

修正重力の可否性を問う新たな手法

松原 元気 (立教大学大学院 理学研究科)

Abstract

本件は "Stability of Schwarzschild-like solutions in $f(R,G)$ gravity models (Antonio De Felice, Teruaki Suyama, Takahiro Tanaka) Phys.Rev.D83:104035,2011" のレビューである。

重力理論・宇宙論において、ダークエネルギーなどの説明のために新しい重力理論が必要となる。既存の理論と同様、これら修正重力理論においても系が安定になる必要がある。このため、Ghost という系を不安定にする場を生じる理論は一様に棄却されてきた。

しかし、Ghost の質量が超大になる場合、つまり Ghost が物理的に意味のない場となる場合にはその修正理論は棄却されずに済む、という新たな視点を導入する。今回のレビューでは、一般の $f(R,G)$ Gravity で球対称時空にゆらぎを与えると、常に Ghost が生じること、及び、Ghost の質量が自然に超大になることを示す。

1 考察する状況の設定

修正重力のラグランジアンが

$$S = \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [F R + \xi G - U(F, \xi)],$$

の場合のみを考察する。ただし、 F, ξ はラグランジュの未定乗数で、 U はその関係式を与える。

U の与え方次第で、一般の $f(R, G)$ Gravity を表すことができる。

背景時空は次の一般球対称時空とする。

$$ds^2 = g_{\mu\nu}^0 dx^\mu dx^\nu = -A(r) dt^2 + \frac{dr^2}{B(r)} + \frac{r^2 dz^2}{1-z^2} + r^2(1-z^2) d\varphi^2$$

これらより、各場の EOM が変分より求められる。

$$\begin{aligned} U &= -\frac{4B\xi A'}{A^2} + \frac{12B^2\xi' A'}{A^3} - \frac{ABF'}{A} - \frac{2BF A'}{A} - \frac{BF^2 A'}{A} + \frac{2F}{A^2} - \frac{2BF}{A^2}, \\ F'' &= -\frac{2B\xi'}{r^2 B} - \frac{F'B'}{2B} + \frac{B\xi''}{4r^2} - \frac{A\xi''}{r^2} - \frac{F'B''}{rB} + \frac{2\xi' A'}{Ar^2} + \frac{F'A'}{Ar^2} - \frac{6\xi' B A'}{Ar^2} + \frac{F A'}{Ar^2} + \frac{6B\xi' \xi'}{r^2}, \\ R &= \frac{\partial U}{\partial F}, \\ G &= \frac{\partial U}{\partial \xi}. \end{aligned}$$

2 Perturbation の運動方程式

背景時空に摂動を入れる。今回は THE REGGE-WHEELER-ZERILLI FORMALISM によって、摂動を odd wave と even wave に分解する。

odd wave の場合

摂動成分は以下ようになる。

$$\begin{aligned} h_{tt} &= 0, \quad h_{tr} = 0, \quad h_{rr} = 0, \\ h_{ta} &= \sum_{\ell, m} h_{0, \ell m}(t, r) E_{ab} \partial^b Y_{\ell m}(\theta, \varphi), \\ h_{ra} &= \sum_{\ell, m} h_{1, \ell m}(t, r) E_{ab} \partial^b Y_{\ell m}(\theta, \varphi), \\ h_{ab} &= \frac{1}{2} \sum_{\ell, m} h_{2, \ell m}(t, r) [E_a^c \nabla_c \nabla_b Y_{\ell m}(\theta, \varphi) + E_b^c \nabla_c \nabla_a Y_{\ell m}(\theta, \varphi)]. \end{aligned}$$

これにより、摂動の入ったラグランジアンは

$$S_{\text{odd}} = \frac{M_{Pl}^2}{2} \sum_{\ell, m} \int dt dr \mathcal{L}_{\text{odd}} = \frac{M_{Pl}^2}{2} \sum_{\ell, m} \int dt dr [A_1 (\dot{h}_1 - \dot{h}_0')^2 + A_2 h_0 h_1 + A_3 h_0^2 - A_4 h_1^2],$$

となる。各係数は原論文 Appendix に収録されている。

ゲージ変換と各場での変分結果から得られる束縛条件により、このラグランジアンは Dynamical な場をひとつだけ含み、それを Q とする。 Q によってラグランジアン中の h_0, h_1 は

$$\begin{aligned} h_1 &= -\frac{A_1 \dot{Q}}{A_4}, \\ h_0 &= \frac{r}{2A_1 + 2r A_1' - A_3 r^2} [(r A_1' + 2A_1) Q + r A_1 Q']. \end{aligned}$$

