

二重拡散対流による乱流混合と層形成

大野 由紀 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

二重拡散対流は、熱と組成の拡散によって起こる対流現象であり、惑星の内部で熱や組成の輸送を担っていると考えられている。ホットジュピターの異常に巨大な半径を説明する候補としても挙げられている。惑星の形成や進化を理解するために、二重拡散対流による輸送がどれくらいあるのか、無いのかを知ることは重要である。

Rosenblum et al. (2011) では、二重拡散対流の 3 次元シミュレーションを行っている。その結果、二重拡散対流による熱や拡散の輸送は通常の対流よりも小さいことが分かった。また、一様乱流状態になるものと、その後多数の薄い層を形成するものがある。薄い層は、その後合体して 1 つの層になる。層が形成・合体すると、熱と組成の輸送のフラックスが増加する。一様乱流状態に対して線形解析を行うことで、層の形成が起こる場合と起こらない場合を説明することができた。

1 Introduction

観測されているホットジュピターの半径は、通常の熱進化の理論で予想されるよりも大きいものがある。(図 1)。これについて、Chabrier and Baraffe(2007) で、二重拡散対流を用いた理論で大きい半径を説明できることが示されている。二重拡散対流では、拡散によって熱や組成が輸送される境界層と、境界層によって多数に分割された層対流が実現される(図 2)。層対流が発生しているときの熱輸送は、全対流しているときの熱輸送よりもはるかに小さくなるため、ガス惑星が熱を失って収縮するタイムスケールが長くなり、大きな半径を保っている。

通常の対流現象については、対流が起こるかどうかの条件として、Schwarzschild の条件と Ledoux の条件がある。Schwarzschild の条件は、組成が一様な場合の安定性条件であり、

$$\nabla - \nabla_{ad} = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln p} \right) - \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln p} \right)_{ad} > 0 \quad (1)$$

のとき不安定である。一方、Ledoux の条件は、組成勾配がある場合の安定性条件であり、

$$\nabla - \nabla_{ad} > \nabla_{\mu} \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln p} \right) - \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln p} \right)_{ad} > \left(\frac{\partial \ln \mu}{\partial \ln p} \right) \quad (3)$$

のとき不安定である。ここで、 T は温度、 p は圧力、 μ は平均分子量、添字の ad は断熱を表す。

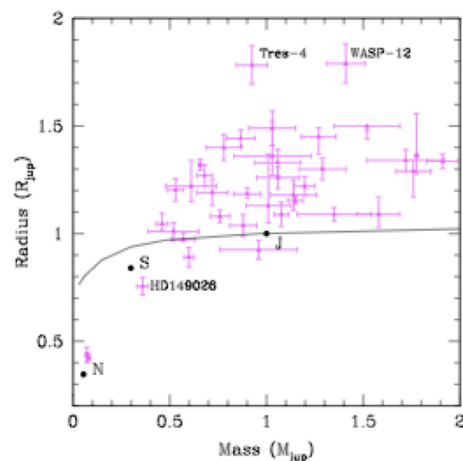


図 1: 惑星の質量と半径の関係 (Baraffe, Chabrier and Barman 2010)

次に、拡散がある場合の安定性について考える。二重拡散対流は、熱と組成の 2 つの拡散によって起こる対流現象である。圧縮性流体の圧力による密度変化を無視した近似 (ブシネスク近似) をした流体の方程式を用いる。バックグラウンドに一様な勾配を仮

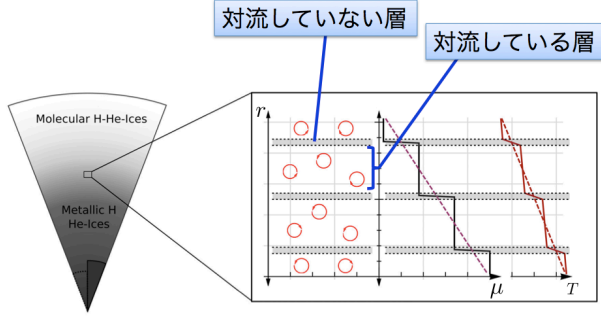


図 2: 惑星内部の二重拡散対流のイメージ (Leconte and Chabrier 2012)

定し、そこからのずれの物理量を記述する方程式は、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T + (T_{0z} - T_{0z}^{ad})w = \kappa_T \nabla^2 T \quad (5)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mu + \mu_{0z} w = \kappa_\mu \nabla^2 \mu \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (7)$$

