

## 一般相対論的な三体問題に対する三角解の線形安定性

山田 慧生 (弘前大学大学院 理工学研究科)

## Abstract

本研究では, Newton 重力における Lagrange の正三角解に対応する, 一般相対論的な任意質量の三体問題に対する三角形円軌道平衡解 [Yamada & Asada (2012)] の線形安定性を調べた. Lagrange の正三角解が線形安定であるための条件は天体の質量比に対するそれとして与えられる. 今回, 三体のうち一つを質量ゼロのテスト粒子とする制限三体問題における先行研究 [Douskos & Perdios (2002); Singh & Bello (2014)] と比較し, 一般相対論的な三体相互作用がこの条件に如何に影響するかを議論する.

## 1 導入

現在, 日本の KAGRA をはじめとして世界中で次世代の地上重力波検出計画が盛んであり, 重力波を通じた一般相対論の検証が注目されている. これらの重力波検出器では, 重力波の波形を予測していなければ実際の検出が困難であり, そのため, 重力波の源となる天体ダイナミクスの理解は必要不可欠である. 実際, 有望な重力波源である連星ブラックホール等の軌道運動や合体によって放出される重力波に関する理論研究が活発に行われている.

他方で, 一般相対論的な三体系ダイナミクスの理解の重要性が増している. 一般相対論的な多体問題では, 天体の運動方程式に Newton 重力における多体問題には現れない  $m_1 \times m_2 \times m_3$  (添字は天体の番号) のような質量の三重積が現れる. これまで, このような一般相対論的な多体相互作用の議論は不十分であった. しかし, 重力波源となり得る一般相対論的な三体系が発見され (Ransom *et al.* 2014), また, 連星の外側に第三体が存在する場合, それによって連星のダイナミクスや重力波放出に強い影響の現れることが指摘されている (Wen 2003; Seto 2013).

Newton 重力における三体問題の解析的な特殊解として Lagrange の正三角解が知られており, 太陽系においても対応する天体 -Troja 群- が発見されている. 正三角解では三体はそれぞれ正三角形の頂点にあり, 互いに相対距離を変えずに円運動する. また, この正三角解から放出される重力波は連星系から放出されるそれと酷似しているが, 将来的な精密観測によって連星系とは区別されることが指摘されて

いる (Asada 2009).

Lagrange の正三角解に一般相対論的な効果を取り入れた円軌道平衡解はすでに任意質量に対しても調べられている. この時, 天体配置は一般相対論的な効果によって Newton 重力での正三角配置からずれることがわかっている (Krefetz 1967; Ichita, Yamada, & Asada 2011; Yamada & Asada 2012). この一般相対論的な三角形円軌道平衡解 (三角解) の三体相互作用を通じた一般相対論の検証を議論するためには, この解の安定性を調べることが必要である.

Newton 重力において, Lagrange の正三角解に対する線形安定性の条件は質量比に対するそれとして与えられる (Gascheau 1843; Routh 1875):

$$\frac{m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1}{M^2} < \frac{1}{27}. \quad (1)$$

ここで,  $M = m_1 + m_2 + m_3$  は系の総質量である. また, 一般相対論的な制限三体問題について安定性の条件は

$$\frac{m_1 m_2}{M^2} < \frac{1}{27} \left( 1 - \frac{391}{54} \varepsilon \right), \quad (2)$$

となり, 一般相対論な効果によって Newton 重力の場合に比べ解が不安定になりやすいことが指摘されている (Douskos & Perdios 2002; Singh & Bello 2014). ただし, 後でも述べるように,  $\varepsilon$  は一般相対論的な効果の大きさを表す微小なパラメータである.

本研究では, 一般相対論的な任意質量の三体問題に対する三角形円軌道平衡解の線形安定性を調べ, 一般相対論的な三体相互作用が安定性の条件に如何に影響するかを議論する.

