1] の一部をレビューしたものである。

1 Introduction

インフレーション理論はビッグバン理論で問題視されている、ホライズン問題や平坦性問題等を解決するために構築された。インフレーションは後の宇宙の構造の種となる密度ゆらぎを作り出す機構であるが、他にインフレーションが予言する重要な物理現象に再加熱期と原始重力波がある。

再加熱期はスカラー場から他の物質へとエネルギーが転換される時期であり、その期間 $N_{\rm re}$ や温度 $T_{\rm re}$、状態パラメータ $w_{\rm re}$ で特徴づけられる。特に、$w_{\rm re}$ は、小スケールにおける重力波のスペクトル $\Omega_{\rm GW}$ とスペクトル指数 $n_{\rm GW}$ に対しても感度が高いとされている。[3] そのため、$\Omega_{\rm GW}$ の観測は再加熱期の物理を明らかにする可能性を持っている。

さらに、原始重力波や再加熱期以外の重要となりうるインフレーションの予言にスカラーゆらぎがある。その観測量はスペクトル指数 n_S とテンソル・スカラー比 r である。これらは、インフレーションモデルの選別に用いられるが、一部のモデルでは異なるモデルパラメータに対して、それぞれ縮退を示すことが知られている。そこで、本発表ではモデルのポテンシャルを制限するため、$N_{\rm re}, T_{\rm re}$ と CMB の観測量 $\{n_S, r\}$ の関係と原始重力波と $w_{\rm re}$ の関係を使った 2 つのアプローチにより、縮退を解くことを目標とする。

これ以降、各パラメータの添字は以下の期間・時期を示す。($^{\rm inf}_{k}$: インフレーション期における任意時刻の物理量、$_e$: インフレーション終了時、$_{\rm re}$: 再加熱期終了時、$_{\rm RD}$: 放射優勢期終了時、$_{\rm eq}$: 等密度時、$_0$: 現在)

2 スローロールインフレーション

スローロールインフレーションを特徴づけるスローロールパラメータ ϵ_V, η_V は与えられたポテンシャル V に対して

$$\epsilon_V = \frac{m_p^2}{2}\left(\frac{V'}{V}\right)^2, \eta_V = m_p^2\left(\frac{V''}{V}\right) \tag{1}$$

で表される。プランク定数の 2 乗 m_p^2 は $(8\pi G)^{-1}$ と定義した。また、$\{n_S, r\}$ はスローロールパラメータを用いて表される。

$$n_S = 1 + 2\eta_V - 6\epsilon_V, r = 16\epsilon_V \tag{2}$$

なお観測により、$n_S = 0.9649 \pm 0.0042, r \leq 0.06$ であることが得られている。[2]

本発表では、スローロールインフレーションのうち、観測の予測と一致する T-model と E-model を取り扱う。

2.1 T-model

T-model のポテンシャルは

$$V = V_0 \left[\tanh\left(\frac{\lambda\phi}{m_p} \right) \right]^{2p} \tag{3}$$

で与えられ、$\{n_S, r\}$ はそれぞれ以下のようになる。

$$n_S - 1 \simeq -\frac{2}{N_k^{\rm inf}}, r \simeq \frac{2}{{N_k^{\rm inf}}^2 \lambda^2} \tag{4}$$

$(p = 1, 2, 3, .., \lambda =$ 定数 $, N:$ 膨張指数$)$

このように、$\{n_S, r\}$ はモデルパラメータ p によらず、縮退を示す。

2.2 E-model

E-model のポテンシャルは

$$V = V_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{\lambda\phi}{m_p} \right) \right]^{2p} \tag{5}$$

で与えられ、$\{n_S, r\}$ はそれぞれ以下のようになる。

$$n_S - 1 \simeq -\frac{2}{N_k^{\rm inf}}, r \simeq \frac{2}{{N_k^{\rm inf}}^2 \lambda^2} \tag{6}$$

T-model と同様に、p 依存が見られず縮退していることがわかる。

3 再加熱期

再加熱期は、スカラー場が $\phi = 0$ 付近で振動し、素粒子を作り出す過程である。両モデルとも原点周りでは

$$V(\phi) \simeq V_0 \left(\frac{\lambda\phi}{m_p} \right)^{2p} (|\lambda\phi| \ll m_p) \tag{7}$$

と計算できる。ここで、今考えている環境は断熱状態下であり、その状態方程式は $p = w\rho$ と表される。なお、ここでの p は圧力、ρ はエネルギー密度を指す。

ρ の係数である状態パラメータ w は再加熱期において、p と以下のような関係を持つ。[4]

$$w_{\rm re} = < w_\phi > = \frac{p-1}{p+1} \tag{8}$$

また、インフレーション後に再加熱期が起こり、その後ビッグバン元素合成が起こることを考慮すると、再加熱期終了時の温度 $T_{\rm re}$ が取りうる範囲は以下のようになる。

$$1{\rm MeV} \le T_{\rm re} \le 10^{16}{\rm GeV} \tag{9}$$

4 CMB の観測量と再加熱期

本章では、$\{n_S, r\}$ と $N_{\rm re}, T_{\rm re}, w_{\rm re}(p)$ に注目し、縮退を解く。

まず、$N_{\rm re}$ の n_S, p の依存性について考える。ゆらぎの波長とハッブル半径が等しい状態において、以下の式を得る。

$$\frac{a_k H_k^{\rm inf}}{a_0 H_0} = \frac{k}{a_0 H_0} \tag{10}$$

さらに、各期間の膨張指数の定義式より

$$\log\frac{k}{a_0 H_0} = \log\left(\frac{a_k}{a_e}\right)\left(\frac{a_e}{a_{\rm re}}\right)\left(\frac{a_{\rm re}}{a_{\rm eq}}\right)\left(\frac{a_{\rm eq}}{a_0}\right)\left(\frac{H_k^{\rm inf}}{H_0}\right)$$
$$= -N_k^{\rm inf} - N_{\rm re} - N_{\rm RD} - \log(1 + z_{\rm eq}) + \log\frac{H_k^{\rm inf}}{H_0} \tag{11}$$

と計算できる。また、$N_{\rm re}$ は $\rho = a^{-3(1+w)}$ より、

$$N_{\rm re} \equiv \log\left(\frac{a_{\rm re}}{a_e}\right) \tag{12}$$

$$= \frac{1}{3(1 + w_{\rm re})}\log\left(\frac{\frac{3}{2}V_e}{\frac{\pi^2}{30}g_{\rm re}T_{\rm re}^4}\right) \tag{13}$$

となる。ただし、簡単のため $w_{\rm re} = w_e$ としている。(13) 式の g は有効自由度である。なお、有効自由度や温度を考慮した $N_{\rm re}(w_{\rm re} \neq \frac{1}{3})$ は

$$N_{\rm re} = \frac{4}{1 - 3w_{\rm re}}\left[61.55 - N_k^{\rm inf} - \log\left(\frac{V_e^{\frac{1}{4}}}{H_k^{\rm inf}}\right)\right] \tag{14}$$

と得られる。ここで、$H_k^{\rm inf}$ は

$$(H_k^{\rm inf})^2 = \frac{1}{3m_p^2}V(\phi_k) = A \times \frac{(1 - n_S)^2}{\lambda^2} \tag{15}$$

で与えられる。ただし A は定数。以上より、$N_{\rm re}$ の n_S, p, λ 依存性は以下のようになる。

$$N_{\rm re} = \frac{2(p+1)}{2-p}\left[61.55 + \frac{2}{n_s - 1} - \log\left(\frac{V_e^{\frac{1}{4}}(p)}{H_k^{\rm inf}(n_S, \lambda)}\right)\right] \tag{16}$$

次に $T_{\rm re}$ については、(13) 式より n_S, p 依存性は以下のようになる。$T_{\rm re}$ について解くと、

$$T_{\rm re} = \left(\frac{45}{\pi^2 g_{\rm re}}\right)^{\frac{1}{4}} V_e^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{3}{4}(1+w_{\rm re})N_{\rm re}} \tag{17}$$

$$= \left(\frac{45}{\pi^2 g_{\rm re}}\right)^{\frac{1}{4}} V_e^{\frac{1}{4}}(p) e^{-\frac{3}{2}\left(\frac{p}{p+1}\right)N_{\rm re}(n_s,p,\lambda)} \tag{18}$$

と導ける。したがって $N_{\rm re}, T_{\rm re}$ は λ を固定した場合、図 1,2 を得る。

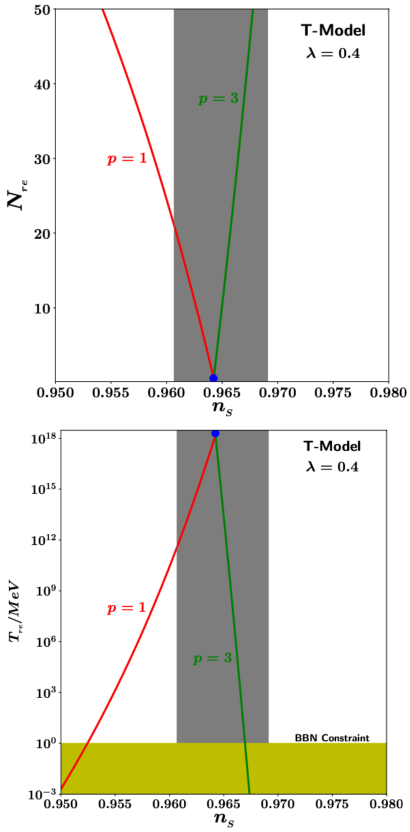

図 1: T-model における $N_{\rm re}$(上図)$T_{\rm re}$(下図) と n_S の関係。赤線:$p = 1$, 青点:$p = 2$, 緑線:$p = 3$,: 灰色領域:CMB の観測による制限 [2], 黄緑色領域:BBN による制限を示す。[1]

5 章で取り上げる観測により、$T_{\rm re}$ への制限が得られれば、取り得る p の値や $N_{\rm re}$ を求めることにつながる。また、CMB の観測の精度が向上し n_S の範囲が狭まれば、特定の λ に対する p の値を制限することも可能になる。

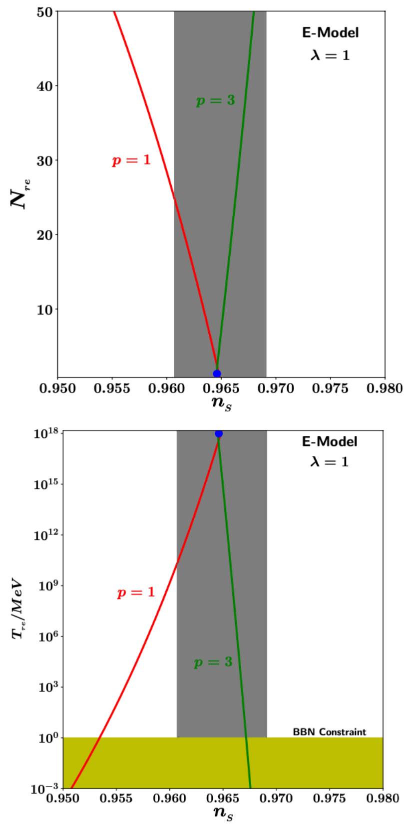

図 2: E-model における $N_{\rm re}$(上図)$T_{\rm re}$(下図) と n_S の関係。赤線:$p = 1$, 青点:$p = 2$, 緑線:$p = 3$,: 灰色領域:CMB の観測による制限 [2], 黄緑色領域:BBN による制限を示す。[1]

5 原始重力波

ここでは、縮退を解くもう一つの方法として、$w_{\rm re}(p)$ に直接的な感度を持つ原始重力波に焦点を当てる。原始重力波と関係を持つテンソル型の計量のゆらぎは、

$$\delta g^{(\rm T)}_{\mu\nu} = a^2(\tau)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{ij} \end{pmatrix} \tag{19}$$

で表され、6 自由度を持つ。ここで、$\partial_i h_{ij} = 0, h^i{}_i = 0$ より、h_{ij} は $+, \times$mode の 2 自由度に制限される。

テンソル型ゆらぎの運動方程式は、アインシュタイン方程式から

$$h''_{ij}{}^{(\rm T)} + 2\mathscr{H} h'_{ij}{}^{(\rm T)} - \Delta h_{ij}{}^{(\rm T)} = 0 \tag{20}$$

である。なお、$\mathscr{H} = aH$ とした。これを解くため、以下のようにフーリエ変換を行う。

$$h_{ij}{}^{(\mathrm{T})} = \sum_{\lambda=+,\times} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{\lambda}{}_{ij}(k) h^{\lambda}{}_{k}(\tau) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tag{21}$$

ただし、$e^{\lambda}{}_{ij}$ は偏光テンソルで、$e^{\lambda}{}_{ij} e^{\lambda'}{}_{ij} = \delta_{\lambda\lambda'}$ を満たす。テンソル型パワースペクトルは、スカラーと同様にゆらぎの 2 点関数で定義され、重力波のパワースペクトルとの関係は

$$\mathscr{P}_T(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} |h^{\lambda}{}_{k}(k)|^2 = 2\mathscr{P}_{\mathrm{GW}}(k) \tag{22}$$

となる。ここで、観測量である重力波のスペクトル Ω_{GW} は定義から

$$\Omega_{\mathrm{GW}}(f) \equiv \frac{1}{\rho_c} \frac{d\rho_{\mathrm{GW}}(f)}{d\log f} \tag{23}$$

$$= \frac{1}{48} \left(\frac{k}{\mathscr{H}}\right)^2 \mathscr{P}_T(k,t) \tag{24}$$

と計算され、テンソル型のゆらぎと関係を持っていることがわかる。(ρ_c: 臨界密度,ρ_{GW}: 重力波のエネルギー密度,f: 周波数)

特に再加熱期におけるスペクトル $\Omega^{(\mathrm{re})}_{\mathrm{GW}}$ は

$$\Omega^{(\mathrm{re})}_{\mathrm{GW}}(f) = \Omega^{(\mathrm{RD})}_{\mathrm{GW}} \left(\frac{f}{f_*}\right)^{2\left(\frac{w_{\mathrm{re}}-1/3}{w_{\mathrm{re}}+1/3}\right)} \tag{25}$$

で与えられる。よって、(8) 式から、Ω_{GW} が直接 p の値に感度があることがわかる。

各モデルの p ごとの $\Omega^{(\mathrm{re})}_{\mathrm{GW}}$ の結果は (9) 式を踏まえて、図 3 のようになる。各線の折れ曲がりの位置が観測されれば T_{re} がわかり、4 章で触れたように N_{re} や p の取り得る範囲が制限される。

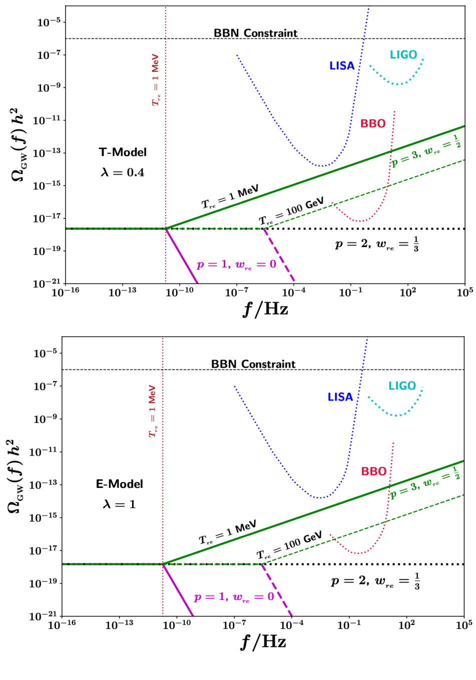

図 3: T-model と E-model における Ω_{GW} と f の関係。紫線・点線:$p = 1$, 黒点線:$p = 2$, 緑線・点線:$p = 3$ を示す。[1]

6 Conclusion

一部のインフレーションモデルは度々縮退を示すことが知られており、ポテンシャルの制限を困難にさせている。今回取り上げた T-model と E-model も共に CMB の観測量 $\{n_S, r\}$ に対して縮退していた。その縮退を解くための方法として 2 つ取り上げた。1 つ目は、$\{n_S, r\}$ と再加熱期を特徴づけるパラメータとの関係により制限をかける方法である。その結果、特定の λ に対する N_{re} や T_{re} が n_S, p の関数でかけることが示され、図 1,2 を得た。一方、2 つ目の手法である原始重力波は図 3 のように、$w_{\mathrm{re}}(p)$ に直接感度があった。それにより、原始重力波の観測にから p の値を制限できることがわかった。以上のアプローチにより、縮退が解けることが確かめられた。今後の展望として、CMB の観測精度の向上や原始重力波観測の実現が求められている。

Acknowledgement

ご教授いただいた研究室の皆様、夏の学校事務局の皆様に、心より感謝申し上げます。

Reference

[1] Swagat S. et al., JCAP05 (2021) 075

[2] P. A. R. Ade et al., A&A 641, (2020)

[3] V. Sahni, Phys. Rev. D 42, 453 (1990)

[4] M. S. Turner, Phys. Rev. D 28, 1243 (1983)

———index へ戻る

重宇 a24

α-attractor と超重力理論

京都大学大学院 理学研究科
道信 祐吏

α-attractor と超重力理論

道信 祐吏 (京都大学大学院 理学研究科)

Abstract

インフレーションはインフラトンと呼ばれるスカラー場を用いて宇宙開闢の加速膨張を記述する理論である。弦理論などの基礎理論がインフレーションを通して観測的に検証可能であることから、そのモデルの確立は初期宇宙論の重要な課題である。これまで数多のモデルが提唱されてきたが、最新の BICEP/Keck の観測によりテンソル/スカラー比が Planck2018 の観測よりも強く制限され、多くのモデルはその観測値から外れた。最も基本的な場の冪型のポテンシャルも観測から大きくずれたモデルの一つである。

しかし、パラメータ α を用いてインフラトンの運動項を適当に変更することでテンソル・スカラー比を観測に合致させることができる。そして、その結果はほとんどポテンシャルの詳細に依らずに決まり、このことからこのモデルは α-attractor と呼ばれる。本稿では、そのうち最も単純な T-model と E-model について、なぜそれらが現象論的に優れているのかを [1] に基づいてレビューする。

インフレーションの物理的な起源を知るためには、現象論的に観測に合致するモデルを構成するだけでは不十分である。従って、インフレーションが基礎理論からどのようにして自然に現れるのかが問題となる。α-attractor の大きな特徴は、KKLT を通して超重力理論や弦理論においてそれが実現できるという点にあり、η 問題を自然に解決できる利点がある。KKLT は、6 次元に丸まった Calabi-Yau 多様体に $\overline{D3}$-brane を加え、それらの相互作用を通してインフレーションを引き起こす機構をもつ。本稿では、$\overline{D3}$-brane の幾何とインフラトンのポテンシャルが密接に対応することと、T-model および E-model がどのように実現されるかを [2] に基づき簡単に述べる。

1 Introduction

インフレーションはインフラトンと呼ばれるスカラー場 φ を用いて宇宙開闢の加速膨張を記述する理論であり、作用は

$$\frac{\mathcal{L}}{\sqrt{-g}} = \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}\partial\varphi\partial\varphi - V(\varphi) \tag{1.1}$$

である。非常に単純であるが、horizon Problem や flatness Problem など、様々な問題を解決する優れたモデルである。しかし、その物理的な起源や potential $V(\varphi)$ の形は分かっていない。そのため、観測に合致するモデルを多く作ることと、弦理論などの根源的な理論からインフレーションを導く試みの両輪で進めていくことが、インフレーションそのものの理解に繋がる。10 次元の弦理論から 4 次元のインフレーションを導く際に、一般には次の二つの困難が生じる。一つは、10 次元の場から 4 次元の場を得るときに、多くのスカラー場が出てくることである。これらは moduli と呼ばれ、いろいろと悪さをするので、イ

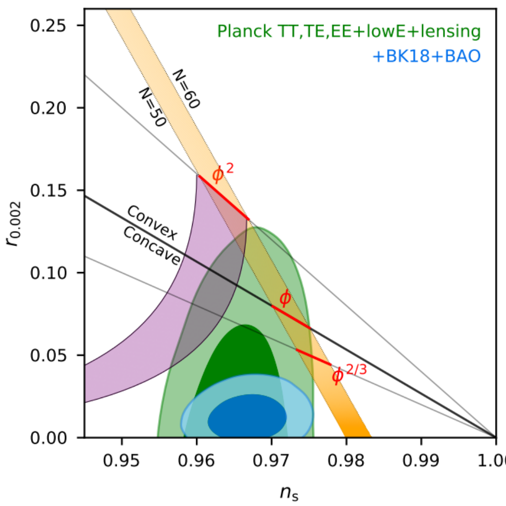

Fig. 1: BICEP/Keck [3] による (n_s, r) への制限。青の領域が最新の制限であり、基本的な power law 型の potential は外れている。

ンフレーション期に hidden sector に持って行く必要がある。これを moduli stabilization という。また、少なくとも摂動論的には無数の真空が考えられるので、より多くの真空を統一的に扱えるモデルの構築が必要となる。さらに、超対称性があると真空は AdS か Minkowshi に限られ、宇宙項が僅かに正の現在の宇宙と合致しない。そこで、弦理論と consistent な dS の真空を持つモデルを考えなければならない。

最新の BICEP/Keck の観測 Fig. 1 に合致し、上の二つの困難を解決するのが、α-attractor である。そこで本稿では、インフレーションモデルの universality class を成す α-attractor の現象論的側面と弦理論的側面を説明する。

2 α-attractor (bottom up)

α-attractor で最も基本的な T-model は、式 (1.1) の運動項を

$$\frac{\mathcal{L}}{\sqrt{-g}} = \frac{R}{2} - \frac{(\partial\phi)^2}{2(1-\phi^2/6\alpha)^2} - V(\phi) \tag{2.1}$$

と変更することで得られる。つまり、moduli space で boundary $\phi = \sqrt{6\alpha}$ を考えている。運動項を canonical に書き換えると

$$\frac{\mathcal{L}}{\sqrt{-g}} = \frac{R}{2} - \frac{(\partial\varphi)^2}{2} - V(\sqrt{6\alpha}\tanh\frac{\varphi}{\sqrt{6\alpha}}) \tag{2.2}$$

となる。また、E-model も運動項に 2 次の pole を導入することで得られる。

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{L}}{\sqrt{-g}} &= \frac{R}{2} - \frac{3\alpha}{4}\frac{(\partial\rho)^2}{\rho^2} - V(\rho) \\ &= \frac{R}{2} - \frac{(\partial\varphi)^2}{2} - V(e^{-\sqrt{2/3\alpha}\varphi}).\end{aligned} \tag{2.3}$$

両方のモデルはともに $\alpha \to 0$ では、potential の詳細によらずに $V \simeq V_0(1-e^{-\sqrt{2/3\alpha}\varphi})$ となる。従って、量子補正に対しても安定で、η-Problem は生じない。spectral index n_s と tensor-to-scalar ratio r は

$$n_s = 1 - \frac{2}{N_e}, \quad r = \frac{12\alpha}{N_e^2} \tag{2.4}$$

である (Fig. 2)。N_e は e-folding number である。(n_s, r) は α だけから決まっており、普遍的である。また、$\alpha \to 0$ で $r \to 0$ 故、将来 r の上限がさらに下がっても生き残ることができる。

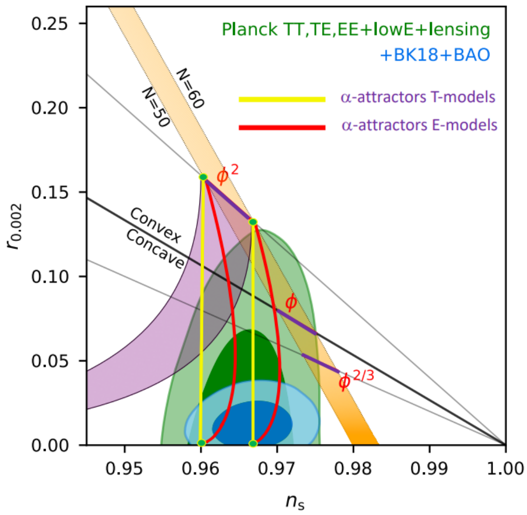

Fig. 2: α-attractor の (n_s, r)。黄色のラインが T-model ($V(\phi) \propto \phi^2$), 赤のラインが E-model ($V(\rho) \propto (1-\rho)^2$) である。$\alpha$ を小さくとると、青の領域に合致させることができる。[1]

3 α-attractor (top down)

3.1 KKLT uplifting

$\mathcal{N}=1$ flux background で $\overline{D3}$ により、真空を dS に uplift することを考える。これは KKLT [4] において用いられているが、KKLT potential 以外に対しても有効な dS の実現方法である [5]。KKLT において、Kähler potential と superpotential は、Kähler modulus を 1 つとするとき

$$K = -3\log(T+\bar{T}) + S\bar{S}, \tag{3.1}$$

$$W = W_0 + Ae^{-aT} + bS \tag{3.2}$$

となる。S 以外の項は超対称な AdS を実現する。S は $S^2=0$ を充たす nilpotent superfield であり、Fig. 3 に示している通り AdS を dS に uplifting する効果を持つ。nilpotency より、S は

$$S = s + \sqrt{2}\theta G + \theta^2 F^S \tag{3.3}$$

$$\to S = \frac{GG}{2F^S} + \sqrt{2}\theta G + \theta^2 F^S \tag{3.4}$$

となる。S のスカラーは bilinear fermion になっているため、moduli stabilization は必要ない。また、

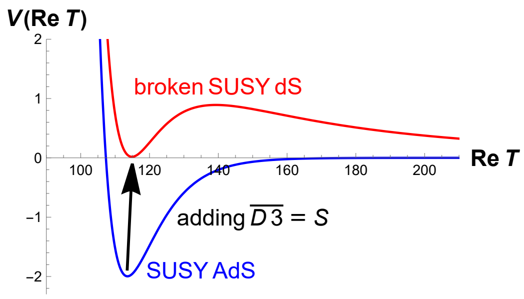

Fig. 3: moduli stabilization によって実現された超対称な AdS vacuum を $\overline{D3} = S$ によって、超対称性が破れた dS に uplift している。

超対称性は自発的に破れて、非線形に実現されている。S のみの超重力理論 $K = S\bar{S}, W = fS$ を考えると、Volkov-Akulov (VA) action になることから、S は VA goldstino と呼ばれている。また、この VA action は、local κ-symmetry をもつ $\overline{D3}$-superbrane の action から、$O3$ orientifolding と compatible なように κ-symmetry をゲージ固定することでも得られる [6]。ゲージ固定で半分だけ残る fermion の自由度が VA goldstino である。つまり、S は $\overline{D3}$ を通して、弦理論の解釈を持つのである。

3.2 S geometry

geometric Kähler function

$$\mathcal{G} = K + \log W + \log \overline{W}, \tag{3.5}$$

$$V_F = e^{\mathcal{G}}(\mathcal{G}^{\alpha\bar{\beta}}\mathcal{G}_\alpha\mathcal{G}_{\bar{\beta}} - 3) \tag{3.6}$$

を用いる。S の nilpotency より、一般に

$$\mathcal{G}(T,\bar{T};S,\bar{S}) = \mathcal{G}_0(T,\bar{T}) + S + \bar{S} + \mathcal{G}_{S\bar{S}}(T,\bar{T})S\bar{S} \tag{3.7}$$

と書ける。inflation 期において、gravitino の質量が定数であり、T 方向の SUSY が破れていないとすると

$$e^{\mathcal{G}_0} = \left|m_{3/2}\right|^2 = \text{Const.}, \quad \mathcal{G}_{0T} = 0 \tag{3.8}$$

であることから、式 (3.6) より、

$$\mathcal{G}_{S\bar{S}}(T,\bar{T}) = \frac{\left|m_{3/2}\right|^2}{V_F|_{S=0} + 3\left|m_{3/2}\right|^2} \tag{3.9}$$

を得る。特に、$W = W_0$ とすると $m_{3/2} = W_0$ であるから、F_S を S 方向の SUSY breaking parameter $\propto D_S W$ とすると、

$$V_F = V_{\rm infl} + \Lambda, \quad \Lambda = |F_S|^2 - 3|W_0|^2 \tag{3.10}$$

と書ける。$V_{\rm infl}$ は inflaton の potential である。これより、

$$\mathcal{G}_{S\bar{S}}(T,\bar{T}) = \frac{|W_0|^2}{V_{\rm infl} + |F_S|^2} \tag{3.11}$$

となる。従って、inflaton の potential $V_{\rm infl}$ から、S-geometry が決まっている。

3.3 E-model revisited

E-model を与える Kähler potential は

$$K = -3\alpha\log(T + \bar{T}) \tag{3.12}$$

である。このとき T が座標のモジュライ空間の曲率 R は、$R = -2/3\alpha$ である。axion $a = {\rm Im}T$ が stabilize されていると仮定すると、$T = \bar{T} = \rho$ として、運動項は

$$-K_{T\bar{T}}\partial T\partial\bar{T} = -\frac{3\alpha}{(T+\bar{T})^2}\partial T\partial\bar{T} = -\frac{3\alpha}{4}\frac{(\partial\rho)^2}{\rho^2}$$

となり、確かに、E-model (2.3) が実現されている。axion の stabilization は前節 3.2 で議論した S の導入によって説明できる。

3.4 dS uplifted E-model

dS vacuum をもつ E-model は、

$$K = -3\alpha\log(T+\bar{T}) + \frac{W_0^2}{F_S^2 + V_{\rm infl}(T,\bar{T})}S\bar{S}, \tag{3.13}$$

$$W = (2T)^{3\alpha/2}W_0(1+S), \quad V_{\rm infl} = m^2(1-(T+\bar{T})/2) \tag{3.14}$$

である。このとき potential は、$T = \rho + ia, \rho = e^{-\sqrt{2/3\alpha}\varphi}$ として、

$$V_F = \left(\frac{2}{3\alpha}a^2 + 1\right)^{3\alpha/2}\left(\Lambda + 3\alpha W_0^2\frac{a^2}{3\alpha/2 + a^2} + m^2\left(1 - e^{-\sqrt{2/3\alpha}\varphi}\right)^2\right) \tag{3.15}$$

となる (Fig. 4)。axion は運動項が canonical になるように再定義している。axion の質量は

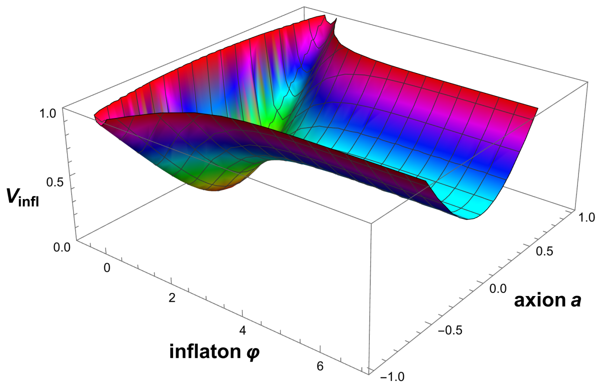

Fig. 4: inflaton は flat direction の領域で inflation を起こし、その後 dS (V_F で見ると) に落ちる。axion は常に安定である。

$$m_a^2 = 4W_0^2 + 2m^2(1 + e^{-\sqrt{2/3\alpha}\varphi})^2 > 0 \qquad (3.16)$$

であり、常に安定である。なお、T-model については、$Z = (T-1)/(T+1)$ として同様に考えればよい。

4 Conclusion

本稿では、inflation の universality class である α-attractor を取り上げ、その現象論的な振る舞いと UV sensitivity を見た。まず、現象論的には、運動項に singularity を導入することで、α-attractor の最も単純なモデルである T-model と E-model を作った。moduli space の境界だけから (n_s, r) が決まり、指数関数の suppression により、普遍的で安定であるというのが、大きな強みである。また、(n_s, r) は最新の BICEP/Keck の観測に合致し、今後さらに r の上限が小さくなったとしても、破綻することのないモデルである。

他方、axion の stabilization に必要な S は、nilpotent $S^2 = 0$ にとることにより、超対称性が自発的に破れた de Sitter の真空を実現した。そのとき、S は $\overline{D3}$-superbrane の worldvolume 上の VA fermion として、弦理論の解釈を持つことが分かった。また、nilpotency により、S-geometry は inflaton の potential と直接結びつき、安定なインフレーションモデルを系統的に作ることのできる手法が得られた。

nilpotent superfield を用いた方法は、複数の Kähler modulus や nilpotent superfields に対しても拡張でき、hybrid inflation に弦理論による解釈を与え得る。また、無数の真空を同時に扱うことのできる α-attractor は、string landscape を大きく拡張する可能性を有しており、弦理論のより根源的な問題への Probe となることが期待される。

Acknowledgement

基礎物理学研究所と天体核研究室の先輩方には、多くの時間を割き、多岐にわたる指導をしていただきました。心より感謝申し上げます。

References

[1] R. Kallosh and A. Linde, *JCAP*, **12**, 008, 2021.

