

超巨大ブラックホールと恒星質量ブラックホールの比較

本田扶紀 (日本大学大学院 理工学研究科)

概要

超巨大質量ブラックホールや恒星質量ブラックホールなど、様々な質量のブラックホールが存在すると考えられている。この研究の目的は、それらブラックホール天体が示す観測的特徴が、ブラックホールの質量にどのように依存するのかを明らかにすることである。そこで、強度変化とそれに伴うスペクトル変化に着目し、それらの関係を相互相関関数を用いて定量的に評価する。現在、相互相関関数のプログラムと shot-noise などのシミュレーションのデータを作成し、プログラムの計算結果を検証している。しかし、実際に観測されるデータは非周期的で離散的であるので、離散相関関数 (Discrete Correlation Function, Edelson and Krolik 1988) を用いて、解析を行う。今後は、ISS の日本実験棟「きぼう」の船外実験プラットフォームに設置された X 線観測装置である MAXI や NASA の X 線天文衛星 RXTE で観測された非周期的で離散的な実際のデータを使い、質量依存性を明らかにしていく。

1 目的

超巨大質量ブラックホールとは銀河の中心にあるような太陽の数百万倍から数億倍程度の質量をもつ天体のことである。一方、恒星質量ブラックホールは太陽の 30 倍程度の質量の恒星が超新星爆発を起こしたときに生まれる天体である。

それら天体の観測的特徴の質量依存性を明らかにすることが本研究の目的である。

- 重力, ガス圧, 遠心力が釣り合っている。
- 円盤の構造は定常的で回転軸に対して軸対象。
- 幾何学的に薄い。 $\frac{H}{r} \ll 1$
- 光学的に厚い (不透明)。
光学的厚み $\tau = \kappa \rho H = \kappa \Sigma / 2 \gg 1$
(面密度: $\Sigma = 2\rho H$)

2 降着円盤の標準モデルについて

質量に依存しないことを明らかにするためにはブラックホールを観測することが必要である。しかし、ブラックホールは目に見えないため観測することができない。そこで降着円盤を観測する。降着円盤とはブラックホールの周りにまとわりついている円盤状のガスのことである。それを観測することでブラックホール周辺で何が起きているかを調べることができる。

よって、ここでは光学的に厚い降着円盤の標準モデル (標準降着円盤モデル [3]) について説明する。

1. 基本設定と基本仮定

- 中心天体の重力が卓越しており、円盤状のガス雲のどこでもケプラー運動をしている。
 $v_r \ll v_\varphi$

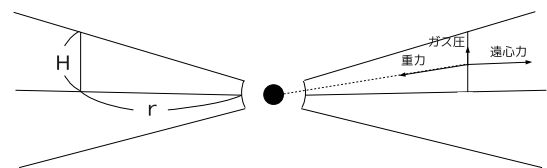


図 1: 降着円盤を横から見た図

2. 標準モデルの変数

- v_r : 半径方向の速度
- v_φ : 回転方向の速度
- H: 円盤の厚み
- ρ : ガスの密度
- P: 圧力

- T : 温度
- κ : 不透明度
- $t_{r\varphi}$: 粘性テンソル

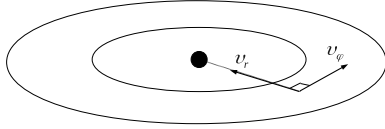


図 2: ガスの速度方向

上記の変数を r と質量降着率 \dot{M} の関数で表すためにいろいろな保存則から方程式を導き、連立して解く。

3 標準モデルの基本方程式 [3]

(a) 連続の式

降着円盤の表面からガスが逃げたり、表面に余分なガスが降ることはない状態にあるとすると降着円盤を通して内向きに単位時間あたりに流れるガスの流量は円盤中どこでも一定である。

$$\dot{M} = -2\pi r \times 2H \times \rho v_r \quad (1)$$

$$= -4\pi r H \rho v_r \quad (2)$$

$$= -2\pi r v_r \Sigma \quad (3)$$

(b) 運動方程式 (重力と遠心力の釣り合い)

$$\frac{GMm}{r^2} = m \frac{v_\varphi^2}{r} \quad (4)$$

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad (5)$$

(c) 角運動量輸送の式 (角運動量の保存)

