

## 連続重力波のデータ解析手法

枝 和成 (東京大学大学院 理学系研究科ビッグバン宇宙国際研究センター)

### Abstract

非軸対称に回転する中性子星は、周波数がほぼ一定の重力波を放出すると予想されており、日本の重力波検出器 KAGRA の有望な重力波源の一つと期待されている。連続重力波の周波数はほぼ一定であるので、出力データ中の連続波信号を雑音の中から抜き取るには、ただ単にフーリエ変換を利用すればよいと思うかもしれない。しかし、事態はそう単純ではなく、地球の運動によるドップラー変調の補正や、感度を稼ぐための 1 年以上にも及ぶ長時間積分を必要とする。さらに連続波源が連星中に存在する場合には、軌道運動によるドップラー変調も考慮しなければならない。このとき、重力波検出器を用いて全天にわたって電磁波で観測されないダークなパルサーを探索する場合には、計算資源の問題が生じる。本講演ではそのような困難を解決するために考案された連続波のデータ解析手法の紹介を行う。

## 1 イントロダクション

### 1.1 重力波源としての低質量 X 線連星系

回転中性子星はほぼ一定の回転周波数を持ち、地上重力波検出器で検出可能な連続重力波源である。重力波は、外殻の変形や磁気圧、質量降着により引き起こされる中性子星の非軸対称に由来している。このとき生じる重力波振幅  $h_0$  は

$$h_0 = \frac{4\pi^2 G}{c^4 r} \varepsilon I f_{\text{GW}}^2 \quad (1)$$

と見積もられる。これは中性子星が早く回転しその歪みが大きければ、より強い重力波が放射されることを意味している。

連続重力波源の中でも特に低質量 X 線連星系 (LMXB: Low-Mass X-ray Binary) は重要である。LMXB は低質量の伴星と弱磁場の中性子星からなる連星系であり、中性子星は伴星周囲の塵やガスを剥ぎ取ることによって質量を  $\dot{M}$  の割合で得る。中性子星へ降り積もる物質の重力ポテンシャルエネルギーは、X 線のエネルギー源となる。したがって、中性子星から地球までの距離を  $D$  とすれば、地球上で観測される X 線のフラックスは  $F_X \sim G\dot{M}/4\pi R D^2$  と概算できる。一方、物質が降着することで半径  $R$  の中性子星はトルク  $N_{\text{acc}} = \dot{M}\sqrt{GMR}$  を得てその回転速度を上昇させる。しかし質量降着によりいつまでも中性子星はスピニングアップするわけではない。回転

速度の上昇に伴い、遠心力が増加し、自己重力で自身の形状をとどめることができなくなるからである。したがって、多くの LMXB 中の中性子星の回転周波数はこの回転限界に近い  $f \sim 1.5$  kHz であると期待される。ところが、実際の電磁波観測により推定される回転周波数の最大値はこの値を大きく下回っている。この観測事実は質量降着によるスピニングアップを抑制する何らかの物理的機構の存在を示唆している。回転速度の上昇に伴い重力波によるエネルギー損失が増大することを思い出すと、この抑制機構が重力波放射であると仮定するのは自然であると考えられる。この仮定が正しいとき、降着によるトルクの上昇  $N_{\text{acc}}$  と重力波放射によるトルクの減少  $N_{\text{GW}}$  が釣り合い、中性子星の非軸対称  $\varepsilon I$  と X 線のフラックス  $F_X$  とが関係付けられ、重力波振幅  $h_0$  が、

$$h_0^2 = \frac{5G}{c^3} P_{\text{rot}} \sqrt{\frac{R^3}{GM}} F_X \quad (2)$$

と表される。ゆえに、重力波観測により振幅  $h_0$  が定まり、さらに電磁波観測により X 線のフラックス  $F_X$  が測定できたとすれば、両者の観測結果を合わせることで中性子星の半径と質量との関係  $R^{3/4} M^{-1/4}$  を推定できる。