[2] R. Kallosh et al., *JHEP*, **07**, 057, 2017.

[3] BICEP/Keck collaboration, *Phys. Rev. Lett.* **127**, 151301, 2021.

[4] S. Kachru et al., *Phys. Rev. D* **68**, 046005, 2003.

[5] S. Ferrara et al., *JHEP*, **10**, 143, 2014.

[6] R. Kallosh and T. Wrase, *JHEP*, **12**,117, 2014.

———index へ戻る

重宇 a25

複数場の α-attractors におけるインフレーション

名古屋大学大学院 理学研究科
松井 悠真

複数場のα-attractors におけるインフレーション

松井 悠真 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

標準ビッグバン理論が抱える初期条件問題の解決策として、初期宇宙の加速膨張を論ずるインフレーション理論が議論されてきた。インフレーション理論は様々なモデルが考案されてきたが、中でもα-attractors と呼ばれるモデルでは、ひも理論などを考えるのであれば複数の相互作用するスカラー場を持つことが示唆されている。この場合、あるパラメータの条件下ではインフラトン場とは異なるもう一つの場により waterfall が起こることでインフレーションが終了する。本発表では waterfall が起こるような、複数のスカラー場を持つα-attractors のインフレーションの振る舞いを調べ、スペクトル指数に与える影響について調査した。その結果、スペクトル指数がとり得る値の上限が $n_s \to 1$ であることが判明した。
本発表は [1] のレビューである。

1 Introduction

標準ビッグバン理論は、初期条件についてホライズン問題や平坦性問題といった不自然な点を抱えている。これらを解決するために提唱された仮説として、宇宙初期に宇宙が加速膨張したと仮定するインフレーション理論が考えられている。インフレーションを実現する機構には様々なモデルが考案されているが、ここでは典型的なモデルのスローロールインフレーションを取り上げる。スローロールインフレーションでは、スカラー場 ϕ の値がゆっくりと変化することでインフレーションが実現される。このような場をインフラトン場と呼ぶ。このモデルを特徴づけるパラメータに、インフレーションの密度揺らぎの振幅 A_s やスペクトル指数 n_s、テンソル・スカラー比 r が存在する。宇宙マイクロ背景放射 (CMB) より、$A_s \approx 2.01 \times 10^{-9}$ であることが知られている。残りの二つは A_s の値と矛盾のない範囲に制限されており、ポテンシャルの形を与えることで計算することが可能である。

また、超重力理論の枠組みでインフレーションを記述出来るモデルとして、α-attractors が存在する。このモデルでは、A_s や n_s、r といったパラメータはポテンシャルの形に関わらず、普遍的な性質を示す。近年の研究では、ひも理論などよりα-attractors は複数の相互作用するスカラー場を持つことが示唆されている [1]。複数場のインフレーションでは、単一場のインフレーションとは異なるインフレーションの終わり方をする場合がある。本発表では、この waterfall と呼ばれるインフレーションの終わり方に着目し、n_s の値に及ぼす影響を調べることを目標とした。

2 単一場のα-attractors

複数場のα-attractors の振る舞いを調べる前に、まず単一のスカラー場のα-attractors の性質について触れていく。最も簡単な単一のスカラー場のα-attractors のラグランジアンは式 (1) で与えられる。

$$\frac{\mathcal{L}}{\sqrt{-g}} = \frac{R}{2} - \frac{(\partial_\mu \phi)^2}{2\left(1 - \frac{\phi^2}{6\alpha}\right)^2} - V(\phi) \tag{1}$$

ここで R はリッチスカラー、α はパラメータ、ϕ はインフレーションを起こすスカラー場、V はポテンシャルである。$\alpha \to \infty$ の極限では運動項はカノニカルな項 $-\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{2}$ を取るが、それ以外の場合では運動項は $|\phi| = \sqrt{6\alpha}$ で特異点を持ってしまう。そのため、$\frac{\partial \phi}{1-\frac{\phi^2}{6\alpha}} = \partial \varphi$ を満たすカノニカル変数 φ を導入する。この関係より、$\phi = \sqrt{6\alpha} \tanh \frac{\varphi}{\sqrt{6\alpha}}$ である。式 (1) を φ を用いて書き直すと、式 (2) の表式が得られる。

$$\frac{\mathcal{L}}{\sqrt{-g}} = \frac{R}{2} - \frac{(\partial_\mu \varphi)^2}{2} - V\left(\sqrt{6\alpha} \tanh \frac{\varphi}{\sqrt{6\alpha}}\right) \tag{2}$$

ポテンシャルは $\phi = \sqrt{6\alpha}\tanh\frac{\varphi}{\sqrt{6\alpha}}$ に依存することから、φ が $\sqrt{6\alpha}$ に比べて十分に大きい場合、一定の値を取ることが分かる。$\phi = \sqrt{6\alpha}$ でポテンシャルをテイラー展開すると、

$$V(\varphi) = V_0 - 2\sqrt{6\alpha}V_0' e^{-\sqrt{\frac{2}{3\alpha}}\varphi} \tag{3}$$

ここで、$V_0 = V(\phi)|_{\phi=\sqrt{6\alpha}} = V(\varphi)|_{\varphi\gg\sqrt{6\alpha}}$、$V_0' = \partial_\phi V|_{\phi=\sqrt{6\alpha}} = \cosh^2\frac{\varphi}{\sqrt{6\alpha}}\partial_\varphi V|_{\varphi\gg\sqrt{6\alpha}}$ である。V_0 は、ポテンシャルがカノニカル変数 φ の極限で取る一定値を表している。

式 (3) を用いて、A_s、n_s、r がどのような値を取るかを計算することができる。スローロールパラメータ $\epsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{V}\frac{dV}{d\phi}\right)^2$、$\eta = \frac{1}{V}\frac{d^2V}{d\phi^2}$ を用いると、

$$A_s = \frac{4\pi}{m_{Pl}^2\epsilon}\left(\frac{H}{2\pi}\right)^2, n_s = 1 - 6\epsilon + 2\eta, r = 16\epsilon \tag{4}$$

と表される。m_{pl} はプランク質量、H はハッブルパラメータである。$\varphi \gg \sqrt{6\alpha}$ の場合、$e^{-\sqrt{\frac{2}{3\alpha}}\varphi} \ll 1$ を満たすことを用いて A_s や n_s、r を計算することが出来る。

$$A_s = \frac{V_0 N}{18\pi^2\alpha}, n_s = 1 - \frac{2}{N}, r = \frac{12\alpha}{N^2} \tag{5}$$

A_s、n_s、r に現れるポテンシャルのパラメータは V_0 と α の二つだけである。このように、α-attractors ではインフレーションの性質を示すパラメータがポテンシャルの細かい形によらない。

3 複数場の α-attractors

この節では、α-attractors が相互作用する二つのスカラー場を持つ場合について調べていく。ここで注意するべきなのが、単一のスカラー場のインフレーションと相互作用する複数場のインフレーションにはその終わり方という点で大きな違いが起こり得ることである。単一のスカラー場の場合では、ポテンシャルの傾きが大きくなることでスローロールが崩れ、インフレーションが終了する。例えば、ϵ や η が 1 程度の値になっていれば、インフレーションは終了していると見做せる。対して、waterfall を起こすような複数場のインフレーションでは、インフラトン場とは違うもう一つの場のはたらきによってインフレーションが終了する。このようなインフレーションは、ハイブリッドインフレーションと呼ばれている。ハイブリッドインフレーションの最も簡単なポテンシャルとして、式 (6) が与えられる。

$$V(\sigma,\phi) = \frac{1}{4\lambda}\left(M^2 - \lambda\sigma^2\right)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{g^2}{2}\phi^2\sigma^2 \tag{6}$$

ここで、σ、ϕ はスカラー場、λ、M、m、g はパラメータである。

二つのスカラー場を持つ α-attractors においてハイブリッドインフレーションが起こる場合のラグランジアンは、式 (7) で与えられる。

$$\frac{\mathcal{L}}{\sqrt{-g}} = \frac{R}{2} - \frac{(\partial_\mu\phi)^2}{2\left(1-\frac{\phi^2}{6\alpha}\right)^2} - \frac{(\partial_\mu\sigma)^2}{2\left(1-\frac{\sigma^2}{6\beta}\right)^2} - V(\sigma,\phi) \tag{7}$$

単一のスカラー場の場合と同様に、特異点を回避するために $\frac{\partial\phi}{1-\frac{\phi^2}{6\alpha}} = \partial\varphi$ を満たすカノニカル変数 φ、$\frac{\partial\sigma}{1-\frac{\sigma^2}{6\beta}} = \partial\chi$ を満たすカノニカル変数 χ を導入する。φ と χ を用いて式 (6) のポテンシャルを書き直す。

$$V(\chi,\varphi) = \frac{1}{4\lambda}\left(M^2 - 6\beta\lambda\tanh^2\frac{\chi}{\sqrt{6\beta}}\right)^2 + 3m^2\alpha\tanh^2\frac{\varphi}{\sqrt{6\alpha}} + 18g^2\alpha\beta\tanh^2\frac{\varphi}{\sqrt{6\alpha}}\tanh^2\frac{\chi}{\sqrt{6\beta}} \tag{8}$$

式 (8) で示されるポテンシャルの概形を図 1 に示す。

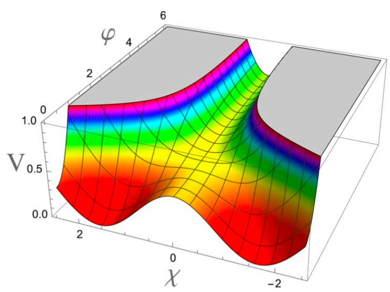

図 1: 式 (8) の概形

φ によるインフレーションの進行に伴い、φ の値は無限遠から 0 に近づいていく。図 1 から分かるように、インフレーションの最初の段階では $\chi = 0$ の

状態が続く。ここで、$\chi = 0$ の状態における式 (8) のポテンシャルの χ 方向の曲率を考える。

$$V_{\chi,\chi}(\chi = 0) = -M^2 + 6\alpha g^2 \tanh^2 \frac{\varphi}{\sqrt{6\alpha}} \tag{9}$$

$V_{\chi,\chi}(\chi = 0) = 0$ を満たす φ の値を φ_c と決める。

$$\varphi_c = \sqrt{6\alpha} \tanh^{-1} \frac{1}{\sqrt{6\alpha}} \frac{M}{g} \tag{10}$$

$\varphi > \varphi_c$ の領域では、$V(\chi, \varphi)$ は $\chi = 0$ の場合に最小値を満たす。対して、$\varphi < \varphi_c$ の領域では、$V(\chi, \varphi)$ は図 1 のように χ の正負どちらの方向にも最小値を持つようになる。よって、$\varphi > \varphi_c$ でポテンシャルの $\chi = 0$ を満たす安定な部分を転がってきたスカラー場 φ は、$\varphi < \varphi_c$ になるとより安定な場所に向かって、χ の正負どちらかの方向へと転がり落ちることになる。χ 方向のポテンシャルの傾きが十分に大きければ、スローロール条件は崩れインフレーションは終了する。このプロセスが waterfall である。

ここで、waterfall によってスローロール条件が崩れる状況について調べる。$\varphi > \varphi_c$ で、式 (8) は

$$V(\chi = 0, \varphi) = \frac{M^4}{4\lambda} + 3m^2\alpha \tanh^2 \frac{\varphi}{\sqrt{6\alpha}} \tag{11}$$

と書ける。式 (3) と同様に $\phi = \sqrt{6\alpha}[\varphi \gg \sqrt{6\alpha}]$ でテイラー展開して式 (11) を書き直すと、

$$V \simeq V_{up} + V_0 \left(1 - 4e^{-\sqrt{\frac{2}{3\alpha}}\varphi}\right) \tag{12}$$

パラメータについて、$V_{up} = \frac{M^4}{4\lambda}$、$V_0 = 3m^2\alpha$ である。

ここで、$V_{up} \gg V_0$ の状況を考える。この時、V_{up} に比べて V_0 は無視出来るほど小さいことから、ハッブルパラメータについて

$$H^2 = \frac{M^4}{12\lambda} \tag{13}$$

が成立する。

スローロールパラメータ η について、式 (6) と式 (13) より、

$$\eta = \frac{1}{V}\frac{d^2V}{d\phi^2} = \frac{3\left(-M^2 + g^2\phi^2\right)}{H^2} \tag{14}$$

式 (14) において、$M^2 \gg H^2$ であるならば明らかにスローロールは崩れている。よって、waterfall によってインフレーションが終了する条件は

$$M^2 \ll 12\lambda \tag{15}$$

である。

4 スペクトル指数への影響

この節では、前節で扱ったα-attractors のハイブリッドインフレーションにおけるスペクトル指数の値を計算する。簡単のために、最初に式 (3) を

$$s = \varphi - \sqrt{\frac{3\alpha}{2}} \ln\left(2\sqrt{6\alpha}\frac{V_0'}{V_0}\right) \tag{16}$$

で書き表す。

例えば $V = 3m^2\alpha \tanh^2 \frac{\varphi}{\sqrt{6\alpha}}$ の場合には、式 (16) は

$$s = \varphi - \sqrt{\frac{3\alpha}{2}} \ln 4 \approx \varphi - 1.7\sqrt{\alpha} \tag{17}$$

と計算できるので、α が小さければ $\varphi = s + O(1)$ と見做せる。このときには、s と φ の違いは無視することができる。

$\chi = 0$ の領域のハイブリッドインフレーションを考えると、ポテンシャルは

$$V(s) = V_{up} + V_0\left(1 - e^{-\gamma s}\right) \tag{18}$$

となる。式 (18) では $\sqrt{\frac{2}{3\alpha}} = \gamma$ としている。

$\varphi > \varphi_c$ で膨張指数 N のインフレーションが起きる時の s の値を s_N、$\varphi = \varphi_c$ で waterfall が起こるときの s の値を s_c とおく。スローロール中の s の成長について、

$$\frac{ds}{dN} = \frac{dV/ds}{V(s)} = \frac{V_0\gamma e^{-\gamma s}}{V_{up} + V_0(1 - e^{-\gamma s})} \tag{19}$$

と記述される。$\varphi > \varphi_c$ では $e^{-\gamma s} \ll 1$ なので、式 (19) の 3 項目の分母の $e^{-\gamma s}$ は無視することができる。式 (19) の両辺を積分して、

$$e^{\gamma s_N} = \frac{\gamma V_0 N}{V_{up} + V_0} + e^{\gamma s_c} \tag{20}$$

次に、スペクトル指数 n_s の値の計算に移る。$e^{-\gamma s_N}$ の一次の項までを用いると、

$$n_s = 1 - 6\epsilon + 2\eta \approx 1 - \frac{2V_0\gamma^2 e^{-\gamma s_N}}{V_{up} + V_0} \tag{21}$$

式 (20) を式 (21) に代入して s_c で書き直す。

$$n_s = 1 - \frac{2V_0\gamma^2}{V_0\gamma^2 N + (V_{up} + V_0)e^{\gamma s_c}} \tag{22}$$

N の極限を考えると、式 (22) の分母において $V_0\gamma^2 N \gg (V_{up}+V_0)\,e^{\gamma s_c}$ であるので、

$$n_s = 1 - \frac{2}{N} \tag{23}$$

となる。式 (23) の値は式 (5) の単一のスカラー場の α-attractors における n_s の値と一致している。

次に、前節の $V_{up} \gg V_0$ の仮定が成立する場合を考える。この場合、式 (20) において

$$e^{\gamma s_N} \approx e^{\gamma s_c} \tag{24}$$

であると見做せる。式 (21)〜(24) を合わせて考えると、V_{up} の値によって以下のような制限がつけられる。

$$1 - n_s = \frac{2V_0\gamma^2 e^{-\gamma s_N}}{V_{up}+V_0} = \frac{2V_0\gamma^2 e^{-\gamma s_c}}{V_{up}+V_0} \ll \frac{2}{N} \tag{25}$$

つまり、式 (25) より、$V_{up} \gg V_0$ を満たすならば、$n_s \to 1$ に漸近していくと考えられる。同様に、$\gamma s_c \gg 1$ を満たす場合も n_s は 1 に近づいていく。

よって、複数場の α-attractors では、V_{up}/V_0 の値や s_c の値の変化により、スペクトル指数 n_s は以下の範囲の値を取りうる。

$$1 - \frac{2}{N} \leq n_s \leq 1 \tag{26}$$

単一のスカラー場のインフレーションでは、$n_s = 1$ の場合にはスローロールパラーメータが 0 となり、インフレーションが永遠に続くモデルが考えられる。しかし、今回のようなハイブリッドインフレーションを起こす α-attractors を考慮すると、$n_s = 1$ を満たす場合でもインフレーションが waterfall によって終了する可能性がある。

5 Conclusion

本発表では、ハイブリッドインフレーションが起こる α-attractors でどのようにインフレーションが進行するか、またスペクトル指数の値にどのような影響を与えるかについて調査した。ハイブリッドインフレーションでは、インフレーションを起こすスカラー場の値が小さくなることで、二つ目のスカラー場により waterfall が起こり、インフレーションが終了する。特に α-attractors の場合には、パラメータが変化することでスペクトル指数の値が $n_s = 1$ を取りうる。現在、lambda cold dark matter(Λ CDM) モデルを前提とする観測結果からは $n_s = 1$ となる結果は棄却されている。しかし、Λ CDM モデルには CMB の観測データより得られるハッブル定数の値と、超新星の局所観測により得られるハッブル定数の値にずれが生じる物理的問題 (ハッブルテンション) が存在する。そこで early dark energy(EDE) モデルを考慮すると、CMB を用いて得られるハッブル定数の値が Λ CDM モデルのものよりも高くなり、局所観測から得られるハッブル定数の値と合致を示す。EDE モデルでは $n_s = 1$ を満たす可能性が指摘されている [2] ため、ハイブリッドインフレーションが起こる α-attractors がハッブルテンションの解決に繋がる可能性が指摘されており、さらなる研究が期待されている。

Acknowledgement

本発表にあたり、宇宙論研究室の皆様にたくさんの助言、ご指導を賜りました。多大なるご支援ご尽力、誠にありがとうございました。また、このような価値ある機会を設けて下さいました夏の学校運営スタッフの皆様に、この場をお借りして御礼申し上げます。

Reference

[1] Renata Kallosh and Andrei Linde 2022, PhysRevD.106.023522

[2] Gen Ye, Bin Hu, and Yun-Song Piao 2022, PhysRevD.104.063510

———index へ戻る

重宇 a26

Starobinsky model vs. Higgs inflation model

東京大学大学院理学系研究科
鄭 玄

Starobinsky model vs. Higgs inflation model

鄭　玄 (東京大学大学院理学系研究科)

Abstract

Starobinsky model と Higgs inflation model は、WMAP や Planck の観測結果との相性が良いとされているインフレーション模型である。前者はアインシュタインヒルベルト作用に曲率二乗項 R^2 を付け加えた模型であるのに対し、後者は、曲率項と標準模型のヒッグス場 h との非最小結合項 $\xi |h|^2 R$ を付け加えることで、ヒッグス場にインフラトンの役割を担わせた模型である。これらを Einstein frame で見ると、両者とも同じ形のインフラトンのポテンシャルを与えるにも関わらず、再加熱期の様子は大きく異なっており、とても興味深い。Starobinksy model の場合は、インフラトンの摂動論的な崩壊が主要に起こるのに対し、Higgs inflation model の場合は、その非最小結合項の結合定数 ξ が大きいことが原因で、より効率的な崩壊 (preheating) が主要に起こることとなる。特にインフラトンのエネルギーが、ゲージボゾンの縦波成分へと激しく流入し、爆発的な粒子生成が引き起こされる。この時、生成されたゲージボゾンの運動量がカットオフスケールを超える可能性があるため、UV 問題も抱えている。本発表では、以上のことについて詳細に議論し、再加熱機構になぜこのような相違が生じたかについて明らかにしたのち、今後の展望について議論する。

1 Introduction

ビックバン標準理論は、宇宙マイクロ波背景放射やビックバン元素合成 (BBN) など、様々な観測結果を整合的に説明することに成功した素晴らしい理論である。しかし、その範疇では地平線問題や平坦性問題など、解決しきれない問題を抱えている。これらを解決するのに十分な加速膨張期を実現しつつ、いつかは放射優勢期に移って BBN 等をおこなってくれるというのが我々の欲しいシナリオである。これをインフレーション理論という。

加速膨張をある段階で終わらせ、放射優勢期に移る機構を、再加熱機構という。特にこの、放射優勢期に移り変わる時の温度、再加熱温度は宇宙論的に重要である。なぜなら、再加熱温度が分かると、加速膨張がどれだけ長く続いたかがわかり[1]、スペクトル指数 n_s、n_T、r が計算できるからである[2]。あとはこれを観測結果と照らし合わせれば良い。

中でも Planck(Planck collaboration 2020) との観測事実との相性が良いとされているのが、Starobinky model と Higgs inflation model と呼ばれるものである。本発表ではこれらの再加熱機構について比較し、今後の展望についても議論する。

2 Starobinsky model

Starobinsky model(Starobinsky 1980) とは、アインシュタインヒルベルト作用に曲率二乗項を加えた作用として定義される。[3]

$$S_{R^2}^{\rm JF} = -\frac{M_G^2}{2}\int\sqrt{-g}d^4x\left(R-\frac{R^2}{6M^2}\right)+S_{\rm matter}^{\rm JF} \tag{1}$$

作用がこのように定義されるフレームのことを Jordan frame と呼ぶ。CMB のゆらぎの大きさから $M = 1.3 \times 10^{-5} \times M_G$ と求まる。

2.1 Einstein frame

式 (1) を場の再定義によって、EH 作用 + スカラー場という形に持っていきたい (Maeda 1989)。これを Einstein frame という。次の共形変換

$$g_{\mu\nu} \to \tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu} \tag{2}$$

$$\Omega^2 = \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_G}\right) \tag{3}$$

を施すと、式 (1) は、

$$S_{R^2}^{\rm EF} = \int\sqrt{-\tilde{g}}d^4x\left(-\frac{M_G^2}{2}\tilde{R}+\frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi-V(\phi)\right)+S_{\rm matter}^{\rm EF} \tag{4}$$

$$V(\phi) = \frac{3M^2M_G^2}{4}\left[1-\exp\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_G}\right)\right]^2 \tag{5}$$

とかける。但し、$\tilde{R}$ は、$\tilde{g}_{\mu\nu}$ から定まる曲率である。このように Einstein frame では、EH 作用 + 新しいスカラー場 + 物質場という形になる。この新しいスカラー場こそがインフラトン場であり、スカラロン (scalaron) と呼ばれる。

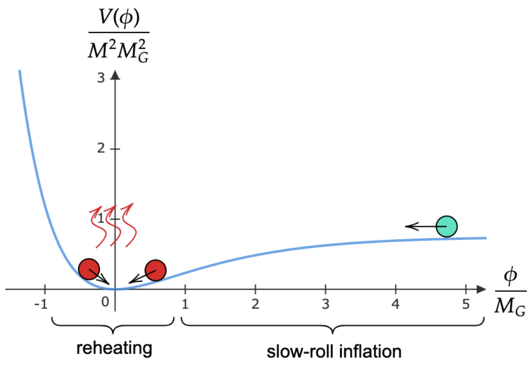

図 1: EF におけるポテンシャル

このように、ϕ の値が大きいところでは、$V(\phi)$ がほぼ一定値を取るようになるため、スローロールインフレーションを実現することができる[4]。

2.2 Reheating

Starobinsky model (1) は再加熱機構を持っており、その描像は Einstein frame にてより明確となる。要は $S_{\rm matter}$ の

[1] e-fold 数 N

[2] N はインフラトン ϕ の積分でかけるため、逆に解けば、horizon crossing での場の値 ϕ_* がわかる。ゆらぎは superhorizon では保存することが解析的にも数値的にもわかっているため、この値を用いて slow-roll parameter を計算し、スペクトル指数の式に代入するという流れである。

[3] $M_G = 2.4 \times 10^{18}$ GeV (reduced Planck mass)

[4] $p/\epsilon = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)/\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \simeq -1$ ($\because \dot{\phi} \simeq 0$) より、ダークエネルギーを実現している。

中にある物質場が共形不変でないことが原因で、共形変換 (2) によって Einstein frame に移る際に、スカラロン ϕ との結合項を得ることで、崩壊チャンネルを獲得するのである。以下、物質場中の Higgs 場 h について詳しくみていくことにする。Jordan frame において、

$$S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{JF}}=\int\sqrt{-g}d^4x\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu h\partial_\nu h-\frac{1}{2}m_h^2h^2\right) \tag{6}$$

と定義されるとき、Einstein frame への共形変換 (2) によって Higgs 場は $h\to\tilde{h}=\Omega^{-1}h$ と変換を受けることに注意すると[5]、$\phi\simeq0$ で、

$$\begin{aligned}S_\phi^{\mathrm{EF}}+S_h^{\mathrm{EF}}=&\int\sqrt{-\tilde{g}}\left[\frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi-\frac{1}{2}M^2\phi^2\right.\\&+\frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\tilde{h}\partial_\nu\tilde{h}-\frac{1}{2}m_h^2\tilde{h}^2\\&+\underline{\frac{1}{\sqrt{6}M_G}m_h^2\tilde{h}^2\phi+\frac{1}{\sqrt{6}M_G}\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{h}\partial_\mu\phi\partial_\nu\tilde{h}}\\&\left.+\underline{\frac{1}{12M_G^2}\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{h}^2\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi}\right]\end{aligned} \tag{7}$$

のように式変形することができる[6]。この式 (7) を見ると、3、4 行目の 3 つの項 (波線部) がスカラロン ϕ と Higgs 場 $\tilde{h}$ との結合項になっていることがわかる[7]。これらの結合項の起源は共形対称性の破れによって理解することができる。最初の項は Higgs 場が質量を持つことによる共形対称性の破れ[8]、2、3 つ目の項は、スカラー場の運動項が共形不変でないことからきている。

このように各項の係数がプランク質量 M_G で抑制されているので、摂動論が適用でき、3 行目の 2 つの項を用いて $\phi\to hh$ の崩壊率を tree level まで計算すると[9]

$$\Gamma_{\phi\to hh}=\frac{M^3\sqrt{1-\frac{4m_h^2}{M^2}}}{192\pi M_G^2}\left[1+2\left(\frac{m_h^2}{M^2}\right)\right]\simeq\frac{M^3}{192\pi M_G^2} \tag{8}$$

となり、2 つ目の項からの寄与、すなわち運動項の共形対称性の破れからの寄与が最も大きいことがわかる。

あとは、

つまり、スカラロンの物質場への崩壊はその物質場の共形対称性の破れの度合いで決まっており、今回の模型では Higgs 場が最も大きいため[10]、崩壊は (8) のみを考えれば良い。あとは、この崩壊を加味した連立 Boltzman 方程式を解けば、放射のエネルギー密度が優勢になるところがわかり、再加熱温度が計算できる。