と表示される。これによってラグランジアンを表示しなおすと

$$\mathcal{L}_{\text{odd}} = A_1 \left[2Q \left(\dot{h}_1 - \dot{h}_0' + 2 \frac{h_0}{r} \right) - Q^2 \right] - \frac{2(A_1' r + A_1) h_0^2}{r^2} + A_3 h_0^2 - A_4 h_1^2.$$

これにより、運動項が正になる条件、No Ghost Condition が得られた。

even wave の場合

odd と同様に分解すると、摂動成分は以下のようになる。

$$\begin{aligned} h_{tt} &= -A(r) \sum_{\ell, m} H_{0, \ell m}(t, r) Y_{\ell m}(\theta, \varphi), \\ h_{tr} &= \sum_{\ell, m} H_{1, \ell m}(t, r) Y_{\ell m}(\theta, \varphi), \\ h_{rr} &= \frac{1}{B(r)} \sum_{\ell, m} H_{2, \ell m}(t, r) Y_{\ell m}(\theta, \varphi), \\ h_{ra} &= \sum_{\ell, m} \alpha_{\ell m}(t, r) \partial_a Y_{\ell m}(\theta, \varphi), \end{aligned}$$

摂動の入ったラグランジアンは

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{even}} &= H_0 (a_1 \delta\xi + a_2 \delta F' + a_3 H_2 + j^2 a_4 \alpha + a_5 \delta\xi + a_6 \delta F) + j^2 H_0 (a_7 H_2 + a_8 \alpha + a_9 \delta\xi + a_{10} \delta F) \\ &\quad + j^2 h_1 H_1^2 + H_1 (b_2 \delta\xi + b_3 \delta F' + b_4 H_2 + j^2 b_5 \alpha + b_6 \delta\xi + b_7 \delta F) + c_1 H_2^2 \\ &\quad + H_2 (c_2 \delta\xi + c_3 \delta F' + j^2 c_4 \alpha + \delta\xi (j^2 c_5 + c_7) + \delta F (j^2 c_6 + c_{10})) + H_2 (c_8 \delta\xi + c_9 \delta F) \\ &\quad + j^2 (d_1 \alpha^2 + d_2 \alpha^2) + j^2 \alpha (d_3 \delta\xi + d_4 \delta F' + d_5 \delta\xi + d_6 \delta F) + c_{11} \delta F^2 + c_2 \delta F \delta\xi + f_1 \delta\xi^2. \end{aligned}$$

ここでも変分により束縛条件が生じる。

$$a_1 \delta\xi'' + a_2 \delta F'' + (a_5 + a_1') \delta\xi + (a_6' + a_2) \delta F + j^2 a_4' \alpha + a_3 H_2' + (a_5' - j^2 a_9) \delta\xi + (a_6' - j^2 a_{10}) \delta F + (a_5' - j^2 a_7) H_2 + (a_6' - a_8) j^2 \alpha = 0.$$

これを用いて、次のように場を再定義する。

$$\begin{aligned} j^2 a_4 \alpha &= a_4 v_0 - a_3 H_2 - a_2 v_1', \\ \delta F &= v_1 - \frac{a_1}{a_2} \delta\xi = v_1 - \frac{4(1-B)}{r^2} \delta\xi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_0 &= v_2 (1 + 4j^2)^{1/2}, \\ \delta\xi &= v_3 (1 + 4j^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

この結果、even wave のラグランジアンは次のようにカノニカルに表示できる。

$$\mathcal{L}_{\text{even}} = \sum_{i,j=1}^3 [K_{ij}(r, j) \dot{v}_i \dot{v}_j - L_{ij}(r, j) v_i' v_j' - D_{ij}(r, j) v_i' v_j - M_{ij}(r, j) v_i v_j],$$

よって各場の運動項が負にならない No Ghost Condition は

$$K_{33} > 0, \quad K_{22} K_{33} - K_{23}^2 > 0, \quad \det(K_{ij}) > 0.$$

すると、これは odd wave の No Ghost Condition と常に対立してしまう。よって、球対称時空で f(R,G)

を考えると、常に Ghost が存在してしまうことがわかる。

3 Schwarzschild-Background での考察

これまで一般球対称時空について考察したが、ここでメトリックを具体的に Schwarzschild Black Hole に指定する。また odd wave の No Ghost Condition が満たされているとして、even wave に注目する。

3つの Propagating wave の Kinetic term の符号を知るため、KineticMatrix を対角化する。このため、次のような場の張替えを行う。