## 2 1PN 近似における三角解

本研究では、1 次の post-Newton (1PN) 近似を用いる。この近似では、天体の受ける重力が弱くほとんど Newton 的であるとし、また、天体の運動速度が光速に比べて十分小さいと仮定する。すなわち、

$$\varepsilon \equiv \frac{GM}{c^2 r} \sim \left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1. \quad (3)$$

ここで、 $G$  は重力定数、 $c$  は光速、 $M$  は系の総質量、 $r$  は天体間距離、 $v$  は天体の速度である。1PN 近似では  $\varepsilon$  の 1 次まで考慮する。以下では、 $G = c = 1$  の単位系を用いる。1PN 近似における多体系の運動方程式は Einstein-Infeld-Hoffmann (EIH) の運動方程式として知られている (Asada, Futamase, & Hogan 2011; Misner, Thorne, & Wheeler 1973) :

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_K = & \sum_{A \neq K} \mathbf{r}_{AK} \frac{m_A}{r_{AK}^3} \left[ 1 - 4 \sum_{B \neq K} \frac{m_B}{r_{BK}} \right. \\ & - \sum_{C \neq A} \frac{m_C}{r_{CA}} \left( 1 - \frac{\mathbf{r}_{AK} \cdot \mathbf{r}_{CA}}{2r_{CA}^2} \right) \\ & \left. + \dot{r}_K^2 + 2\dot{r}_A^2 - 4\dot{\mathbf{r}}_A \cdot \dot{\mathbf{r}}_K - \frac{3}{2} (\dot{\mathbf{r}}_A \cdot \mathbf{n}_{AK})^2 \right] \\ & - \sum_{A \neq K} \dot{\mathbf{r}}_{AK} \frac{m_A}{r_{AK}^2} \mathbf{n}_{AK} \cdot (3\dot{\mathbf{r}}_A - 4\dot{\mathbf{r}}_K) \\ & + \frac{7}{2} \sum_{A \neq K} \sum_{C \neq A} r_{CA} \frac{m_A m_C}{r_{AK} r_{CA}^3}. \end{aligned} \quad (4)$$

この運動方程式を満たすような三体問題に対する三角形円軌道平衡解は、 $I, J = 1, 2, 3$  として、天体間距離を  $r_{IJ} = r_N (1 + \varepsilon \rho_{IJ})$  と置くことで与えられる (図 1)。ここで、 $r_N$  は Newton 重力における正三角解での天体間距離で、 $\rho_{IJ}$  は各天体間距離に対する 1PN 補正である。三体の共通重心を座標原点とし、一般相対論的な補正によっては三角形の面積が変わらないように系のスケールを固定すると、Newton 重力における正三角解に対する 1PN 補正はそれぞれ、

$$\begin{aligned} \rho_{12} &= \frac{1}{24} [(\nu_2 - \nu_3)(5 - 3\nu_1) - (\nu_3 - \nu_1)(5 - 3\nu_2)], \\ \rho_{23} &= \frac{1}{24} [(\nu_3 - \nu_1)(5 - 3\nu_2) - (\nu_1 - \nu_2)(5 - 3\nu_3)], \\ \rho_{31} &= \frac{1}{24} [(\nu_1 - \nu_2)(5 - 3\nu_3) - (\nu_2 - \nu_3)(5 - 3\nu_1)], \end{aligned} \quad (5)$$

ここで  $\nu_I = m_I/M$  は総質量に対する各天体の質量比である。このとき、1PN 近似の下での各天体の角速度は共通で  $\omega = \omega_N + \varepsilon \omega_{PN}$  となる。ここで、 $\omega_N$  は Newton 重力における天体の角速度、

$$\omega_{PN} = -\frac{1}{16} [29 - 14(\nu_1 \nu_2 + \nu_2 \nu_3 + \nu_3 \nu_1)] \omega_N, \quad (6)$$

