

SPH 法による天体の衝突破壊の数値シミュレーション

杉浦 圭祐 (名古屋大学大学院 理論宇宙物理学研究室)

Abstract

天体同士の高速衝突による破壊や合体は惑星系の形成の際に非常に重要な役割を果たす。たとえば地球と月のような惑星・衛星系の形成や小天体の形成などは天体同士の衝突によって生じたと考えられている。衝突により天体がいくつもの小さな欠片に破壊されて元に戻らなくなる臨界衝突の運動エネルギーを決定することは、衝突破壊による惑星系形成のモデルの構築や天体の質量分布の見積りの為に必須である。しかしながら惑星系に存在する天体のサイズは μm サイズから 10000km サイズまで非常に幅がある上に、衝突の速度も km/s 程に及び、一方実験室での直接の衝突実験により調べられるのは非常に狭い範囲に限られており、破壊プロセスの詳細を解明できる理論はまだない。そこで、まず先行研究として Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) 法と呼ばれるラグランジュ的な流体力学の数値計算方法と高速衝突の際に有効な状態方程式を用いて、衝突破壊に必要な運動エネルギーを数値シミュレーションによって求めた方法を紹介する (Benz and Asphaug, 1999)。この方法により、衝突天体のサイズが数百 m より小さい場合自己重力よりも物質の微視的結合強度の方が重要なため、サイズが大きくなるにつれて破壊しやすくなることが分かった。一方数百 m よりサイズが大きい天体では、自己重力の効果によりサイズが大きくなると破壊しにくくなった。この結果、数百 m サイズの天体が衝突により最も壊れやすいこともわかった。しかしながら、上記の解析で仮定したモデルの妥当性や、シミュレーションに用いた計算法の精度に対しては慎重な吟味が必要である。例えば、SPH は接触不連続面や衝撃波面において物理量の空間微分の記述精度が低く、解析に誤差を与えることが懸念されている。そこで本研究では衝撃波を正しく取り扱えるゴドノフ SPH 法という方法に着目し (Inutsuka, 2002)、岩石などの高速衝突の際に有効であるとされる Tillotson の状態方程式 (Tillotson, 1962) を用いたゴドノフ SPH 法の定式化について論ずる。

1 Introduction

惑星系の形成には天体の衝突現象が非常に重要な役割を果たす。高い運動エネルギーを持った天体が衝突すると破壊が起きて天体のサイズを小さくし、低い運動エネルギーで衝突すれば天体同士が合体して天体の成長を引き起こすが、その両方ともが惑星系の形成に必要不可欠である。たとえば地球への質量降着は合体現象の例であるし、月や小惑星の形成は天体の破壊によってできたと考えられている。したがって衝突により天体がいくつもの小さな欠片に破壊されて元に戻らなくなる臨界衝突の運動エネルギーを決定することは、衝突破壊による惑星系形成のモデルの構築や天体の質量分布の見積りの為に必須である。

本研究ではまず先行研究として衝突の臨界エネルギーを Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) 法

という流体力学の数値計算法と高速衝突の際に有効な Tillotson の状態方程式 (Tillotson, 1962) を用いて数値シミュレーションによって求めた方法 (Benz and Asphaug, 1999) を紹介する。この方法により衝突の臨界エネルギーのサイズ依存性と最も破壊しやすいサイズを求めることができた。

しかしながら先行研究で用いられている標準 SPH 法では衝撃波が適切に扱われておらず、結果に影響を与えている可能性がある。そこで衝撃波を適切に扱うことができるゴドノフ SPH 法 (Inutsuka, 2002) という方法を紹介し、Tillotson の状態方程式を用いたゴドノフ SPH 法の定式化について論ずる。

2 先行研究

Benz and Asphaug. (1999) の先行研究では SPH

法, Tillotson の状態方程式を用いて、塑性効果入りの弾性体モデルと物質の微視的なひびの効果をモデル化したものを加え、数値計算を行うことにより臨界エネルギーを求めた。3次元の数値計算を用いて様々な状況設定で非常に広い範囲のサイズの天体の臨界エネルギーを求めた研究は以前にはなく、非常に有用な研究である。