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{\sqrt{6}}{3r} w_1 + \frac{2}{r\sqrt{6}} w_2, \\ w_2 &= \frac{r j^2 + r_s}{\sqrt{6} \sqrt{1+4j^2} (r-r_s)} w_1 + \frac{r j^2 + 7r_s - 6r}{\sqrt{6} \sqrt{1+4j^2} (r-r_s)} w_2 + w_3, \\ w_3 &= \frac{r^2}{2\sqrt{6} \sqrt{1+4j^2} r_s} w_2. \end{aligned}$$

$$\tilde{K}_{11} = 1, \quad \tilde{K}_{22} = -1, \quad \tilde{K}_{33} = \frac{2(r-r_s)^2 (1+4j^2)(j^2-2)}{j^2 [(j^2-2)r + 3r_s]^2},$$

これに伴い、MassMatrix も変形して、

whereas the new symmetric mass matrix, $\tilde{M}_i = P_i M_i P_i$, satisfies $\tilde{M}_i = 0$ for $i = 1, 2, 3$, and its non-zero components are

$$\tilde{M}_{11} = \frac{U_{rr}}{3}, \quad \tilde{M}_{12} = \frac{U_{r\alpha}}{3\sqrt{6}}, \quad \tilde{M}_{22} = \frac{U_{\alpha\alpha}}{3\theta}.$$

となる。

再定義された場 w_2 の運動項が負となり、これがゴーストとなる。かつ、ミンコフスキ時空に漸近した場合、 \tilde{M}_{22} が $\tilde{G} \rightarrow 0$ により発散する質量を持つ。よって、Ghost が発生したが、それが低重力場環境では物理的意味をなさないことが分かった。

4 簡単な具体例

具体例として、太陽系スケールでの観測に矛盾がないこと、すなわち、太陽を中心とした低重力球対称時空を考えた時に Ghost の質量が十分大きくなることを示す。

ダークエネルギーを与える ToyModel のうち、これまでに用いた条件を満たす修正重力として

$$f(R, \mathcal{G}) = R + \mathcal{F}_R(R) + \mathcal{F}_G(\mathcal{G}),$$

$$\mathcal{F}_R(R) = A_R \mu^{2p+2} / (R^p + c_R \mu^{2p}), \quad \mathcal{F}_G(\mathcal{G}) = A_G \mu^{8n+2} / (\mathcal{G}^{2n} + c_G \mu^{8n})$$

がある。この場合に低重力として $R \gg H_0^2, G \gg H_0^4$ を用いると、

$$U_{,FF} = 1/f_{,RR} = O(\mu^{-2p-2} R^{p+2}) \text{ and } U_{,\xi\xi} = 1/f_{,GG} = O(\mu^{-8n-2} \mathcal{G}^{2n+2}).$$

$$m_{\text{non-ghost}}^2 = O\left(H_0^2 \left[\frac{\rho_{\text{local}}}{\rho_c}\right]^{p+2}\right), \quad m_{\text{ghost}}^2 = O\left(H_0^2 \left[\frac{H_0^{-2} r_s}{r^3}\right]^{4n+2}\right)$$

$\rho_c \approx 4 \times 10^{-30} \text{g/cm}^3$ is the critical density of the universe.
the energy density ρ_{local} of matter surrounding a star

各定数に太陽系の情報

$$r_s \sim 3\text{km}, \quad r \sim 1\text{AU}, \quad \rho_{\text{local}} \sim 10^{-24} \text{g/cm}^3$$

を入れる。よって、この場合の Propagating Wave の質量は

$$m_{\text{non-ghost}}^2 \approx (10^{22.7-2.7p} \text{cm})^{-2} \text{ and } m_{\text{ghost}}^2 \approx (10^{6-88.4n} \text{cm})^{-2}$$

となる。よって、 $n \sim 1$ の場合、質量は十分大きい値となる。

5 Conclusion

- $f(R, G)$ 修正重力では、球対称時空は Ghost の存在から安定になれないことが分かった。
- 修正重力として適切であれば、Ghost が存在しても自動的にその質量が超大なものとなる。
- Ghost の存在が、修正重力として棄却される理由にはならないことが予想できた。

6 参考文献

1. Stability of Schwarzschild-like solutions in $f(R, G)$ gravity models (Antonio De Felice, Teruaki Suyama, Takahiro Tanaka) Phys.Rev.D83:104035,2011
2. T. Regge and J. A. Wheeler, Phys.Rev. 108, 1063 (1957)