

Langevin description of gauged scalar fields in a thermal bath

宮本 裕平 (東京大学大学院理学系研究科)

Abstract

我々は初期宇宙の高温状態における場の振動の散逸を明らかにすることを念頭に、ゲージ場と相互作用するスカラー場が熱浴中で振動している状況を考えた。このような場の運動は、揺動と散逸の効果が取り入れられたランジュバン方程式で記述される。本研究ではゲージ相互作用から導出される揺動と散逸項に対しても、その間に揺動散逸関係が成り立つことを確認した。

1 Introduction

近年の観測技術の向上により、宇宙の歴史を遡ることが可能になってきた。しかし、再結合よりもはるかに以前の宇宙の姿は未だ解明されたとはいいがたく、極初期宇宙の物理現象を明らかにするには人工的な粒子加速器以外の方法が不可欠である。そこで我々は初期宇宙の相転移現象に注目した。相転移現象は初期のインフレーション機構のみならず、位相欠陥 (A. Vilenkin and E. P. S. Shellard (2000)) や泡衝突による重力波の生成 (M. Kamionkowski, A. Kosowsky and M. S. Turner (1994))、宇宙膨張史の変更 (R. Easther, J. T. Giblin, Jr., E. A. Lim, W. -I. Park and E. D. Stewart (2008)) など、初期宇宙と観測を結びつける上で重要である。

相転移現象は多くの場合有効ポテンシャルを用いて記述されるが、動的な現象の記述には有効作用によるアプローチが必要である。有効ポテンシャルは準静的な運動に対しては有用な量であるが、あらゆる相転移現象の記述が可能なのではないのである。

有効作用から導かれる運動方程式は、ランダム変数を含むランジュバン方程式となる。この「ランダム力」の有無により、相転移の様相が大きく異なる場合も先行研究 (M. Yamaguchi and J. Yokoyama (1997)) で調べられている。しかし、これまでに他のスカラー場やフェルミオン場と相互作用するスカラー場の有効作用についての研究はなされていたが (M. Yamaguchi and J. Yokoyama (1997), J. Yokoyama (2004))、ゲージ場と相互作用する場合には明らかではなかった。そこで、我々は最も単純なゲージ相互作用であるスカラー量子電磁理論において有効作用とそ

こから導かれるスカラー場の運動について考察した。

2 Effective Action

クーロンゲージ $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ におけるスカラー量子電磁理論のラグランジアンは

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{A}_T \cdot \partial^\mu \vec{A}_T \\ & - ie \vec{A}_T (\Phi \vec{\nabla} \Phi^\dagger - \Phi^\dagger \vec{\nabla} \Phi) - e^2 \vec{A}_T \cdot \vec{A}_T \Phi^\dagger \Phi \\ & + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} A_0)^2 - ie A_0 (\Phi \Phi^\dagger - \Phi^\dagger \Phi) + e^2 A_0^2 \Phi^\dagger \Phi \end{aligned} \quad (1)$$

である。このラグランジアンから実時間有限温度の場の理論の枠内で有効作用を計算する。有効作用を非摂動的に求める方法は確立されておらず、結合定数について摂動展開した有効作用を計算することができる。また、有効作用の計算は 1 粒子既約ダイアグラムの計算に帰着する。 $\mathcal{O}(e^2)$ のオーダーでは 1 粒子既約なダイアグラムは 2 つあり (図 1)、それらを評価することで次のような有効作用 Γ が得られる。