[5] スカラー場は距離次元 $[L^{-1}]$ を持っているためである。

[6] ここでの scalaron の質量項はポテンシャル (5) 由来である。$\phi\simeq0$ で、$V(\phi)\simeq\frac{1}{2}M^2\phi^2$

[7] この結合項は、式 (6) に $\tilde{h}=\Omega^{-1}h=\exp\left(-\phi/\sqrt{6}M_G\right)$ を代入する際に出てくるものである。この導出において、$\phi\simeq0$ でなくとも結合項が生じてしまうことは見てとれるが、ϕ が大きい値を取る間はインフレーションが起こっており、$H\gg\Gamma$ なので、その間に崩壊してできた Higgs 粒子は既に十分に薄められていると考えられる。

[8] 質量を持つことはあるエネルギースケール (距離スケール) を持つことを意味するため、共形不変性を破る。

[9] 第 3 項は二体散乱を表しているので無視する。

[10] 以上の議論を、S_{matter} 中の他の物質場、すなわちフェルミオン場やゲージ場についても適用することになるが、スカラロンのこれらへの崩壊の度合いは、Higgs 場へのものより十分小さいため、無視することができる。なぜなら、フェルミオンの運動項は共形不変であり、上で主要となっていた項が欠けているためである。ゲージ場についても共形対称性の破れを持っているが、それは十分小さい。

3 Higgs inflation model

Higgs inflation model(Cervantes-Cota & Dehnen 1995; Bezrukov& Shaposhnikov 2008) とは、次のように曲率項 R とヒッグス場 h との非最小結合 (non minimal coulpling) $\xi|h|^2R$ を考え、Higgs 場にインフラトンとしての役割を担わせたものである。[11]

$$\begin{aligned}S_{\mathrm{Higgs}}^{\mathrm{JF}}=&\int\sqrt{-g}d^4x\left[\left(\frac{M_G^2}{2}+\frac{\xi h^2}{2}\right)R\right.\\&-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(D_\mu h)^\dagger(D_\nu h)-V_{\mathrm{JF}}(h)\\&\left.-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right]\end{aligned} \tag{9}$$

$$V_{\mathrm{JF}}(h)=\frac{\lambda}{4}h^4 \tag{10}$$

但し、簡単のため U(1) ゲージ場を考えることにする。また、CMB の観測から $\xi\simeq47000\sqrt{\lambda}$ と求まる。以下、ξ は十分大きいと仮定する。

3.1 Einstein frame

まず、作用 (9) のインフラトン場 (Higgs 場) のみに着目して、それを EH 作用＋スカラー場の形に持っていきたい。次の共形変換 (2) を行う。

$$\Omega^2=1+\frac{\xi h^2}{M_G^2} \tag{11}$$

すると、その代償として、Higgs 場の運動項が canonical な形になってくれない。そのために次の場の再定義をする。

$$\frac{d\phi}{dh}=\frac{1}{\Omega^2}\sqrt{1+\frac{\xi(1+6\xi)h^2}{M_G^2}} \tag{12}$$

これとポテンシャルの再定義 $V(\phi):=V_{\mathrm{JF}}(h)$ によって、

$$S_{\mathrm{Higgs}}^{\mathrm{EF}}=\int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{M_G^2}{2}R-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi-V(\phi)\right] \tag{13}$$

と書くことができる。この時、ポテンシャル $V(\phi)$ は、

$$V(\phi)\simeq\begin{cases}\frac{\lambda}{4}\phi^4 & (\phi\ll\frac{M_G}{\xi})\\ \frac{\lambda M_G^4}{4\xi^2}\left[1-\exp\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_G}\right)\right]^2 & (\phi\gg\frac{M_G}{\xi})\end{cases} \tag{14}$$

これと式 (5) とを比べると、Starobinsky の場合とほぼ同じ関数形であることがわかる。ただ、微々たる違いに見えるかもしれないが、$\phi\ll\frac{M_G}{\xi}$ で関数形が変わっているところが肝であり、これが後に爆発的なインフラトンの崩壊につながっていく。

3.2 Gravitational Particle creation

さて今回の模型に対して、インフラトン場 (Higgs 場) の崩壊を議論していくことになるが、Higgs 場はクォークやゲージボゾンとの結合定数が大きいことが原因で、摂動的な崩壊にならない。以下、非摂動的な崩壊も扱える手法について大まかにまとめておく (Birrell & Davies 1984)。

[11] 式 (9) では、ユニタリゲージをとっている。つまり、h は、Higgs 場の動径方向の大きさを表している。

粒子は、真空及び生成消滅演算子によって定義される。そしてそれは、場を平面波展開した時の係数を演算子に格上げしたものであったから、平面波の形が変われば、真空の定義が変わり、粒子数が変化するのである。次の二つの平面波展開を考える。

$$\chi(t,\boldsymbol{k}) = u_k(t)a_{\boldsymbol{k}} + u_k^*(t)a_{-\boldsymbol{k}}^\dagger = \bar{u}_k(t)\bar{a}_{\boldsymbol{k}} + \bar{u}_k^*(t)\bar{a}_{-\boldsymbol{k}}^\dagger \tag{15}$$

それぞれの平面波展開に対して別々の真空が定義される。

$$a_{\boldsymbol{k}}\,|0\rangle = 0, \quad \bar{a}_{\boldsymbol{k}}|\bar{0}\rangle = 0 \tag{16}$$

一般の時空においては、$|0\rangle \neq |\bar{0}\rangle$ である。なぜなら平面波が変化することによって、変化前の正振動数解 $u_k(t)$ を、変化後の正振動数解 $\bar{u}_k(t)$ 線型結合だけでは表すことができず、負振動数解 $\bar{u}_k^*(t)$ も含めなければならないからである。よって、次のようにかける。

$$u_k(t) = \alpha_k\bar{u}_k(t) + \beta_k\bar{u}_k^*(t) \tag{17}$$

これに対応して、それぞれの消滅演算子との間にも関係がつき、

$$a_{\boldsymbol{k}} = \alpha_k\bar{a}_{\boldsymbol{k}} + \beta_k^*\bar{a}_{\boldsymbol{k}}^\dagger \tag{18}$$

となる。これらを Bogoliubov 変換という。よって粒子数は、

$$\langle\bar{0}|a_k^\dagger a_k|\bar{0}\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}|\beta_k|^2 \tag{19}$$

と計算できる。つまり生成された粒子数は、平面波が変化する際にどれほど負振動数の平面波が混ざってくるかの度合いだと解釈することができる。

3.3 Preheating by breaking adiabadicity

3.2 で述べたように、粒子生成は、平面波の変化という観点から理解することができる。この手法を用いると、Higgs inflation model には、2.2 で述べた摂動的な再加熱とは違って、より効率的な再加熱機構 (Preheating) が備わっていることが指摘されてきた (Bezrukov,Gorbunov& Shaposhnikov 2009; Garcia-Bellido,Figueroa& Rubio 2009)。その大まかな描像を述べることにする。

W ボゾンは、ヒッグス場と結合することで次の有効質量を得る。

$$m_W^2(\phi) = \frac{g^2}{2\sqrt{6}}\frac{M_G|\phi|}{\xi} \tag{20}$$

但し、$\phi(t) = \Phi(t)\cos(Mt)$ である。これによる W ボゾンの運動方程式は[12]、

$$\ddot{\chi} + \omega_k^2(t)\chi(t) = 0 \tag{21}$$

$$\omega^2(t) = \frac{k^2}{a^2} + m_W^2(t) \tag{22}$$

となる[13]。$|\chi|$ が大きい間は、運動方程式 (21) の平面波解は WKB 近似解で与えられる。

$$\chi_k(t) = \frac{\alpha_k}{\sqrt{2\omega_k}}e^{-i\int^t\omega_k(t')dt'} + \frac{\beta_k}{\sqrt{2\omega_k}}e^{i\int^t\omega_k(t')dt'} \tag{23}$$

[12] 場の再定義 $\chi(t) \to a^{3/2}(t)\chi(t)$ をすることによって、一回微分の項を消している。

[13] (22) において、$-9H^2/4 - 3\dot{H}^2/2$ という項は、物質優勢期であることを用いて消している。

しかし、$|\phi|$ が原点付近を通る度、WKB 近似条件 $\dot{\omega}/\omega^2 \ll 1$ が破れ、平面波解は (23) からずれる。この平面波の変化により、粒子生成が起こるのである。j 回目に原点を通る時刻を t_j とすると、$|t-t_j| \ll \frac{\sqrt{6}}{M}$ で、

$$\frac{d^2\chi_{\boldsymbol{k}}}{d\tau^2} + \left(\kappa^2 + |\tau|\right)\chi = 0 \tag{24}$$

と近似できる。但し、$\kappa = k/Ka$、$\tau = K(t-t_j)$、$K = g^2M_G^2\sqrt{\lambda/2}\Phi(t_j)/6\xi^2$ である。式 (24) の解と WKB 解 (23) との接続条件から、j 回振動後の Bogoliubov 係数 α_j、β_j と、$(j+1)$ 回振動後の Bogoliubov 係数 α_{j+1}、β_{j+1} との間の関係性がわかり、それにより粒子数 $n_{\boldsymbol{k}}^{(j)}$ を計算すると指数関数的に増加することが明らかとなる。これが、Stochastic broad resonance production と呼ばれるものである。

つまりインフラトンが原点を横切る度に、断熱条件の破れによって平面波が WKB 解から変化するため粒子生成が起こり、効率的な粒子生成が起こったというわけである。[14]

3.4 Violent preheating by spike-like feature

しかし、Higgs inflation model には、3.3 で述べたよりも、より効率的な粒子生成が起こることが明らかとなった (Ema et al. 2016; DeCross et al. 2018)。それは、式 (14) で確認したように、$\phi < M_G/\xi$ でポテンシャルの関数形が変化することが原因である。これは Jordan frame で見ると、急激な運動項の切り替わりとして現れる。これによって、インフラトンの有効質量が爆発的に変化する。Jordan frame でのインフラトン場 h の運動方程式は以下のようになる。

$$\ddot{h} + 3H\dot{h} + m_{\rm eff}^2 h = 0 \tag{25}$$

$$m_{\rm eff} = \frac{\xi(1+6\xi)\dot{h}^2 + \lambda M_G^2h^2}{M_G^2 + \xi(1+6\xi)h^2} = \begin{cases}\lambda\Phi^2 & (|\phi| \ll \frac{M_G}{\xi}) \\ \frac{\lambda M_G^2}{\xi} & (|\phi| \gg \frac{M_G}{\xi})\end{cases} \tag{26}$$

これより、インフレーション直後では、ϕ が $|\phi| \ll \frac{M_G}{\xi}$ の領域に入ると、外側と比べて有効質量は $\xi^2\Phi^2/M_G^2 \sim \xi$ 倍も爆発的に (spike like) 増えていることがわかる[15]。これに伴って、インフラトンに結合している物質場の運動方程式及びその平面波も大きく変化し、結果爆発的な粒子生成が起こるのである。作用 (9) のゲージ場の部分に着目して、共形変換 (2)(11) によって Einstein frame に移行すると、$m_A^2 = \frac{a^2g^2h^2}{\Omega^2}$ として、

$$S_A = \int d\tau d^3x\left[-\frac{1}{4}\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} - \frac{m_A^2}{2}\eta^{\mu\nu}A_\mu A_\nu\right] \tag{27}$$

とかける。ここで、ゲージ場を縦波成分 $\boldsymbol{A}_L$ と横波成分 $\boldsymbol{A}_T$ とに分解する[16]。

$$\begin{aligned} S_{A_T} + S_{A_L} = \frac{1}{2}\int\frac{d\tau d^3k}{(2\pi)^3}\big[&|\boldsymbol{A}_T'|^2 - (k^2 + m_{A_T}^2)|\boldsymbol{A}_T|^2 \\ &+ |\boldsymbol{A}_L'| - (k^2 + m_{A_L}^2)|\boldsymbol{A}_L|^2\big] \end{aligned} \tag{28}$$

有効質量はそれぞれ、

[14] 実際には、様々な非摂動的な崩壊と摂動的な崩壊が混ざり合った複雑な再加熱機構となる。

[15] インフラトンは振動を始めた直後の振幅は $\Phi \simeq M_G/\sqrt{\xi}$ であることに注意。

[16] この時 $\boldsymbol{A_L}$ は、運動項を canonical な形にするために場の再定義をおこなっている。

$$m_{A_T}^2 = m_A^2 = \frac{a^2 g^2 h^2}{\Omega^2} \simeq \frac{g^2 M_G |\phi|}{\xi} \tag{29}$$

$$m_{A_L}^2 = m_A^2 - \frac{k^2}{k^2+m_A^2}\left(\frac{m_A''}{m_A} - \frac{3m_A'^2}{k^2+m_A^2}\right) \sim \frac{k^2}{k^2+m_A^2}\frac{m_{\rm eff}}{\Omega^2} \tag{30}$$

となる。横波成分の有効質量 (29) は式 (20) と同じ構造をしているため、扱いは 3.3 と同じであることがわかる。それに対して、縦波成分の有効質量 (30) はインフラトンの有効質量 (26) に比例しているため、インフラトンが $|\phi| \ll M_G/\xi$ を横切る時に爆発的に変化し、それに伴い、爆発的な粒子生成が起こる。

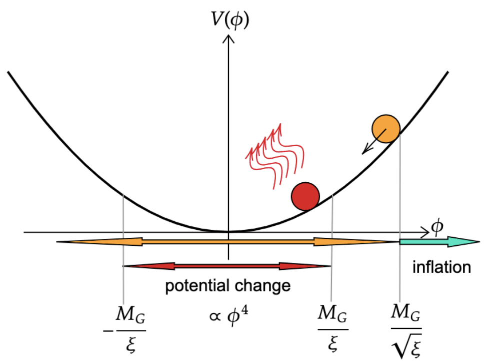

図 2: Einstein frame における粒子生成を表した概念図。

この縦波成分の粒子生成は、インフラトンが原点付近を横切る際に起こるという点では、3.3 と同じように見えるが、今回の場合は必ずしも断熱条件が破れているわけではないことに注意する。というのも、生成された縦波成分の運動量は $\sqrt{\lambda} M_G$ とかなり大きいためである。この粒子生成機構はあまりにも爆発的に起こるため、一回のインフラトン振動が終わる前には既に全てのエネルギーが放射に転換されてしまう。

4 比較

両模型のスペクトル指数等を計算をしたところ以下のようになった。[17]

	T_r (GeV)	N	n_s	n_T	r
R^2	1.6×10^9	54.2	0.964	-0.00045	0.0036
Higgs	2.6×10^{15}	59.0	0.967	-0.00038	0.0031

近い将来、CMB の精密な観測が進めば、両模型を区別できるようになるかもしれない。

5 Conclusion & Discussion

2.1 と 3.1 で見たように、両者の模型は、Einstein frame で見ると、インフラトンのポテンシャルがほぼ同じ形であった。しかし、それぞれの再加熱機構は大きく異なることがわかった。Starobinsky model の場合は、2.2 で見たようにインフラトンの摂動的な崩壊によってなされるのに対して、Higgs inflation model の場合は、より効率的な崩壊が起こることが明らかとなった。元来は、3.3 で見たように、ポテンシャルの原点付近で断熱条件が破れ、平面波が大きく変化することにより粒子生成が起こることが指摘されていた。そして最近、3.4 で見たように、ポテンシャルの関数形が原点付近で急激に変化することによる、インフラトンの有効質量の大きな変化、そしてそれと結合しているゲージボゾンの縦波成分が、爆発的に生成されることが明らかになったのである。

しかし、Higgs inflation model には、一つ大きな問題点が潜んでいる。UV 問題である。

元々、Higgs inflation model のカットオフスケールは M_G/ξ と、低めであることが知られていた。このスケールを超えてしまうと、例えば、グラビトンを介した散乱断面積がこのスケール以上で 1 を超えてしまう。しかしその後、このカットオフスケールは、インフラトンの場の値 ϕ に依存していて、加速膨張中はなんとか問題を回避できることが示された (Bezrukov et al. 2011)。しかし再加熱期では、3.4 で見たように、violent preheating によって生成された粒子の運動量はあまりにも大きいため、カットオフスケールを超えてしまうのである。

この解決案の一つとして、混合 Higgs-R^2 模型がある。今までは古典的な議論しかしてこなかったが、Higgs inflation model において、量子効果を考え、繰り込みをしようとすると、次の相殺項が必要となる ('t Hooft& Veltman 1974)。

$$S_{\text{相殺項}} = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\alpha_1 R^2 + \alpha_2\left(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \frac{1}{3}R^2\right)\right] \tag{31}$$

α_1 のベータ関数を調べると、我々の考えたいスケールで $\alpha_1 \sim O(\xi^2) \gg 1$ となり、曲率 2 乗項が出現することになる。これによって現れたスカラロンによって、カットオフスケールは M_G まで跳ね上がり、UV 問題は解決されるのである (Ema 2017; Gorbunov& Tokareva 2019)。

Reference

Planck collaboration, Y. Akrami et al. (2020) *Astronomy& Astrophysics*, 641:A10.

A. A. Starobinsky. (1980) *Phys. Lett.* 91B, 99-102.

K. Maeda. (1989) *Phys. Rev.* D39, 3159-3162.

J. L. Cervantes-Cota & h. Dehnen. (1995) *Nuclear Physics* B, 442, 1-2: 391–409.

F. Bezrukov& M. Shaposhnikov (2008) *Physics Letters* B, 659, 3:703–706.

N. D. Birrell & P. C. W. Davies (1984) Cambridge university press.

F. Bezrukov, D. Gorbunov and M. Shaposhnikov. (2009) *JCAP*, 06:029.

Juan Garcia-Bellido, Daniel G Figueroa & Javier Rubio. (2009) *Phys. Rev.* D 79, 79.6:063531.

Y. Ema, R. Jinno, K. Mukaida and K. Nakayama. (2017) *JCAP* 02:045.

Matthew P. DeCross, David I. Kaiser, Anirudh Prabhu, Chanda Prescod-Weinstein, Evangelos I. Sfakianakis. (2018) *Phys. Rev.* D, 97.2:023526.

F. Bezrukov, A. Magnin, M. Shaposhnikov& S. Sibiryakov. (2011) *JHEP* 1:1-26.

G. 't Hooft & M. J. G. Veltman. (1974) *Phys. Theor.* A 20, 69.

Y. Ema. (2017) *Physical Letters* B, 770:403-411.

D. Gorbunov, A. Tokoreva. (2019) *Physical Letters* B, 788:37-41

[17] Starobinsky model については、Boltzman 方程式を解いて、インフラトンのエネルギー密度を放射のエネルギー密度が上回るところに対応する温度を再加熱温度として計算した。Higgs inflation model については、(3.4) で論じた violent preheating によって、インフレーションが終わった直後のインフラトンのエネルギー密度がそのまますぐに放射のエネルギーになると仮定して計算した。

———index へ戻る

重宇 a27

Gauss-Bonnet 項を含むインフレーション模型での PBH 形成

早稲田大学大学院 先進理工学研究科
川口 遼大

Gauss-Bonnet 項を含むインフレーション模型での PBH 形成

川口 遼大 (早稲田大学大学院 先進理工学研究科)

Abstract

本発表では高次の曲率項である Gauss-Bonnet 項を含むインフレーション模型による原始ブラックホール形成 (Shinsuke Kawai& Jinsu Kim 2021) をレビューする。Gauss-Bonnet 項からの寄与とインフラトンポテンシャル $V(\phi)$ からの寄与が釣り合い、打ち消し合うことで、インフレーション中に ultra-slow-roll phase が実現する。これによって曲率揺らぎのパワースペクトルがエンハンスし、原子ブラックホール形成に至る。

1 Introduction

現在の宇宙にはダークマター (以下 DM) と呼ばれる未知の成分が宇宙全体の約 27% を占めていることが分かっている。DM の候補としては素粒子論起源のアクシオンや超対称性粒子などが理論的に考えられているが、未だに発見されてはいない。別の DM 候補として、原始ブラックホール (以下 PBH) は近年盛んに研究の対象となっている。

宇宙初期にある一定以上の密度を持つ領域が存在した場合、その領域が圧力に打ち勝って重力崩壊しブラックホールとなることが考えられている。このように形成されたブラックホールを PBH と呼ぶ。PBH は恒星の進化の最終段階として形成されるブラックホールとは異なり、様々な質量を持つことが可能である。特に $10^{-15}M_{\odot} \sim 10^{-12}M_{\odot}$ 程度の非常に軽い質量を持つ PBH には観測的な制限は無く、全ての DM を PBH のみで説明し得る可能性が残されている (図 1)。

PBH が形成されるのに十分なほど高密度な領域が存在するためには、宇宙初期に大きなゆらぎが必要となる。このゆらぎがインフレーション期に仕込まれたものと考えることにすると、これは大きな曲率ゆらぎを生じさせるインフレーション模型を考えることに相当する。最も標準的なスローロールインフレーションでは曲率揺らぎのエンハンスは望めないため、別のインフレーション模型が必要となる。そこで本発表では Gauss-Bonnet 項の存在が決定的な役割を果たす PBH 形成インフレーション模型 (Shinsuke Kawai& Jinsu Kim 2021) をレビューする。

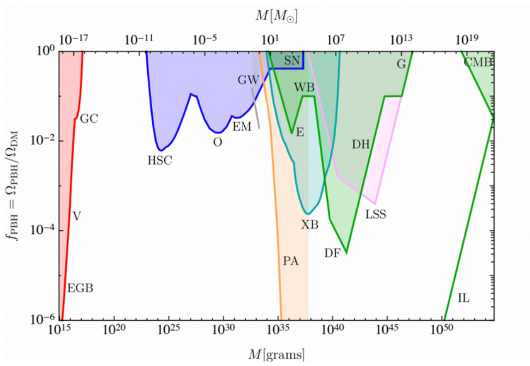

図 1: PBH への観測への制限 (Bernard Carr& Florian kühne 2020)

2 Methods

次のような作用を考える。

$$S = S_{EH} + S_{\phi} + S_{GB} \tag{1}$$

$$S_{EH} = \frac{M_{pl}^2}{2}\int d^4x\sqrt{-g}R \tag{2}$$

$$S_{\phi} = \int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi - V(\phi)\right] \tag{3}$$

$$S_{GB} = \int d^4x\sqrt{-g}\mu(\phi)R_{GB}^2 \tag{4}$$

ここで $V(\phi)$ はポテンシャルで Natural Inflation を考えることにすると

$$V(\phi) = \Lambda^4\left(1 + \cos\frac{\phi}{f}\right) \tag{5}$$

とする (Λ, f はパラメータ)。また R_{GB}^2 は Gauss-Bonnet 項

$$R_{GB}^2 = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} \tag{6}$$

であり、高次の曲率項である。また $\mu(\phi)$ は coupling function でここでは

$$\mu(\phi) = \mu_0 \tanh(\mu_1(\phi - \phi_c)) \tag{7}$$

とする (μ_0, μ_1, ϕ_c は定数パラメータ)。

FLRW 計量を想定すると作用 (1) から次の運動方程式が導かれる。

$$3M_{pl}^2 H^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V - 24H^3\mu_\phi\dot{\phi} \tag{8}$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi - 24\mu_\phi H^2(\dot{H} + H^2) = 0 \tag{9}$$

この運動方程式には Gauss-Bonnet 項の存在のおかげで $\phi =$ 一定,$H =$ 一定となる解が存在する。この時

$$V_\phi = \frac{8}{3}\mu_\phi \frac{V^2}{M_{pl}^4} \tag{10}$$

が満たされる。逆に、式 (10) を $\phi = \phi_c$ で満たすようなパラメータを設定すると $\phi = \phi_c$ 付近で USR が実現する。

2 次摂動についての作用は次のようになる。

$$S_S^{(2)} = \int d^4x a^3 Q_S \left[\dot{\zeta}^2 - \frac{c_S^2}{a^2}(\nabla\zeta)^2\right] \tag{11}$$

$$S_T^{(2)} = \frac{1}{2}\int d^4x a^3 Q_T \left[\dot{h_{ij}}^2 - \frac{c_T^2}{a^2}(\nabla h_{ij})^2\right] \tag{12}$$

ここで

$$Q_T = \frac{1}{4}\left(M_{pl}^2 + 8H\mu_\phi\dot{\phi}\right) \tag{13}$$

$$c_T^2 = \frac{1}{4Q_T}\left(M_{pl}^2 + 8\dot{\phi}^2\mu_{\phi\phi} + 8\mu_\phi\ddot{\phi}\right) \tag{14}$$

$$\Sigma = -3H^2M_{pl}^2 - 48H^3\mu_\phi\dot{\phi} + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \tag{15}$$

$$\Theta = HM_{pl}^2 + 12H^2\mu_\phi\dot{\phi} \tag{16}$$

$$Q_S = 16\frac{\Sigma}{\Theta^2}Q_T^2 + 12Q_T \tag{17}$$

$$c_S^2 = \frac{1}{Q_s}\left(\frac{16}{a}\frac{d}{dt}\left(\frac{a}{\Theta}Q_T^2\right) - 4c_T^2 Q_T\right) \tag{18}$$

不安定性の回避のためには

$$Q_T > 0 \ , \ c_T^2 > 0 \tag{19}$$

$$Q_S > 0 \ , \ c_S^2 > 0 \tag{20}$$

が必要である。

曲率ゆらぎ ζ のパワースペクトルを求めるために正準場 $u = Z_s\zeta$ のモード関数 u_k の運動方程式

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{Z_S''}{Z_S}\right)u_k = 0 \tag{21}$$

を解く。ここで $Z_S = a\sqrt{2c_S Q_S}$ であり、プライムは時間変数 $\tau_S = \int \frac{c_S}{a}dt$ に関する微分である。初期条件はホライズンの十分内側ででバンチ・デービス真空解

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{2k}}e^{-ik\tau_S} \tag{22}$$

を課す。曲率ゆらぎのパワースペクトルは

$$\mathcal{P}_\zeta(k) = \frac{1}{Z_S^2}\frac{k^3}{2\pi^2}|u_k|^2 \tag{23}$$

として求めることができる。

3 Results

まずは背景の運動方程式 (8)(9) を解く。その際にパラメータは式 (10) を参考に、DM としての PBH 形成を想定して調整する。今の場合、ポテンシャルについては表 1、coupling function については表 2 とした。

表 1: 用いたパラメータ

$\Lambda(M_{pl})$	$f(M_{pl})$
0.00678	6.5

表 2: 用いたパラメータ

μ_0	$\mu_1(/M_{pl})$	$\phi_c(M_{pl})$
-7.7422×10^6	7	12.2

スカラー場の時間発展を図 2 に示す。ここで n は e-folding 数であり、$n - ncmb = 30 \sim 40$ 程度でスカラー場が停留しているのがわかる (USR)。これにより曲率ゆらぎのパワースペクトルのエンハンスが生じる。

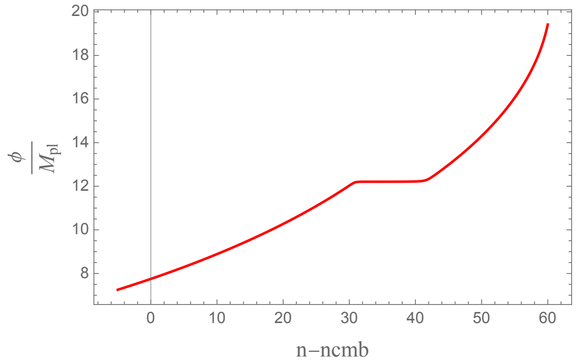

図 2: スカラー場の時間発展

次に Q_T, c_T^2, Q_S, c_S^2 の時間発展を図に示す。4 つ全ての物理量について、条件 (19)(20) が満たされていることが見てとれる。よって不安定性は回避される。

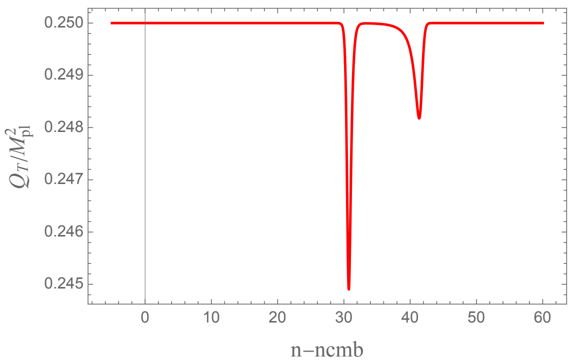

図 3: Q_T の時間発展

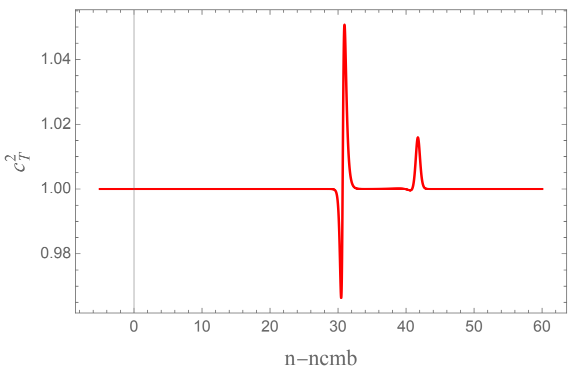

図 4: c_T^2 の時間発展

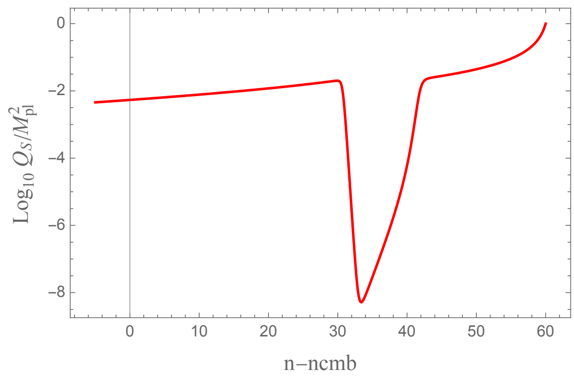

図 5: Q_S の時間発展

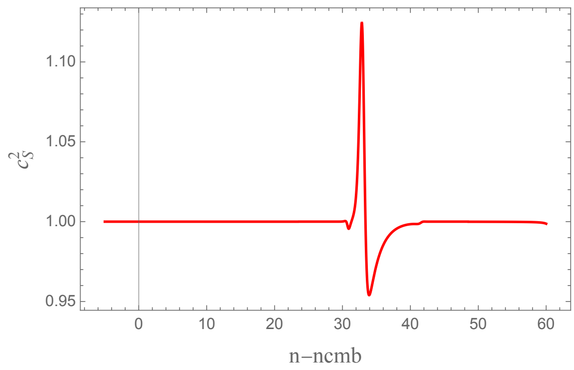

図 6: c_S^2 の時間発展

次に式 (21) を初期条件 (22) で解き、式 (23) によって得たパワースペクトルの数値解を以下の図 7 に示す。図より、CMB スケールと比べて PBH スケールでは $10^7 \sim 10^8$ 倍程度のエンハンスが確認できる。

