擬物理量を用いたSPH 法の開発

山本 智子 (東京工業大学大学院 理工学研究科)

概要

天文学および惑星科学の研究において、流体シミュレーションは大きな役割を果たしている。このため、高精度な流体数値計算手法の開発は研究分野の発展に大きく貢献する。計算手法には様々あるが、構造変化が大きい場合には、ラグランジュ的流体計算手法である Smoothed Particle Hydrodynamics(Lucy (1977); Gingold & Monaghan (1977), 以下 SPH 法) を用いる事が有利である。しかし、従来の SPH 法 (以下、SSPH 法) では、密度が不連続もしくは、0 となるような、接触不連続面や自由表面を適切に扱えないという問題がある。そこで、Saitoh & Makino (2013) では、密度の代わりに圧力の微分可能性と正値性を仮定して、基礎方程式の定式化を行なった SPH 法である DISPH 法が開発された。DISPH 法は接触不連続面を適切に扱うことに優れている。しかし、自由表面では圧力が 0 になるため、適切に扱う事が出来ない。そのため、自由表面を適切に扱うことができる SPH 法は未だ開発されていない。そこで本研究では、接触不連続を適切に扱うことと同時に、自由表面を適切に扱う可能性をもつ SPH 法を開発した。現段階では、接触不連続面を適切に扱うことができることを確認し、自由表面を適切に扱うことができることを示唆する。

1　はじめに

SPH 法は天文学や惑星科学の分野で様々な場面に用いられている流体計算手法である。しかし従来の SPH 法である SSPH 法は自由表面や接触不連続面の存在する系の計算において適切な計算ができないという問題が知られている。これは、SSPH 法において、密度の微分可能性と正値性を仮定して、流体の基礎方程式の定式化を行なっている為である。そのため、接触不連続面や自由表面でこの仮定に矛盾が生じ、適切な計算ができない。そこで、Saitoh & Makino (2013) では、密度の代わりに圧力の微分可能性と正値性を仮定して、基礎方程式の定式化を行なった SPH 法である DISPH 法が開発された。DISPH 法は接触不連続面を扱うことに優れている。しかし、圧力が 0 になる自由表面では、圧力の正値性の仮定と矛盾が生じ、適切な計算が出来ない。そのため、接触不連続面と自由表面で適切な計算をするには、これらの面で、微分可能かつ正値である量の導入が必要である。しかし、そのような物理量は存在しない。そこで、本研究では、新たに、オイラー方程式に現れない擬密度 y と擬質量 Z を導入し、y の微分可能性と正値性を仮定して、基礎方程式の定式化を行なった。我々は、この y に人工的な拡散を施す事で、y がいたるところで、微分可能かつ正であることを保証する。また、Z は、y の拡散が、ラグランジアンに影響しないように、y と共に変化する量である。

2　従来のSPH 法の問題点

SPH 法では流体を流体粒子の集まりとみなす。また、流体粒子 i の持つ物理量 f_i を、他の流体粒子の物理量に重み関数をかけ、足し合わせる事によって流体としての物理量を表現する。

$$f_i = \sum_j \Delta V_j f_j W_{ij}. \tag{1}$$

このとき、SSPH 法では体積要素 ΔV_j を密度 ρ_j と質量 m_i を用いて定義する。

$$\Delta V_j \equiv \frac{m_j}{\rho_j}. \tag{2}$$

このような体積決定を行なうと、SSPH 法における基礎方程式の定式化において、必然的に以下の方程式を用いなければならない。まず、連続の式の代わりに、直接密度を求める。

$$\rho_i = \sum_j m_j W_{ij}. \tag{3}$$

また運動方程式をラグランジアンから導くと、

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} &= -\left(\boldsymbol{\nabla}\frac{P_i}{\rho_i} + \frac{P_i}{\rho_i^2}\boldsymbol{\nabla}\rho_i\right) \\ &= -\sum_j m_j \left(\frac{P_j}{\rho_j^2} + \frac{P_i}{\rho_i^2}\right)\boldsymbol{\nabla}W_{ij}. \end{aligned} \tag{4}$$

これらの式から、体積決定を質量と密度で行なうことにより、密度の微分可能性と正値性を要してしまう事が分かる。そのため、接触不連続面や自由表面で適切に計算できないことが分かる。

3 新たな SPH 法の開発

接触不連続面や自由表面で適切な計算を行なうには、これらの面で、微分可能性と正値性を保つような量で体積を定義しなければならない。しかし、そのような物理量は存在しない。そこで我々は、擬物理量である擬密度 y と擬質量 Z を導入し、y を用いて体積要素を決定する。この擬密度 y を導入した SPH 法を Smoothed Particle Hydrodynamics with Smoothed Pseudo-Density(SPSPH) 法とする。

$$\Delta V_j \equiv \frac{Z_j}{y_j}. \tag{5}$$

y の微分可能性と正値性を保つため、y を、連続の式に従うだけでなく、人工的に拡散させる。

$$\frac{dy}{dt} = -y\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} - D(\boldsymbol{\nabla})^2 y. \tag{6}$$

ここで D は拡散係数である。しかし、この人工的拡散は計算に影響を与えてはならない。言い換えれば、人工的拡散は、体積要素の決定に影響してはならない。そのため、正しい体積要素の決定を行なうために、擬質量 Z を都合良く時間発展させる。正しい体積要素の決定を行なうには、人工的拡散による体積要素の時間発展が 0 でなければならない。

$$\left(\frac{d\Delta V}{dt}\right)_{\rm dif} = \frac{1}{y}\left(\frac{dZ}{dt}\right)_{\rm dif} - \frac{Z}{y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)_{\rm dif} = 0. \tag{7}$$