SPH 法とは流体力学の数値計算法の一つで、粒子を用いたラグランジュ的な方法である。この方法では空間の密度分布を、空間に配置された固有の質量を持つ粒子がそのまわりに作る密度分布を足し合わせて表現する。空間のある点 x における密度は式 1 のように表現される。

$$\rho(x) = \sum_j m_j W(x - x_j, h) \quad (1)$$

ここで m_j は j 粒子の質量、 h はスムージング長、 W はカーネル関数である。カーネル関数は粒子の広がり方を表し、たとえばガウシアン型のカーネル関数は式 2 のように表される。

$$W(x, h) = \left[\frac{1}{h\sqrt{\pi}} \right]^d \exp\left(-\frac{x \cdot x}{h^2}\right) \quad (2)$$

ただし d は空間の次元である。

各粒子に働く力なども広がりを持った粒子の平均の力などとして表現され、この定式化のもとで離散化された運動方程式とエネルギー方程式は標準 SPH 法では式 3,4 のようになる。

$$\dot{v}_i = - \sum_j m_j \left[\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} \right] \frac{\partial}{\partial x_i} W(x_i - x_j, h) \quad (3)$$

$$\dot{u}_i = \frac{1}{2} \sum_j m_j \left[\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} \right] (v_i - v_j) \frac{\partial}{\partial x_i} W(x_i - x_j, h) \quad (4)$$

ここで u は内部エネルギー、 P は圧力であり、添字はそれぞれ i もしくは j 粒子の物理量であることを表す。

Tillotson の状態方程式は高速衝突の際によく従う状態方程式で、具体的には理想気体の状態方程式と液体の状態方程式をあわせて、その中のパラメータを衝突実験のデータとフィットして作られた状態方程式である。圧縮されている状態 ($\rho > \rho_0$) もしくは

温度が低く膨張している状態 ($\rho < \rho_0$ かつ $u < u_{iv}$) では状態方程式は

$$P = \left[a + \frac{b}{(u/u_0\eta^2) + 1} \right] \rho u + A\mu + B\mu^2 \quad (5)$$

と表される。ただし ρ_0 は平均密度、 u_{iv} は蒸発し始める内部エネルギー、 $\eta = \rho/\rho_0, \mu = \eta - 1$ であり、 a, b, A, B, u_0 は物質ごとに異なるパラメータである。温度が高く膨張している状態 ($\rho < \rho_0$ かつ $u > u_{cv}$) では理想気体に近づけるために式 6 のように表される。

$$P = a\rho u + \left[\frac{b\rho u}{(u/u_0\eta^2) + 1} + A\mu e^{-\beta(\rho_0/\rho-1)} \right] e^{-\alpha(\rho_0/\rho-1)^2} \quad (6)$$

ただし u_{cv} は完全に蒸発してしまう内部エネルギー、 α, β は理想気体への漸近を調節するパラメータである。

弾性体モデルやひびモデルについては、自己重力が卓越するサイズや高速な衝突ではあまり効いてこないので本研究では考慮しなかった。したがってその紹介も省くが、これらのモデルについては Benz and Asphaug. (1993) の中で詳しく述べてある。

