

Brans-Dicke 理論における重力波の解析

小川 茂樹 (東京理科大学大学院 理学研究科)

Abstract

スカラー・テンソル理論とは重力が Einstein の計量テンソル場だけでなくスカラー場によっても媒介されると考えるものであり、現在の宇宙の加速膨張を説明することが出来ることから活発に研究されている。スカラー・テンソル理論では、重力波は通常の $+$ ・ \times モードに加えスカラーモードも存在する。今回はスカラー・テンソル理論の典型である Brans-Dicke 理論における重力波を導出した後、観測に与える影響について議論した。

1 Introduction

重力波は、Einstein が一般相対性理論の中でその存在を予言しており、「時空のさざなみ」と表現される。一般相対性理論の枠組みでは、物質との相互作用が非常に小さい、光速で伝播するなどの特性を持っている。重力波の存在は J.Taylor と R.Hulse により証明されている。1974 年に彼らは、PSR1913+16 という連星パルサーの公転周期の変化が重力波の放出によるものだと観測結果と比較したところ、ほぼ一致することを示し重力波の存在を間接的に証明したが、実際に重力波を直接的に観測した例は未だない。しかし現在、世界各地で次世代のレーザー干渉計重力波検出器の稼働が予定されており、これにより重力波の初検出の期待が高まっている。重力波の検出は重力理論の検証においても大変有効である。

スカラー・テンソル理論とは重力が Einstein の計量テンソル場だけでなくスカラー場によっても媒介されると考えるものであり、現在の宇宙の加速膨張を説明することが出来ることから活発に研究されている。今回の研究では代表的なスカラー・テンソル理論の 1 つである Brans-Dicke 理論における重力波を導出した後、観測に与える影響について議論する。

2 Brans-Dicke 理論

計量とスカラー場が共存する重力理論は一般相対性理論を拡張する理論として考える事ができる。そのような理論をスカラー・テンソル理論と呼び、Brans-

Dicke 理論はその代表格である。作用は

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\varphi R - \frac{\omega_{\text{BD}}}{\varphi} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi \right] + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m[\psi_m, g_{\mu\nu}] \quad (1)$$

となる。ここで、 φ はスカラー場、 ω_{BD} は BD パラメータ、 ψ_m は物質場である。右辺の第一項は非最小結合と呼ばれ、スカラー場と計量場との結合を表し、第二項はスカラー場の非正準な運動項、第三項は物質のラグランジアンで計量と物質場に依存し、 \mathcal{L}_m 自体にはスカラー場は含まない。

$g_{\mu\nu}$ 、 φ について変分をとると、場の方程式は以下のように求まる。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi}{\varphi} T_{\mu\nu} + \frac{\omega_{\text{BD}}}{\varphi^2} \left[\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla\varphi)^2 \right] \quad (2)$$

$$+ \frac{1}{\varphi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \varphi - g_{\mu\nu} \square\varphi)$$

$$(3 + 2\omega_{\text{BD}}) \square\varphi = 8\pi T \quad (3)$$

(3) 式より $\omega_{\text{BD}} \rightarrow \infty$ でスカラー場の物質結合が消滅し、GR に帰着することが分かる。

3 Brans-Dicke 理論における重力波

Brans-Dicke 理論における重力波は (2)、(3) 式を線形化する事で得る事が出来る。そこで、以下の摂

動を考える。

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (4)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi \quad (5)$$

ここで、 $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ 、 $|\delta\varphi| \ll 1$ で、 φ_0 はバックグラウンドにおける量である。この時のクリストッフェル記号、リッチテンソル、リッチスカラーは h の 1 次まで計算すると以下のように表す事が出来る。

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2}(\partial_{\gamma}h_{\beta}^{\alpha} + \partial_{\beta}h_{\gamma}^{\alpha} - \partial^{\alpha}h_{\beta\gamma}) \quad (6)$$

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_{\alpha}\partial_{\mu}h_{\nu}^{\alpha} + \partial_{\nu}\partial^{\alpha}h_{\mu\alpha} - \partial_{\alpha}\partial^{\alpha}h_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}h) \quad (7)$$

$$\mathcal{R} = \partial^{\beta}\partial^{\alpha}h_{\alpha\beta} - \partial_{\beta}\partial^{\beta}h \quad (8)$$