降着円盤は差動回転をしているため粘性が起きる。粘性によって単位時間あたりに外側に流れる角運動量と粒子が内側に押される力の和が一定であるという式。

$$\dot{M}l + 2\pi r \times 2H \times r t_{r\varphi} = const. \quad (6)$$

(l : 単位質量あたりの角運動量)

内縁では粘性は働かなくなると仮定すると $r = r_{in}$ で $t_{r\varphi} = 0$ なので

$$\dot{M}(\sqrt{GMr} - \sqrt{GMr_{in}}) = -2\pi r^2 t_{r\varphi} \times 2H \quad (7)$$

$$\rightarrow 2t_{r\varphi}H = -\frac{\dot{M}}{2\pi} \sqrt{\frac{GM}{r^3}} \left(1 - \sqrt{\frac{r_{in}}{r}}\right) \quad (8)$$

(d) 静水圧平衡の式 (鉛直方向の力学平衡)

圧力と重力の鉛直成分が釣り合っていることを静水圧平衡という。

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dz} = \frac{GM}{R^2} \sin \theta = \frac{GM}{R^2} \frac{z}{R} \sim \frac{GMz}{r^3} \quad (9)$$

$$(R = \sqrt{r^2 + z^2} \sim r)$$

さらに近似する。

$$\frac{P}{\rho H} = \frac{GMH}{r^3} \quad (10)$$

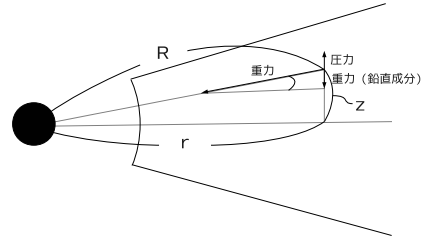


図 3: ガスの釣り合い

(e) エネルギー方程式 (鉛直方向のエネルギー収支)

降着円盤モデルでは単位面積あたりの加熱率 Q_{vis} , 冷却率 Q_{rad} が釣り合っていると仮定しているので

$$Q_{vis} = Q_{rad} \quad (11)$$

流体力学の粘性によるエネルギー損失の式から

$$Q_{vis} = -\frac{2}{3} t_{r\varphi} \times 2H \times \Omega \quad (12)$$

$$= \frac{3GM\dot{M}}{4\pi r^3} \left(1 - \sqrt{\frac{r_I}{r}}\right) \quad (13)$$

円盤は光学的に厚いと仮定したので $\tau \gg 1$. 赤道面の温度 T_c は表面温度 T_{eff} よりかなり高いので温度勾配できる。温度勾配の中を放射が拡散していき表面から黒体放射として放たれる。

放射流束 (単位面積あたりの輸送率) は

$$F = -\frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dz} \sim \frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \frac{T_c}{H} \quad (14)$$

(放射定数 $a = 7.56 \times 10^{-15} \text{ erg/cm}^3/\text{deg}^4$, ステファンボルツマン定数 $\sigma = \frac{ac}{4}$)

円盤の単位面積あたりの放射率 Q_{rad} は

$$Q_{rad} = \frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \frac{T_c}{H} \times 2 = \frac{32\sigma T_c^4}{3\tau} \quad (15)$$

ステファンボルツマンの法則から円盤表面の単位面積あたりの放射率は $F = \sigma T_{\text{eff}}^4$

$$\frac{32\sigma T_{\text{eff}}^4}{3\tau} = 2\sigma T_{\text{eff}}^4 \rightarrow T_{\text{eff}}^4 = \frac{16T_c^4}{3\tau} \quad (16)$$

(f) 状態方程式円盤内の圧力は

$$P = P_{\text{gas}} + P_{\text{rad}} \quad (17)$$

$$= \frac{R_{\text{gas}}}{\mu} \rho T_c + \frac{aT_c^4}{3} \quad (18)$$

(P_{gas} プラズマガスの圧力, P_{rad} 光の放射圧,
 R_{gas} 気体定数, μ 平均分子量)