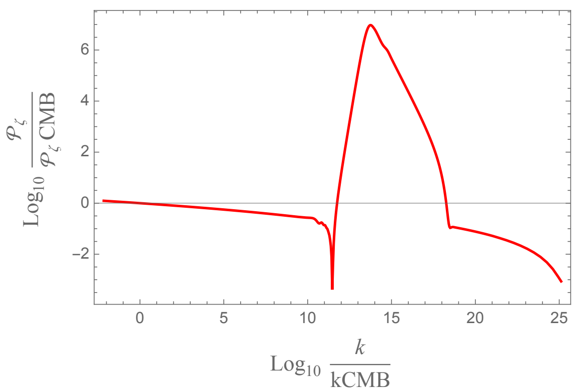

図 7: 曲率揺らぎのパワースペクトル

4 Discussion & Conclusion

Gauss-Bonnet 項を含むモデル (1) によって、曲率ゆらぎのパワースペクトルをエンハンスできることが再現できた。これは式 (10) を満たすようにパラメータを設定することで、Gauss-Bonnet 項からの寄与とポテンシャルからの寄与が打ち消し合うことで、インフレーション中に USR phase が存在することに起因した。また Gauss-Bonnet 項を加えたことによって生じる可能性のあった不安定性に関しても議論をし、条件 (19)(20) を満たしていることを確認した。

現在の PBH の存在量 f とパワースペクトル $\mathcal{P}_\zeta$ の関係は Gaussian 分布を想定すると、

$$f(M) \simeq \left(\frac{\beta(M)}{1.04\times10^{-14}}\right)\left(\frac{\gamma}{0.2}\right)^{3/2} \left(\frac{106.75}{g_{*,form}}\right)^{1/4}\left(\frac{0.12}{\Omega_{CDM,0}h^2}\right)\left(\frac{M}{10^{-13}M\odot}\right)^{-1/2} \quad (24)$$

$$\beta(M) = \int_{\delta_c}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(k)}}\exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2(k)}\right)d\delta \quad (25)$$

$$\sigma^2(k) = \int d\ln p\ \ \exp\left(-\left(\frac{p}{k}\right)^2\right)\frac{16}{81}\left(\frac{p}{k}\right)^4\mathcal{P}_\zeta(p) \quad (26)$$

となる。式 (24) によって求めた f と観測からの比較を図 8 に示す。

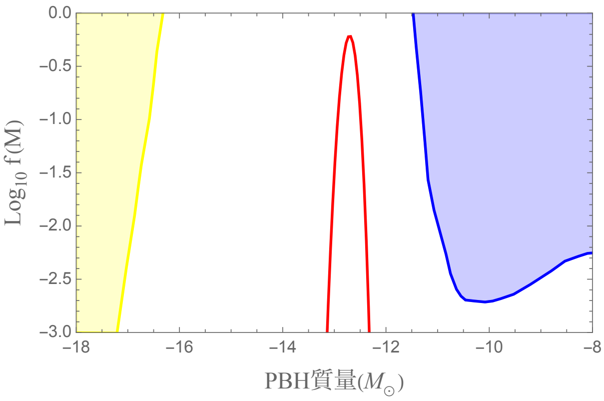

図 8: PBH 存在量 (赤:モデル, 青:Microlensing, 黄:Evaporation)

図より、観測に引っかかることなく、全ての DM を PBH で説明できるだけの量が生成されていることが見て取れる。

Reference

Shinsuke Kawai , & Jinsu Kim ,2021, Phys. Rev. D 104, 083545

Bernard Carr , & Florian kühnel ,2020, Annual Review of Nuclear and Particle Science Vol. 70:355-394

———index へ戻る

重宇 a28

インフレーション宇宙における原始ブラックホールの形成

福島大学大学院 共生システム理工学研究科
外岡 沙恵

インフレーション宇宙における原始ブラックホールの形成

外岡　沙恵 (福島大学大学院 共生システム理工学研究科)

Abstract

本研究のテーマは暗黒物質である．暗黒物質は銀河の回転に大きく関係していて近年, その正体について多くの研究がされてきた．そして最も有力な候補として原始ブラックホール（PBH）が挙げられている．この発表では原始ブラックホールがどのように形成されるのかについて述べていく.

1　はじめに

暗黒物質は天文学的現象を説明する為に考え出された言葉で「質量を持つが, 光学的に直接観測出来ない」とされている．言い換えると「そこに存在していることは確かなのに, 姿が見えない物質」という事だ．この暗黒物質は宇宙の約 27 %を占めていて,2001 年に打ち上げられたアメリカの人工衛星,WMAP 衛星が記録したデータが一番有力である．暗黒物質は電磁相互作用をしていないため, 望遠鏡の光を使った観測では直接見つけられないので「暗黒」という言葉が使われているが重力相互作用はするため銀河の回転に影響を及ぼしている．宇宙は誕生してから現在に至るまで膨張を続けていて, その暗黒物質の候補として最も有力なのは宇宙誕生直後の「初期宇宙」に生成されたブラックホール, 原始ブラックホールであると言われている．関連の論文に書かれている微分方程式を参考に宇宙の様子をグラフ化するという方法で研究を進めている．さらに研究を円滑に進めるため相対性理論などのへの理解も深めている.

2　定義

ハッブルパラメータ H は宇宙の膨張率, インフラトンはインフレーションを起こしたとする粒子, プランクマスはプランク単位系における質量の単位とする．その他出てくる文字については都度定義付けすることにする.

3　ビックバン

宇宙は 138 億年, ごく小さなある一点から始まった．とても大きなエネルギーが一気に放出された瞬間をビックバンと呼ぶ．ビックバン直後は 10^27k という超高温の状態だった．そして光子や素粒子が大量に生成され 10^12K もの温度で激しく飛び回り, たがいに衝突, 散乱を繰り返して熱平衡状態になっていった．その後急激な膨張によって宇宙の密度が徐々に小さくなり温度が下がっていくと, 力の動きが素粒子に作用し始めるようになった．ビックバンから 1 秒後宇宙の温度が 10^12K まで下がるとハドロンが生成され,100 秒後になると温度は 10^9K までさがり宇宙で最初の原子核が誕生した．生み出されたのは水素, 重水素, ヘリウム, リチウムという比較的軽い元素のみで, その大部分（92 %）を水素が占めていた．そして今に至るまで常に宇宙は膨張を続けている．そもそもなぜ宇宙が膨張しているのが分かるのか, それには赤方偏移という言葉が重要になってくる．遠方の銀河が遠ざかっている事は銀河からの光が赤い側（波長が長い）に偏移している事から見出されたのである.

4　原始ブラックホールの存在

ダークマターは宇宙全体で通常の物質の約 5 倍もの質量を持っていると言われている．1930 年の「かみのけ座銀河団」内部の運動を測定したのをきっかけに暗黒物質は肯定されるようになり, 多くの研究がされて来た．始めは, 銀河団の動きから見積もった全体の質量と見かけの質量のつじつまが合わないこと

に気付いた．秒速 1000km で回転している銀河がばらばらに飛び散らないように重力でまとめるためには, 銀河団全体で光って見えている恒星の 400 倍の質量を持っていなければならない．図 1 は様々な銀河の回転速度を表す図である．観測時, 銀河円盤の回転速度はある距離を超えたあたりから外側までほとんど一定だった．銀河は普通外側に行くほど天体の密度は小さくなるが早すぎる速度で恒星が円盤から飛び出さないためには, 銀河は見えている恒星よりも多くの質量の中に埋もれてい無ければ辻褄が合わない．その後の研究から様々な銀河の回転曲線が作成され見えない質量が銀河の運動を支配していることが明らかになった．未知の重力源が大量に存在して運動に影響を及ぼしていなければ銀河団が形を保っている説明が付かなかった．そしてそこから, 何千億の星が集まって銀河という形を保っているのはダークマターの重力が働いているからこそだという仮説が立った．

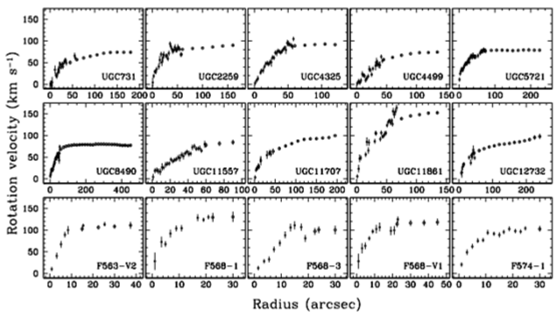

図 1: 宇宙の回転曲線

5　原始ブラックホールの形成

ビックバン直後（∼0.1m 秒）に形成されたブラックホールを指す．直後の高温で高密度の中, 密度の揺らぎによって形成された．現在は主に $10^{15} \sim 10^{17}g$,$10^{20} \sim 10^{24}g$ の範囲の PBH が研究されている．比較的軽い（$\leqq 10^{15}g$）は蒸発して無くなり, それより重い PBH($\geqq 10^{15}g$) は蒸発せずに暗黒物質として振る舞う．現在ダークマターの質量を調べる方法は大きく分けて二つあるとされている．1 つは X 線観測をる利用するもの, もう 1 つは銀河のエネルギーを要するものである．私は後者の「エネルギーを利用した研究」を進めた．エネルギーを利用したものは銀河団を構成している一つ一つの銀河の速度を測って全体の運動エネルギーを求める事から始まる．ドップラー効果を利用すれば銀河が私たちから遠ざかっているのか, 近付いているのかは分かるが, 横方向にどれだけ動いているかは分からないので本研究ではどの方向へも同じくらいの速さで運動していると仮定する．そして全体の運動エネルギーが分かれば重力のエネルギーも分かってくる．それは互いの重力でひと塊となっている天体では運動エネルギーの大きさと重力エネルギーの大きさの比が 1：2 となっていることが一般的に明らかになっているからである．

5.1　インフレーション

まず私は宇宙のスケールファクターについて調べた．着目した式は以下の 4 つの式である．

$$v = -\frac{1}{2}m^2\phi + \frac{\lambda}{4}\phi^4(\ln|\frac{\phi}{v}| - \frac{1}{4}) + v_0 \tag{1}$$

$$v' = -\frac{1}{3H}(-m^2\phi + \frac{\lambda}{4}\phi^3(\ln|\frac{\phi}{v}| - \frac{1}{4}) + \frac{\lambda}{4v}\phi^4 \cdot \frac{1}{\phi} \tag{2}$$

$$\dot{a} = a \cdot H \tag{3}$$

$$H = \sqrt{\frac{8\pi}{3M_{pl}}} \tag{4}$$

上の 4 つの式は初期宇宙のポテンシャルの値について述べたものである．この微分方程式を python を用いて runge-kutta 法を用いて解き, グラフに表したものが次の図になる．

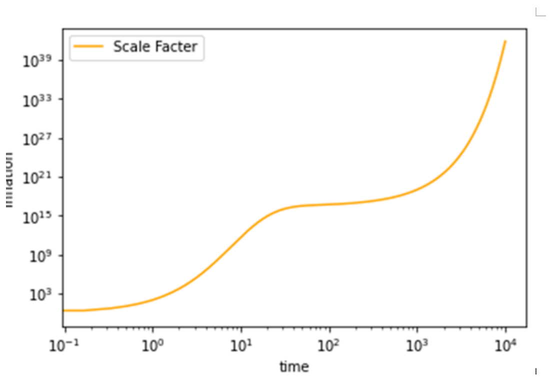

図 2: スケールファクターの振る舞い

$\lambda = 3 \times 10^-12, m = 6 \times 10^-8 M_{pl}, v = 0.2138436 M_{pl}$, の値を用いて計算した．はじめは急激に増加し, 図の真ん中あたりで一度増加率が減少しその後また急激に増加していることが分かる．スケールファクターとは宇宙の大きさを表している言葉であるので, この図から我々の宇宙は急激な膨張が起きた後一度緩やかな膨張になり, その後再度急激な膨張をしていたという事が分かる．次に現在に至るまで宇宙はどのように膨張しているのかについて着目した．その際, 私は以下の 6 つの式を用いた．

$$v_\phi = \frac{\lambda}{4}\phi^4 \tag{5}$$

$$\frac{dV}{d\phi} = \lambda\phi^3 \tag{6}$$

$$H = \sqrt{\frac{8\pi}{3M_{pl}}V(\phi)} \tag{7}$$

$$\dot{a} = a \cdot H \tag{8}$$

$$\phi(t) = \phi_0 \exp(-\sqrt{\frac{\lambda}{6\pi}}M_{pl} \cdot t) \tag{9}$$

$$a(t) = a_0 \exp[\frac{\pi}{M_{pl}^2}(\phi_0^2 - \phi^2(t))] \tag{10}$$

この 6 つの式を用いて python で runge-kutta 法を用いて解き, 作成したグラフは以下のようになる．

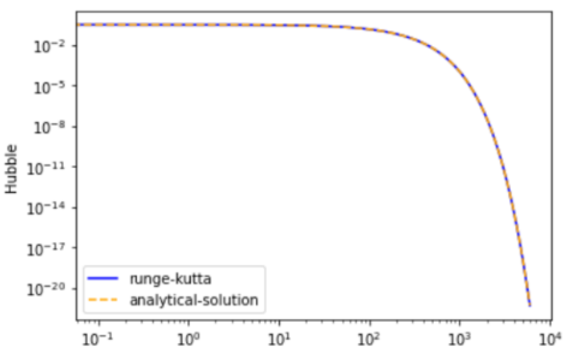

図 3: 宇宙の膨張率

このグラフでは, 実際に論文に示されている数値解と解析解が一致するのかについても調べた．図の青い実線が数値解で黄色い破線が解析解である．図からも分かる通り二つは一致していることが分かる．そしてこの図は宇宙の膨張率を表した物で, 膨張する速度は一定ではないということや, 現在は急激な膨張ではなく緩やかな膨張を続けていることが分かる．微分方程式を解く際は $M_{pl} = 10000, L = 3 \times 10^-12, \phi_0 = 3.5M_{pl}$ の数値を利用した．この数値を利用したら図 2.4 のような比較的綺麗なグラフになるのかは現在研究中である．ほかの値を代入するとこのようなグラフにならないことも確認済みだ．

5.2 原始ブラックホールの量と質量

この説ではインフレーション中の, 原始ブラックホールが形成され始めた頃について述べる．初期の頃の原始ブラックホールはどれほどの大きさなのか, 質量はどれくらいなのかを調べた．論文中の微分方程式を参考に次の式を用いた．

$$v = -\frac{1}{2}m^2\phi + \frac{\tilde{\lambda}}{4}\phi^4(\ln|\frac{\phi}{v}| - \frac{1}{4}) + v_0 \tag{11}$$

$$v' = -\frac{1}{3H}(-m^2\phi + \tilde{\lambda}\phi^3(\ln|\frac{\phi}{v}| - \frac{1}{4}) + \frac{\tilde{\lambda}}{4v}\phi^4 \cdot \frac{1}{\phi}) \tag{12}$$

$$0.888|\frac{\dot{\phi}}{H}|\exp -\frac{0.131072H^2}{|\dot{\phi^2}|} \tag{13}$$

$$\exp(2\ln|\frac{0.1v}{\phi}|\frac{1}{6}) - 35 \tag{14}$$

$$H = \sqrt{\frac{8\pi}{3M_{pl}}V(\phi)(-\frac{1}{2}m^2\phi + \frac{\tilde{\lambda}}{4}\phi^4(\ln|\frac{\phi}{v}| - \frac{1}{4}) + v_0)} \tag{15}$$

以上 5 つの式と式（2.9）を合わせて 6 つの式を python を用いて runge-kutta 法で解いた．微分方程式を解いた結果をグラフで表したものを以下の図に示す．

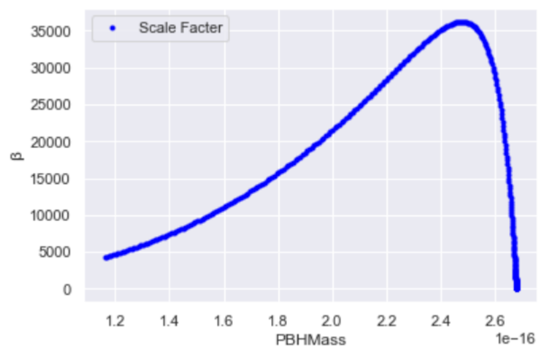

図 4: PBH の量と質量の関係

このグラフは原始ブラックホールの質量（横軸）と個数（縦軸）の関係を表した物である．$M_{pl} = 1.0 \times 10^5$,$v = 0.2138436M_{pl}$,$m = 6.0 \times 10^-8 \times M_{pl}$,$\tilde{\lambda} = 3.0 \times 10^-12$ 太陽質量 $M_\odot$ を 1.9884^30kg として解きプロット数は 60000 とした．このグラフからある質量の PBH の量が他の質量の物と比べて圧倒的に多いことが分かる．python で個数の最大値とその時の質量を調べたところ $2.48 \times 10^-16M_\odot$ の PBH が 36216 個で一番多いという結果になった．

6 結論

本研究で次の事が結論付けられる．

1. 宇宙はビックバンから始まり現在においても膨張を続けている
2. 銀河の回転を観測したのをきっかけに原始ブラックホールの存在が肯定された
3. 暗黒物質は宇宙の形成において重要な役割を担っている
4. 宇宙は急激に膨張しそのあとは穏やかな膨張を続けている
5. インフレーションは二回起こっている
6. $2.48 \times 10^{-16} M_\odot$ の質量を持つ PBH の割合が一番大きい

7 今後の研究課題

結論として具体的な数値が出たが, この結果が本当に正しいのか, 実際に観測した値とはどのような関係があるのかについて詳しく研究していく．さらに重力レンズの観点からの PBH の研究も現在進めている．本研究で私はインフレーションや PBH の質量と個数の関係について python を用いてグラフ化したが最終的な目標は PBH が暗黒物質の候補として有力という事についての根拠を説明することであるのでその目標向かって研究を進めていく．

8 参考文献

1. Jun ’ichi Yokoyama,Formation of Primordial Black Holes in Inflationary Cosmology,Prog.Theor.Phys.Suppl.136 (1999) 338-352
2. Jun ’ichi,Chaotic New Inflation and Formation of Primordial Black Holes.Phys.Rev.D 58 (1998) 083510
3. Anirudh Gundhi,Primordial black hole dark matter in dilaton-extended two-field Starobinsky inflation, Phys.Rev.D 103 (2021) 8, 083518
4. 池内了（1993）「宇宙をあやつるダークマター」岩波書店
5. 二間瀬敏史（2019）「宇宙の謎　暗黒物質と巨大ブラックホール」さくら舎
6. 渡部潤一（2018）「全部わかる宇宙図鑑」成美堂出版
7. 大内正己（2014）「宇宙の果てはどうなっているのか？謎の古代天体ヒミコに挑む」宝島

———index へ戻る

重宇 a29

Affleck-Dine機構による原始ブラックホール形成モデル

東京大学 宇宙線研究所
笠井 健太郎

未提出

———index へ戻る

重宇 a30

背景磁場によるアクシオン-光子変換とアクシオン雲の減衰

立教大学大学院 理学研究科
勝又 彰仁

背景磁場によるアクシオン-光子変換とアクシオン雲の減衰

勝又 彰仁 (立教大学大学院 理学研究科)

Abstract

本発表は [1] のレビューである．背景磁場を考えて，アクシオン-光子変換によるブラックホールまわりのアクシオン雲の減衰率を求めた．ただし，簡単のため背景磁場として単極磁場と一様磁場を仮定した．単極磁場の場合，アクシオン雲の減衰率は $\sim q^2\kappa^2(GM)^5\mu^8$ で与えられることが分かった．ここで，μ はアクシオン場の質量，M はブラックホールの質量，G は重力定数，κ はアクシオンと電磁場のカップリング定数，q は単極磁場の磁荷である．一様磁場の場合は，アクシオン雲の減衰率は $\sim B_0^2\kappa^2(GM)^7\mu^6$ と求められた．ただし，B_0 は一様磁場の強さである．

1　イントロダクション

近年，ALPs（axion-like particles）と呼ばれる粒子が宇宙論や宇宙物理学において注目されている．ALPs は弦理論においてその存在が予言されている擬スカラー粒子であり，ダークマターの候補にもなっている．ALPs は未だ未発見であるが，発見のための様々な観測・実験が行われている．

ALP に関する興味深い現象の 1 つとして，回転ブラックホールまわりにおけるアクシオン雲の形成がある．回転ブラックホール近傍でアクシオン場を考える．さらに場の波がブラックホールに入射する状況を考えると，ブラックホールの回転エネルギーが引き抜かれ，反射波の振幅が増大する場合がある．このような増強過程を超放射（superradiance）という．この現象はアクシオン場が質量を持っていることにより，さらに興味深い現象を引き起こす．増幅された反射波が質量によって重力的に束縛され，再び入射波となって超放射を繰り返すのである．これによりアクシオン場のもつエネルギーは指数関数的に増大する．これを超放射不安定性（superradiant instability）[2] という．この超放射不安定性によって，ブラックホールまわりにアクシオンの雲が形成される．

もし ALP のコンプトン波長が回転ブラックホールの重力半径と同程度である場合には，ブラックホールの回転エネルギーは効率的に引き抜かれることが知られている．このことから，回転ブラックホールの存在は，対応する質量範囲の ALP に制限を与える．しかし，これは超放射不安定によってアクシオンの雲が成長し続けることを仮定しており，より現実的には，この成長を妨げるような減衰過程があるかもしれない．例えば，アクシオンは磁場と相互作用して光子に変換するという性質をもつ．これをアクシオン-光子変換という．ゼロ質量である光子に変わるならば超放射不安定性は起こらないので，より現実的な状況として背景磁場を考えると，アクシオン-光子変換によってアクシオン雲の成長が妨げられる可能性がある．そこで，アクシオン-光子変換がアクシオン雲の成長率および減衰率に与える影響について考える．まず，背景磁場としてモノポール磁場と一様磁場をそれぞれ仮定し，アクシオン-光子変換によるアクシオン雲の減衰率を求める．さらに，得られた減衰率を成長率と比較し，どちらが優勢であるかを議論する．

2　運動方程式と摂動の式

次のような作用で記述されるアクシオン場と電磁場の系を考える：

$$S = \int \sqrt{-g}\, d^4x \Big(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\kappa\phi F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 \Big) \tag{1}$$

ここで，ϕ はアクシオン場，μ はアクシオン場の質量，κ はアクシオンと電磁場のカップリング定数で

ある．また，

$$\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\lambda\rho} \tag{2}$$

であり，$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$ は完全反対称テンソルである．アクシオン場とゲージ場の運動方程式は，この作用の変分をとることにより，それぞれ

$$\left(\nabla_\mu\nabla^\mu - \mu^2\right)\phi = \frac{1}{4}\kappa F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \tag{3}$$

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = -\kappa\tilde{F}^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi \tag{4}$$

と求められる．また，背景時空として，シュバルツシルト時空を仮定する．ブラックホールの質量を M とすると，計量は

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{5}$$

で与えられる．ここで，$f(r) = 1 - 2GM/r$ である．さらに，以下ではアクシオン場とゲージ場に対して

$$\phi = \delta\phi \tag{6}$$

$$A_\mu^{\mathrm{tot}} = A_\mu^{\mathrm{bg}} + \delta A_\mu \tag{7}$$

なる摂動を考える．A_μ^{bg} は背景ゲージ場であり，$\delta\phi$ および δA_μ が摂動項である．また，摂動項に対して球面調和展開とフーリエ展開を施しておく：

$$\delta\phi = \sum_{lm}\Phi_{lm}Y_{lm}e^{i\omega t} \tag{8}$$

$$\delta A_t = -i\sum_{lm}A_{lm}^a Y_{lm}e^{i\omega t} \tag{9}$$

$$\delta A_r = \sum_{lm}A_{lm}^b Y_{lm}e^{i\omega t} \tag{10}$$

$$\delta A_\theta = \sum_{lm}\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}A_{lm}^d\frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi Y_{lm}e^{i\omega t} \tag{11}$$

$$\delta A_\varphi = -\sum_{lm}\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}A_{lm}^d\sin\theta\partial_\theta Y_{lm}e^{i\omega t} \tag{12}$$

3 単極磁場の解析

まず，最も簡単な場合として単極磁場を考える．ゲージ場の摂動は

$$A_\mu^{\mathrm{tot}} = q(1-\cos\theta)(d\varphi)_\mu + \delta A_\mu \tag{13}$$

で与えられる．単極磁場は球対称性を保つので，odd モードと even モードは互いにデカップルする．ここでは 1 つのモードに注目し，ラベル lm を省略する．摂動に対する方程式は

$$-fl(l+1)A^b + r^2\partial_r\left[f\partial_r(fA^b)\right] + r^2\omega^2A^b = iq\kappa\omega\Phi \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\frac{f}{r^2}\partial_r(r^2f\partial_r\Phi) + \omega^2\Phi - f\mu^2\Phi - f\frac{l(l+1)}{r^2}\Phi \\ = \frac{1}{4}\kappa fF_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{15}$$

と求められる．

さらに，解析的な評価のため次のような条件を課す:

$$1/(GM) \gg \omega \sim \mu \gg 1/r \tag{16}$$

$$q\kappa \ll r \tag{17}$$

ここで，r は系の典型的な長さスケールを表す．この条件のもとで，(14) 式と (15) 式は

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}\right) + \left(\omega^2 - \mu^2 + \frac{2GM\mu^2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\Phi \\ = \frac{q^2\kappa^2}{r^4}\Phi - i\frac{q\kappa l(l+1)}{\omega r^4}A^b\end{aligned} \tag{18}$$

とまとめられる．以下で，この方程式を逐次近似法によって解く．

まず，最低次の方程式は次のような形で与えられる:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\Phi_0}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}\Phi_0}{\mathrm{d}r} + \left(\omega_0^2 - \mu^2\right)\Phi_0 + \frac{2GM\mu^2}{r}\Phi_0 \\ - \frac{l(l+1)}{r^2}\Phi_0 = 0\end{aligned} \tag{19}$$

これは水素原子の固有値方程式と同等である．ボーア半径に対応する量は

$$a_0 = 1/(GM\mu^2) \tag{20}$$

であり，超放射不安定性による成長率が最も大きくなる $l=m=1$ および $n=2$ の場合，方程式の解は

$$\Phi_0 = \omega_0 \left(\frac{1}{2a_0\omega_0}\right)^{3/2} \frac{r}{\sqrt{3}a_0} \exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right) \tag{21}$$

となる．ところで，$\mathcal{A} \equiv A^b/(\omega_0 r)$，$x \equiv \omega r$ と定義すると，(14) 式から

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2 \frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}x}\right) + x^2\mathcal{A} - l(l+1)\mathcal{A} = iq\kappa\omega_0 x^{-1}\Phi_0 \tag{22}$$

が得られる．これの解は

$$\mathcal{A}(x) = -iq\kappa\omega_0 \int_0^\infty d\xi\, \mathcal{G}(x,\xi)\xi^{-1}\Phi_0(\xi) \tag{23}$$

と求められる．ここで，$\mathcal{G}$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(x,\xi) = \Theta(\xi - x)j_l(x)h_l(\xi)/W \\ + \Theta(x-\xi)j_l(\xi)h_l(x)/W\end{aligned} \tag{24}$$

$$W \equiv x^2[\partial_x j_l(x)h_l(x) - j_l(x)\partial_x h_l(x)] \tag{25}$$

で与えられるグリーン関数である．ただし，Θ はステップ関数，j_l は球ベッセル関数，h_l は球ハンケル関数である．

1 次の方程式は

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\Phi_1}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}r}\left(\omega_0^2 - \mu^2\right)\Phi_1 + 2\omega_0\omega_1\Phi_0 + \frac{2}{a_0 r}\Phi_1 \\ - \frac{l(l+1)}{r^2}\Phi_1 = \frac{q^2\kappa^2}{r^4}\Phi_0 - i\frac{q\kappa l(l+1)}{r^3}\mathcal{A}\end{aligned} \tag{26}$$

となる．これに $r^2\Phi_0$ をかけて部分積分を実行すると，

$$\begin{aligned}2\omega_0\omega_1 \int_0^\infty dr\, r^2\Phi_0^2 = q^2\kappa^2 \int_0^\infty dr\, \frac{\Phi_0^2}{r^2} \\ - iq\kappa l(l+1)\int_0^\infty dr\, \frac{\Phi_0\mathcal{A}}{r}\end{aligned} \tag{27}$$

が得られる．これより，減衰率が

$$\mathrm{Im}\,\omega_1 \sim \frac{1}{24}\mu^2 q^2\kappa^2 (GM\mu)^5\mu \tag{28}$$

と求められる．

4 一様磁場の解析

次に，一様磁場を考える．アクシオン場とゲージ場の摂動は

$$\phi = \delta\phi \tag{29}$$

$$A_\mu^{\mathrm{tot}} = \frac{1}{2}B_0 r^2 \sin^2\theta (d\varphi)_\mu + \delta A_\mu \tag{30}$$