となる。上から順に、運動方程式、熱の拡散の式、組成の拡散の式、連続の式である。ここで、 $\mathbf{u} = (u, v, w)$ は流体の速度、 ρ_0 はバックグラウンドの密度、 $\mathbf{g} = (0, 0, g)$ は重力加速度、 ν は粘性係数、 κ_T, κ_μ は拡散係数、添字の z は z の微分を表す。これらの方程式を無次元化すると、

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}} = -\nabla \tilde{p} + (\tilde{T} - \tilde{\mu}) \mathbf{e}_z + \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{T} - \tilde{w} = \nabla^2 \tilde{T} \quad (9)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mu} - R_0^{-1} \tilde{w} = \tau \nabla^2 \tilde{\mu} \quad (10)$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad (11)$$

となる。ここで、 Pr はプラントル数、 τ は拡散比、 R_0 は密度比、 R_{aT} はレイリー数であり、それぞれ

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa_T}, \quad \tau = \frac{\kappa_\mu}{\kappa_T} \quad (12)$$

$$R_0 = \frac{\alpha |T_{0z} - T_{0z}^{ad}|}{\beta |\mu_{0z}|} = \frac{\nabla - \nabla_{ad}}{\nabla_\mu} \quad (13)$$

$$R_{aT} = \frac{\alpha g |T_{0z} - T_{0z}^{ad}| L_z^4}{\kappa_T \nu} = \left(\frac{L_z}{d}\right)^4 \quad (14)$$

で定義される。この方程式に、

$$\tilde{T} = \hat{T} e^{ilx + imy + ikz + \lambda t} \quad (15)$$

の形で擾乱を加えた場合の線形安定性解析を行うと、以下の λ に関する 3 次方程式が得られる。

$$\left(\frac{\lambda}{Pr} + K^2\right)(\lambda + K^2)(\lambda + \tau K^2) \left(\frac{K^2}{l^2 + m^2}\right) - (\lambda + \tau K^2) + R_0^{-1}(\lambda + K^2) = 0 \quad (16)$$

λ の実部が正の解は不安定である。 λ の実部が正となり、二重拡散対流が起こる領域は、

$$\mu_{0z} > 0 \text{ のとき} : 1 < R_0 < \frac{1}{\tau} \quad (17)$$

$$\mu_{0z} < 0 \text{ のとき} : 1 < R_0^{-1} < \frac{Pr + 1}{Pr + \tau} \quad (18)$$

である。前者は Fingering Convection、後者は Double-Diffusive Convection と呼ばれる。この先で

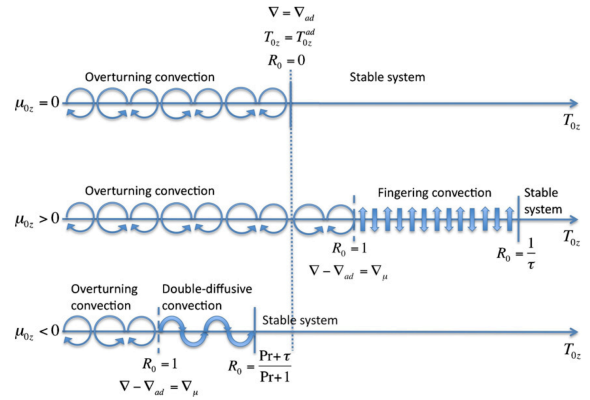


図 3: 対流の種類まとめ

は、後者の対流現象について扱う。(18) は、Ledoux の条件で安定、Schwarzschild の条件で不安定の領域である。

2 Numerical Experiments

Rosenblum et al. (2011) では、プシネスク近似の流体方程式を用いて数値計算を行った。プラントル数 $Pr = 0.3$ 、拡散比 $\tau = 0.3$ で、領域の高さ L_z 、密度比 R_0 の値を変えてさまざまなシミュレーションが行われた。

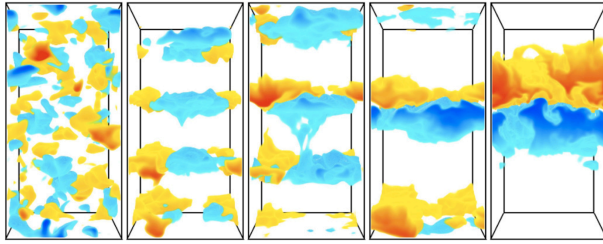


図 4: 層の形成と合体の様子。平均分子量の平均からのずれを色で示す。左から、 $t = 400, 1100, 1350, 1550, 1850$ のとき。一様乱流状態から層が形成され、その後 1 枚ずつ合体していく。