である (Yamada & Asada 2012)。

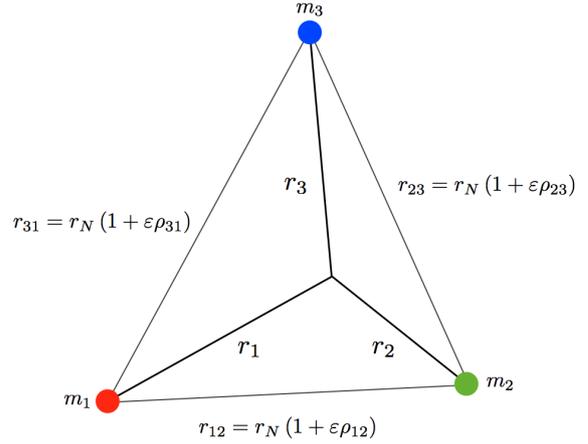


図 1: 1PN 近似における三角配置

## 3 摂動の運動方程式

簡単のため、運動平面における摂動を考える。ここで、天体は 3 つあるので摂動の自由度は  $2 \times 3 = 6$  であるが、座標原点を共通重心に固定することで 2 つ自由度を消せて 4 となる。本研究では、先行研究 (Routh 1875) にならって次の摂動を考える (図 2) :

$$r_{12} = r_N (1 + \varepsilon \rho_{12} + \delta \chi_{12}), \quad (7)$$

$$r_{31} = r_N (1 + \varepsilon \rho_{31} + \delta \chi_{31}), \quad (8)$$

$$\varphi_{23} = \frac{\pi}{3} + \sqrt{3} \varepsilon \rho_{23} + \delta \psi_{23}, \quad (9)$$

$$\theta_{12} = \theta_{12|0} + \delta \sigma_{12}. \quad (10)$$

ここで、 $\delta \ll \varepsilon$  は摂動の大きさを定める微小パラメータであり、 $\chi_{IJ}$  は各天体間距離に対する摂動、 $\psi_{23}$  は  $m_1$  の内角に対する摂動、および  $\sigma_{12}$  は天体の角速度に対する摂動を与える。なお、 $\theta_{12|0}$  は無摂動における値であり

$$\dot{\theta}_{IJ|0} = \omega_N + \varepsilon \omega_{PN}, \quad (11)$$

である．

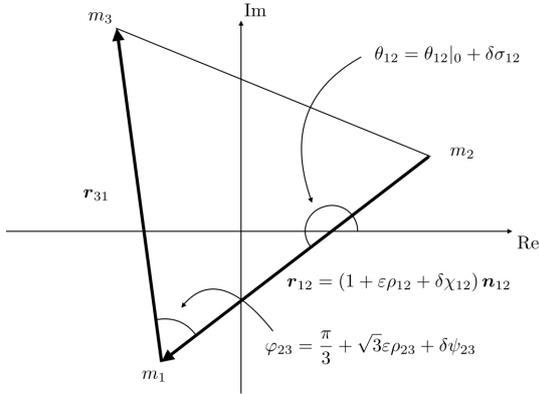


図 2: 1PN 近似における三角配置に対する摂動

これらの摂動を加えて EIH の運動方程式を書き下すと，その無摂動項は三角解そのものを与える．したがって，摂動に対する運動方程式は，例えば， $m_2$  から  $m_1$  へ向かう相対位置ベクトルに対して， $\delta$  の 1 次の精度で

$$\begin{aligned} & \left[ (D^2 - 3)\chi_{12} - 2D\sigma - \frac{9}{4}\nu_3 X - \frac{3\sqrt{3}}{4}\nu_3\psi_{23} \right] \\ & + \varepsilon \left[ -\frac{1}{32} \left\{ 4\sqrt{3}(\nu_1 - \nu_2)(7 - 9\nu_3)\nu_3 D + (36\nu_2^3 \right. \right. \\ & + 234\nu_1\nu_2^2 - 146\nu_2^2 + 261\nu_1^2\nu_2 - 488\nu_1\nu_2 + 155\nu_2 \\ & + 63\nu_1^3 - 155\nu_1^2 + 137\nu_1 - 585) \left. \right\} \chi_{12} - \frac{1}{24}(27\nu_2^3 \\ & + 135\nu_1\nu_2^2 - 21\nu_2^2 + 135\nu_1^2\nu_2 - 210\nu_1\nu_2 + 24\nu_2 \\ & + 27\nu_1^3 - 21\nu_1^2 + 24\nu_1 - 155)D\sigma - \frac{1}{32}\nu_3 \left\{ 4\sqrt{3} \right. \\ & \times (9\nu_1\nu_2 + 10\nu_2 + 9\nu_1^2 - 6\nu_1 - 4)D - (216\nu_2^2 \\ & + 288\nu_1\nu_2 - 154\nu_2 + 171\nu_1^2 - 38\nu_1 + 420) \left. \right\} X \\ & + \frac{1}{32}\nu_3 \left\{ 4(18\nu_2^2 + 27\nu_1\nu_2 - 2\nu_2 + 9\nu_1^2 + 14\nu_1 \right. \\ & - 12)D + \sqrt{3}(51\nu_2^2 + 114\nu_1\nu_2 + 2\nu_2 + 87\nu_1^2 - 120\nu_1 \\ & + 155) \left. \right\} \psi_{23} \left. \right] = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