以上より真空 ($T_{\mu\nu} = 0$) における線形化された場の方程式は

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\mathcal{R} = -\partial_{\mu}\partial_{\nu}\Phi + \eta_{\mu\nu}\square\Phi \quad (9)$$

$$\square\Phi = 0 \quad (10)$$

ここで $\Phi(x) \equiv -\delta\varphi/\varphi_0$ である。次に新たな場を以下のように定義する

$$\theta_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h + \eta_{\mu\nu}\Phi \quad (11)$$

$$\theta \equiv -h + 4\Phi \quad (12)$$

これより場の方程式は $\theta_{\mu\nu}$ を用いて

$$\square\theta_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\partial^{\alpha}\theta_{\alpha\nu} - \partial_{\nu}\partial^{\alpha}\theta_{\alpha\mu} + \eta_{\mu\nu}\partial^{\beta}\partial^{\alpha}\theta_{\alpha\beta} = 0 \quad (13)$$

と表す事が出来る。ここで、 $\theta_{\mu\nu}$ と θ に関するゲージ変換を考える

$$\theta'_{\mu\nu} = \theta_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\xi_{\mu} - \partial_{\mu}\xi_{\nu} + \eta_{\mu\nu}\partial^{\alpha}\xi_{\alpha} \quad (14)$$

$$\theta' = \theta + 2\partial^{\alpha}\xi_{\alpha} \quad (15)$$

いま ξ^{μ} を $\square\xi_{\nu} = \partial^{\mu}\theta_{\mu\nu}$ と選ぶと

$$\partial^{\mu}\theta'_{\mu\nu} = 0 \quad (16)$$

となる。これはローレンツゲージである。このとき (13) 式は以下のように与えられる。

$$\square\theta'_{\mu\nu} = 0 \quad (17)$$

これは波動方程式であり、この時の解は平面波になる。

$$\theta_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp(ik^{\alpha}x_{\alpha}) \quad (18)$$

$$\Phi = B \exp(ik^{\alpha}x_{\alpha}) \quad (19)$$

ここで (') は省略した。 $\square\xi^{\mu} = 0$ より ξ の任意性が残っているため、 ξ を

$$\begin{cases} \square\xi^{\mu} = 0 \\ \partial_{\mu}\xi^{\mu} = -\frac{1}{2}\theta + \Phi \end{cases} \quad (20)$$

とする。もし、 $\theta = 2\Phi$ のとき

$$h_{\mu\nu} = \theta_{\mu\nu} \quad (21)$$

となり、 $h_{\mu\nu}$ は平面波である事が分かる。また $\theta_{\mu\nu}$ は以下の条件を満たす。

$$\begin{cases} \partial^{\mu}\theta_{\mu\nu} = 0 \\ \theta = 2\Phi \end{cases} \quad (22)$$

重力波が z 方向に伝播するとき、 k^{μ} は

$$k^{\mu} = (k, 0, 0, k) \quad (23)$$

であり、 $\theta_{\mu\nu}$ の振幅 $A_{\mu\nu}$ は $\partial^{\mu}\theta_{\mu\nu} = 0$ より

$$A_{0\nu} = -A_{3\nu} \quad (24)$$

$$A_{\nu 0} = -A_{\nu 3} \quad (25)$$

$$A_{00} = -A_{30} = A_{33} \quad (26)$$

となる。ここで $A_{\mu\nu}$ のゲージ変換を考えると、

$$A'_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} - ik_{\mu}\tilde{\xi}_{\nu} - ik_{\nu}\tilde{\xi}_{\mu} \quad (27)$$

$A'_{\mu\nu}$ の成分は

$$A'_{00} = A_{00} + 2ik\tilde{\xi}_0 \quad (28)$$

$$A'_{11} = A_{11}, A'_{22} = A_{22}, A'_{21} = A_{21} \quad (29)$$

$$A'_{31} = A_{31} - ik\tilde{\xi}_1, A'_{32} = A_{32} - ik\tilde{\xi}_2 \quad (30)$$

となり、 $A'_{00} = A'_{31} = A'_{32} = 0$ となるように $\tilde{\xi}_0, \tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2$ を選ぶ。また $h = 2\Phi$ より

$$h = h_{11} + h_{22} = 2\Phi \quad (31)$$

となる。このゲージ下では摂動の計量 $h_{\mu\nu}$ は

$$h_{\mu\nu} = A^{(+)}(t-z)e_{\mu\nu}^{(+)} + A_{\mu\nu}^{(\times)}(t-z)e^{(\times)\mu\nu} + \Phi(t-z)e_{\mu\nu}^{(s)} \quad (32)$$