(g) 不透明度

$$\kappa = \kappa_{\text{es}} + \kappa_{\text{ff}} \quad (19)$$

$$= 0.40 + 0.64 \times 10^2 3\rho T^{-3.5} \text{cm}^2/\text{g} \quad (20)$$

(κ_{es} 電子散乱, κ_{ff} 自由自由吸収)

(h) 粘性に関する仮定 (アルファ則)

粘性テンソルはガスの粘り気を表しているので圧力が高くなれば粒子同士が圧迫し合って粘性テンソルも大きくなると考えられているので, 粘性テンソルはガスの圧力に比例すると仮定する.

$$t_{r\phi} = \alpha P \quad (21)$$

4 表面温度 T_{eff} の質量 M 依存性

前節 (e) のエネルギー方程式より

$$Q_{\text{vis}} = Q_{\text{rad}} \quad (22)$$

なので

$$\frac{3GM\dot{M}}{4\pi r^3} \left(1 - \sqrt{\frac{r_1}{r}}\right) = 2\sigma T_{\text{eff}}^4 \quad (23)$$

$$\rightarrow T_{\text{eff}} = \left\{ \frac{3GM\dot{M}}{8\pi\sigma r^3} \left(1 - \sqrt{\frac{r_1}{r}}\right) \right\}^{1/4} \quad (24)$$

これを r で微分すると

$$\frac{dT_{\text{eff}}}{dr} = \frac{3GM\dot{M}}{32\pi\sigma} \left(\frac{3GM\dot{M}}{8\pi\sigma r^3} \left(1 - \sqrt{\frac{r_1}{r}}\right)^{-3/4} \right) \left(-\frac{3}{r^4} + \frac{7}{2} \sqrt{\frac{r_1}{r}} \right) \quad (25)$$

$$\frac{dT_{\text{eff}}}{dr} = 0 \text{ のとき } r = \frac{49}{36} r_1$$

これは T_{eff} がピークの時の半径である. これを代入して T_{eff} の温度を求めると

$$T_{\text{eff}}^4 = \frac{6^3 \times 3^4 GM\dot{M}}{7^7 \pi \sigma r_1^3} = \frac{3^4 GM\dot{M} c^6}{7^7 \pi \sigma G^3 M^3} \quad (26)$$

$$\rightarrow T_{\text{eff}} = \left(\frac{3^4 GM\dot{M} c^6}{7^7 \pi \sigma G^3 M^3} \right)^{1/4} \quad (27)$$

ここでシュバルツシルト時空内での円軌道の最小半径がシュバルツシルト半径の3倍であることを使った.

$$r_1 = \frac{6GM^2}{c} \quad (28)$$

これより表面温度 T_{eff} は質量 $M^{-1/4}$ に比例することが分かる.

5 相関関数

相関関数とは2つの関数の類似度を数値で表したものである. 同一の関数間の相関関数を自己相関関数, 異なる関数間の相関関数を相互相関関数という. 数値の範囲は $[-1, 1]$ で2つの関数に類似性が無いときは0, 負の相関をもつ場合は-1, 正の相関をもつ場合は1になる. 正の相関があるとは, 一方の値が増える(減る)ともう一方も増える(減る)ことで, 負の相関があるとは, 一方が増える(減る)ともう一方が減る(増える)ことをいう.

$$r_{xy} \equiv \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (29)$$

$$\left(\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)$$

分子の $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})/n$ は共分散である. 共分散とは, それぞれの平均値 \bar{x}, \bar{y} からの偏差の積が平均でどれほどであるかを表したものである. これを規格化するために, それぞれの標準偏差の積で割った値が相関係数である.