図 1 はこの先行研究で求められた衝突の臨界エネルギーのサイズ依存性のグラフである。

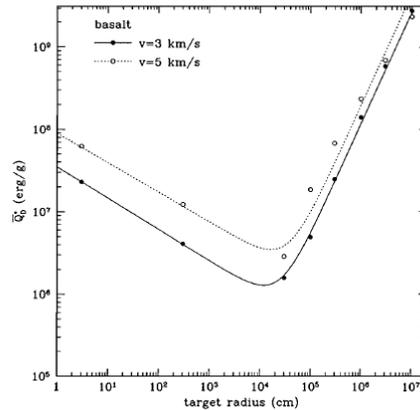


図 1: 先行研究によって求められた臨界エネルギーのサイズ依存性

横軸はターゲット天体のサイズ、縦軸の Q_D^* はターゲット天体を半分に割砕くために必要な運動エネルギー

ギーをターゲット天体の質量で割ったものである。また天体の材質は玄武岩で、二本の線はそれぞれ投射物の速度が違うものの結果を表している。ここから天体のサイズが小さいうちは物質の微視的強度が効いていてサイズが大きくなるにつれて壊しやすくなり、サイズが大きくなると自己重力で再び寄り集まる効果が効いてきてサイズが大きくなるにつれて壊しにくくなるのがわかる。また最も壊しやすいサイズが数 100m 程度であることもわかった。

3 先行研究の問題点と解決法

しかしながら標準 SPH 法では衝撃波を正しく表すことができない可能性があるという問題点がある。標準 SPH 法では衝撃波を取り扱うために運動方程式とエネルギー方程式に次の形の人工粘性項を導入している。

$$\Pi_{ij} = -\alpha \frac{Cs_{ij}\mu_{ij}}{\rho_{ij}} + \beta \frac{\mu_{ij}^2}{\rho_{ij}} \quad (7)$$

ただし Cs は音速、 α と β は人工粘性係数、 $\mu_{ij} = \frac{h(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^2 + 0.01h^2}$ であり、 ij の添字があるものは i と j 粒子の平均である。この人工粘性法の問題点は衝撃波の精度が α と β の値によってしまい精度の良い解を得るためにはこの大きさを調整しないといけないことや、強い衝撃波では流体の突抜けがおこることなどが挙げられる。これらの問題を解決するためにゴドノフ SPH 法という方法が考案されている。

この方法では i 粒子の物理量と j 粒子の物理量を初期条件に持つ衝撃波管問題（リーマン問題）を時間発展させたときの中間状態の圧力と速度を厳密に解き、それらの物理量を運動方程式とエネルギー方程式に用いる。この定式化の元での運動方程式とエネルギー方程式は式 8 と 9 のようになる。

$$\dot{\mathbf{v}}_i = -2 \sum_j m_j P_{ij}^* V_{ij}^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) \quad (8)$$

$$\dot{u}_i = -2 \sum_j m_j P_{ij}^* V_{ij}^2 (\mathbf{v}_{ij}^* - \mathbf{v}_i^*) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) \quad (9)$$

ここで P_{ij}^* と \mathbf{v}_{ij}^* は i と j 粒子の間でリーマン問題を解いたときの圧力と速度、 V_{ij}^2 は近傍の密度分布で決まる変数で ρ^{-2} の次元を持つ。また $\mathbf{v}_i^* = \mathbf{v}_i + \frac{1}{2}\mathbf{v}_i \Delta t$ である。リーマン問題は比熱比 γ が一定の理想気体については厳密に解くことができ、Bram Van Leer. (1977) などにその解き方が示されている。

しかし状態方程式を理想気体のものから Tillotson の状態方程式にかえると、もはや比熱比 γ は定数ではなく密度と温度の関数となってしまう。結果的に理想気体のポワソンの関係式 $P = K\rho^\gamma$ などを使用することができなくなり、リーマン問題の厳密解を導くことが非常に困難になる。

これを回避するために本研究では、 i 粒子と j 粒子の間のリーマン問題を解く際に比熱比は $\gamma = (\gamma_i + \gamma_j)/2$ で一定の理想気体と近似してしまっ、理想気体としてリーマン問題を解くという方法をとった。ただし $\gamma_i = \gamma(\rho_i, u_i), \gamma_j = \gamma(\rho_j, u_j)$ であり、 $\gamma(\rho, u)$ はその定義から一般の状態方程式に対して次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \gamma(\rho, u) &\equiv \frac{C_p}{C_v} = \frac{\rho}{P(\rho, u)} \frac{dP(\rho, u)}{d\rho} \\ &= \frac{\rho}{P(\rho, u)} \left[\frac{\partial P}{\partial \rho} + \frac{\partial P}{\partial u} \frac{du}{d\rho} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

