

重力凹レンズを起こす球対称モデルにおける光の伝播時間の遅れ

中島 昂己 (弘前大学大学院 理工学研究科)

Abstract

我々は重力レンズにおいて従来の凸型だけでなく凹型の重力レンズを起こす球対称なモデルを仮定し、その時空における光の伝播時間の遅れについて議論する。光の伝播時間の遅れが計量のパラメータにどのように依存するかを定性的に調べ、銀河系内のパルサー観測において観測結果から時空の性質を決定出来ることを示した。

1 Introduction

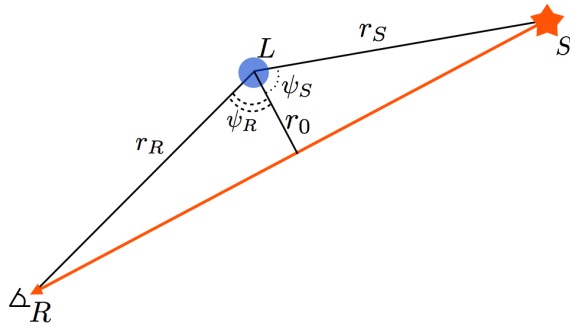


図 1: time delay の概略

一般相対論によると、重力場中を光が通る場合平坦な時空を通る場合に比べて光の伝播時間は遅れる (time delay)。これは 1960 年代に太陽系における実験で調べられている (Shapiro et al. 1968)。

time delay は光源が相対的に運動している場合、ドップラーシフトのような振動数変化を起こす (frequency shift)。探査機カッシーニによって行われた 2000 年代の実験結果は一般相対論の最も強い制限になっている (Bertotti et al. 2003)。太陽系の他には銀河系内にある連星パルサーの観測によって精度良く確かめられている。

これまでに我々は時空の計量において距離の依存性を一般化したモデルを仮定して弱場における重力

レンズ効果の一般化を行ってきた。

このモデルは時空の性質を球対称静的とし、微少量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ と $1/r^n$ からなる項によって以下のように計量が表される。

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{r^n} \right) c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{r^n} \right) dr^2 + r^2 d\Omega^2 + O(\varepsilon_1 \varepsilon_2, \varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2) \quad (1)$$

$$n > 0, \frac{\varepsilon_1}{r^n} \ll 1, \frac{\varepsilon_2}{r^n} \ll 1, d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は質量等から決まるパラメータで、 n は座標原点からの距離 r のべき数を表す。このモデルは様々な弱場の球対称モデルを再現可能で、 $n = 1$ では Schwarzschild、 $n = 2$ では Ellis ワームホール、 $n = 0$ では等温球といったよく知られた時空だけでなく Ellis ワームホールといったエキゾチックな物質・エネルギーで構成される時空も表すことが出来る。

この球対称モデルを用いて、我々はこれまでに弱場における様々な重力レンズ効果を一般化してきた (Kitamura et al. 2013, Izumi et al. 2013)。

いくつかの重力レンズ効果について観測結果からレンズ天体の判別 (よく知られている Schwarzschild 時空なのか、それ以外の球対称時空なのか) が可能であることを確かめ、エキゾチックな物質・エネルギーが起こす重力レンズ効果について定性的に示した。

本研究では重力レンズ観測以外に光が重力場中を通る際に受ける効果としてパルサーを光源とした time delay、frequency shift の一般化を行う。そして観測結果から重力源である天体が Sch とそれ以外の球対称時空を区別出来るのかを検証する。

2 Methods

(1) 式から光のラグランジアンは

$$L = - \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{r^n}\right) c^2 \dot{t}^2 + \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{r^n}\right) \dot{r}^2 + r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \quad (2)$$

“ \cdot ” = $\frac{d}{d\lambda}$, λ : アフィンパラメータ

時空が球対称なので、一般性を失わずに $\theta = \pi/2$ としてよい。

光のエネルギー E と角運動量 h は保存量で

$$E \equiv \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{r^n}\right) c^2 \dot{t}, \quad h \equiv r^2 \dot{\phi}$$

保存量 E 、 L と $ds^2 = 0$ より光の到着時刻に関して

$$\left(\frac{dr}{cdt}\right)^2 \approx \left(1 - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{r^n}\right) \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{r^n} + \frac{\varepsilon_1}{r_0^n}\right)\right) \quad (3)$$

r_0 : 光と中心天体との最近接距離

$r = r_0 / \cos \psi$ とすると、光が光源 S から観測者 R へ伝播する際の平坦な時空を通る場合との到着時間差は

$$\Delta T = \frac{1}{cr_0^{n-1}} \int_{\psi_S}^{\psi(O)} \frac{\varepsilon_1 (1 - \cos^n \psi)}{\sin^2 \psi} d\psi + \int_{\psi_S}^{\psi(O)} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \cos^{n-2} \psi d\psi \quad (4)$$

本研究では銀河系内とその近辺にあるパルサーを光源とするため、光の最近接距離 r_0 と r_S , r_R に対して $\frac{r_0}{r_S}, \frac{r_0}{r_R} \rightarrow 0$ の極限をとると $\psi_S, \psi_R \rightarrow \pi/2$ である。これより n の偶奇に対して (4) 式は

n : 偶数 $n = 2p$

$$\delta t_{2p} \approx \frac{\pi (2p-3)!!}{c (2p-2)!!} \frac{2p\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{r_0^{2p-1}}. \quad (5)$$

n : 奇数 $n = 2p+1$

$$\delta t_{2p+1} \approx \frac{2 (2p-2)!!}{c (2p-1)!!} \frac{(2p+1)\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{r_0^{2p}}. \quad (6)$$