ここで， $D = d/dt$  は時間微分を表し， $X \equiv \chi_{31} - \chi_{12}$ ， $\sigma = \sigma_{12}$  とした． $m_1$  から  $m_3$  へ向かう相対位置ベクトルに対する運動方程式からも同様にして摂動に対

する運動方程式が得られる．

結果として，形式的に摂動の運動方程式は行列表示を用いて

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_{12} \\ \sigma \\ X \\ \psi_{23} \end{bmatrix} = 0, \quad (13)$$

のように書くことが出来る．

## 4 安定性の条件

摂動に対する運動方程式を解くために，各摂動は

$$\chi_{12} = Ae^{\lambda t}, \quad \sigma = Be^{\lambda t}, \quad X = Ce^{\lambda t}, \quad \psi_{23} = De^{\lambda t}, \quad (14)$$

と表されると仮定する．ただし， $A, B, C, D, \lambda$  は定数である．任意の摂動に対して運動方程式が満たされるためには，(13) の左辺の一つ目の行列の行列式がゼロで無くてはならない：

$$\begin{aligned} & \left[ \lambda^6 + 2 \left( 1 - \frac{1}{8}\varepsilon [77 - 10(\nu_1\nu_2 + \nu_2\nu_3 + \nu_3\nu_1)] \right) \lambda^4 \right. \\ & + \left( \left[ 1 + \frac{27}{4}(\nu_1\nu_2 + \nu_2\nu_3 + \nu_3\nu_1) \right] - \frac{1}{16}\varepsilon [308 \right. \\ & + 1265(\nu_1\nu_2 + \nu_2\nu_3 + \nu_3\nu_1) + 162\nu_1\nu_2\nu_3 - 378 \\ & \times (\nu_1\nu_2 + \nu_2\nu_3 + \nu_3\nu_1)^2 \left. \right] \lambda^2 + \left( \frac{27}{4}(\nu_1\nu_2 + \nu_2\nu_3 \right. \\ & + \nu_3\nu_1) - \frac{9}{32}\varepsilon [521(\nu_1\nu_2 + \nu_2\nu_3 + \nu_3\nu_1) - 72\nu_1\nu_2\nu_3 \\ & \left. \left. - 126(\nu_1\nu_2 + \nu_2\nu_3 + \nu_3\nu_1)^2 \right] \right) \left. \right] = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

ただし， $\lambda \neq 0$  を仮定した．これは  $\lambda^2$  に対する 3 次方程式であるから， $\varepsilon$  の 1 次の精度で解析的に解くことが出来る．

有限の値を持つ摂動に対して，三角解が線形安定であるためには，根  $\lambda$  が純虚数，すなわち， $\lambda^2$  が負の実数であることが必要十分条件である．結果として，質量比に対する安定性の条件

$$\nu_1\nu_2 + \nu_2\nu_3 + \nu_3\nu_1 + \frac{15}{2}\varepsilon\nu_1\nu_2\nu_3 < \frac{1}{27} \left( 1 - \frac{391}{54}\varepsilon \right), \quad (16)$$

を得る． $\varepsilon \rightarrow 0$  の Newton 極限では

$$\nu_1\nu_2 + \nu_2\nu_3 + \nu_3\nu_1 < \frac{1}{27}, \quad (17)$$

となり， $\nu_3 \rightarrow 0$  の制限三体極限では

$$\nu_1\nu_2 < \frac{1}{27} \left( 1 - \frac{391}{54}\varepsilon \right), \quad (18)$$