また熱力学代第二法則から断熱過程のとき

$$du = -PdV = \frac{P}{\rho^2} d\rho \rightarrow \frac{du}{d\rho} = \frac{P}{\rho^2} \quad (11)$$

が成り立つ。この 2 式から $\gamma(\rho, u)$ を計算することができる。

この近似方法は狭い範囲で比熱比があまり変化せず一定の場合は精度が良いと考えられるが、衝撃波のような狭い範囲で比熱比が急激にかわる場合はあまり良い近似にならないと考えられる。しかしながら比熱比が急激にかわる衝撃波がたつ数値実験を、 i と j 粒子のリーマン問題を解く際に $\gamma = (\gamma_i + \gamma_j)/2$ を用いるか $\gamma = \sqrt{\gamma_i \gamma_j}$ を用いるか二通りの方法で実行したところ、衝撃波の強さや速さなどはほとんどかわらないという結果が得られた。この結果はたとえ Tillotson の状態方程式を用いたとしても、ゴドノフ SPH 法に用いるための衝撃波管問題を解く際に理想気体の状態方程式を用いても結果にはほとんど影響を与えないということを示唆している。

4 Result

今回開発した Tillotson の状態方程式を用いたゴドノフ SPH 法のスキームを試すために、平衡形状球の衝突の数値実験を行った。図 2 は初期状態の、3 は衝突した後のスナップショットである。それぞれ色は密度を表している。ただし Tillotson の状態方程式のパラメーターは Benz and Asphaug. (1999) の玄武岩の値を用いた。

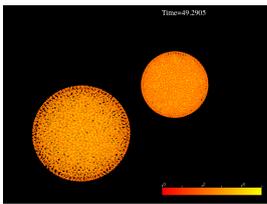


図 2: 初期状態

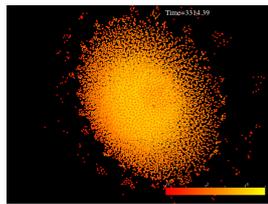


図 3: 衝突後

この図から衝突し破壊される様子がよく表されていることがわかる。ここで注意したいのは、用いている方程式は弾性体のものではなく流体の方程式で、ただ単に状態方程式を岩石を表すことができるものに変えただけで破壊される様子を表すことができたということである。

したがって今回開発した Tillotson の状態方程式を用いたゴドノフ SPH 法の数値計算が可能であること、またこれだけで岩石の衝突実験の様子をよく表すことができる、ということが示された。

5 Discussion

今回の研究で安定に Tillotson の状態方程式を用いたゴドノフ SPH 法が計算可能であるということが示されたが、まだ計算の回数が少なく一部の状況に対してしか計算をしていないため、もしかしたら他の状況のときには正しい結果を返さない可能性もある。したがっていろんな状況の時に計算を行ってみて、非物理的な計算をしないということも確かめる必要がある。また質量放出率についても計算をしてみ、見た目だけではなく定量的にも従来の衝突実験などと同じ結果を示すことができるということも確認しておくべきではない。

一方本スキームは Tillotson の状態方程式という岩石の蒸発の効果が入った状態方程式を用いているため、蒸発が効いてくるようなダイナミクスに対しても有効である可能性もある。これからの研究ではこのような可能性も追求していきたいと思う。

Reference

- Benz and Asphaug. 1999. Icarus 142,5-20(1999)
- Shu-ichiro Inutsuka. 2002. Journal of Computational Physics 179,238-267(2002)
- Tillotson, J.H. 1962. Rep.GA-3216, July 18, Gen.At., San Diego.
- Benz and Asphaug. 1993. Icarus 107,98-116(1994)
- Bram Van Leer. 1977. Journal of Computational Physics 32,101-136(1979)