となる。

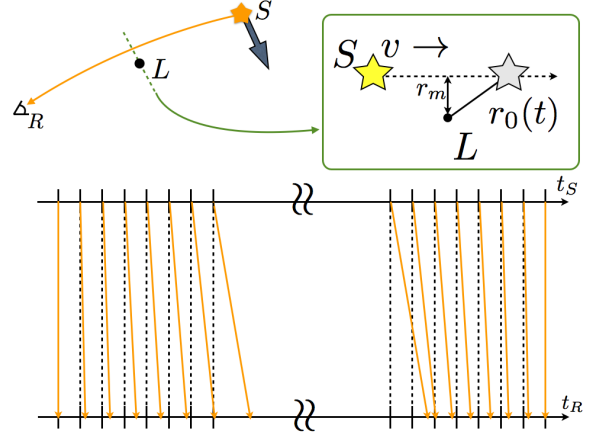


図 2: frequency shift の概略

3 Discussion

光源が相対的に運動している場合、time delay は相対論的な振動数変化 (frequency shift) を起こす。この frequency shift y は

$$y \equiv - \frac{d\Delta T(t)}{dt} \quad (7)$$

と定義される。

図 2 のように観測者との間に重力源があり、光源 (パルサー) は相対的に運動しているとする。

この時の光源の運動を図 1 のように重力源のある面 (レンズ面) に写影する時、レンズ面上の光源は速さ v で等速直線運動しているとする。この時、光 (レンズ面上での光源) と重力源との距離 r_0 は時間に依存して変化し、 r_0 の最小値 r_m を用いて以下のように表される。

$$r_0(t) = \sqrt{r_m^2 + v^2 t^2}$$

(5)、(6) 式より、 n の偶奇に対して y は

n : 偶数 $n = 2p$

$$y_{2p} = \frac{\pi (2p-1)!!}{c (2p-2)!!} \frac{\varepsilon}{r_0^{2p+1}} v^2 t, \quad (8)$$

n : 奇数 $n = 2p+1$

$$y_{2p+1} = \frac{2 (2p)!!}{c (2p-1)!!} \frac{\varepsilon}{r_0^{2p+2}} v^2 t. \quad (9)$$

のようになる (ただし、 $\varepsilon = n\varepsilon_1 + \varepsilon_2$)。

今回は重力源が $n = 1, 2, 3, 4$ と $\varepsilon > 0, \varepsilon < 0$ の場合において予想される光の伝播時間遅れと frequency shift をプロットした (図 3、4)。

各時空による time delay、frequency shift の比較は time delay、frequency shift に対する n の依存性がよく読み取れるようにピーク位置を揃える。ここで $\varepsilon > 0, n = 1$ は Schwarzschild 時空に相当するため、 $10M_{\odot}$ の Schwarzschild 時空による time delay、frequency shift を基準に ε, n 依存性を調べた。

なお、光源の速さ v は銀河中心に対する銀河系内天体の典型的な公転速度 $v = 200[\text{km/sec}]$ 、 r_0 の最小値 r_m は 40AU とした。

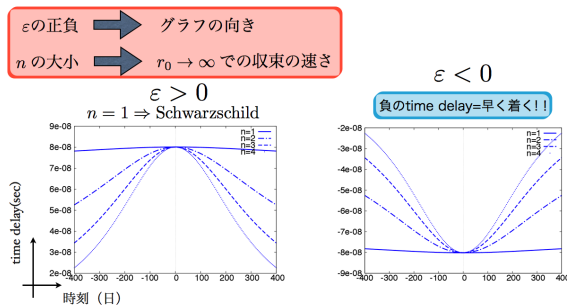


図 3: time delay における ε と n の依存性

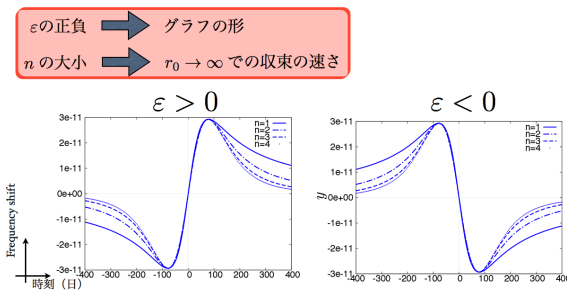


図 4: frequency shift における ε と n の依存性

図 3、4 から、プロットしたどの時空でも光源が重力源から離れていく場合、time delay の効果が弱くなり frequency shift も 0 に漸近していくことがわかる。ただし、 $n = 1$ では time delay がほとんど弱く

ならないのに対して、 $n = 2, 3, 4$ の時空では r_0 の変化に対する time delay の効果の変化が強くなる。これに伴って、frequency shift も r_0 の変化に対して $n = 1$ 以外の時空は $n = 1$ の時空より早く 0 に収束する。

また、time delay の符号、frequency shift の形は ε の符号に依存して変化する。 $\varepsilon < 0$ の場合、time delay も負になるため、この時空は平坦な時空を通る場合よりも早く到着すると考えられる。

これらのことから、time delay 及び frequency shift 観測から得られた波形の解析によって重力源の時空構造を Schwarzschild 時空のような標準的な時空かエキゾチックな物質・エネルギーによる時空かを判別することができることがわかった。

4 Conclusion

- 重力凹レンズを起こす球対称モデルで time delay と frequency shift を一般化
- 観測で得られた波形から n の値と ε の正負が判別出来、どのような性質の時空なのか推定が可能

Reference

- [1] I. I. Shapiro et al. Phys. Rev. Lett, 20, 1265-1269 (1968).
- [2] B. Bertotti et al. Nature 425(2003)
- [3] T. Kitamura, K. Nakajima, and H. Asada, Phys. Rev. D 87, 027501(2013).
- [4] K. Nakajima, K. Izumi, and H. Asada, arXiv:1404.2720 [gr-qc]