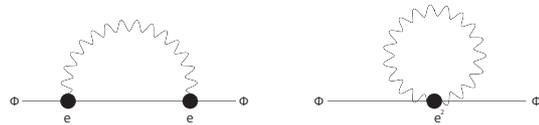


図 1: $\mathcal{O}(e^2)$ の 1 粒子既約ダイアグラム。

$$\begin{aligned}
 & \Gamma \\
 &= \int d^4x \left[\phi_\Delta^\dagger(x) \left(-\partial_\mu \partial^\mu - m^2 - e^2 \frac{T^2}{6} \right) \phi_c(x) \right. \\
 & \quad \left. + \phi_\Delta(x) \left(-\partial_\mu \partial^\mu - m^2 - e^2 \frac{T^2}{6} \right) \phi_c(x)^\dagger \right] \\
 & - 4ie^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3} e^{-i(p_1+p_2)\cdot(x_1-x_2)} \\
 & \quad \times \mathcal{P}_{ij}(\vec{p}_1) p_{2i} p_{2j} \Theta(t_2 - t_1) \\
 & \quad \times [g_{p_1}^<(t_1, t_2) G_{p_2}^<(t_1, t_2) - g_{p_1}^>(t_1, t_2) G_{p_2}^>(t_1, t_2)] \\
 & \quad \times \left(\phi_c^\dagger(x_1) \phi_\Delta(x_2) + \phi_c(x_1) \phi_\Delta^\dagger(x_2) \right) \\
 & - 2ie^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3} e^{-i(p_1+p_2)\cdot(x_1-x_2)} \\
 & \quad \times \mathcal{P}_{ij}(\vec{p}_1) p_{2i} p_{2j} \\
 & \quad \times [g_{p_1}^<(t_1, t_2) G_{p_2}^<(t_1, t_2) + g_{p_1}^>(t_1, t_2) G_{p_2}^>(t_1, t_2)] \\
 & \quad \times \phi_\Delta^\dagger(x_1) \phi_\Delta(x_2) \\
 & + \Gamma_{A_0}, \tag{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \Gamma_{A_0} \\
 &= -e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\vec{k} - \vec{q}|^2} \cdot \left(\frac{1}{2} + n_p \right) \\
 & \quad \times \left(\frac{\omega^2}{\omega_p} + \omega_p \right) \left(\tilde{\phi}_c(k) \tilde{\phi}_\Delta^\dagger(k) + \tilde{\phi}_\Delta(k) \tilde{\phi}_c^\dagger(k) \right) \\
 & \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\tilde{\phi}_c(k) \tilde{\phi}_\Delta^\dagger(k) + \tilde{\phi}_\Delta(k) \tilde{\phi}_c^\dagger(k) \right) \tilde{f}_{A_0}(k) \tag{3}
 \end{aligned}$$

3 Langevin equation

計算された有効作用は複素数となる。有効作用には次のような虚部がある。

$$\begin{aligned}
 i\Gamma \supset & - \int d^4x_1 d^4x_2 \mathcal{N}(x_1 - x_2) \\
 & \left(\phi_{\Delta R}(x_1) \phi_{\Delta R}(x_2) + \phi_{\Delta I}(x_1) \phi_{\Delta I}(x_2) \right) \tag{4}
 \end{aligned}$$

この項はノイズ変数として次のように書き直すことができる。実部と合わせて、

$$\begin{aligned}
 e^{i\Gamma} &= \int \mathcal{D}\xi_a \mathcal{D}\xi_b P[\xi_a] P[\xi_b] \exp \left[i\Gamma_{\text{real}} + \right. \\
 & \quad \left. + i \int d^4x (\xi_a(x) \phi_{\Delta R}(x) + \xi_b(x) \phi_{\Delta I}(x)) \right] \\
 & \equiv \int \mathcal{D}\xi_a \mathcal{D}\xi_b P[\xi_a] P[\xi_b] \exp \left[iS_{\text{eff}} \right] \tag{5}
 \end{aligned}$$

のようにまとめることができる。運動方程式はフーリエ空間で

$$\begin{aligned}
 & (-\omega^2 + k^2 + m^2) \tilde{\phi}(\omega, \vec{k}) \\
 & + \left(e^2 \frac{T^2}{6} - \tilde{f}_{A_0}(\omega, \vec{k}) + \int \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\mathcal{P}}{\omega - \omega'} i\tilde{C}(\omega', \vec{k}) \right) \\
 & \times \tilde{\phi}(\omega, \vec{k}) + \frac{1}{2} \tilde{C}(\omega, \vec{k}) \tilde{\phi}(\omega, \vec{k}) = \tilde{\xi}(\omega, \vec{k}) \tag{6}
 \end{aligned}$$

となり、ノイズのパワースペクトル \mathcal{N} と散逸項の間には

$$\frac{\tilde{\mathcal{N}}(\omega, \vec{k})}{\frac{-1}{\omega} \text{Im}\tilde{C}(\omega, \vec{k})} = \frac{\omega e^{\beta\omega} + 1}{2 e^{\beta\omega} - 1} = \omega \left(\frac{1}{2} + n_\omega \right) \tag{7}$$

という揺動散逸関係が満たされる。

4 Discussion

これまでは主に e^2 のオーダーでの有効作用と散逸について考えてきたが、実はこの次数では散逸率はゼロとなる。ゼロでない散逸率をもたらすのは $\mathcal{O}(e^4)$ の相互作用であり、例えば

$$\Gamma_D = \frac{e^4 |\phi(t)|^2}{4\pi M} (1 + 2N_M). \tag{8}$$

のような散逸率が得られる。

Reference

- A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, Cambridge University Press, Cambridge, England, 2000
- M. Kamionkowski, A. Kosowsky and M. S. Turner, Phys. Rev. D **49**, 2837 (1994) [astro-ph/9310044].
- R. Easther, J. T. Giblin, Jr., E. A. Lim, W. - I. Park and E. D. Stewart, JCAP **0805**, 013 (2008) [arXiv:0801.4197 [astro-ph]].
- M. Yamaguchi and J. Yokoyama, Phys. Rev. D **56**, 4544 (1997) [hep-ph/9707502].
- J. Yokoyama, Phys. Rev. D **70**, 103511 (2004) [hep-ph/0406072].