これらのデータをずらしながら, 相関係数をとっていく. そのときの式は, 次のようになる.

$$r_{xy} \equiv \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-h} (x_i - \bar{x})(y_{i+h} - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (30)$$

6 shot-noise の相関

上記で説明した相関関数を使って shot-noise の相関を調べた。

shot noise とは式で表すと

$$y = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (31)$$

(y :shot noise の強さ, t :時間, τ :時定数)
それを図 4 に示した。

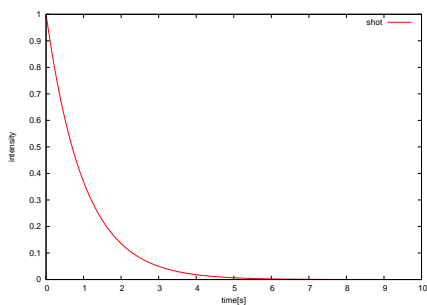


図 4: shot-noise

式 (30) を使った相関を表したものが図 5 である。

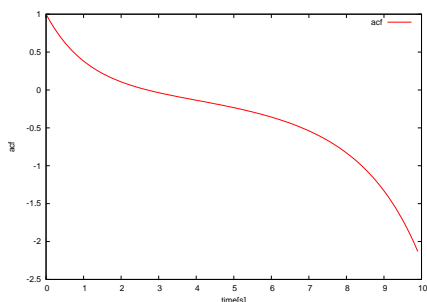


図 5: shot-noise の自己相関

7 解析解との fitting

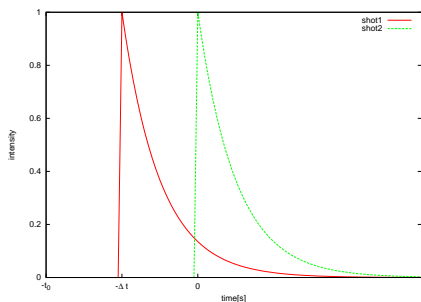


図 6: shot-noise の解析解を求める際に用いた図

次の式は図 6 のような 2 つの shot-noise の相関を解析的に解いたものである。第 1 項は $-t_0$ から $-\Delta t$, 第

2 項は $t_0 - \Delta t$ から 0, 第 3 項は 0 から T までの相関を表している。

$$r(\Delta t) = \frac{1}{T - \Delta t} \left\{ \int_0^{t_0 - \Delta t} (0 - a)^2 dt + \int_{t_0 - \Delta t}^{t_0} (0 - a) \left(\exp\left(-\frac{t + \Delta t - t_0}{\tau}\right) - a \right) dt + \int_{t_0}^{T - \Delta t} \left(\exp\left(-\frac{t + \Delta t}{\tau}\right) - a \right) \left(\exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau}\right) - a \right) dt \right\} \quad (32)$$

これらを $\tau \ll T$ として計算すると平均値 a は

$$a = \frac{1}{T} \int_0^T \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt = \frac{\tau}{T} \quad (33)$$

となる。これより解析解は

$$r(\Delta t) = \frac{\tau}{T - \Delta t} \left\{ \frac{\exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right)}{2} - \frac{\tau}{T} - \frac{\tau \Delta t}{T^2} \right\} \quad (34)$$

この解析解とプログラムによって発生させた shot-noise の相関を式 (34) で fitting を行った。その結果, x 軸の端に shot-noise が発生したときにグラフをずらすと shot-noise がもう一方のグラフと重ならなくなってしまったため正しい相関がとれないことが分かった。また, 複数の shot-noise を発生させた場合, shot-noise 同士が重なっている範囲が広いと時定数の長い shot-noise と勘違いしてしまい, このような場合も正しい相関がとれない。

よって, shot-noise の数が少ない場合, 時定数の fitting 結果はほぼ近い値であるが, shot-noise の数が多い場合は, shot-noise 同士が重なる部分が多いため正しい値が出ることは少ない。

8 まとめ

shot-noise の相関をとり, 解析結果との fitting を行った。

今後の予定として, ポアソン乱数を含んだ shot-noise の相関関係を調べる。

9 参考文献

- [1] S.Shapiro & S.Teukolsky 『Black holes, White Dwarfs, and Neutron Stars』, A Wiley-Interscience Pub.(1983) Shakura & Sunyaev
- [2] H.Negoro 『Hard X-ray Time Lags in Accreting Black-Hole Systems』
- [3] 福江純 『輝くブラックホール降着円盤』 プレアデス出版