で与えられる．一様磁場は球対称性を破るので，多数のモードが互いにカップルする．したがって，アクシオン場の方程式は

$$\begin{aligned}\sum_{lm}\Bigg\{\Bigg[\frac{f}{r^2}\partial_r(r^2 f\partial_r\Phi_{lm}) + \omega^2\Phi_{lm} - f\mu^2\Phi_{lm} \\ - f\,\frac{l(l+1)}{r^2}\Phi_{lm}\Bigg]Y_{lm}\Bigg\} = \frac{1}{4}\kappa f F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{31}$$

となる．また，ゲージ場の方程式は

$$\begin{aligned}\sum_{lm}\Big\{\big[\omega r^2\partial_r A_{lm}^a + \omega^2 r^2 A_{lm}^b - l(l+1)fA_{lm}^b\big]Y_{lm}\Big\} \\ = iB_0\kappa\omega r^2\cos\theta\sum_{lm}\Phi_{lm}Y_{lm}\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\sum_{lm}\Big\{l(l+1)\big[\omega A_{lm}^a - f\partial_r(A_{lm}^b)\big]Y_{lm}\Big\} \\ = iB_0\kappa\omega r\sum_{lm}\Phi_{lm}(2\cos\theta Y_{lm} + \sin\theta\partial_\theta Y_{lm})\end{aligned} \tag{33}$$

となる．ここで，(16) 式の条件に加え，

$$\kappa B_0 \ll 1/a_0 \tag{34}$$

という条件を課すと，アクシオン場の摂動の 1 次は

$$\delta\phi_0 = \Phi_0(r)e^{i\omega t}Y_{1\,\pm 1}(\theta,\varphi) \tag{35}$$

で与えられると考えることができる．Φ_1 と ω_1 がみたす方程式は，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\Phi_1}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}r} + (\omega_0^2 - \mu^2)\Phi_1 \\ + 2\omega_0\omega_1\Phi_0 + \frac{2}{a_0 r}\Phi_1 - \frac{2}{r^2}\Phi_1 \\ = i\kappa B_0\Bigg[-\frac{1}{\sqrt{5}}\Bigg(\partial_r A_{2\,\pm 1}^a + \omega_0 A_{2\,\pm 1}^b + \frac{3}{r}A_{2\,\pm 1}^a\Bigg) \\ \pm \frac{i}{\sqrt{2}r}\omega_0 A_{1\,\pm 1}^d\Bigg]\end{aligned} \tag{36}$$

と求められる．単極磁場の場合と同様に，これに $r^2\Phi_0$ をかけて部分積分を行い，両辺で虚部をとれば，アクシオン場の減衰率は

$$\mathrm{Im}\ \omega_1 \sim \frac{4}{15}\frac{\kappa^2 B_0^2}{\mu^2}(GM\mu)^7\mu \tag{37}$$

と計算できる．

5 減衰率と超放射不安定性による成長率との比較

以上で得られた単極磁場および一様磁場の場合の減衰率を，超放射不安定性による成長率 [2]

$$\omega_{\mathrm{sr}} \sim \frac{1}{48}(GM\mu)^8\mu \tag{38}$$

と比較する．減衰率と成長率の比は，単極磁場と一様磁場のそれぞれについて，

$$\left(\frac{\mathrm{Im}\ \omega_1}{\omega_{\mathrm{sr}}}\right)_{\mathrm{mono}} \sim 2\left(\frac{\kappa^2 q^2}{a_0^2}\right)\times(GM\mu)^{-5} \tag{39}$$

$$\left(\frac{\mathrm{Im}\ \omega_1}{\omega_{\mathrm{sr}}}\right)_{\mathrm{uni}} \sim \frac{64}{5}(a_0^2\kappa^2 B_0^2)\times(GM\mu) \tag{40}$$

と求められる．いま $\kappa q/a_0 \ll 1$，$a_0\kappa B_0 \ll 1$，$GM\mu \ll 1$ という条件を課していることに注意すると，単極磁場の場合は 1 より十分大きくなり得ることから，減衰の方が優勢になる可能性があることが分かる．一方，一様磁場の場合は 1 より大きくなり得ないため，成長の方が優勢であることが分かる．

6 まとめ

アクシオンと電磁場の相互作用によるアクシオン-光子変換を考えて，ブラックホールまわりのアクシオン雲の減衰率を求めた．アクシオン場の配位が水素原子のものと等価な方程式の解によって支配される近似のもとで，単極磁場および一様磁場に対する減衰率の解析的な表式が得られた．単極磁場の場合，減衰率は $\sim \mu^2 q^2\kappa^2(GM\mu)^5\mu/24$ と求められた．一方，一様磁場の場合，減衰率は $\sim \kappa^2 B_0^2\mu^6(GM)^7$ と求められた．以上の解析では解析的な評価を行うためにいくつかの条件を課しており，最終的な減衰率の表式はアクシオンの質量やブラックホールの質量，磁場の強さに大きく依存する．したがって，ここで得られた式をある特定の系に素朴に適用しても，関連するパラメータ領域では超放射による成長が可能であると考えられる．

謝辞

本発表にあたり，多くの議論やアドバイスを頂いた立教大学理論物理学研究室の皆様，そして名古屋大学理学研究科 素粒子宇宙物理学専攻の柳哲文 様に心より感謝を申し上げます．

Reference

[1] C. M. Yoo, A. Naruko, Y. Sakurai, K. Takahashi, Y. Takamori and D. Yamauchi, Publ. Astron. Soc. Jap. **74**, no.1, 64-72-72 (2022) doi:10.1093/pasj/psab110 [arXiv:2103.13227[hep-ph]].

[2] S. L. Detweiler, Phys. Rev. D **22**, 2323-2326 (1980) doi:10.1103/PhysRevD.22.2323

———index へ戻る

重宇 a31

ブラックホールまわりの磁場構造

大阪公立大学大学院 理学研究科
松尾 賢汰

ブラックホールまわりの磁場構造

松尾　賢汰 (大阪公立大学大学院 理学研究科)

Abstract

ブラックホール (BH) は光さえ抜け出すことのできない強重力天体だが、その周りにある降着しているガスが高速で回転してプラズマとなって、このプラズマが磁場構造を作っている。そのようなブラックホール周りの磁場を解析するための方法として背景時空を Kerr 時空、電磁場は定常軸対称、そして、プラズマが電磁場と相互作用しない Force-Free 条件を課したグラド-シャフラノフ方程式 (GSE) を解くことが知られている。しかし、GSE を一般的に解くためのアルゴリズムはまだ分かっておらず、他にも磁力線が不連続になる Light surface(LS) と呼ばれる場所があるなど様々な問題がある。

そこで、今回は数値計算の話題には入らず LS などの問題を解決したとして GSE の解を求め BZ 過程のエネルギーを推定する。

なお本講演では [J.F.Mahlmann, P.Cerda-Duran, & M.A.Aloy 2018] のレビューをする。

1 Introduction

BH まわりの磁場の構造を知ることで様々な物理現象が解明されると言われている。例えば、BH を中心にして上下にジェットと言われる光速度に近い放射現象が存在するが、そのような速度を生み出すことができる加速過程はよく分かっていない。その有力な候補としてブランドフォード-ナエク過程 (BZ 過程) と呼ばれる BH の回転エネルギーを磁力線を使って引き抜けるという考えがあり、その現象を再現するには磁場構造を知ることが必要不可欠である。また、我々の銀河系や他の銀河の中心には巨大 BH があるといわれており、その巨大 BH の形成プロセスも同様に様々な説があり謎に包まれているが、その一つにガスを吸い込むことで形成されたという考えがある。このとき、磁場構造が無いとガスはただ BH のまわりを回転するだけなので成立しない。よって、ここでも磁場が重要になってくる。

このように磁場構造は多くの現象に関わっている。参考文献 [1] では、その構造は複雑であると予想されるので数値的に解くための準備と電磁気学を支配するマクスウェル方程式を書き換えて、最終的に磁場構造を知るための方程式を導出してその式を解き、求めた GSE の解を使って BZ 過程のエネルギーを推定して結果を考察していく。

2 Methods

2.1 3+1 分解

一般相対論では時間と空間を等しく扱い、時空として考える。しかし、それでは時間発展が追いにくいので時間一定の超曲面を導入し計量を (1) のように分解する。

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + \beta^j dt)(dx^j + \beta^i dt) \quad (1)$$

ここで、α はラプス関数、β はシフトベクトルと呼

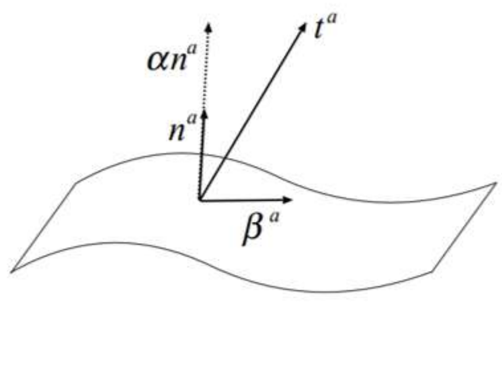

図 1: 超曲面 (時間一定)

ばれる。なお、t^a は時間方向の基底ベクトル、n^a は超曲面に対する単位法線ベクトルである。

2.2 Kerr 計量

定常で軸対称なブラックホール解は Kerr ブラックホールと呼ばれ、その計量は Boyer-Lindquist 座標を使うと

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \varpi^2(d\phi - \Omega dt)^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\theta^2 \tag{2}$$

$$\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta \tag{3}$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 \tag{4}$$

$$A = (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta \tag{5}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\Sigma\Delta}{A}} \tag{6}$$

$$\Omega = \frac{2Mar}{A} \tag{7}$$

$$\varpi = \sqrt{\frac{A}{\Sigma}}\sin\theta \tag{8}$$

と書ける。ここで、Ω は KerrBH の角速度である。

2.3 一般相対論的電磁気学

マクスウェル方程式は電磁テンソル f_{ab} で書くと

$$\nabla_a f^{ab} = -4\pi j^b \tag{9}$$

$$\nabla_{[a} f_{bc]} = 0 \tag{10}$$

となるが、3+1 分解をすると 4 つの式になって

$$D_c E^c = 4\pi\rho \tag{11}$$

$$D_c B^c = 0 \tag{12}$$

$$\epsilon^{abc} D_b(\alpha E_c) = \varpi B^c(\partial_c \Omega)\hat{\phi} \tag{13}$$

$$\epsilon^{abc} D_b(\alpha B_c) = \varpi B^c(\partial_c \Omega)\hat{\phi} + 4\pi\alpha J^a \tag{14}$$

と書ける。なお、電磁場は定常で軸対称としている。

2.4 GSE

回転対称な二次元面 $\mathcal{A}$ を考えて、この面を貫く total charge flux I と magnetic flux Ψ を

$$I = -\int_{\mathcal{A}} \alpha J^a d\Sigma_a \tag{15}$$

$$\Psi = \int_{\mathcal{A}} B^a d\Sigma_a \tag{16}$$

と定義する。また Force-free 条件は

$$F_{ab} j^b = 0 \tag{17}$$

と書くことができて、さらに上式より I は Ψ のみの関数と分かって

$$I = I(\Psi) \tag{18}$$

と表すことができる。

事象の地平面での電流 I と Ψ の関係は計算して求めることができて

$$I = \frac{\varpi}{4\pi\Sigma}(\Omega_H - \Omega_F)\partial_\theta \Psi \tag{19}$$

となる。これは、Znajek 境界条件と呼ばれている。ここで、Ω_H は事象の地平面での角速度である。
背景時空を Kerr 時空とした定常で軸対称なマクスウェル方程式 (11)〜(14) 式と Force-free 条件 (17) 式から Ψ の方程式を作ると

$$\left[\frac{D}{\alpha\varpi}\Psi^{|a}\right]_{|a} + \frac{\varpi}{\alpha}(\Omega_F - \Omega)\frac{d\Omega_F}{d\Omega}\Psi^{|a}\Psi_{|a} + \frac{16\pi^2}{\alpha\varpi} I \frac{dI}{d\Psi} = 0 \tag{20}$$

$$D = \alpha^2 - \varpi^2(\Omega_F - \Omega)^2 \tag{21}$$

これをグラド-シャフラノフ方程式 (GSE) と呼ぶ。GSE には特異な面があり

$$D = 0 \tag{22}$$

を満たす面を Light Surface(LS) と呼ぶ。物理的には LS は磁場の角速度 Ω_F が光速度を超えてしまう面である。

2.5 BZ 過程

GSE を解くと Ψ が得られるが、そこから BH の回転エネルギーを磁場を使って引き抜く BZ 過程の

エネルギーが推定できる。単位時間当たりのエネルギーは

$$P = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^{\pi} \Omega_F(\Omega_H - \Omega_F) \left(\frac{(r_+^2 + a^2)\sin\theta}{(r_+^2 + a^2\cos^2\theta)}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)^2 d\theta \tag{23}$$

と書くことができる。ここで、r_+ は事象の地平面を表す。これは、KerrBH のまわりにはエルゴ領域と呼ばれるものが存在し、あらゆるものが静止できずに引きずられてしまう。磁場も同様にエルゴ領域に進入すると磁力線が大きく引きずられて曲ってしまう。そして、磁力線が外に出ると引きずられた分だけエネルギーが抜き出せたと考えられる。

3 Results

GSE を解き、得られた Ψ が下の図 2 である。

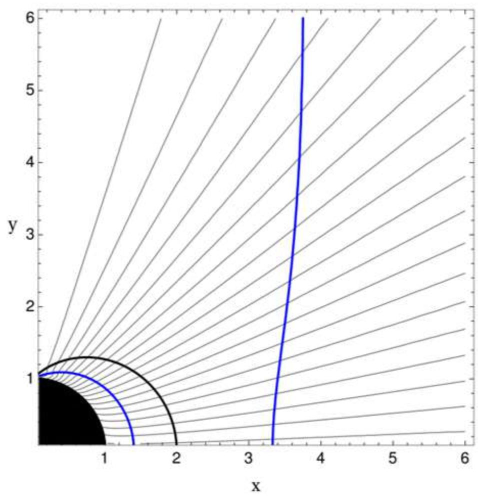

図 2: magnetic flux Ψ の分布

青線は LS, 黒線はエルゴ領域を表し、スピンパラメーターは $a = 0.9999$, 質量は太陽質量として計算している。なお、電流の配置はスプリットモノポールとして扱っており、これは事象の地平面から無限遠方まで赤道面に紙面を貫くように置くということである。

同じスプリットモノポールで BZ 過程のエネルギー (23) 式を数値積分したものが図 3 である。

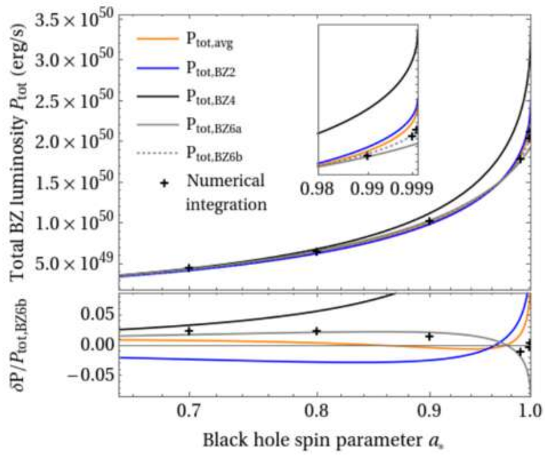

図 3: BZ 過程の単位時間当たりのエネルギー

数値積分したものは上のグラフで"+"で表現されており、縦軸は Luninisity で横軸はスピンパラメーターである。

4 Discussion と展望

図 3 では例としてスピンパラメーターが 0.9999 だとすると Luminosity は約 2.1×10^{50}[erg/s] となっている。これは、太陽光度 4×10^{33}[erg/s] の約 5×10^{16} 倍であり莫大なエネルギーが引き抜かれたことを表している。

今回は電流の配置をスプリットモノポールとして考えているが現実的にはこのような状況はほとんどない。実際には BH まわりには降着円盤が存在し、この降着円盤が電流の役割をしている。よって、無限遠方には電流は存在せず事象の地平面付近にも降着円盤の物質が BH に落ち続けているような場合を除いて存在し得ない。

今後の展望として電流がスプリットモノポール以外のものを考えたり、定常な解ではなく GRMHD を使った磁場構造を求めていくなどのことを調べていきたい。

Acknowledgement

本発表にあたり、ご指導いただいた宇宙物理・重力研究室の皆様、講演の機会を与えてくださった夏の学校の運営の皆様に深く感謝申し上げる。

Reference

J.F.Mahlmann, P.Cerda-Duran, & M.A.Aloy 2018, [arXiv:1903.06830[astro-ph.HE]].

———index へ戻る

重宇 a32

曲率特異点を解消した Reissner-Nordstrom ブラックホールの情報損失問題について

大阪市立大学大学院 理学研究科
末藤 健介

曲率特異点を解消した Reissner-Nordstrom ブラックホールの情報損失問題について

末藤　健介 (大阪市立大学大学院 理学研究科)

Abstract

この論文において我々は，電荷を持ったブラックホール解である Reissner-Nordstrom 時空の曲率特異点を解消した，最もシンプルな時空について紹介する．その後このブラックホールの蒸発を解析的に記述するモデルを用いて，蒸発するブラックホールの時空構造を解析する．結果として，曲率特異点を解消した Reissner-Nordstrom 時空には event horizon,Cauchy horizon が存在せず，情報損失問題が生じないことがわかった．

1 Introduction

一般相対性理論のブラックホールはその中心に曲率特異点を持つことが知られている．そのほかに量子場を考慮するとブラックホールが蒸発し，それに伴いブラックホールに関する情報が失われる情報損失問題が生じることが知られている．量子重力理論ではこの 2 つの問題が解決されると考えられているが，未だ量子重力理論は完成していない．

多くの量子重力の研究でも計量や Riemann 幾何学の描像を捨てることができていない．そこでこの研究では曲率特異点が存在しないブラックホール時空を構築し，このブラックホールを蒸発させても情報損失問題が生じないことを示すことを目的とする．

2 Non-singular Reissner-Nordstrom metric

このセクションでは曲率特異点を解消した Reissner-Nordstrom ブラックホールを記述する計量を求める．

2.1 A method of constructing non-singular Reissner-Nordstrom spacetime

ingoing Eddington-Finkelstein 座標で記述される Reissner-Nordstrom 時空は

$$ds^2 = -F(r)dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2$$

$$F(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \tag{1}$$

である．しかし，この時空は $r = 0$ において曲率特異点を持つ．そこで　$F(r)$ の形を改良し，曲率特異点の存在しない時空を構築していく．Frolov の論文 [2] によると，曲率特異点が存在しないためには

$$F(r) \sim 1 + \varepsilon \frac{r^2}{l^2} \tag{2}$$

が要請される．ここで ε は ± 1 であり，l はカットオフパラメーターを表す．$F(r)$ の形として r についての多項式

$$F(r) = 1 - \frac{\sum_{k=0}^{n-1} b_k r^k}{\sum_{k=0}^{n} a_k r^k}. \tag{3}$$

を仮定する．

この形から中心付近で (2) となり遠方で (1) となるような $F(r)$ の最もシンプルなモデルは

$$F = 1 - \frac{(2Mr - Q^2)r^2}{r^4 + (2Mr + Q^2)l^2} \tag{4}$$

となる．

この関数 $F(r)$ は $r \sim 0$ の領域で

$$F \approx 1 + \frac{r^2}{l^2}, \tag{5}$$

として振る舞う．つまり，non-singular な Reissner-Nordstrom ブラックホールは Anti de Sitter のコアを持つことがわかる．

2.2 Global structure of non-singular Reissner-Nordstrom spacetime

Non-singular Reissner-Nordstrom ブラックホールの各種ホライズンについて調べる．event horizon と Cauchy horizon は $F(r) = 0$ を満たす位置に存在する，つまり

$$r^4 - 2Mr^3 + Q^2r^2 + 2Ml^2r + Q^2l^2 = 0. \tag{6}$$

を満たす．各量を M で規格化した変数 $R = \frac{r}{M}, L = \frac{l}{M}, \lambda = \frac{Q}{M}$ を導入すると (6) は

$$L^2 = -\frac{R^2(R^2 - 2R + \lambda^2)}{L^2 + 2R}. \tag{7}$$

と書き換えられる．この右辺は簡単に因数分解することができ，

$$L^2 = -\frac{R^2(R - R_{N+})(R - R_{N-})}{L^2 + 2R}, \tag{8}$$

となる．ここで，$R_{N\pm} = 1 \pm \sqrt{1 - \lambda^2}$ であり，これは元の Reissner-Nordstrom ブラックホールの event horizon と Cauchy horizon の位置を表す．この右辺のグラフは簡単に書くことができ，non-singular Reissner-Nordstrom ブラックホールの event horizon R_+ と Cauchy ホライズン R_- は右辺を $y(R)$ と置いた時の $y(R)$ と L^2 の交点に位置するので，グラフより $R_{N-} < R_- < R_+ < R_{N+}$ の位置関係にあることが読み取れる．これより，Non-singular Reissner-Nordstrom ブラックホールの時空図は，horizon の位置が l のオーダーで変化しているだけで元の Reissner-Nordstrom ブラックホールの時空図と同じ形であることがわかる．

3 Evaporation

Non-singular な Reissner-Nordstrom 時空を構築できたので，このブラックホールを蒸発させていく．

3.1 Set up of evaporating model

負のエネルギーを持った null dust をブラックホールに投げることでブラックホールの質量と電荷を減少させるプロセスを考える．しかし，上で求めた $F(r)$ では double null 座標を構築することが困難であるので，解析的に話を進めるため，無次元パラメーター b を用いて $l = Mb$ と表現できる場合を考える．つまり $F(r)$ の形として

$$F = 1 - \frac{(2Mr - \lambda^2 M^2)r^2}{r^4 + (2Mr + \lambda^2 M^2)M^2 b^2} \tag{9}$$

を仮定する．我々は M を時間に依存した関数として蒸発を記述するので，$l = Mb$ は時間と共に regularize のスケールが変化する　ということを意味する．

3.2 Introducing double null coordinates

Vaidya 時空と同様にブラックホールの質量 M を $M(v)$ のように時間変化させることでブラックホールの蒸発を考えていく．尚，ここでは技術的な理由から質量は次のように線形で変化していく場合を考える

$$M(v) = M_0 - \frac{M_0}{v_f} v \quad (v > 0)\,. \tag{10}$$

ここで新たな座標として $\tilde{v} = M, R = \frac{r}{\tilde{v}}$ を導入する．また $F(r, \tilde{v}) = f(R)$ と書ける場合を考える．これは

$$\begin{aligned} F(r, \tilde{v}) &= 1 - \frac{2Mr^3 - \lambda^2 M^2 r^2}{r^4 + 2Mrl^2 + \lambda^2 M^2 l^2} \\ &= 1 - \frac{2R^3 - \lambda^2 R^2}{R^4 + 2Rb^2 + \lambda^2 b^2} = f(R). \end{aligned} \tag{11}$$

の様に上記の仮定と合致する．$dr = Rd\tilde{v} + \tilde{v}dR$ より, 計量は

$$\begin{aligned} ds^2 &= -f dv^2 + 2dvdr \\ &= -\alpha \tilde{v}(f\alpha + 2R) d\tilde{v} \left(\frac{d\tilde{v}}{\tilde{v}} + \frac{2dR}{f\alpha + 2R} \right) \end{aligned} \tag{12}$$

と記述され，$du = \frac{d\tilde{v}}{\tilde{v}} + \frac{2dR}{f\alpha + 2R}$ は積分可能なので null 座標として

$$u = \ln \tilde{v} + \int \frac{2dR}{f\alpha + 2R}. \tag{13}$$

を導入する．これらより計量は $ds^2 = -\alpha\tilde{v}(f\alpha + 2R)dud\tilde{v}$ と書ける．これで double null 座標が構築できた．

3.3 Conformal Killing horizon

ブラックホールの質量が線形で変化することに起因し，この時空には

$$\xi^a = -2\chi(\tilde{v}\partial_{\tilde{v}} + \partial_u) \tag{14}$$

で表される conformal Killng ベクトルが存在する．このベクトルのノルムは

$$g_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu = -4\chi^2\alpha\tilde{v}^2(f\alpha + 2R) \tag{15}$$

となり，これより，conformal Killing horizon は $f\alpha + 2R = 0$ に位置することがわかる．

$R = const.$ で記述される超曲面 Σ を考える，Σ に対する法線ベクトルを n とすると $n = dR = \left(\frac{\partial R}{\partial u}\right) du + \left(\frac{\partial R}{\partial \tilde{v}}\right) d\tilde{v}$ であり，そのノルムは

$$g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = \frac{f\alpha + 2R}{\alpha\tilde{v}^2}. \tag{16}$$

と計算できる．これより Σ を

1. $f\alpha + 2R > 0$,Σ is timelike.
2. $f\alpha + 2R = 0$,Σ is null.
3. $f\alpha + 2R < 0$,Σ is spacelike.

として分類することができる．ここから Σ は Conformal Killing horizon を境にして何 like か変化することも読み取れる．

3.4 Global structure

Reissner-Nordstrom ブラックホールも non-sinular Reissner-Nordstrom ブラックホールも $f(R) = 0$ を

満たす R が二つ存在する．つまり Apparent horizon が 2 つ存在する．Conformal Killng horizon は $f\alpha + 2R = 0$ に位置し，それは 2 つ存在することも簡単にわかる．2 つの Apparent horizon の位置を R_{A+}, R_{A-},conformal Killing horizon の位置を R_{C+}, R_{C-} とすると，$f\alpha{+}2R$ の概形より R_{A+}, R_{A-} as $R_{A-} < R_{C-} < R_{C+} < R_{A+}$ が成り立つことがわかる．これらをまとめた global structure や情報損失問題については発表にて考察する．

4　参考文献

1. Frolov,Information loss problem and a ‘black hole’ model with a closed apparent horizon, arXiv:1402.5446 [hep-th]

2. Frolov,Notes on non-singular models of black holes, arXiv:1609.01758 [gr-qc]

————index へ戻る

重宇 a33

銀河と活動銀河核による再電離への寄与

名古屋大学大学院 理学研究科宇宙論研究室
成瀬 元希

銀河と活動銀河核による再電離への寄与

成瀬　元希 (名古屋大学大学院 理学研究科宇宙論研究室)

Abstract

宇宙誕生後の赤方偏移 $z \sim 6-20$ 程度における, 中性化されていた宇宙空間中のガスが, 現在のようなほぼ電離された状態へと遷移されていく時期を宇宙再電離期と呼ぶが, その電離過程の詳細の多くは未だ分かっていない. 星形成銀河が主要な電離源として考えられているが, ヘリウムの 2 階電離には活動銀河核 (AGN) から放射される X 線のような, 約 54.4 eV より高いエネルギーの電離光子が必要であることや, 暗い AGN の存在が示唆されていることによって, AGN も電離源の候補として挙げられている. この星形成銀河と AGN それぞれがどれだけ再電離に寄与するかは依然議論されている.

本発表では星形成銀河と AGN 両方の宇宙再電離と熱史への寄与を評価した, Yoshiura et al. (2017) をレビューする. この研究では, 銀河からの電離光子の割合 (f_{esc}) と暗い AGN の存在量 (faint-end slope: α_{hz}) をパラメータとして用い, 観測データと比較してその値を制限することで寄与を評価している. その結果, $f_{esc} < 0.5$, $\alpha_{\rm hz} > -1.5$ であると明らかにしている. 本発表では AGN の存在量に着目しながら, 各パラメータが電離進化に与える影響について議論する.

1 Introduction

宇宙誕生後, 宇宙の膨張と同時に中性化していった宇宙空間は赤方偏移 $z \approx 6-20$ の時に再び電離していったと一般に考えられており, この時期は宇宙再電離期と呼ばれている. この電離過程の進化はこれまでに広く研究されており, 例えば高赤方偏移のクエーサースペクトル線中の HI 吸収線の観測から水素は $z \sim 6$ までに (Fan et al. 2006), ヘリウムは $z \approx 2.7$ までに (Becker et al. 2011) ほぼ電離したと考えられている. しかし, 宇宙再電離の進化を決定づけるような電離源の観測はまだされておらず, この電離源を明らかにすることは宇宙再電離の研究において大きな意味を持つ.

電離源の一番の有力候補として, 高赤方偏移の星形成銀河が挙げられている. 実際に多数の銀河が $z > 6$ で観測されている (Ouchi et al. 2009). さらに再電離期における紫外線光度関数 (UVLF) の slope が急勾配で, 絶対等級が $M_{\rm UV} \sim -16$ にまで及ぶことが示唆されている (Ishigaki et al. 2015).

活動銀河核 (AGN) も電離源の候補の 1 つとして挙げられている. ヘリウムの 2 階電離には 54.4 eV より高いエネルギーを持つ光子が必要であり, その光子の供給源として期待されている. しかし, AGN の存在量は $z > 3$ で急激に減少していることから (Masters et al. 2012), 再電離への寄与は小さく重要ではないと考えられてきた. 一方で $z \sim 4-6$ で暗い AGN が発見される (Giallongo et al. 2015) など, 高赤方偏移において確認されていない暗い AGN が再電離に寄与している可能性も示唆されている. このため、AGN が電離源として働くかは依然議論されている.

AGN のスペクトルエネルギー分布 (SED) の形が銀河間物質 (IGM) の電離と加熱の効率に影響を及ぼすこともよく知られている. $z \sim 1$ では X 線領域と UV 領域のそれぞれでピークをとることが知られている (e.g. Laor et al. 1997). しかし, 宇宙再電離期 ($z > 6$) における AGN の SED も、特に X 線領域において未だ不明瞭であり, これを調べることも再電離史を知る上で意味を持つ.