ここで、 $e_{\mu\nu}^{+, \times, s}$ は以下の通りである。

$$e_{\mu\nu}^{(+)} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{\mu\nu}^{(\times)} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (33)$$

$$e_{\mu\nu}^{(s)} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ここで $A^{(+)}e_{\mu\nu}^{(+)} + A^{(\times)}e_{\mu\nu}^{(\times)}$ は通常の重力波である。また、 $\Phi e_{\mu\nu}^{(s)}$ はスカラー重力波を表す。

4 偏光モード

このゲージにおける線素はスカラー波のみに限ったとき、

$$ds^2 = -dt^2 + (\delta_{ij} + h_{ij}(t-z))dx^i dx^j \quad (34)$$

$$= -dt^2 + (1 + \Phi(t-z))(dx^2 + dy^2) + dz^2$$

となる。スカラー重力波の波長は質点間の距離より十分大きいとし、ビームスプラッターを座標の原点に置く。また、周波数 f は $1/T_0$ より十分小さいとする。ここで、 T_0 は原点から質点に向かうビームの時間である。原点から座標 X, Y, Z の質点の距離は

$$L = \sqrt{(1 + \Phi_0)(X^2 + Y^2) + Z^2} \quad (35)$$

となり、波が伝播する方向の横方向の座標に作用する。もし、 $L_0 \equiv \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = T_0$ とすると、 Φ_0 の 1 次の次数で ($Z=0$ のとき)

$$L = \left(1 + \frac{1}{2}\Phi_0\right) L_0$$

($X=Y=0$ のとき)

$$L = L_0$$

となる。以上より、スカラー波も通常の+、×偏光のように横方向である。また、スカラー波の入射方向の位相のズレは

$$\Delta\varphi(\theta, \phi) = -\frac{1}{2}\Phi_0 \cdot \varphi_{arm} \cdot \sin^2 \theta \cos 2\phi \quad (36)$$

となる。干渉計の角感度は図 1 に示される。

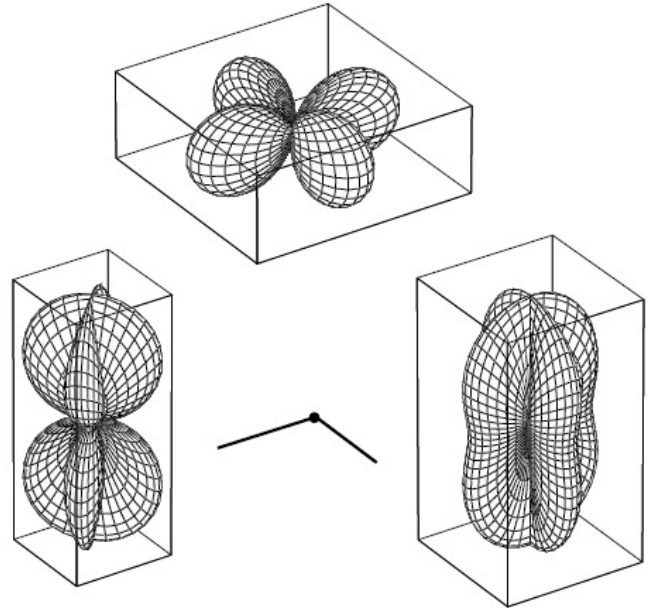


図 1: スカラーモード (上)、+モード (右下)、×モード (左下)

5 Conclusion

今回は、スカラー・テンソル理論の代表格である Brans-Dicke 理論における重力波の解析を行った。その結果、導出された偏光モードには通常の+・×モードの他にスカラーモードが存在する事が分かった。また、スカラーモードは+・×モード同様に横方向に作用する。今後の方針としては、重力波の具体的な波源を仮定することで観測にどのような影響を与えるか議論したい。また、より一般化されたスカラー・テンソル理論である Horndeski 模型などにおける重力波について同様の解析を行っていきたい。

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

Reference

Michele Maggiore and Alberto Nicolis. 2000. Phys. Rev. D 62, 024004

Kent Yagi. 2013. Int.J.Mod.Phys. D22 (2013) 1341013