## 1.2 重力波のデータ解析の基本

パルサーのような連続波源からの重力波は、周波数がほぼ一定である。そのため、データ解析をする際には、フーリエ空間において重力波周波数に対応する位置に立つピークを探すことになる。一般に、検出器雑音に比べて重力波信号は非常に弱く、ピークの位置を雑音の中から特定するのは難しい。重力波のデータ解析の分野では、信号を雑音の中から掘り起こすための方法として、マッチドフィルター法と呼ばれるしらみつぶしの手法が広く用いられている。この手法では、検出器に存在するであろう、考えられる限りのすべての重力波の信号を、事前に予測し、テンプレートを作成する。そしてこれらのテンプレートと検出器データとの相関を次々と取っていく。もしも、あるテンプレートと検出器内部に存在する重力波信号の形がぴたりと合ったならば、重力波信号は相関操作により増幅され、雑音の中からピークが飛び出し、重力波の検出が達成される。

## 1.3 連続重力波のデータ解析手法

連続重力波のデータ解析手法は大きく分けてターゲット探査、指向型探査、全天探査の3種に分類することができる。ターゲット探査では電磁波観測により既知のパルサーからの重力波を探索する。重力波波形に含まれるパラメーターのうち、源の方向、スピン周波数とのその時間発展の値の範囲はある程度絞りこまれている。そのため、探索するパラメーター領域は制限されており、上記の探索手法のうちで最も感度が良い。指向型探査は、連続波源がありそうな方向、例えば超新星残骸の周辺に標的を当て調べる手法である。そして、全天探査は、全天球を隈なく探査し電磁波観測により捉えられないダークなパルサーを発見しようとする手法である。全天探査では重力波源の方向を表すパラメーター、赤経  $\alpha$  と赤緯  $\delta$  が探索パラメーターに追加されるため、テンプレート数が劇的に増加する。さらに重力波源が連星中に存在する場合には、その軌道運動を描くパラメーターも追加され、計算コストの面で問題が生じる。本講演ではこの連星中の連続波源からの重力波に焦点を

当て、そのデータ解析手法の一つである TwoSpect アルゴリズムについて紹介をした。

## 2 TwoSpect アルゴリズム

TwoSpect アルゴリズムは、簡単に言えば、二回フーリエ変換を行うことで、軌道周期に対応する周波数に信号パワーを集中させ、重力波信号を取り出すアルゴリズムである。

連続波源が真空中に単独で存在する場合、そこから生じる重力波の周波数は単色とみなすことができる。しかし、実際に地上で観測される重力波信号の周波数は一定値  $f_0$  とはならない。というのは、地上検出器は地球の自転や公転により重力波源に対して相対的に運動しており、この相対運動がドップラー変調を引き起こすからである。したがって、何の補正も加えず到来してきた重力波信号をそのままフーリエ変換したとしても、その信号のパワーは元来の周波数  $f_0$  を中心として複数の周波数ビンにわたって広がってしまい、信号の強さの観点で損をしてしまう。そこで、長さ  $T_{\text{obs}}$  の信号の時系列データを、相対運動が無視できる程の短い時間間隔  $T_{\text{SFT}} \ll 1 \text{ day}$  に分割し、こうして得られた  $N$  個の時系列データ  $h_{\alpha,j} \equiv h(t_{\alpha,j})$  を離散フーリエ変換 (DFT: Discrete Fourier Transform) する。こうして、ただ一つの周波数ビンに信号パワーが詰まったデータ  $\tilde{h}_{\alpha,k}$  ( $\alpha = 0, \dots, N-1, k = 0, \dots, M-1$ ) を得ることができる。

$$\tilde{h}_{\alpha,k} = \frac{\Delta t}{C} \sum_{j=0}^{M-1} w_j h_{\alpha,j} e^{-2\pi i j k / M}, \quad (3)$$