本発表では銀河からの電離光子の割合 (f_{esc}) と AGN 存在量を異なるパラメータとして数値計算を行い, 観測データに基づいて銀河と AGN の IGM の再電離および熱史への寄与を制限づけた Yoshira et al. 2017 をレビューする. また, 本集録では紙面の都合上、再電離についてのレビューのみ説明する.

なお，この論文では ΛCDM 宇宙論パラメータを (Ω_m, Ω_λ, Ω_b, H_0) =(0.308, 0.692, 0.02237, 67.80km s^{-1} Mpc^{-1}) としている (Planck Collaboration XXIII 2015).

2 電離進化の計算式

この論文では HI, HeI, HeII の各電離割合の進化, 並びに IGM の温度進化を解いている．電離割合の進化は例えば HI については以下のような式を解く．

$$\frac{\mathrm{d}\,f_{\mathrm{HII}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{n_{\mathrm{H}}(1+z)^3}\frac{\mathrm{d}N_{\gamma,\mathrm{HI}}}{\mathrm{d}t} - \alpha_{\mathrm{B,HII}} C n_{\mathrm{e}}(1+z)^3 f_{\mathrm{HII}} \tag{1}$$

ここで, $\alpha_{\mathrm{B,HII}}$ は case B 再結合係数, n_{H}, n_{He}, n_{e} は順に水素, ヘリウム, 電子の共動座標系の数密度, C はガス分布の不均一性を示す Clumping factor であり Pawlik, Schaye & van Scherpenzeel (2009) より今回は $C=3$ を採用している．

式 (1) において, 体積あたりの光電離率 $\mathrm{d}N_{\gamma,i}/\mathrm{d}t$ はそれぞれ銀河によるもの (添字 $\star$) と AGN によるものの和で表している．つまり, $\mathrm{d}N_{\gamma,\mathrm{HI}}/\mathrm{d}t = \mathrm{d}N_{\star,\mathrm{HI}}/\mathrm{d}t + \mathrm{d}N_{AGN,\mathrm{HI}}/\mathrm{d}t$ である．

2.1 銀河による光子

銀河による再電離への寄与は, その銀河から出る全ての光電子が周りの IGM の電離に影響を及ぼすという仮定のもとで求める．銀河から IGM への電離光子の脱出割合 f_{esc} を利用すれば単位時間あたりに銀河から IGM へ出て行く光電子の数は式 (2) で表すことができる．

$$\dot{n}_{\star\nu} = (1+z)^3 f_{esc}\dot{\rho}_\star \gamma_\nu \tag{2}$$

ここで $\dot{\rho}_\star$ は共動座標系における星形成率密度 (SFRD) であり, Madau & Dickinson (2014) によるものを採用する (式 (3))．単位は $\mathrm{M_\odot yr^{-1} Mpc^{-3}}$ である．また, γ_ν は星によって生成される光子の振動数あたりの固有数であり, Choudhury & Ferrara (2005) を参考に式 (4) で表す．

$$\dot{\rho}_\star(z) = 0.015\frac{(1+z)^{2.7}}{1+[(1+z)/2.9]^5.6} \tag{3}$$

$$\int_{\nu_1}^{\nu_2}\mathrm{d}\nu\gamma_\nu = \begin{cases} 5.43\times10^{60}/\mathrm{M_\odot}, (\nu_1,\nu_2) = (\nu_{\mathrm{HI}},\nu_{\mathrm{HeI}}) \\ 2.61\times10^{60}/\mathrm{M_\odot}, (\nu_1,\nu_2) = (\nu_{\mathrm{HeI}},\nu_{\mathrm{HeII}}) \\ 0.01\times10^{60}/\mathrm{M_\odot}, (\nu_1,\nu_2) = (\nu_{\mathrm{HeII}},\nu_{\mathrm{max},\star}) \end{cases} \tag{4}$$

また, 式 (4) において ν_i は, 各 i 元素における Lyman α 限界の振動数 ($h_{\mathrm{p}}\nu_{\mathrm{HI}} = 13.6$ eV, $h_{\mathrm{p}}\nu_{\mathrm{HeI}} = 24.5\,eV$, $h_{\mathrm{p}}\nu_{\mathrm{HeII}} = 54.4$ eV) を指している．$\nu_{\mathrm{max},\star}$ は $h_{\mathrm{p}}\nu_{\mathrm{max},\star} = 100$ eV となるようにとっている．ここで, h_{p} はプランク定数である．

さらに, 各元素がどのくらい電離光子の消費するかを考慮し, 重複を避ける必要がある．つまり, 各 i 元素が消費する電離光子はその不透明さに比例し, 体積あたりの光電離率は

$$\frac{\mathrm{d}N_{\star,i}}{\mathrm{d}t} = \int_{\nu_i}^{\nu_{\mathrm{max},\star}}\mathrm{d}\nu\frac{n_i\sigma_i\dot{n}_{\star\nu}}{n_{\mathrm{HI}}\sigma_{\mathrm{HI}} + n_{\mathrm{HeI}}\sigma_{\mathrm{HeI}} + n_{\mathrm{HeII}}\sigma_{\mathrm{HeII}}} \tag{5}$$

と表せる．σ_i は各 i 元素の電離断面積を示す．

2.2 AGN による光子

AGN からの電離光子は, X 線のような高エネルギーを持つ光子が存在し, 平均自由行程が長いため宇宙論的な距離で電離を考える．ある赤方偏移 z において, それよりも大きい赤方偏移からの X 線電離光子も考慮し, 体積あたりの光電離率は以下の方程式 (6) で表すことができる．

$$\frac{\mathrm{d}N_{AGN,i}}{\mathrm{d}t}(z) = \int_{\nu_i}^{\nu_{\mathrm{max,AGN}}}\frac{\mathrm{d}\nu}{h_p\nu}\sigma_i n_i(1+z)^3 F(z,\nu) \tag{6}$$

ここで, $F(z,\nu)$ は z よりも高い赤方偏移における AGN からのエネルギーフラックスを示し, 共動座標系での emissivity ε_{c}, 光学的厚み τ_ν を使って式 (7) で表される．

$$F(z,\nu) = \int_z \mathrm{d}z' \varepsilon_{\mathrm{c}}(z',\nu') \frac{c(1+z)^2}{H} \exp\left(-\tau_\nu\left(z,z',\nu'\right)\right) \tag{7}$$

この時, emissivity は,

$$\varepsilon_{\mathrm{c}}\left(z,\nu\right) = \int_{M_{\mathrm{UV}}^{\mathrm{min}}}^{M_{\mathrm{UV}}^{\mathrm{max}}} L_\nu(M_{\mathrm{UV}})\Phi(z,M_{\mathrm{UV}})\mathrm{dM_{UV}} \tag{8}$$

今回の論文で使用している AGN の UVLF のモデルは、Croom et al. (2009) をもとに式 (9) のように double power-law の形で表して用いる.

$$\Phi(z,M_{\mathrm{UV}}) = \frac{\Phi_\star \exp(-z/z_{\mathrm{AGN}})}{10^{0.4(\alpha+1)(M_{\mathrm{UV}}-M_\star)} + 10^{0.4(\beta+1)(M_{\mathrm{UV}}-M_\star)}} \tag{9}$$

ここで, $\Phi_\star$, z_{AGN}, $M_\star$, α, β はパラメータであり, それぞれ振幅, AGN の数が減少する赤方偏移, faint-end slope と bright-end slope が変化する絶対等級, faint-end slope と bright-end slope の各べきを表す. 論文ではこれらのパラメータのうち, α をフリーパラメータ α_{hz} として用いる. 値が小さくなるほど暗い AGN が多くなる.

今回の論文で使用している SED のモデルは, Kawaguchi et al. (2001) を参考に, 図 1 中の赤の実線で示されるような X 線と UV の両方のエネルギー領域でピークを持つようなモデルを使用している. また, 同図中の下のパネルで示されているように等級によって SED の形が変化するようになっている. さらにこの SED モデルの比較として, より単純な power-law のモデル (PL モデル: 図 1 の黒の実線) でも数値計算を行なっている.

3　電離史とパラメータの制限

この章では数値計算の結果から銀河と AGN それぞれの再電離と熱史への寄与を考察していく. HI の電離割合の進化は図 2 のようになった. f_{esc} の値が大きく, また α_{hz} の値が小さくなるに従って, つまり IGM に放出される電離光子の数が増加するにつれて電離が早く終わることが確かめられる.

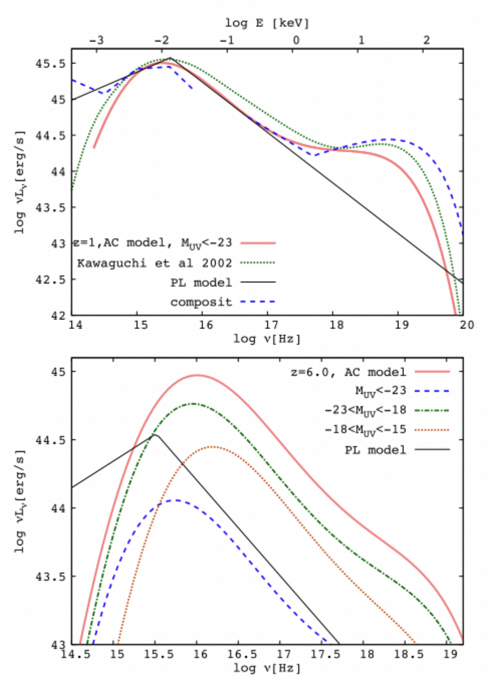

図 1: SED モデルのグラフ. 上パネルは $z = 1$ であり, 赤は今回使用したモデル, 緑が Kawaguchi et al. (2001) のグラフ, 黒が PL モデル, 青が観測データ Laor et al. (1997) による composite SED を指している. また, 下のパネルは $z = 6$ であり, 赤は今回使用したモデル, 青は $M_{\mathrm{UV}} < -23$, 緑は $-23 < M_{\mathrm{UV}} < -18$, オレンジは $-18 < M_{\mathrm{UV}} < -15$, 黒は PL モデルを指している.

図 3 は観測データによってパラメータ f_{esc}、α_{hz} に制限をつけた結果である. 使用している観測データは $z > 5.7$ で HI が完全電離 (Fan et al. 2006), $z = 6.6$ で $f_{\mathrm{HI}} < 0.4$(Ouchi et al. 2010), $z = 7.3$ で $0.3 < f_{\mathrm{HI}} < 0.8$(Konno et al. 2014), 宇宙マイクロ波背景放射に対するトムソン散乱の光学的厚み: $\tau_{\mathrm{e}} = 0.058 \pm 0.012$(Planck Collaboration XLVII 2016) である. ここから, 2 つのパラメータの値は $f_{esc} > 0.15$, $\alpha_{\mathrm{hz}} > -1.50$ と制限づけられることがわかる.

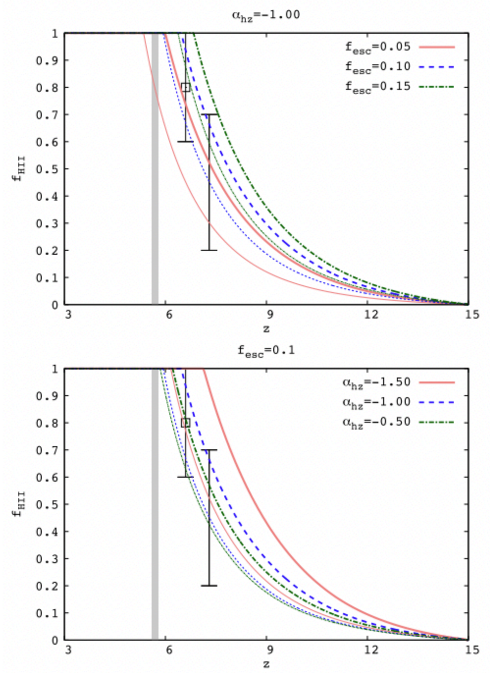

図 2: HI 再電離の進化．縦軸は HI 電離割合 $f_{\rm HII}$, 横軸は赤方偏移 z, 太線は AC モデル, 細線は PL モデルを示す．上パネルでは $\alpha_{\rm hz} = -1.00$ で固定され, 赤, 青, 緑が順に $f_{esc} = 0.05, 0.10, 0.15$ に該当している．下パネルは $f_{esc} = 0.1$ で固定され, 赤, 青, 緑が順に $\alpha_{\rm hz} = -1.50, -1.00, -0.50$ に該当する．

4 Conclusion

今回レビューした Yoshiura et al. (2017) では, 銀河から IGM への電離光子の脱出割合 f_{esc} と AGN 光度関数の faint-end slope のべき $\alpha_{\rm hz}$ をパラメータとして用いて銀河と AGN 両方の宇宙再電離への寄与を数値計算し, 観測データと比較することで $f_{esc} < 0.15$、$\alpha_{\rm hz} > -1.50$ という結果を得た．

本発表ではさらに SED モデルの違いや温度進化の結果についても議論する．

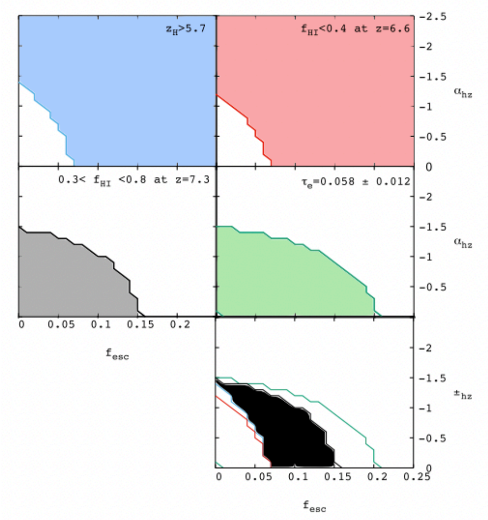

図 3: パラメータ f_{esc} と $\alpha_{\rm hz}$ の観測による制限．左上が $z > 5.7$ で HI が完全電離 (Fan et al. 2006), 右上が $z = 6.6$ で $f_{\rm HI} < 0.4$(Ouchi et al. 2010), 中左が $z = 7.3$ で $0.3 < f_{\rm HI} < 0.8$(Konno et al. 2014), 中右が宇宙マイクロ波背景放射に対するトムソン散乱の光学的厚み: $\tau_{\rm e} = 0.058 \pm 0.012$(Planck Collaboration XLVII 2016), 右下が上記 4 つの組み合わせによる制限である．

Reference

Becker G. D., Bolton J. S., Haehnelt M. G., Sargent W. L. W., 2011, MNRAS, 410, 1096

Choudhury T. R., Ferrara A., 2005, MNRAS, 361,577

Croom S. M. et al., 2009, MNRAS, 399, 1755

Fan X. et al., 2006, AJ, 132, 117

Giallongo E. et al., 2015, A&A, 578, A83

Ishigaki M. et al., 2015, ApJ, 725, 12

Konno A. et al., 2014, ApJ, 797, 16

Kawaguchi T., Shimura T., Mineshige S., 2001, ApJ, 546, 966

Laor A. et al., 1997, ApJ, 477, 93

Madau P., Dickinson M., 2014, ARA&A, 52, 415

Masters D., et al., 2012, ApJ, 755, 169

Ouchi M. et al. 2009, ApJ, 706, 1136

Ouchi M. et al. 2010, ApJ, 723, 869

Pawlik A. H., Schaye J., van Scherpenzeel E., 2009, MNRAS, 394, 1812

Planck Collaboration XXIII, 2015, A&A, 594, A13

Planck Collaboration XLVII, 2016, A&A, 596, A108

Yoshiura, S., Hasegawa;, K., Ichiki, K., et al. 2017, MNRAS, 471, 3713

———index へ戻る

重宇 a34

The 21 cm emission line during the epoch of reionization

Kumamoto University
Wildan Hidayat

The 21 cm emission line during the epoch of reionization

Wildan Hidayat (Kumamoto University)

Abstract

After the epoch of recombination, neutral hydrogen and helium dominated the components of our universe. It was the starting point of the dark age when neutral matter took time to evolve to form the first stars, galaxies, and black holes under the influence of gravity. Furthermore, after the birth of the first luminous objects, we reached the period of cosmic dawn. The UV radiation generated from the early luminous objects gradually heated the intergalactic medium (IGM) and led us to the epoch of reionization (EoR) (Shimabukuro et al. (2022)).

The 21 cm line produced due to the hyperfine structure of neutral hydrogen atoms becomes the source to understand the dark age to EoR. Throughout time, these emissions are affected by the Wouthuysen-Field (WF) effect, X-ray heating, and reionization. This signal contains information on ionization fraction, baryon density distribution, spin temperature, and peculiar velocity as the characteristics of the structural evolution during EoR (Mesinger, Steven, & Cen (2011)). Therefore, it will link our understanding of the evolution from smooth matter distribution in the early universe to the complex distribution of stars and galaxies at redshift < 6.

The global signal and the power spectrum of 21 cm line are the desired quantities for this research. However, the signal hard to observe because it is weak. Foreground contaminants from smooth continuum spectra of the cosmological distant galaxy's faint emission, diffuse synchrotron emission, radio recombination line, radio frequency interference (RFI), etc, masked the global signal (Shimabukuro et al. (2022)). Fortunately, current efforts lead toward a good direction such as the development of low-frequency arrays (ex. MWA), the improvement of foreground removal methods (ex. GPR), and the development of power spectrum and global signal models as comparisons (ex. 21cmFAST).

1 Introduction

Before the formation of the highly-ionized universe, the universe experienced a moment without luminous objects, called the dark age, when neutral atoms (hydrogen and helium), produced during the recombination, dominated the universe. In the later time, those neutral atoms and IGM interacted under the influence of gravity and developed a cosmic web structure within the dark matter haloes (Georgiev et al. (2022)). Furthermore, when the first stars, galaxies, or black holes were born within the dark matter haloes (< 1 billion years after the Big Bang), we started to enter the cosmic dawn. The UV radiation from the first object interacted with the IGM and initiated the universe to enter the EoR when neutral maters evolved into ionized ones (Shimabukuro et al. (2022)).

In recent years, understanding the evolution of our universe between the dark ages and EoR has been discussed. The lack of luminous objects during the epoch is one of the difficulties in understanding the processes. Fortunately, the change in the energy state of neutral hydrogen produced an emission line. Several studies show the possibility of observing the emission line through the radio frequency 1420.41 MHz (21 cm line). However, the 21 cm line from the EoR is relatively weak, which makes the observational study and techniques challenging (Morales & Hewitt (2004)).

In the following section, I will explain the emission of the 21 cm line and desired quantities. Then, I will introduce the observational difficulties. Finally, I will end this review by showing the current result of the EoR study through the 21 cm line.

2 The 21 cm line and measured quantities

2.1 Hyperfine structure of neutral hydrogen

The energy degeneracy changes between singlet and triplet hyperfine levels of hydrogen atoms, emitting the photon throughout the process. The propagated energy of hyperfine structure represented in the brightness temperature fluctuation define as follows (Morales & Hewitt (2004)).

$$\Delta T_b = (2.9mK)h^{-1}\frac{(1+z)^2}{E(z)}\frac{T_S - T_{CMB}}{T_S}\frac{\rho_{H_I}}{\langle \rho_H \rangle} \tag{1}$$

The cosmic microwave background (CMB) temperature (T_{CMB}) origin was the energy of photons that decoupled during the epoch of recombination. Meanwhile, the spin temperature (T_S) of 21 cm line depends on the absorption of CMB photons by neutral hydrogen atoms, collisions coupling between hydrogen atoms and other particles, resonant scattering of Lyman-α photons (WF effect), X-ray heating, and reionization (Shimabukuro et al. (2022)).

$$T_S^{-1} = \frac{T_{CMB}^{-1} + x_C T_{gas}^{-1} + x_\alpha T_\alpha^{-1}}{1 + x_C + x_\alpha} \tag{2}$$

Equation (2) shows the dependence of T_S on the T_{CMB} and gas temperature (T_gas). The x_C and x_α express the collision coupling coefficient and Lyman- scattering that depend on the T_{CMB} and star temperature (T_*).

2.2 Thermal history and global signal

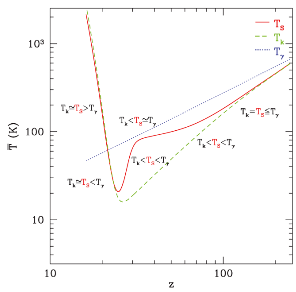

Figure 1: The evolution of mean temperature as a function of redshift of the 21cmFAST simulation. Consist of CMB temperature (T_γ), kinetic temperature of gas (T_K), and the spin temperature (T_S) from Mesinger, Steven, & Cen (2011).

Figure1 shows the temperature and environmental changes through the different redshift according to the 21cmFAST model (Mesinger, Steven, & Cen (2011)). Meanwhile, Figure2 shows the sky-averaged brightness temperature, called global signal (Shimabukuro et al. (2022)). The Shaped Antenna measurement of the background RAdio Spectrum 3 (SARAS3) (Singh et al. (2022)) and the Experiment to Detect the Global Epoch of Reionization Signature (EDGES) (Bowman et al. (2018)) are the example of global signal detection projects.

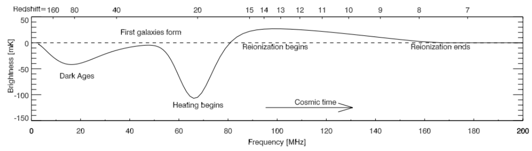

Figure 2: The figure shows the 21 cm global signal through the cosmic time (Pritchard & Loeb (2012)).

2.3 21 cm line power spectrum

The power spectrum (Figure3) shows an observed quantity that relates the statistical properties of the intensity and the neutral hydrogen fluctuation (Furlanetto, Oh, & Briggs (2006); Morales & Hewitt (2004)). The Giant Metrewave Radio Telescope (GMRT) Epoch of Reionization (Paciga et al. (2013)) and the Murchison Widefield Array (MWA) (Wayth et al. (2018)) missions are trying to observe the power spectrum of 21 cm line. Here is the definition of 21 cm power spectrum (Furlanetto, Oh, & Briggs (2006); Shimabukuro et al. (2022)).

$$\langle \delta T_b(k) \delta T_b(k') \rangle = (2\pi)^3 \delta(k+k') P_{21}(k) \tag{3}$$

We can take a normalized value ($k^3 P_{21}(k)/2\pi^2$) as the representation of temperature dimension (Shimabukuro et al. (2022)). Meanwhile, autocorrelation and correlation functions of the neutral matter and spin temperature construct the power spectrum of brightness temperature as P_{21}.

3 Observation's challenges

3.1 Foreground contaminants

The 21 cm line is weak and buried by several foreground contaminants to the order of four times higher than the 21 cm line (Furlanetto, Oh, & Briggs (2006)). Even the residual subtraction errors and faint foreground sources could still mask the desired signal (Matteo et al. (2002)). Fortunately, the difference of signal in Fourier representation, spherical symmetry for the 21 cm line and separable-axial symmetry for the most foreground,

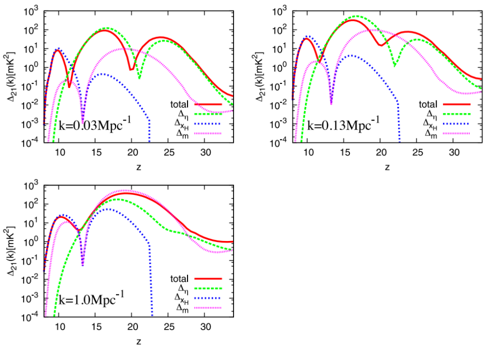

Figure 3: The figure shows a simulated power spectrum based on its component with a different wave number (k) value as function of redshift (Shimabukuro et al. (2015)).

can help us during the foreground removal processes to some extent (Morales & Hewitt (2004), Furlanetto, Oh, & Briggs (2006)).
Some foreground, which is mapped in the uv coordinate with a single frequency, has smooth characteristics. The source of this foreground is the faint emission at a cosmological distance and becomes the most problematic to remove (Morales & Hewitt (2004)). Meanwhile, the strongest and easiest foreground to remove is generated from the synchrotron radiation and extragalactic sources (Chapman & Jelić (2019)).
Other than that, the non-spectrally smooth foreground was also detected. First, the local foreground comes from the Milky way radio recombination lines. It is expected to see the significant errors during the prediction and removing the recombination lines (Morales & Hewitt (2004)). Other than that, the effect of Earth's ionosphere and RFI also detected.

3.2 Foreground removal

The practice of foreground removal consists of three steps, foreground subtraction, suppression, and avoidance (Furlanetto, Oh, & Briggs (2006); Chapman & Jelić (2019)). The foreground subtraction aims to extract the cosmological signal, foreground fitting error, and instrumental noise by constructing a foreground model and removing the model from the observed signal. The process consists of parametric (ex. polynomial fitting) and non-parametric (ex. Gaussian process regression (GPR) (Mertens, Ghosh, & Koopmans (2018)) and Generalized Morphological Component Analysis (GMCA) (Chapman et al. (2013)) methods.
The parametric method utilizes frequency coherence by taking the large cross-correlation of the foreground in several frequency slices. This process will produce the frequency coherence of the foreground that could be approximated by the fitting technique. Meanwhile, the non-parametric methods rely mainly on spectral information (Chapman & Jelić (2019)). In addition, we can choose the observation area far from the Milky way' s galactic center and free from bright objects to minimize the foreground contaminant (Shimabukuro et al. (2022)).

4 Current results

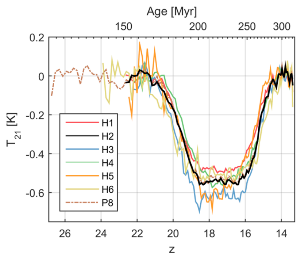

Figure 4: This figure shows fitted observation data from the EDGES result (Bowman et al. (2018)).

In 2018, the EDGES research group reported the detection of a 21 cm global signal (Figure4) at z = 17.8 (Bowman et al. (2018)). However, the depth of the absorption line is deeper than expected. Therefore, the ground plane resonance (Bradley et al. (2019)), the excess radio background (Reis, Fialkov, & Barkana (2020)), and the possibility of sinusoidal systematic (Bevins et al. (2021)) try to explain this feature. Interestingly, the latest result from SARAS3 shows that the EDGES result is not evidence for new astrophysics or a non-standard cosmology approach (Singh et al. (2022)).

The first implication of the upper limit in Figure5 is the disapproval of the no-heating model by HERA' s upper limit (Shimabukuro et al. (2022)). We can see the declining trend on the model while the data show the opposite. It means that the X-ray luminosity needs to be higher than the local source to increase the IGM temperature. Furthermore, the second implication is the cosmic dawn constrains ($12 < z < 23$) given by MWA observation (Ewall-Wice, et al. (2016); Yoshiura, et al.

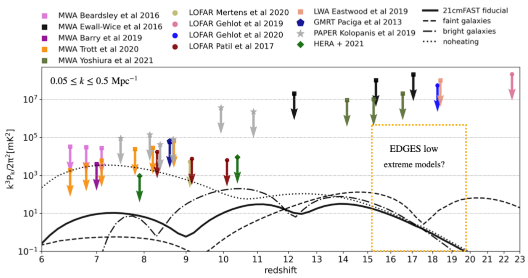

Figure 5: The updated upper limit of 21 cm power spectrum detection with comparison between the data and models. This figure is made by Shimabukuro et al. (2022) with reference to Liu & Shaw (2020) and Barry et al. (2021).

(2021)). However, this data suffered from the RFI and ionospheric refraction. Therefore, the final result still shows five orders of magnitude larger than the desired signal.

5 Conclusion

The global signal and power spectrum of the 21 cm line generated from the hyperfine structure becomes a tool to understand astrophysical and cosmological evolution mechanisms from the dark age until the EoR. However, the current observation effort still could not detect the signal directly. The reasons are the weak 21 cm signal and strong foreground contaminant, four times higher than the desired signal. Fortunately, current efforts lead toward a good direction, such as the development of low-frequency arrays (ex. LOFAR and MWA), the improvement of foreground removal methods (ex. GPR and GMCA), and the development of power spectrum and global signal models as comparisons (ex. 21cmFAST).