となる．これらは，それぞれ (1) および (2) と一致しており，先行研究 (Gascheau 1843; Routh 1875; Douskos & Perdios 2002; Singh & Bello 2014) を再現する．

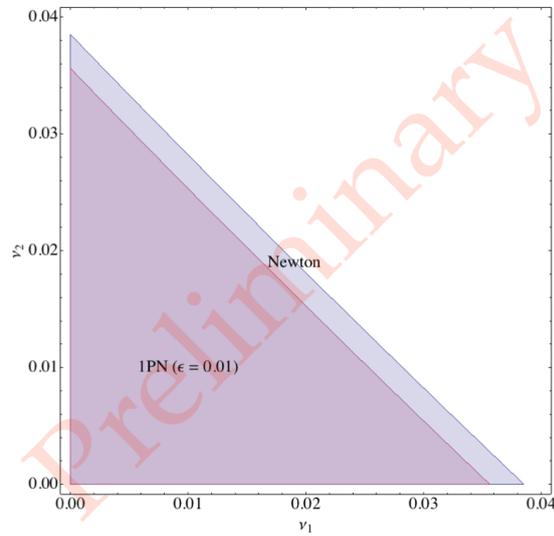


図 3: 三角配置の安定な質量比．相対論的な効果によって安定な領域は狭くなる． $\varepsilon = 0.01$  とした．

## 5 考察とまとめ

我々は 1PN 近似を用いて，一般相対論的な三体問題に対する三角解の線形安定性を調べ，一般質量での質量比に対する安定性の条件を導出した．

一般相対論的な効果によって，三角解の安定性に対する条件は質量比により強い制限を与える (図 3)．一方，解が安定な領域においては，質量の三重積の効果は非常に小さく実効的に無視できる．実際， $\nu_1 = \nu_2 = 0.02$  の時では  $15\nu_1\nu_2\nu_3/2 \approx 0.003 \ll 391/1458 \approx 0.268$  であり，条件式の右辺第二項の相対論的な効果と比較しても十分小さい．しかしながら，一般相対

論的な三体相互作用は解の不安定領域を広げる役割を担っており，三体系の不安定性やダイナミクスに密接に関わっていることが示唆される．

重力波放出に伴って，連星系や三体系は天体間距離や角速度に反作用の影響を受ける．そこで，おおざっぱには，今回考慮した摂動を重力波放出による反作用であると捉えることも出来よう．そのように考えると，重力波放出に伴い，一般相対論的な効果が無視出来なくなると三角解の不安定領域は大きくなり，三角解が崩壊すると思われる．もし，その崩壊に伴い特徴的な重力波が放出されれば，三体系の情報を取り出すことが可能かもしれない．このような重力波放出の反作用による三角解の天体ダイナミクスの系統的な議論は現在準備中である．

## Reference

- H. Asada, Phys. Rev. D **80**, 064021 (2009).
- H. Asada, T. Futamase, and P. Hogan, *Equations of Motion in General Relativity* (Oxford University, New York, 2011).
- C. N. Douskos and E. A. Perdios, Celest. Mech. Dyn. Astron. **82**, 317 (2002).
- G. Gascheau, C. R. Acad. Sci. **16**, 393 (1843).
- T. Ichita, K. Yamada, and H. Asada, Phys. Rev. D **83**, 084026 (2011).
- J. Singh and N. Bello, Astrophys. Space Sci. **351**, 491 (2014).
- E. Krefetz, Astron. J. **72**, 471 (1967).
- C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, New York, 1973).
- S. M. Ransom *et al.*, Nature **505**, 520 (2014).
- B. J. Routh, Proc. Lond. Math. Soc. **6**, 86 (1875).
- N. Seto, Phys. Rev. Lett. **111**, 061106 (2013).
- L. Wen, Astrophys. J. **598**, 419 (2003).
- K. Yamada and H. Asada, Phys. Rev. D **86**, 124029 (2012).