ここで、 $w_j$  は窓関数、 $C$  は使用した窓関数に対応する規格化定数、 $\Delta t \equiv T_{\text{SFT}}/M$  は離散フーリエ変換の時間間隔を表す。この操作は短時間フーリエ変換 (SFT: Short Fourier Transform) と呼ばれる。各データ  $\tilde{h}_{\alpha,j}$  は短い時間間隔  $T_{\text{SFT}}$  の間に重力波を観測したときに対応する重力波信号であり、これを足し合わせることで、実効的に、観測時間  $T_{\text{obs}}$  の間に観測したときに得られる重力波パワーを得ることができる。しかし、ただ足し合わせたのではドップラー効果のため信号は複数の周波数ビンに散逸してしまう。

そこで，ドップラー補正

$$f_{\text{obs}}(t_j) = \left(1 + \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{n}}{c}\right) \hat{f}(t_j) \quad (4)$$

を行い，各データを周波数軸に関してスライドさせ足し合わせる．ここで， $f_{\text{obs}}(t_j)$  は時刻  $t_j$  に地上で観測される重力波周波数， $\mathbf{v}$  は太陽重心系 (SSB) に対する地上検出器の相対速度ベクトル， $\mathbf{n}$  は SSB から重力波源への単位ベクトルを表す．この周波数シフトは仮想的に重力波検出器を SSB に設置することに対応している．こうして全観測時間  $T_{\text{obs}}$  にわたってただ一つの周波数ビンに信号パワーが集約されたデータを得ることができる．

一方，連星系中に連続波源が存在する場合は，連星運動によるドップラー効果  $\Delta f_{\text{obs}}$  がまだ残っている．地球運動に対するドップラー補正後の，つまり SSB で観測される重力波信号の位相部分は

$$\Phi(t) = \Phi_0 + 2\pi \left\{ f_0 (T - T_0) + \frac{\Delta f_{\text{obs}}}{\Omega} \sin [\Omega (T - T_0) + \phi_0] \right\} \quad (5)$$

と表せる．上式右辺第三項は信号パワーを複数の周波数ビンに分散させるため重力波検出を阻害する原因となり得る．ここで，簡単のため軌道が円軌道であることを仮定した．また， $T_0$  は参照時刻， $\Phi_0$  は重力波の初期位相， $\phi_0$  は軌道の初期位相， $\Omega$  は軌道角速度を表す．一回目のフーリエ変換 (1st FT) 後の，地球運動に関するドップラー補正を施した信号データ  $\tilde{h}_{\alpha,k}$  には軌道運動による時間変化のみが含まれている．したがって， $\tilde{h}_{\alpha,k}$  をさらにフーリエ変換することで軌道周波数に対応する位置に重力波信号のピークが立つはずである．これが TwoSpect アルゴリズムの根幹である．次に，実際に観測で用いられるテンプレートを作成する．簡単のため，軌道の初期位相を  $\phi_0 = \pi/2$ ，初期時刻を  $T_0 = 0$  とする．このとき，窓関数として，ハニング窓  $w_j = (1 - \cos 2\pi j/M)/2$ ， $C = \sqrt{3/8}$  を選ぶと，式 (3) より，信号データを SFT したデータ

$$\tilde{h}_{k,\alpha} \propto \frac{\text{sinc} \left[ m - k - T_{\text{SFT}} \Delta f_{\text{obs}} \sin \left( 2\pi \alpha \frac{T_{\text{SFT}}}{P} \right) \right]}{\left[ 1 - \left( m - k - T_{\text{SFT}} \Delta f_{\text{obs}} \sin \left( 2\pi \alpha \frac{T_{\text{SFT}}}{P} \right) \right)^2 \right]} \quad (6)$$

が得られる．ここで，実数  $m$  を  $f_0 = m/T_{\text{SFT}}$  と導入した．ここから，1st SFT 後の  $k$  番目の周波数ビン