3 Result

対流による熱や組成の輸送を調べるためにヌッセルト数を用いる。ヌッセルト数 Nu は、

$$Nu = \frac{(\text{トータルフラックス})}{(\text{拡散フラックス})} \quad (19)$$

で定義される。ここでトータルフラックスは拡散のフラックスと乱流のフラックスの和である。熱と組成のヌッセルト数はそれぞれ、

$$Nu_T = \frac{-\kappa_T T_{0z} + \langle wT \rangle}{-\kappa_T T_{0z}} = 1 + \langle \tilde{w}\tilde{T} \rangle \quad (20)$$

$$Nu_\mu = \frac{-\kappa_\mu \mu_{0z} + \langle w\mu \rangle}{-\kappa_\mu \mu_{0z}} = 1 + \frac{R_0}{\tau} \langle \tilde{w}\tilde{\mu} \rangle \quad (21)$$

である。ヌッセルト数が多いことは、乱流による輸送が大きいことを意味する。

シミュレーションの結果、二重拡散対流のヌッセルト数は、 $Nu = 1 \sim 10$ 程度であった。これは、通常の対流の場合の $Nu = \text{数千}$ (Garaud et al. 2010) と比べてとても小さい。

対流の様子は、密度比 R_0 によって変化する。図 5 は、 R_0^{-1} ごとにヌッセルト数の時間変化をグラフにしたものである。前の線形解析で分かった初期の不安定性は一度飽和する。その後、 $R_0^{-1} > 1.35$ のものは飽和したままであり、一様乱流状態になっている。一方、 $R_0^{-1} < 1.35$ のものは、ヌッセルト数が増加する。これは、多層構造を形成している。またその後、層が合体するときに、ヌッセルト数は増加する。(図 6)

層形成に関連して、 γ 不安定性と呼ばれる不安定性について述べる。 γ 不安定性は、一様乱流状態で z

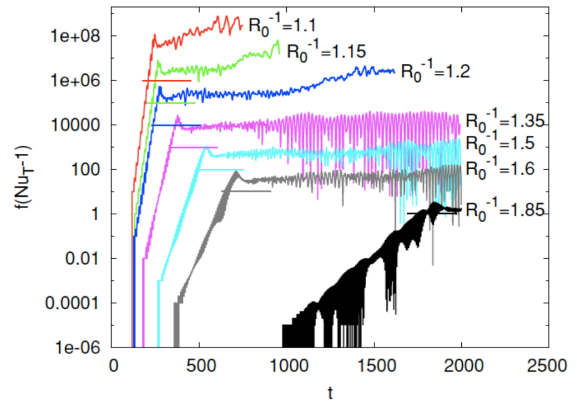


図 5: ヌッセルト数の時間変化

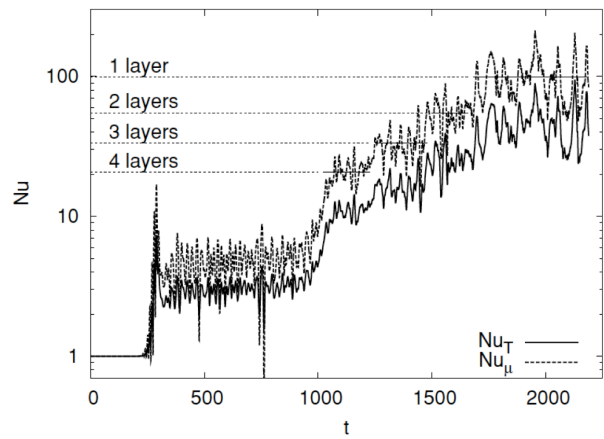


図 6: 層の合体によるヌッセルト数の変化

方向の不安定性である。ブシネスク流体の方程式の空間平均を取った方程式について線形安定性解析を行う。基礎方程式は、以下ようになる。

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + (T - \mu) \mathbf{e}_z + \nabla^2 \mathbf{u} - \frac{1}{Pr} \nabla \cdot \mathbf{R} \quad (22)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - w + \mathbf{u} \cdot \nabla T = -\nabla \cdot \mathbf{F}_T^{tot} \quad (23)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} - \frac{1}{R_0} w + \mathbf{u} \cdot \nabla \mu = -\nabla \cdot \mathbf{F}_\mu^{tot} \quad (24)$$

ここで、 \mathbf{R} はレイノルズ応力、 \mathbf{F}^{tot} はトータルフラックスを表す。Radko(2003)によると、 γ 不安定性は、平均が 0 の流れで起こる不安定性なので、 $\mathbf{u} = 0$ となり、運動方程式は無視でき、残り 2 つの方程式も