Reference

Barry, Nichole, Gianni Bernardi, Bradley Greig, Nicholas Kern, and Florent Martens. 2021. https://doi.org/10.48550/arXiv.2110.06173

Bevins, H. T. J., W. J. Handley, A. Fialkov, E. d. Acedo, and L. J. Greenhill. 2021. https://doi.org/10.48550/arXiv.2007.14970

Bowman, Judd D., Alan E. Rogers, Raul A. Monsalve, Thomas J. Mozdzen, and Nivedita Mahesh. 2018. https://doi.org/10.1038/nature25792

Bradley, Richard F., Keith Tauscher, David Rapetti, and Jack O. Burns. 2019. https://doi.org/10.48550/arXiv.1810.09015

Chapman, Emma, Filipe B. Abdalla, J. Bobin, et al. 2013. https://doi.org/10.48550/arXiv.1209.4769

Chapman, Emma, and Vibor Jelić. 2019. https://doi.org/10.48550/arXiv.1909.12369

Furlanetto, Steven R., S. P. Oh, and Frank H. Briggs. 2006. https://doi.org/10.48550/arXiv.astro-ph/0608032

Georgiev, Ivelin, Garrelt Mellema, Sambit K. Giri, and Rajesh Mondal. 2022. https://doi.org/10.1093/mnras/stac1230

Liu, Adrian, and J. R. Shaw. 2020. https://doi.org/10.48550/arXiv.1907.08211

Matteo, Tiziana D., Rosalba Perna, Tom Abel, and Martin J. Rees. 2002. https://doi.org/10.48550/arXiv.astro-ph/0109241

Mertens, F. G., A. Ghosh, and L. V. E. Koopmans. 2018. https://doi.org/10.48550/arXiv.1711.10834

Mesinger, Andrei, Furlanetto Steven, and Renyue Cen. 2011. https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2010.17731.x

Morales, Miguel F., and Jacqueline Hewitt. 2004. https://doi.org/10.48550/arXiv.astro-ph/0312437

Paciga, Gregory, Joshua G. Albert, Kevin Bandura, et al. 2013. https://doi.org/10.48550/arXiv.1301.5906

Pritchard, Jonathatn R., and Abraham Loeb. 2012. https://doi.org/10.48550/arXiv.1109.6012

Reis, Itamar, Anastasia Fialkov, and Rennan Barkana. 2020. https://doi.org/10.48550/arXiv.2008.04315

Shimabukuro, Hayato, Kenji Hasegawa, Akira Kuchinomachi, Hidenobu Yajima, and Shintaro Yoshiura. 2022. https://doi.org/10.1093/pasj/psac042

Shimabukuro, Hayato, Shintaro Yoshiura, Keitaro Takahashi, Shuichiro Yokoyama, and Kiyomoto Ichiki. 2015. https://doi.org/10.1093/mnras/stv965

Singh, Saurabh, Jishnu N. T., Ravi Subrahmanyan, et al. 2022. https://doi.org/10.48550/arXiv.2112.06778

Wayth, Randall B., Steven J. Tingay, Cathryn M. Trott, et al. 2018. https://doi.org/10.1017/pasa.2018.37

Ewall-Wice, A., Joshua S. Dillon, J. N. Hewitt, et al. 2016. https://doi.org/10.1093/mnras/stw1022

Yoshiura, Shintaro, Hayato Shimabukuro, Kenji Hasegawa, Keitaro Takahashi. 2021. https://doi.org/10.1093/mnras/stab1718

———index へ戻る

重宇 a35

三次元二点相関を用いた測光観測による BAO の測定

名古屋大学大学院 理学研究科
石川 慶太朗

三次元二点相関を用いた測光観測による BAO の測定

石川 慶太朗 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

銀河観測の手法は大きく分けて, 分光観測と測光観測がある. 分光観測は銀河までの正確な赤方偏移は分かるが明るい銀河しか観測できない. 一方, 測光観測は暗い銀河もまとめて撮像できるというメリットがあり, サンプル数を十分確保出来るので統計的精度も期待できる. しかし測光観測は銀河までの赤方偏移推定の不定性が大きい. そのため, これまでの測光観測による銀河のクラスタリング解析では視線方向の情報に依らない統計量を用いて解析が行われてきた.

銀河分布の二点統計量には, 銀河間距離約 100 Mpc/h で特徴的な相関の増大が確認できる. これは宇宙年齢約 38 万年頃にバリオンと光子が脱結合するまでの音響振動 (BAO) の痕跡である. BAO ピークの位置は共同座標系において時間進化しないため, この BAO スケールは線形理論で精密に予測可能な量であり, 宇宙の標準ものさしとして宇宙論検証に用いることができる.

本研究では, 三次元の情報を保持したまま測光観測による BAO の測定を目指す. そのために, 銀河の三次元分布に対する二点相関のモデルに測光的赤方偏移の不定性の効果を取り入れた. このモデルの正当性を確かめるために, 1 Gpc 立方の銀河の模擬観測データを作成して測光観測を再現し, BAO スケールを見積もった. そして仮定した宇宙論からのズレを測定することで, 実観測データで許容できる測光赤方偏移不定性の大きさを示す.

本研究の結果, HSC などの現行の測光観測で到達可能な赤方偏移 $z \sim 1$ では測光的赤方偏移不定性が 1 %までなら許容できる可能性を示した. また, 本講演では将来の測光観測で期待される赤方偏移不定性の大きさとも照らし合わせて議論する.

1 導入・概要

1.1 分光観測と測光観測

銀河観測の手法には, 分光観測と測光観測がある. 分光観測は銀河までの正確な赤方偏移は分かるが明るい銀河しか観測できない. 一方, 測光観測は暗い銀河もまとめて撮像できるというメリットがあり, 数密度を十分確保出来るので統計的精度も期待できる. しかし測光観測は銀河までの赤方偏移推定の不定性が大きい. これを表にすると表 1 になる. そのため,

表 1: 分光観測 (spectroscopic survey) と 測光観測 (photometric survey) の違い

	視野	数密度	赤方偏移精度
分光	△	×	○
測光	○	○	△

これまでの測光観測による銀河のクラスタリング解析では視線方向の情報に依らない統計量を用いて解析が行われてきた.

1.2 バリオン音響振動 (BAO)

高温・高密度状態にあった宇宙初期では, 陽子などのバリオン成分と光子が自由電子を介して相互作用し, 混合流体として運動していた. 先に成長していたダークマターの重力ポテンシャル内で混合流体が波として振動し, 音速で伝播するこの事象をバリオン音響振動 (Baryon Acoustic Oscillation) という.

宇宙年齢約 38 万年ごろ, 光子の脱結合, または宇宙の晴れ上がりという出来事が起きる. これは宇宙膨張により温度が低下し, 陽子が自由電子と結合して中性化したことで, バリオンと光子の相互作用が終了したためである.

これにより光子と衝突するものはほぼいなくなり, 現在光子は宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) として観測されている. また, この時まで音響振動していた混合流体の波の位相は固定されるため, 脱結合時までに音波が進んだ場所でも構造形成が進む. そのため, バリオンの情報は現在の銀河分布の二点統計量に表れる.

図 1 は横軸が銀河中心からの距離, 縦軸がある銀河との相関を表す. この図が表すように, 銀河間距離約 100 Mpc/h で特徴的な相関の増大 (BAO ピーク) が

確認できる. BAO ピークの位置は共動座標系において時間進化しないため, この BAO スケールは線形理論で精密に予測可能な量であり, 宇宙の標準ものさしとして宇宙論検証に用いることができる.

1.3 三次元二点相関関数

ある空間 $\boldsymbol{x}$ での密度場を $\rho(\boldsymbol{x})$, 平均密度場を $\bar{\rho}$ とすると, 密度ゆらぎ $\delta(\boldsymbol{x}) = \rho(\boldsymbol{x})/\bar{\rho} - 1$ は空間の各点ごとに値を持つ場の量であるから, その場の値が各点でどのように関係し合っているかを特徴付けられる. 空間のある 2 点 $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}$ における密度ゆらぎの積を考え, それを 2 点間の距離 $x_{12} = |\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}|$ で固定してアンサンブル平均したもの

$$\xi(x_{12}) = \langle \delta(\boldsymbol{x_1})\delta(\boldsymbol{x_2})\rangle \tag{1}$$

を二点相関関数と呼ぶ.

実空間の密度ゆらぎから直接定義される統計量である相関関数 $\xi(x)$ に対して, 密度ゆらぎを一旦フーリエ空間に変換してから定義されるものがパワースペクトル $P(k)$ である. これら 2 つは互いに 3 次元 (逆) フーリエ変換の関係にあり,

$$\begin{aligned}\xi_{\mathrm{m}}(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} P(|\boldsymbol{k}|) \\ &= \int \frac{k^2 dk}{2\pi^2} \frac{\sin(kx)}{kx} P(k)\end{aligned} \tag{2}$$

と表せる. この理論曲線が図 1 である.

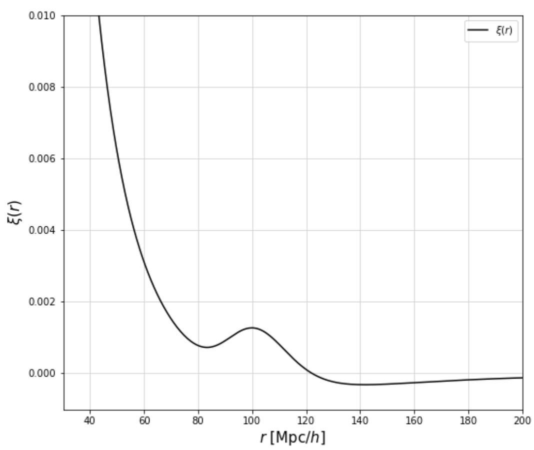

図 1: $\xi(r)$ の理論曲線

2 理論

2.1 テンプレートモデル

今回, 三次元二点相関関数 $\xi(r)$ は式 (2) を用いた. パワースペクトル $P(k)$ は

$$P_m(k) = [P_{\mathrm{lin}}(k) - P_{\mathrm{nw}}(k)]\exp(-k^2\Sigma_{\mathrm{nl}}^2/2) + P_{\mathrm{nw}}(k) \tag{3}$$

で表す (Eisenstein et al. 2007b). ここで, $P_{\mathrm{lin}}(k)$ は線形マターパワースペクトルで, CLASS[1] (Lesgourgues & Tram 2011) を用いて計算している. $P_{\mathrm{nw}}(k)$ はバリオンなしのマターパワースペクトルのフィッティング関数 (Eisenstein & Hu 1998) である. $D(z)$ を線形成長因子とすると, $\Sigma_{\mathrm{nl}}(z) = \Sigma_a D(z)/D(0)$ は減衰パラメータ (damping parameter) といい, 式 (3) の第一項で wiggle の減衰項, つまり BAO ピークが非線形効果でなまる様子を表している.

2.2 測光赤方偏移不定性効果を組み込んだテンプレートモデル

後述するように, 今回用いるシミュレーションデータで測光観測を再現する際には, 測光赤方偏移不定性 (以下, photo-z error) の分布を Gaussian で仮定する. そのため, 2.1 章のモデルにも測光赤方偏移不定性の効果を入れられると考えた. 銀河中心から半径 r 離れた位置にある銀河が視線方向に標準偏差 σ の Gaussian でゆらいでいるとした時, 視線方向に $4\sigma \times 2$ の範囲で積分すれば十分畳み込める. これを角度方向で積分すれば,

$$\xi_m^{\mathrm{conv}}(r) = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\mu \xi^{\mathrm{int}}(r,\mu), \tag{4}$$

$$\xi^{\mathrm{int}}(r,\mu) = \int_{r\mu-4(\sqrt{2}\sigma)}^{r\mu+4(\sqrt{2}\sigma)} \mathrm{d}r_\pi G(r_\pi, \sqrt{2}\sigma)\xi_m(\sqrt{r_\pi^2 + r_\perp^2}) \tag{5}$$

と表せる. $\mu = \cos\theta$ は視線方向からの角度を θ とした時の余弦で, $r_\pi = r\mu$ は視線方向の距離, $r_\perp = r\sqrt{1-\mu^2}$ は視線に垂直方向の距離を表す. $G(r_\pi, \sqrt{2}\sigma)$ は中心 r_π, 標準偏差 $\sqrt{2}\sigma$ の規格化された Gaussian 分布であり, 模式図として表したものが図 2 である.

[1] https://lesgourg.github.io/class_public/class.html

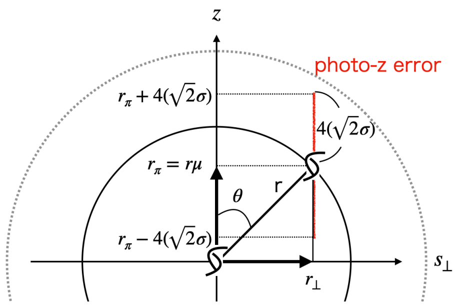

図 2: photo-z 効果を入れたテンプレートモデルの模式図

2.3 フィッティングモデル

2.2 章のモデルを用いてデータに適した曲線を得るため，最小二乗法でフィッティングを行う．そのフィッティング関数は

$$\xi^{\mathrm{fit}}(r) = B^2 \xi_{\mathrm{m}}(\alpha r) + A(r) \tag{6}$$

とおいた (Padmanabhan et al. 2012)．フィッティングパラメータはそれぞれ，

$$A(r) = \frac{a_1}{r^2} + \frac{a_2}{r} + a_3, \tag{7}$$

$$\alpha = \frac{l_{\mathrm{obs}}}{l_{\mathrm{fid}}} = \frac{[D_A(z)/r_s]_{\mathrm{obs}}}{[D_A(z)/r_s]_{\mathrm{fid}}} \tag{8}$$

と減衰パラメータのうちの Σ_a で，振幅の B と式 (7) の $A(r)$ は相関関数の概形を捉えるための nuisance パラメータである．$D_A(z)$ と r_s はそれぞれ，角径距離と脱結合時の音響ホライズンスケールを表し，これらを構成する l は角波数である．

式 (8) の α は BAO ピークを捉えるためのパラメータである (Seo et al. 2012)．この式が表すように，仮定した宇宙論に対する BAO の角度方向の位置を決める．つまり，仮定した宇宙論と一致する結果が得られれば $\alpha = 1.0$ になる．

3 シミュレーションデータ

2.2 章で再構成したモデルの正当性を確かめるため，今回は銀河の 3 次元分布のシミュレーションデータ (mock) を用いて解析を行なった．これは，実データに付随する正体不明の系統誤差を取り除いた，ある種理想的な状況を再現できるという側面も持つ．

今回使用する mock は (Nishimichi T. et al. 2019) をもとに銀河のダークマターハローの情報から，銀河の質量の下限を $10^{11} M_\odot$ になるよう halo Occupation Distribution[2]を設定して (Ishikawa S. et al. 2021) 作成した．使用する mock の赤方偏移は z=0.251, 0.617, 1.03 である． $(1\ \mathrm{Gpc}/h)^3$ の mock に対し，例えば z=0.251 での銀河個数は 1.1×10^6 個である．独立な宇宙 (realization) が 112 個あるとして，実空間で計算し統計処理 (Abbott, T. M. C. et al. 2022) を行う．

前述したように，測光赤方偏移不定性の分布は Gaussian を仮定してこの mock に入れる． $x(z)$ を共動距離として，今回は全銀河に対し視線方向に $0.01 \times x(z) \times (1+z)$ の定数倍の標準偏差を入れた．つまり，例えば z=0.251 における photo-z error 3% を入れた mock とは，視線方向に $0.03 \times x(0.251) \times (1+0.251) = 27.4\ \mathrm{Mpc}/h$ の標準偏差の Gaussian が入った mock を指す．

使用する 3 つの赤方偏移に対して，それぞれ photo-z error を 1%, 2%, 3%, 5%と入れた mock のクラスタリングが spec-z mock(photo-z error を入れていない元の mock) に対してどのように変化し，BAO スケールの測定に影響するのかを見る．

4 結果

z=0.251 の mock に対する photo-z error 依存性とフィッティング結果が図 3 である．ただし見やすさのため，y 軸方向に対して適当に調整している．データ点は各 realization で計算した $\xi(r)$ の平均で，エラーバーはこの $\xi(r)$ の平均のずれ (標準誤差) であることに注意．

同様に z=0.617, 1.03 でもフィッティングを行い，フィッティングパラメータ α の結果を photo-z error 別にまとめたものが図 4 である．エラーは標準偏差を 2σ の範囲でつけている．ここから分かるように，z=1.03 では photo-z error 1%までであれば他の赤方偏移の α の不定性とほぼ同等であるが，photo-z error 5%ではエラーが $\sim$10%とかなり大きい．

5 議論

z=0.251, 0.617 では測光赤方偏移不定性を変えても α のエラーにあまり影響がなかったが，z=1.03 では特に photo-z error 5%で大きなエラーが出た．これは測光赤方偏移不定性の標準偏差が BAO スケールを超えていること (photo-z error 5%で $\sim$250 Mpc/h のゆらぎ)，銀河のサンプル数が他の赤方偏移と比較

[2]ダークマターハローの中に銀河がどのように分布しているかを表す (Sunayama T. et al. 2020).

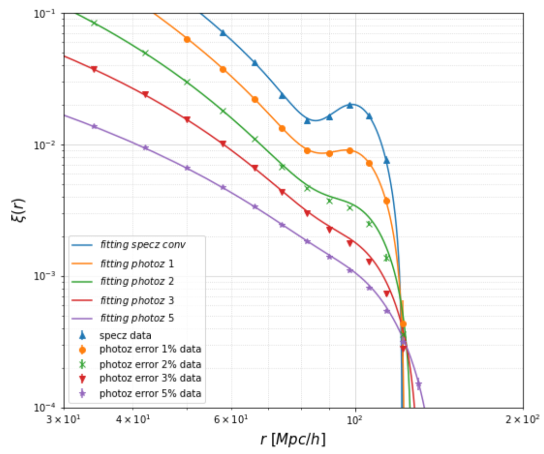

図 3: z=0.251 における photo-z error 依存性とフィッティング結果

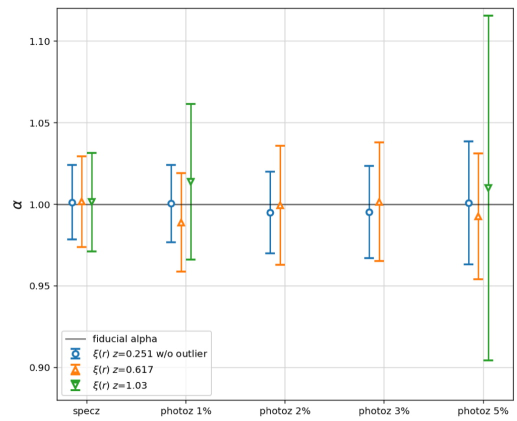

図 4: 各赤方偏移における photo-z error 別の α のフィッティング結果

して少ないため, 統計精度が十分でないことが原因だと考えられる.

次世代測光観測サーベイである Legacy Survey of Space and Time (LSST)[3]の 1 年目の目標は photo-z error 0.1(1+z) を超えないこととしており, サーベイ計画最後の 10 年目では photo-z error 0.03(1+z) を超えないことを要求している. 4 章の結果から, z=0.617 までなら三次元二点相関関数でもこの要求をクリアしていることがわかる. z=1.03 で測光観測データのみに対して三次元二点相関関数を用いた解析をするのは厳しいかもしれないが, 分光観測との cross correlation を取ることでシグナル・ノイズ比が改善する可能性はある.

[3]https://www.lsst.org

6 結論

解析するモデルに photo-z 効果を入れてフィッティングすると, BAO ピークの位置を捉える α パラメータのフィッティング結果は mock 作成時に使用した宇宙論を仮定したときの値から大きくずれないことを示した. これは, 分光観測で得られる宇宙論から大きく間違えないことを示す.

さらに, 各赤方偏移の photo-z error 依存性による BAO スケールの測定を行なった結果, 測光赤方偏移不定性が BAO スケールの約 50% までのゆらぎであれば, BAO を捉えるパラメータである α が 2σ で $\sim$4% の error の範囲に収められることがわかった.

謝辞

本発表を行うにあたり, 研究室の皆様には様々な面で助けていただきました. 特に, 岐阜聖徳学院大学の西澤淳准教授, 名古屋大学の砂山朋美研究員には研究の方針も含め, 毎週議論や相談に乗っていただきました. また, 博士課程の村上広椰さん, 修士課程の中沢准昭さん, 中島光一朗さん, 尹聖煥さんをはじめとした研究室の皆さんには, 論文の精読や研究発表などを通して自分の研究の理解を深めるきっかけを多くいただきました. 不完全な理解に留まりがちな私に対して根気よく指導していただいたこと, 誠に感謝申し上げます.

Reference

Seo et al., ApJ, 761, Issue 1, id. 13, 16 pp., 2012

Abbott, T. M. C. et al. (DES Y3), Phys. Rev. D, 105, 2022

Sunayama T. et al., MNRAS, 496, 4, 4468-4487, 2020

D. J. Eisenstein and W. Hu, ApJ. 496, 605, 1998

Padmanabhan et al., MNRAS, 427, 3, 2132-2145., 2012

Eisenstein D. J., Seo H.-J., White M., ApJ, 664, 660, 2007b

Julien Lesgourgues and Thomas Tram, JCAP, 09, 032, 2011

Nishimichi T. et al. 2019, ApJ, 884, 29

Ishikawa S. et al., ApJ., 922, 1, 23, 13, 2021

————index へ戻る

重宇 a36

曲率を持つ宇宙のパワースペクトルの計算法の開発

東京大学大学院 理学系研究科
寺澤 凌

曲率を持つ宇宙のパワースペクトルの計算法の開発

寺澤 凌 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

サーベイ領域を超える長い波長の密度揺らぎは、重力の非線形性に起因するモードカップリングによって短い波長の揺らぎに影響を与える。この影響はパワースペクトルの超長波長揺らぎへの応答で特徴づけられ、応答を用いることで超長波長揺らぎの効果も含めたサーベイ領域のパワースペクトルを計算することができる。超長波長揺らぎが構造形成に与える影響は曲率と等価であるため、曲率を持つ宇宙のパワースペクトルも同様に応答を用いて記述できる。物質パワースペクトルの超長波長揺らぎへの応答は現在の宇宙膨張の速度を表すハッブルパラメータへの応答と等価である [Li et al. 2014b; Terasawa et al. 2022]。本研究ではこのことを用いて、超長波長揺らぎへの応答をハッブルパラメータへの応答で置き換えることで、曲率を持つ宇宙の物質パワースペクトルを平坦な宇宙の物質パワースペクトルのみを用いて計算する手法を開発した [Terasawa et al. 2022]。現在はハロー・物質パワースペクトル、ハローパワースペクトルについても超長波長揺らぎへの応答とハッブルパラメータへの応答が一致するかどうかを調べており、同様の手法で曲率を持つ宇宙のハロー・物質、ハローパワースペクトルの計算法の開発に取り組んでいる。本発表では、パワースペクトルの応答を用いた曲率を持つ宇宙のパワースペクトルの計算手法を提案し、我々が行った N 体シミュレーションの結果を用いてその精度について議論する。また、パワースペクトルの超長波長揺らぎへの応答とハッブルパラメータへの応答が一致する理由についても理論的に考察する。

1 Introduction

一様等方宇宙の幾何学的性質は空間曲率で特徴づけられる。正の曲率は有限体積の閉じた宇宙に対応し、曲率 0 と負の曲率はそれぞれ平坦な宇宙、開いた宇宙に対応する。宇宙の始まりのインフレーションはほぼ平坦な宇宙を予言するが、わずかな曲率は存在し得る。非零の曲率を検出できればインフレーションについて大きな知見を得ることができる。例えば、弦理論は負の曲率を導くインフレーションを予言するため、正の曲率が測定されれば、理論に大きな問題を投げかける。しかし、多くの観測で曲率の値は厳しく制限されており ($|\Omega_K| \lesssim 0.1$)、平坦な宇宙と consistent であることから、曲率を持つ宇宙の非線形パワースペクトルのモデルはあまり調べられていないのが現状である。パワースペクトルの理論予言として、多数の N 体シミュレーションデータを機械学習の手法を用いて宇宙論パラメタ空間上で補間したエミュレータと呼ばれるモデルが近年開発されており、$\sim 1\%$ の精度でシミュレーションを再現するようなものも出てきているが、いずれも平坦な宇宙を仮定している。

本発表では、Separate universe の考え方を用いて、平坦な宇宙の物質パワースペクトルの精密な理論予言を曲率がある場合に拡張する方法を紹介する。以下では ΛCDM モデルを仮定し、この手法を提案した論文 [Terasawa et al. 2022] に沿う形で説明する。

2 Methods

2.1 Preliminary

平坦な宇宙のパワースペクトルの精密なモデルがあること、許される曲率の大きさが小さいこと ($|\Omega_K| \lesssim 0.1$) を考えると、曲率を持つ宇宙のパワースペクトルは以下のように平坦な宇宙の周りの Ω_K の Taylor 展開で書けると予測される：

$$P(k,z;\Omega_K) \approx P(k,z)|_{\Omega_K=0} + \left.\frac{\partial P}{\partial \Omega_K}\right|_{\Omega_K=0} \Omega_K \quad (1)$$

しかし、ΛCDM モデルの多次元パラメタ空間において、どのパラメタを固定して Ω_K に対する微分をとるかは自明ではなく、様々な取り方が可能である。以下では、Separate universe の考え方を用いて曲率を持つ宇宙と平坦な宇宙の間の対応を与える。

2.2 Separate universe (SU) approach

サーベイ領域またはシミュレーションボックスより十分長波長の揺らぎを、領域内で一様等方と近似すると、背景宇宙の密度が定数分変化したとみなせる。つまり、宇宙全体 (Global 宇宙) の平均密度を $\bar{\rho}_{\mathrm{m}f}$ とすると、等方的な超長波長揺らぎ δ_{b} が乗っている Local な領域の平均密度 $\bar{\rho}_{\mathrm{m}}$ は、

$$\bar{\rho}_{\mathrm{m}}(t) = \bar{\rho}_{\mathrm{m}f}(t)[1+\delta_{\mathrm{b}}(t)] \tag{2}$$

と書ける。以下、Global 宇宙は平坦と仮定し、そのパラメタを下添字 f 付の量で表す。物理的な質量は $\bar{\rho}_{\mathrm{m}}a^3 = \bar{\rho}_{\mathrm{m}f}a_f^3$ と表せるため、この平均密度の変化は膨張速度の違いとして現れる：

$$\begin{aligned} a(t) &= a_f(t)\left(1+\delta_{\mathrm{b}}(t)\right)^{-1/3}, \\ 1+z &= (1+z_f)\left[1+\delta_{\mathrm{b}}(z_f)\right]^{1/3} \end{aligned} \tag{3}$$

つまり、平均密度が高い (低い) 宇宙ほど、膨張が遅く (速く) なる。同様に、ハッブルパラメータや密度パラメータも変更を受ける。$h_f \equiv h(1+\delta_h)$ とすると、Global 宇宙と Local 宇宙のパラメタには以下のような対応がある。

$$\Omega_{\mathrm{m}f} = \Omega_{\mathrm{m}}(1+\delta_h)^{-2}, \tag{4}$$

$$\Omega_{\Lambda f} = \Omega_{\Lambda}(1+\delta_h)^{-2}, \tag{5}$$

$$\delta_h = (1-\Omega_K)^{1/2} - 1. \tag{6}$$

特に、宇宙全体が平坦でも長波長揺らぎ δ_{b} のある Local な宇宙は δ_{b} の大きさに対応する曲率を持つ。

$$\frac{\delta_{\mathrm{b}}(t)}{D_f(t)} = -\frac{3\Omega_K}{5\Omega_{\mathrm{m}}} \tag{7}$$

ここで、曲率 (または超長波長揺らぎ) は初期宇宙で影響が無視できるため、以下の初期パワースペクトル $P_0(k)$ を定めるパラメタは変化しない。

$$\{\omega_c, \omega_b, A_s, n_s\} \tag{8}$$

このように、超長波長揺らぎの効果は背景宇宙のパラメタの変化として吸収できる。この Separate universe のパラメタマッピングを用いると、δ_{b} を介して曲率を持つ宇宙と平坦な宇宙を対応させることができる。つまり、曲率 Ω_K を持つ宇宙を平坦な Global 宇宙の中で $\delta_{\mathrm{b}}(t) = -D_f(t)\frac{3\Omega_K}{5\Omega_{\mathrm{m}}}$ の大きさの超長波長揺らぎを持つ Local 宇宙とみなすことで、曲率を持つ宇宙のパワースペクトルを平坦な宇宙の周りでの δ_{b} の Taylor 展開で近似することができる：

$$\begin{aligned} \tilde{P}(k,z;\Omega_K) &\simeq P_f(k,z_f;\delta_{\mathrm{b}}) \\ &\simeq P_f(k,z_f)\big|_{\delta_{\mathrm{b}}=0} + \left.\frac{\partial P_f(k,z_f;\delta_{\mathrm{b}})}{\partial \delta_{\mathrm{b}}}\right|_{\delta_{\mathrm{b}}=0}\delta_{\mathrm{b}} \\ &= P_f(k,z_f)\big|_{\delta_{\mathrm{b}}=0}\left[1+\left.\frac{\partial \ln P_f(k,z_f;\delta_{\mathrm{b}})}{\partial \delta_{\mathrm{b}}}\right|_{\delta_{\mathrm{b}}=0}\delta_{\mathrm{b}}\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

パワースペクトルの δ_{b} への response $\left.\frac{\partial \ln P_f(k,z_f;\delta_{\mathrm{b}})}{\partial \delta_{\mathrm{b}}}\right|_{\delta_{\mathrm{b}}=0}$ は、δ_{b} に対応する effective cosmology でシミュレーションを行うことで精密に計算できる (Separate universe (SU) simulation)。

$P_f^L(k) \propto (D_f)^2 P_0(k,z_i)$ より、δ_{b} の効果は線形領域では Growth factor D_f の変化を通してのみパワースペクトルに現れる。$k \to 0$ limit で $T_{\delta_{\mathrm{b}}} \to 1$ となるような normalized response $T_{\delta_{\mathrm{b}}}$:

$$T_{\delta_{\mathrm{b}}}(k,z_f) \equiv \left[2\frac{\partial \ln D_f(z_f)}{\partial \delta_{\mathrm{b}}}\right]^{-1} \left.\frac{\partial \ln P_f(k,z_f;\delta_{\mathrm{b}})}{\partial \delta_{\mathrm{b}}}\right|_{\delta_{\mathrm{b}}=0} \tag{10}$$

を用いて、式 (9) は、

$$\tilde{P}(k,z;\Omega_K) \simeq P_f(k,z_f)\left[1+\frac{26}{21}T_{\delta_{\mathrm{b}}}(k,z_f)\delta_{\mathrm{b}}(z_f)\right], \tag{11}$$

と書き直せる。

2.3 h response

式 (8) を固定した時、パワースペクトルの値を決めるパラメタとして $\{\Omega_K, h, a\}$ を変える自由度が残っている。SU approach では、δ_b の値によってこの 3 つのパラメタが一意に定まっていた。線形領域ではこれらのパラメタの変化は Growth factor の変化を通してのみパワースペクトルに現れるため、これらを変化させることで (少なくとも線形領域では)δ_b の効果を mimic できる。本研究では $\{\Omega_K, h, a\}$ のうち、h のみを変化させた宇宙論 (h-ΛCDM) を考える。h-ΛCDM のパラメタを $'$ 付で表すと、

$$h' = h_f + \delta h, \tag{12}$$

$$\Omega'_\mathrm{m} = \Omega_{\mathrm{m}f}\left(\frac{h_f}{h'}\right)^2, \tag{13}$$

$$\Omega'_\Lambda = 1 - \Omega'_\mathrm{m} = 1 - \Omega_{\mathrm{m}f}\left(\frac{h_f}{h'}\right)^2 \tag{14}$$