， $\alpha$  番目の SFT データ中に存在する信号パワーは  $P_{k,\alpha} = 2 |s_{k,\alpha}|^2 / T_{\text{SFT}}$  と計算できる．SFT の時間間隔が十分短いとして， $\alpha T_{\text{SFT}} \rightarrow t$  と置換すると，1st SFT での信号パワーの時間変化

$$P_k(t) \propto \frac{\text{sinc}^2 \left[ \left( f_0 - f_k - \Delta f_{\text{obs}} \sin \left( \frac{2\pi}{P} t \right) \right) T_{\text{SFT}} \right]}{\left[ 1 - T_{\text{SFT}}^2 \left( f_0 - f_k - \Delta f_{\text{obs}} \sin \left( \frac{2\pi}{P} t \right) \right)^2 \right]^2} \quad (7)$$

が得られる．上式の分母は窓関数に起因し物理的な意味を持たない． $P_k(t)$  が実際にピークを持つのは分子が 0 となる点であり， $k$  番目の周波数ビンにおける  $n$  番目のピークの位置  $t_{k,n}^{\pm}$  とその間隔  $\Delta_k$  は

$$\begin{aligned} t_{k,n}^- &= nP + \frac{P}{2\pi} \sin^{-1} \left[ \frac{f_k - f_0}{\Delta f_{\text{obs}}} \right], \\ t_{k,n}^+ &= nP + \frac{P}{2} - \frac{P}{2\pi} \sin^{-1} \left[ \frac{f_k - f_0}{\Delta f_{\text{obs}}} \right], \\ \Delta_k &\equiv t_{k,n}^+ - t_{k,n}^- = \frac{P}{2} - \frac{P}{\pi} \sin^{-1} \left[ \frac{f_k - f_0}{\Delta f_{\text{obs}}} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

と表せる．この時刻  $t_{k,n}^{\pm}$  は視線方向に対して中性子星が接近し離れる最大速度の時刻に対応している．式 (7) をさらにフーリエ変換することで，実際に解析の際に使用するテンプレートが作成できる．しかしこれ以上は解析的に計算できず数値的にテンプレートを作成ことになる．テンプレートは  $(h_0, f_0, \alpha, \delta, P, \Delta f_{\text{obs}})$  の 6 個のパラメーターで特徴づけされる．このとき，テンプレートの総数は  $10^{15}$  のオーダーとなり，これを逐一調べていくのは計算コストの観点で難しい．このため，TwoSpect アルゴリズムでは，テンプレート探索をする際，いきなり厳密な理論波形を使うのではなく，まずはじめに，パラメーターの個数を減らした大雑把な理論波形を用いる．この大雑把な理論波形はガウシアンテンプレートと呼ばれており，式 (7) を  $t = t_{k,n}^{\pm}$  にピークを持つダブルガウシアンで近似すると見なす．こうすることで，2nd FT の信号パワーの解析式

$$\begin{aligned} |P_k(f')|^2 &= 4\pi\sigma^2 e^{-(2\pi f'\sigma)^2} \\ &\left[ 1 + \cos(2\pi\Delta_k f') \right] \frac{\cos(2\pi N P f') - 1}{\cos(2\pi P f') - 1} \end{aligned} \quad (9)$$

が得られる．ここで， $f'$  は 2nd FT の周波数， $\sigma$  はピークの広がり， $N$  はピークの個数を表す．

TwoSpect アルゴリズムでは、計算コストを削減するため、階層的探索が用いられている。この階層的探索では、具体的にテンプレートを使用する前にまず、位相パラメータの情報を用いない、インコヒーレント探索をする。この過程で重力波信号が存在し得るパラメータ領域を絞る。次に、この領域内部でテンプレート探索をする。テンプレート探索では、まず大雑把なテンプレートであるガウシアンテンプレート (9) を用いて信号が存在し得るパラメータ領域をさらに絞り、次に、正確なテンプレートである式 (7) を使用することで、パラメータ領域内部の信号の候補となる点を特定する。