よって正しい体積要素の決定を行なうために、擬質量 Z を以下のように、時間発展させる。

$$\frac{dZ}{dt} = -D\frac{Z}{y}(\boldsymbol{\nabla})^2 y. \tag{8}$$

このようにして、任意の不連続面において、微分可能性と正値性を保証した y を用いて、体積要素の推定を行なう。このときに用いる方程式は、(3),(4) 式の代わりに、以下のようになる。

$$y_i = \sum_j Z_j W_{ij}. \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} &= -\frac{Z}{m}\left(\boldsymbol{\nabla}\frac{P_i}{y_i} + \frac{P_i}{y_i^2}\boldsymbol{\nabla}y_i\right) \\ &= -\sum_j \frac{Z_i Z_j}{m_i}\left(\frac{P_j}{y_j^2} + \frac{P_i}{y_i^2}\right)\boldsymbol{\nabla}W_{ij}. \end{aligned} \tag{10}$$

これらの方程式は y の微分可能性と正値性を要している事が分かる。しかし今、任意の不連続面において、y の微分可能性と正値性は保証されているので、接触不連続や自由表面で適切な計算を行なう事が出来る事が示唆される。

4 テスト計算

静水圧平衡下にある接触不連続面の実験を行なう事で、接触不連続面の計算が正しく行なわれているかをテストする。系は $-0.5 \le x < 0.5,\ -0.5 \le y < 0.5$ であり、初期条件は以下の通りである。

$$\begin{cases} \rho = 4, & -0.25 \le x \le 0.75 \text{ and } 0.25 \le y \le 0.75, \\ \rho = 1, & \text{otherwise}. \end{cases} \tag{11}$$

また、圧力 $P = 2.5$, 比熱比 $\gamma = 5/3$, 速度 $v_x = v_y = 0$ である。更に、粒子は等間隔で配置させ、SPSPH の場合、擬密度は全流体粒子で一様に 1 を持つ。図 1 は $t = 0, 1.0$ における流体の様子である。SSPH で計算を行なった場合、接触不連続において、非物理的反発力が生じ、静水圧平衡を保つ事が出来ていない事が分かる。これは接触不連続面において、密度の微分可能性と正値性を要するためである。しかしながら、SPSPH 法では、静水圧平衡を保つ事が出来ている事が分かる。これは、微分可能性と正値性が保証されている擬密度の微分可能性と正値性を要しているためである。以上より、SPSPH 法では、接触不連続面において適切な計算が出来ている事が分かる。

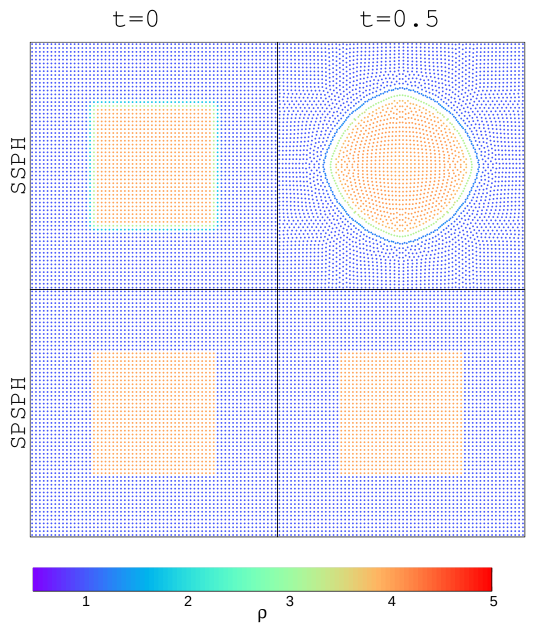

図 1: 図は静水圧平衡のテスト結果である。左は t=0, 右は t=1.0 でのテスト結果を表し、上は SSPH、下は SPSPH によるテスト結果である。

5　自由表面への対応

従来、SPH 法を用いて自由表面の計算を行なう際には、自由表面上に流体粒子などは置いていない。言い換えれば、自由表面上に全物理量が 0 となるような空間が生じていた。そのため、密度の不連続性が生じ、SSPH では適切な計算を行なう事が出来なかった。しかし、実際の現象を扱う際には、例えば、水の表面などは空気に覆われている。つまり、表面は空気と水の密度差が大きい接触不連続面であると見なす事が出来る。そのため、もし、空気を流体粒子で表現する事が出来れば、水の表面を適切に扱う事が出来る。また、更に、非常に薄い大気を表す流体粒子を用い、自由表面を表現する事で、自由表面を適切に取り扱う事が出来る可能性をもつ。しかし非常に薄い大気を導入するには、物理量の微分可能性と正値性を仮定しない SPSPH 法での解決が望ましい。このように、SPSPH 法は自由表面を適切に計算できる可能性を持つ。

6　まとめ

従来の SPH 法は、何らかの物理量の微分可能性と正値性を仮定していた。そのため、接触不連続面や自由表面で適切な計算を行なう事が出来なかった。そこで、我々は、擬物理量を導入し、任意の物理量の微分可能性と正値性の仮定を必要としない SPH 法である SPSPH 法の開発を行なった。この結果、SPSPH 法は、接触不連続面を適切に計算できる事が分かった。更に、非常に薄い大気を表す流体粒子を用いて、自由表面においても適切に計算を行なう事が出来る事が示唆される。

謝辞

本研究は、文部科学省 HPCI 戦略プログラム分野 5「物質と宇宙の起源と構造」および計算基礎科学連携拠点元で実施した、また、JSPS 科研費 26707007 の助成を受けたものです。

参考文献

Gingold R. A., Monaghan J. J. 1977, MNRAS, 181, 375

Lucy, L. B. 1977, AJ, 82, 1013

Saitoh, T. R., & Makino, J. 2013, ApJ, 768, 44