簡単になる。

$$\bar{T}(z, t) = \hat{T} e^{ikz + \Lambda t} \quad (25)$$

の形で摂動を加えると、以下の Λ に関する 2 次方程式が得られる。

$$\Lambda^2 + \Lambda k^2 \left[A_2 \left(1 - \frac{R_0}{\gamma_0} \right) + Nu_0 (1 - A_1 R_0) \right] - A_1 k^4 R_0 Nu_0^2 = 0 \quad (26)$$

ここで、

$$A_1 = R_0 \left. \frac{d(1/\gamma_{tot})}{dR_\rho} \right|_{R_0}, \quad A_2 = R_0 \left. \frac{dNu_T}{dR_\rho} \right|_{R_0} \quad (27)$$

$$Nu_0 = Nu_T(R_0), \quad \gamma_0 = \gamma_{tot}(R_0) \quad (28)$$

とおいた。(26) の解は、 $\frac{1}{\gamma_{tot}}$ が R_0^{-1} の減少関数のとき不安定である。不安定となる領域は、 $R_0^{-1} < 1.35$ であり、シミュレーションで層の形成・合体が観察される領域と一致する。図 8 は、 $R_0^{-1} = 1.2$ のシミュ

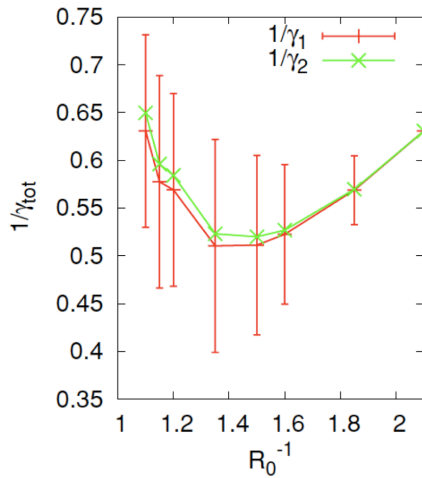


図 7: R_0^{-1} と $\frac{1}{\gamma_{tot}}$ の関係。 $R_0^{-1} < 1.35$ のとき、 $1/\gamma_{tot}$ が減少関数になっており、層形成が起こる領域と一致する。

レーションの密度のフーリエ成分の時間進化と、波数が k_3, k_4 の場合の Λ の値を示したものである。 Λ の値は、 k を大きくしていくと発散してしまうことから、波長の短い場合は γ 不安定性の理論は使えないことが分かる。実際、 k_4 に関しては一致していないが、 k_3 では、よく一致している。

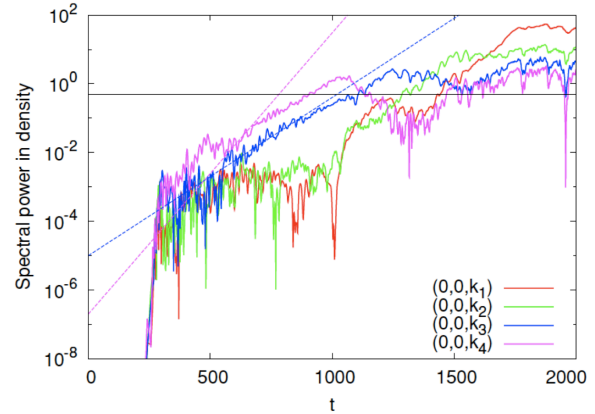


図 8: 密度のフーリエ成分の時間進化。 k_n は波長が計算領域の高さの $\frac{1}{n}$ になる波数

4 Summary & Future work

ホットジュピターの異常に巨大な半径を説明するために、二重拡散対流について知ることは重要である。

二重拡散対流による熱や拡散の輸送は通常の対流よりも小さい。また、一様乱流状態になるものと、その後多数の薄い層を形成するものがある。薄い層は、その後合体して 1 つの層になる。層が形成・合体すると、熱と組成の輸送のフラックスが増加する。一様乱流状態に対して線形解析を行うことで、層の形成が起こる場合と起こらない場合を説明することができた。

今後は、数値シミュレーションを行い、二重拡散対流の性質について更に調べ、異常に巨大な半径をもつホットジュピターの起源を解明したい。

Reference

- Rosenblum et al. 2011. ApJ
- Chabrier and Baraffe 2007. ApJ
- Leconte and Chabrier 2012. A&A
- Radko 2003. J.Fluid Mech.
- Traxler and Garaud and Stellmach 2011. ApJ