### 3 結果

#### 3.1 LIGO・Virgo による制限

LIGO・Virgo グループは、最近、連星中に存在する連続波源からの重力波をはじめて全天探索し、TwoSpect アルゴリズムを用いて重力波振幅に制限を与えた。用いたデータは、LIGO S6 と Virgo VSR2-3 から得られた長さ  $T_{\text{obs}} = 40551300\text{s} \cong 1.28\text{yr}$  の時系列データであり、この結果、図 1 で示される重力波振幅の制限が得られた。最も感度が良い周波数  $f = 217\text{Hz}$  では、95% の信頼度で  $h_0 < 2.3 \times 10^{-24}$  という上限が与えられた。TwoSpect アルゴリズムでは軌道運動に対して円軌道であることを仮定しているが、この結果は離心率が  $e < 0.9$  まで有効である。

#### 3.2 展望

TwoSpect アルゴリズムは先に述べたように連星系が円軌道であるという強い仮定を置いている。しかし、より広いパルサーを調べるには TwoSpect アルゴリズムを楕円軌道に適用できるように拡張する必要がある。また、もともとの TwoSpect のプログラムでは、複数台の異なる検出器間の雑音の相関を取り雑音に由来する擬似的な信号を取り除いていない。将来的にはこのようなコインシデンステストを導入する必要がある。また、TwoSpect アルゴリズムを KAGRA で用いるとき、どこまでインコヒーレントに探索をするのか、どこまでガウシアンテンプレートを使用するのかは、有する計算機パワーと重力波に対する感度で決定する。この問題に対する最適解を調べるのはこれからの課題になるだろう。

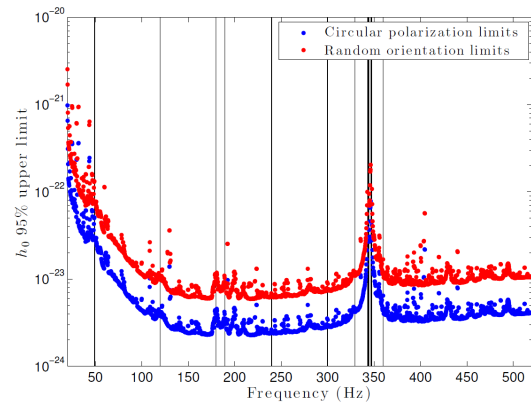


図 1: LIGO と Virgo のデータによる連続重力波への振幅上限 ((7) から引用)。青点は重力波が円偏光、赤点は重力波が任意の偏光を持つことを仮定したときの制限を表す。曲線中に現れる線は、ミラーの懸架ワイヤー上に励起するバイオリンモードと呼ばれる雑音に起因する。この線上では重力波は制限できない。

### Reference

- [1] M. Maggiore, "Gravitational waves. Vol 1, Theory and Experiments." (2008).
- [2] L. Bildsten, *Astrophys. J.* **501**, L89 (1998) [astro-ph/9804325].
- [3] P. Jaranowski, A. Krolak and B. F. Schutz, *Phys. Rev. D* **58**, 063001 (1998) [gr-qc/9804014].
- [4] B. Allen, M. A. Papa and B. F. Schutz, *Phys. Rev. D* **66**, 102003 (2002) [gr-qc/0206032].
- [5] E. Goetz and K. Riles, *Class. Quant. Grav.* **28**, 215006 (2011) [arXiv:1103.1301 [gr-qc]].
- [6] L. Sammut, C. Messenger, A. Melatos and B. J. Owen, *Phys. Rev. D* **89**, 043001 (2014) [arXiv:1311.1379 [gr-qc]].
- [7] J. Aasi *et al.* [The LIGO Scientific and the Virgo Collaborations], arXiv:1405.7904 [gr-qc].