となる。δ_b response と同様に、$k \to 0$ limit で 1 となるような normalized response T_h を定義できる：

$$T_h(k, z_f) \equiv \left[2\frac{\partial \ln D_f(z_f)}{\partial h_f}\right]^{-1} \frac{\partial \ln P_f(k, z_f)}{\partial h_f}. \tag{15}$$

結果の章で示すように、$T_h(k, z_f)$ と $T_{\delta_\mathrm{b}}(k, z_f)$ は線形領域のみならず広い範囲の k でよく一致することがわかった。つまり、$T_{\delta_\mathrm{b}}(k, z_f) \approx T_h(k, z_f)$ である。

2.4 Summary: Estimator of $P(k)$ for non-flat ΛCDM model

h response の計算には平坦な宇宙のパワースペクトルがあれば良いため、式 (9) の $T_{\delta_\mathrm{b}}(k, z_f)$ を $T_h(k, z_f)$ で代替することで、平坦な宇宙のパワースペクトルのみを用いて曲率を持つ宇宙のパワースペクトルを記述することができる：

$$\tilde{P}(k, z; \Omega_K) \simeq P_f(k, z_f)\left[1 + \frac{26}{21}T_h(k, z_f)\delta_\mathrm{b}(z_f)\right]. \tag{16}$$

さらに、$k \to 0$ limit で $P(k, z; \Omega_K)$ を exact に再現するように書き直すと、

$$\tilde{P}(k, z; \Omega_K) \simeq P_f(k, z_f)\left(\frac{D(z)}{D_f(z_f)}\right)^2 \times \left[1 + \frac{26}{21}\{T_h(k, z_f) - 1\}\delta_\mathrm{b}(z_f)\right]. \tag{17}$$

この式が我々が提案する曲率を持つ宇宙のパワースペクトルの estimator である。

3 Results

3.1 Power spectrum responses

まず、パワースペクトルの応答を測るために、Planck 宇宙論 (flat) の周りで $\delta_\mathrm{b} = \pm 0.01$ の SU simulation と $\delta h = \pm 0.02$ の h-ΛCDM simualtion を行った。

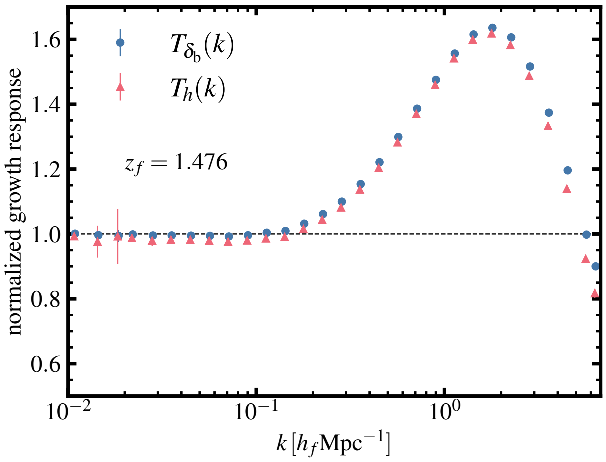

図 1: $k \to 0$ limit で規格化したパワースペクトルの δ_b, h に対する応答 [Terasawa et al. 2022]。

図 1 はシミュレーションから測った normalized response である。線形領域だけでなく high k まで response が一致することが確かめられた。

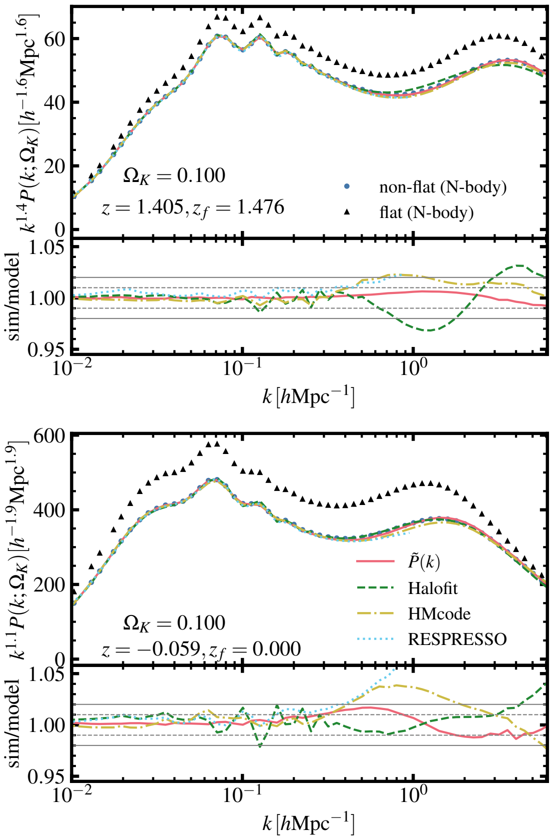

図 2: $\Omega_K = +0.1$ の宇宙のパワースペクトル [Terasawa et al. 2022]。

3.2 Accuracy of the approximation of $P(k)$ for non-flat ΛCDM

続いて、$\Omega_K = +0.1$ のシミュレーションを行い、パワースペクトルの estimator(式 17) の精度を検証した。

図 2 は $\Omega_K = +0.1$ の宇宙のパワースペクトルについて、シミュレーションから測ったもの (non-flat (N-body)) と estimator $\tilde{P}(k)$ (式 17) を比較したものである。estimator $\tilde{P}(k)$ (式 17) は $\sim 1\%$ の精度でシミュレーションの結果を再現している。また、その他のモデル (Halofit, HMcode, RESPRESSO) よりも良い精度が出ている。

4 Discussion

δ_b response と h response の一致 ($T_{\delta_\mathrm{b}}(k, z_f) \approx T_h(k, z_f)$) については、非線形パワースペクトルが線形パワースペクトルの汎関数であれば成り立つことが示せる。例えば摂動論はこのようなモデルになっているため、摂動論が破綻しない弱非線形領域までは response の一致は説明できる。しかし、強非線形領域では線形パワースペクトルの汎関数であるという ansatz は一般には成り立たない。future work として、強非線形領域まで response が一致する理由を明らかにしたいと考えている。

5 Conclusion

平坦な宇宙のパワースペクトルの精密なモデルがあれば、Separate universe のパラメタマッピングを用いてそれを曲率を持つ宇宙に良い精度を保ったまま拡張できることを示した。この手法を弱重力レンズの解析などに用いることで、CMB や BAO、超新星などの距離指標を用いた制限とは独立に、大規模構造の成長の情報からも曲率に制限を加えることができると期待される。

Acknowledgement

本研究で用いた N 体シミュレーション等の計算の多くで国立天文台の計算機 XC-50 を使わせていただきました。

Reference

Y. Li, W. Hu, & M. Takada, 2014, Phys. Rev. D, 90, 103530,

R. Terasawa, R. Takahashi, T. Nishimichi & M. Takada, 2022, arXiv:2205.10339

———index へ戻る

重宇 a37

講演キャンセル

———index へ戻る

重宇 a38

パリティ対称性の破れによるCMBの偏光面回転

早稲田大学大学院 先進理工学研究科
中須 崇文

パリティ対称性の破れによる CMB の偏光面回転

中須　崇文 (早稲田大学大学院 先進理工学研究科)

Abstract

2020 年，南雄人，小松英一郎両氏による Planck2018 の観測データの解析により，宇宙マイクロ背景放射 (CMB) の E モードと B モードの相関が発見された [1]。これは，宇宙全体でパリティ対称性が破れており，CMB が最終散乱面において放出されてから我々観測者に到達するまでの間に何らかの物質と相互作用し偏光面が回転していることを示唆している。本発表では，このパリティ対称性の破れの原因を明らかにすると共に観測手法や CMB 偏光の原理を説明する。

1 Introduction

宇宙マイクロ背景放射 (CMB) とは天球上の全方向から観測され，宇宙の温度が下がり光子が直進できるようになった「宇宙の晴れ上がり」と呼ばれる時期に最終散乱面から放出された電磁波である。最終散乱面においてトムソン散乱した光は直線偏光を持つ。トムソン散乱する際の電子から見た光子の四重極異方性により CMB の偏光は直線偏光となる。

宇宙マイクロ波背景放射はその偏光方向によって二種類，パリティ不変の E モードとパリティ変換に対して符号が逆転する B モードに分解することができる。E モードと B モードの角度パワースペクトル C^{EB} はパリティ変換によって符号を変えるため，宇宙全体でパリティ対称性が成立していれば $C^{EB} = -C^{EB}$ つまり $C^{EB} = 0$ となる筈である。しかし，2020 年の南雄人，小松英一郎両氏の論文 [2] によって 0 でない C^{EB} が発見され，宇宙全体で何らかの原因により宇宙全体でパリティ対称性が破れているという事実が示唆された。

このパリティ対称性の破れの原因と考えられているのが Axion Like Particle(ALP) で，この物質は光子と相互作用しその偏光面を回転させる性質がある。この性質を宇宙複屈折という。この物質が宇宙に充満していることにより CMB が最終散乱面から我々観測者まで伝播する間に偏光面が回転し 0 ではない C^{EB} が観測された。

光子と ALP は相互作用ラグランジアン $\mathcal{L}_{int} = -\frac{1}{4}g\phi F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ で相互作用する。g は結合定数，ϕ は ALP の場，F は電磁場テンソルである。ここから偏光面の回転角 β と場の動きの間の関係を導くことができ，Axion Like Particle の場の形を仮定することで Axion Like Particle の質量 m と結合定数 g の制限をつけることができる。

2 Methods/Instruments

CMB の偏光を議論する為にまずストークスパラメータを導入する。一般に電磁波は

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E_0} \exp(-i(\omega t - \delta)) \tag{1}$$

と表すことができる。電磁波の x 軸方向の振幅を E_{0x}，y 軸方向の振幅を E_{0y} とし，ストークスパラメータを次のように定義する。

$$\begin{aligned} I &= \left\langle E_{0x}^2 + E_{0y}^2 \right\rangle & (2)\\ Q &= \left\langle E_{0x}^2 - E_{0y}^2 \right\rangle & (3)\\ U &= 2\left\langle E_{0x}E_{0y}\cos\left(\delta_x - \delta_y\right)\right\rangle & (4)\\ V &= 2\left\langle E_{0x}E_{0y}\sin\left(\delta_x - \delta_y\right)\right\rangle & (5) \end{aligned}$$

I は電磁波の強度，Q は x 軸に対して垂直もしくは平行方向の偏光の成分，U は x 軸に対して斜め 45 度の偏光成分，V は楕円偏光を表すパラメータである。今回は楕円偏光は考えない。このストークスパラメータは観測者が任意の座標系で定義するパラメータである為，観測者によらず回転変換に対して不変であるように Q と U を組み合わせて構築したものが E モード偏光と B モード偏光である。ストークスパラメータ $Q + iU$ をスピン 2 の球面調和関数 ${}_sY_l^m$ で

展開した時の E モードと B モードの展開係数をそれぞれ E_{lm}，B_{lm} と書き，これを用いて角度パワースペクトルを

$$\langle X_{lm} Y^*_{l'm'} \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l^{XY} \tag{6}$$

のように定義する。X, Y にはそれぞれ E, B のいずれかが入り，角括弧はアンサンブル平均を表す。この角度パワースペクトルが観測量となる。

3 Observations

宇宙マイクロ波背景放射と Axion Like Particle の相互作用による偏光面の回転を評価する為に EB 相関の角度パワースペクトル C^{EB} を用いる。C^{EB} はパリティ変換によって符号が逆転する為，宇宙全体でパリティ対称性が成立していれば値は 0 になるはずである。つまり，0 でない C^{EB} を観測することにより宇宙複屈折の証拠を見出そうということである。最終散乱面から放出された CMB の直線偏光は宇宙複屈折により我々観測者に届くまでに角度 β 回転される。この時 E モードと B モードは次のように混ざり合う。

$$\begin{pmatrix} E^o_{lm} \\ B^o_{lm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\beta) & -\sin(2\beta) \\ \sin(2\beta) & \cos(2\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{lm} \\ B_{lm} \end{pmatrix} \tag{7}$$

肩に付いている"o" は観測量を表している。ここから観測した EB 相関の角度パワースペクトルを求めると次のようになる。

$$C_l^{EB,o} = \frac{\sin(4\beta)}{2} \left(C_l^{EE,t} - C_l^{BB,t} \right) \tag{8}$$

肩に付いている"t" は理論値を表す。

実際には観測器そのものの傾き α の影響を考える必要がある。この影響を取り除く為に天の川銀河からの光を利用する方法が考案された [3]。天の川銀河から来る光は CMB と比べて極めて伝播距離が短く，宇宙複屈折の影響を無視できる。つまり天の川銀河からの光によって検出器の角度 α を決定することができ，CMB で測定した $\alpha + \beta$ の縮退を解くことができる。その関係を式で表すと

$$\begin{aligned} C_l^{EB,\mathrm{o}} &= \frac{\tan(4\alpha)}{2} \left(C_l^{EE,\mathrm{o}} - C_l^{BB,\mathrm{o}} \right) \\ &\quad + \frac{\sin(4\beta)}{2\cos(4\alpha)} \left(C_l^{EE,t} - C_l^{BB,t} \right) \end{aligned} \tag{9}$$

のようになる。この関係式に Planck 衛星プロジェクトが 2018 年に公開したデータを適用すると $\beta = 0.35 \pm 0.14$deg(68% C.L.) という結果が得られた。

4 Discussion

光子と Axion Like Particle(ALP) はラグランジアンにおいて Chern-Simons 項で相互作用する。具体的な光子-ALP のラグランジアンは次のようである。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &\quad -\frac{1}{4} g_{\phi\gamma} \phi F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} - V(\phi) \end{aligned} \tag{10}$$

ここで $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ は電磁場テンソルである。相互作用項

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{1}{4} g_{\phi\gamma} \phi F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \tag{11}$$

を A_i で変分を取ると，$A_0 = 0$ のゲージ条件の下で電磁場の運動方程式

$$\left(\partial_\tau^2 - \nabla^2 \right) \vec{A} = g_{\phi\gamma} \left(\partial_\tau \phi \right) \nabla \times \vec{A} \tag{12}$$

を得る。ベクトルポテンシャルを右巻き成分と左巻き成分に分解した時のそれぞれの分散関係は次のようになる。

$$\omega_{L/R}^2 = k^2 \left(1 \mp \frac{g}{k} \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau} \right) \tag{13}$$

これにより，右巻き偏光と左巻き偏光の分散関係が異なっていることが分かる。つまり直線偏光している CMB は ALP の場と相互作用することで最終散乱面から我々の元へ届くまでにその偏光面が回転する。具体的な回転角度は式 (13) を最終散乱面 (Last Scatter Surface:LSS) から現在まで積分することにより求めることができる。

$$\begin{aligned} \beta &= \int_{\tau_{LSS}}^{\tau_0} \delta\omega(\tau) d\tau \\ &= -\frac{g}{2} (\phi(\tau_0) - \phi(\tau_{LSS})) \end{aligned} \tag{14}$$

ϕ の動きは場の運動方程式

$$\ddot{\phi}(t) + 3H\dot{\phi}(t) + \frac{d}{d\phi} V(\phi) = 0 \tag{15}$$

によって決定されるので，ALP のポテンシャル $V(\phi)$ を仮定することで具体的な計算をすることができる。ALP にはさまざまなポテンシャルが考えられているが，今回は二乗型ポテンシャル

$$V = \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{16}$$

を考える [4]。このポテンシャルを式 (15) の運動方程式に代入して計算，それを用いて積分 (14) を実行すると ALP の質量 m と ALP と光子の結合定数 g の間の関係を求めることができる。ALP のスカラー場

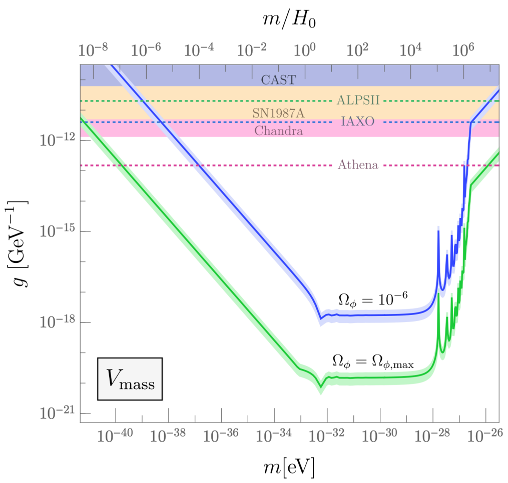

図 1: 質量 m と結合定数 g の関係 ([4] より)

はダークエネルギーとして宇宙の加速膨張に寄与していると考えられており，緑のラインがダークエネルギーの起源の全てが ALP だった場合の $m-g$ の関係，青いラインが密度パラメータが $\Omega_\phi = 10^{-6}$ の時の m と g の関係である。

5 Conclusion

観測された CMB 偏光の回転角から，その原因と考えられている ALP のポテンシャルを仮定して質量と結合定数の制限をつけた。今回は二乗型ポテンシャルを考えたが，他にもさまざまな物理的背景を元にしたポテンシャルが考えられている。ポテンシャルによっては，CMB の観測から得られたハッブル定数と近傍銀河の超新星の観測から得られたハッブル定数が異なるという，現在宇宙論における未解決問題であるハッブルテンションを緩和するという研究も存在する。今までの研究では ALP が宇宙全体に一様に存在していることを仮定しており CMB の偏光面の回転角 β が等方的であると仮定しているが，近い未来観測技術の向上により ALP の非等方性が観測される可能性がある。今後の自分の研究としては，そのような ALP の非等方性まで考慮した計算を進めていきたいと考えている。

Reference

1. Y. Minami and E. Komatsu, Phys. Rev. Lett. 125 (2020) no.22, 221301.
2. Yuto Minami and Eiichiro Komatsu, Phys. Rev. Lett. 125, 221301, (2020)
3. Y. Minami, H. Ochi, K. Ichiki, N. Katayama, E. Komatsu and T. Matsumura, PTEP 2019 (2019) no.8, 083E02
4. Tomohiro Fujita, Kai Murai, Hiromasa Nakatsuka, and Shinji Tsujikawa, Phys. Rev. D 103, 043509, (2021)

————index へ戻る

重宇 a39

宇宙マイクロ波背景放射の複屈折の精密計算に向けて

東京大学大学院 理学系研究科
直川 史寛

宇宙マイクロ波背景放射の複屈折の精密計算に向けて

直川 史寛 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

近年、宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) に関する新たな現象の存在が、観測衛星プランクのデータから示唆されている (Minami & Komatsu (2020))。直線偏光した CMB 光子の偏向面が、我々に届くまでに回転しているというのである。「宇宙複屈折」と呼ばれるこの現象はパリティ対称性を破り、新物理の存在をも示唆する。特に未知の素粒子であるアクシオンへのプローブとして期待が高まっている。

将来計画で予定される CMB 偏光観測の精度向上を鑑みると、宇宙複屈折の精密な理論予言が必要となる。本研究では、重力レンズ効果を取り入れた、理論計算の精密化に挑戦している。重力レンズは特に小角度領域のデータに対して影響が強く、将来の地上観測の結果と理論予言を突き合わせる際に必要不可欠となる。

1　研究の背景と目的

1.1　宇宙複屈折とは

宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) は宇宙初期の再結合期における最終散乱面から放射された宇宙最古の光である。よって宇宙初期の重要な情報を保持しており、1964 年のペンジアスとウィルソンによる発見以来、宇宙論の進展に非常に大きく寄与してきた。例えば、全球での CMB 強度分布（いわゆる「温度揺らぎ」）は観測衛星 COBE による測定以降、続く WMAP、プランクといった衛星が精度を向上させ、宇宙論パラメータの決定や精密宇宙論の開拓につながった。

宇宙論的な情報が刻印されるのは、温度揺らぎだけではない。CMB の光子は最終散乱面で直線偏光が生じるが、近年ではこの偏光の分布も重要な観測量となっている。CMB の偏光は WMAP やプランクによって既に観測されているが、より高精度な観測に向け、地上実験・衛星計画ともに次世代の観測プロジェクトが世界中で進められている。

そんな中、Planck の偏光観測データの解析から非常に興味深い結果が報告された (Minami & Komatsu (2020))。これまでの解析では、CMB はその直線偏光の向きを保ったまま伝播しているとして、不確かさの範囲内で矛盾はなかった。しかし新たな解析では、CMB が最終散乱面から我々のところに届くまでの間に、わずかながら偏光面が回転し、直線偏光の向きが変化していることが示唆されたのである。これは「宇宙複屈折 (cosmic birefringence)」と呼ばれている（以下、単に複屈折と呼ぶ)。

CMB の偏光面のわずかな回転を測定することは非常に難しい。観測装置由来の系統誤差の影響があるからである。Minami & Komatsu (2020) では、本来 CMB 観測で邪魔者となる天の川銀河からの前景放射を参照光源とする巧妙な手法でこの問題を克服した。しかし、複屈折の存在を決定づけるためには、やはり装置の系統誤差を排除した上での直接的な検出が望まれ、現在進行中の将来計画に期待がかかる。

複屈折による偏光面の回転は、各 CMB 光子でバラバラに起こっているのではなく、全球で一様に同じ向きに同じだけ回転が生じているという点で特に興味深い。複屈折はパリティ対称性を破っており、既存の物理で説明することは難しい。すなわち宇宙複屈折の存在は、標準模型を超えるような新物理の存在をも示唆している。

複屈折の起源となる新物理として、アクシオン場が注目されている。標準模型には存在しない未知の素粒子であるが、アクシオン場は光子との相互作用が可能である。また、その相互作用項はパリティ対称性を破っており、かつ複屈折のような一様な回転を説明可能だ。逆にこの関係性を利用すれば、複屈折の測定からアクシオンの素性を探ることができる (Fujita et al. (2021))

複屈折からアクシオン場の情報を詳細に引き出す

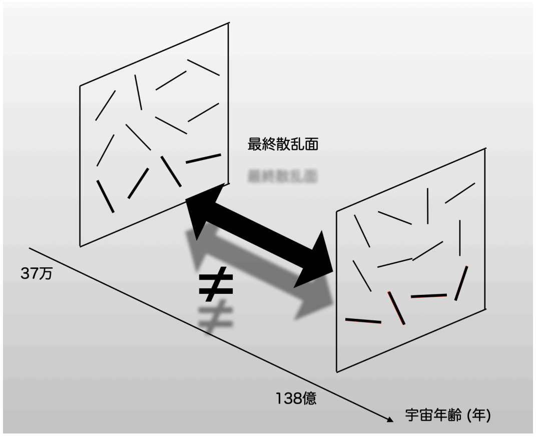

図 1: 宇宙複屈折のイメージ　各線分は直線偏光の向きを表す。複屈折による偏光面の回転により、最終散乱面での本来の偏光分布と我々が観測する偏光分布は異なる。(注：図はあくまで模擬的なイメージである)

には、複屈折が CMB のパワースペクトルに与える影響の精密な理論予言が必要不可欠となる。それを観測データと突き合わせることでアクシオンのパラメータなどに制限をかけることが可能となる。複屈折が生じると、パリティ対称性の破れにより、C_l^{TB}(温度揺らぎと B モードのパワースペクトル) や C_l^{EB}(E モードと B モードのパワースペクトル) が有限の値を持つ (パリティが保たれている場合にはこれらはゼロとなる)。

Nakatsuka et al. (2022) では、CMB 計算のための公開コードを改良し、複屈折の効果を取り入れた CMB パワースペクトルの計算が行われた。しかし、この計算においてはいくつか考慮されていない因子が存在し、さらなる改良が不可欠である。

中でも重要なものが、パワースペクトルに対する重力レンズの影響である。詳しくは次節で述べるが、特に将来の地上観測で期待されるデータの精度を鑑みると、その影響は無視すべきでない。そこで本研究では、アクシオンによる複屈折の効果に、さらに重力レンズの効果を取り込んで計算するコードの開発に取り組んでいる。これは、将来観測で得られるデータを用いた、複屈折によるアクシオン探査を行うための基盤構築のために重要である。

1.2 重力レンズの効果

もし、我々の宇宙に何も存在しなければ（少なくとも重力源が存在しなければ）CMB の光子は真っ直ぐ進むことができる。しかし、現実の宇宙には暗黒物質や銀河などの物質分布が存在し、その影響で CMB 光子は進路をわずかに曲げられる。これが CMB に対する重力レンズ効果である。

その結果我々の観測にかかる CMB 光子の到来方向は、本来の到来方向からわずかにズレることになる。当然これは特定の CMB 光子だけではなく、全球的に生じる効果である。つまり、重力レンズの影響により、我々の観測する CMB の全球マップは本来の姿がぐちゃぐちゃにかき混ぜられたものになっている。

そうは言っても、重力レンズによって生じる光の到来方向のずれは非常に小さい。よって比較的大きな角度領域（パワースペクトルでは小さな l に対応する部分）に対しては、それほど大きな問題にはならない。しかしながら、比較的小さな角度領域（パワースペクトルでは大きな l に対応する部分）に対する観測では、無視できないずれを生じさせる。特に地上実験による将来の観測プロジェクトでは、この小角度領域が重要なターゲットとなり、また観測精度も非常に高い。よって、重力レンズの効果は無視できず、それを考慮に入れたデータ解析が必要不可欠となる。

2 研究手法

2.1 数値計算

CMB の精密な理論予言を計算するためには光子に対するボルツマン方程式を計算する必要がある。この時、ボルツマン方程式右辺の衝突項は光子と自由電子のトムソン散乱によるものであり、主に最終散乱時と宇宙の再電離期の散乱が寄与する。

このボルツマン方程式は解析的には解けないので数値計算を行う必要がある。この計算に関しては公開コードが複数存在し、本研究では `CLASS`(Lesgourgues (2011)) と呼ばれるコードを使用している。

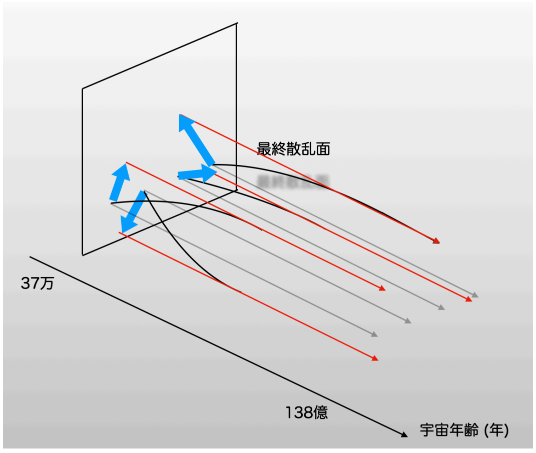

図 2: CMB に対して重力レンズが及ぼす影響のイメージ　本来真っ直ぐ進むはずの光子 (薄い黒線) は重力レンズによって曲げられ (濃い黒線)、少し離れたところから到来したように見える (赤線)。青の矢印はそのずれを表す。(注：図はあくまで模擬的なイメージである)

Nakatsuka et al. (2022) では `CLASS` に対し、アクシオン場の変化に由来する複屈折の効果を組み込んで計算できるように改良を施し、研究が行われた。しかし、重力レンズ効果を計算するコードは組み込まれていない。`CLASS` には CMB の重力レンズを計算するモードも元から備わっているが、Nakatsuka et al. ではそのモードを無効にして計算が行われている。`CLASS` に元からある重力レンズ計算モードは、複屈折の結果現れる C_l^{TB} や C_l^{EB} も含めて計算する仕様にはなっておらず、単純にそのまま使用することはできない。

そこで、本研究では Nakatsuka et al. (2022) で改良された `CLASS` のコードに、C_l^{TB} や C_l^{EB} も含めて重力レンズ計算を行えるようにさらなる改良を施し、より精密なパワースペクトルの理論計算の実現を目指している。

2.2　解析的なふるまい

CMB に対する重力レンズ効果を計算する際にも、最終的には数値計算が必要である。しかし、適当な近似を置いて方程式の漸近形を調べることで、効果の大まかな振る舞いや、その物理的な意味を定性的に探ることも重要である。

例えば天球面のごく一部を取り出すと、球面の曲率を無視して実質的に平面と見なせる（このような近似を「小角度近似」と呼ぶ)。CMB に対する重力レンズの効果は、前述の通り小角度領域に対してよく効くため、小角度近似を用いた解析が有効である。

ここではこれ以上詳しく述べないが、その他にも様々な近似を適用し、解析的な振る舞いを調べている。特に複屈折によって現れる C_l^{TB} や C_l^{EB} のパワースペクトルに関して特有の振る舞いが現れないかに興味を持ち、数値計算のコード開発と並行して取り組んでいる。

3　展望

本研究は、コード開発、解析的な計算共に途上段階である。近々コードの開発を終了し、それを用いて Nakatsuka et al. (2022) と同様、CMB 観測の将来計画について感度予測を行う予定である。具体的には、CMB の複屈折を用いたアクシオンの素性の探索が、アクシオンのどのようなパラメータ帯域に対してどのように感度を持つのかを調べることになる。また、本研究で開発されたコードは今後の CMB 観測で得られる実際のデータを解析する際の基盤となるものである。

Reference

小松英一郎 2019『宇宙マイクロ波背景放射』(新天文学ライブラリー 第 6 巻), 日本評論社

Y. Minami, & E. Komatsu 2020, Phys. Rev. Lett, 125, 221301

T. Fujita et al. 2021, Phys. Rev. D, 103, 043509

J. Lesgourgues 2011, arXiv:1104.2932

H. Nakatsuka et al. 2022, Phys. Rev. D, 105, 123509

————index へ戻る

重宇 c01

講演キャンセル

———index へ戻る

重宇 c02

統合摂動論の基礎と物質優勢期における原始ブラックホールの形成

総合研究大学院大学 高エネルギー加速器科学研究科
片山 友貴

都合により掲載なし