2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

量子場の真空について-アンルー効果-

清田 哲史 (広島大学大学院 理学研究科 M1)

Abstract

ブラックホール時空上の場の量子論は、ホーキング放射と呼ばれる熱的放射の存在を予言する。一般相対性理論の等価原理によると、ブラックホールにおける重力による加速度と、ミンコフスキー時空中の加速度運動を結びつけることができる。アンルー効果とは一様な加速度で運動する観測者が、場が真空状態であったとしても有限温度（アンルー温度）の放射を見ると予言する効果である。本発表ではアンルー効果について説明する。まずミンコフスキー時空において静止している観測者 a と、一様加速度で運動している観測者 b について考える。観測者 a には実験室系 (t, x)、また観測者 b には固有座標系 (τ, ξ)（加速度運動する観測者 b が周りに張る座標系）を用いる。ミンコフスキー計量を固有座標系で表すことで得られる新たな計量をリンドラー計量と呼ぶ。次に、質量 0 のスカラー場を考え、それぞれの座標系において量子化を行うことで、ミンコフスキー時空であらわれる生成消滅演算子と、リンドラー時空の量子場にあらわれる生成消滅演算子がボゴリューボフ変換で結びつくことを見る。それぞれの量子場の真空状態は異なった状態であると示すことができる。そして、一様な加速度で運動する観測者がミンコフスキー時空の真空状態を観測すると、励起された状態として観測することが示される。この励起は加速度をαとして、温度 $T =$ α $/2\pi$ の熱的ボーズ・アインシュタイン分布と同じ励起スペクトルを持つことがわかる。最新の研究として、超高強度レーザーの電磁場を用いることでアンルー効果を検証する可能性が議論されている。

1 2 つの座標系

本発表では、全体を通して実験室系 (t, x) と固有座標系 (τ, ξ) の 2 つの立場から見る必要がある。固有座標系は, 一様加速度で運動している観測者が長さ ξ の定規を持ち、その定規と定規の各点に括りつけた時計で距離と時間をはかった座標系である。この 2 つの座標系の間には、

$$t(\tau, \xi) = \frac{1 + a\xi}{a} \sinh(a\tau) \tag{1}$$

$$x(\tau, \xi) = \frac{1 + a\xi}{a} \cosh(a\tau) \tag{2}$$

の関係が成り立っている。$x > 0$ において、図 1 のように座標を張ることができる。また (1), (2) 式より τ と ξ は

$$-\infty < \tau < \infty \tag{3}$$

$$-\frac{1}{a} < \xi < \infty \tag{4}$$

の範囲をとる。

図より、この固有座標系にいる観測者は $t - x > 0$ の領域からくる光を見ることはできないが、$t - x < 0$ かつ $t + x < 0$ の領域からくる光は

$$\tau = -\infty \tag{5}$$

$$\xi = -\frac{1}{a} \tag{6}$$

の地平線からきたように見える。

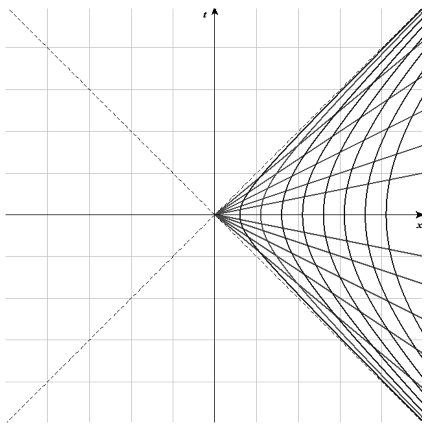

図 1: 縦軸 t、横軸 x とした。$t - x < 0$ かつ $t + x > 0$ の範囲で双曲線を描いているのが ξ : 一定 の線。原点から放射線状に伸びている直線が τ : 一定 の線。

2　リンドラー時空

今後の計算のために

$$\tilde{\xi} = \frac{1}{a}\ln(1 + a\xi) \tag{7}$$

$$-\infty < \tilde{\xi} < \infty \tag{8}$$

により ξ を $\tilde{\xi}$ に置き換える。これより 2 つの系の線素は

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt^2 - dx^2 & (9) \\ &= \exp(2a\tilde{\xi})(d\tau^2 - d\tilde{\xi}^2) & (10) \end{aligned}$$

と書ける。(t,x) で書かれた計量での時空をミンコフスキー時空、$(\tau,\tilde{\xi})$ で書かれた計量での時空をリンドラー時空と呼ぶ。また、(1), (2) 式は

$$t(\tau,\tilde{\xi}) = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{a\tilde{\xi}}\sinh(a\tau) \tag{11}$$

$$x(\tau,\tilde{\xi}) = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{a\tilde{\xi}}\cosh(a\tau) \tag{12}$$

と書き換えられる。

3　場の量子化

質量 0 のスカラー場を ϕ として、ミンコフスキー時空とリンドラー時空についてそれぞれ量子化する。2 節の置き換えにより

$$S[\phi] = \frac{1}{2}\int[(\partial_t\phi)^2 - (\partial_x\phi)^2]dtdx \tag{13}$$

$$S[\phi] = \frac{1}{2}\int[(\partial_\tau\phi)^2 - (\partial_{\tilde{\xi}}\phi)^2]d\tau d\tilde{\xi} \tag{14}$$

と書くことができる。これより運動方程式は

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial \tilde{\xi}^2} = 0 \tag{16}$$

となる。$\phi(t,x)$ と $\phi(\tau,\tilde{\xi})$ についてそれぞれ量子化すると、

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(t,x) = \int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\mathrm{e}^{-i\omega\bar{u}}\hat{a}_\omega^- + \\ \mathrm{e}^{i\omega\bar{u}}\hat{a}_\omega^+ + \mathrm{e}^{-i\omega\bar{v}}\hat{a}_{-\omega}^- + \mathrm{e}^{i\omega\bar{v}}\hat{a}_{-\omega}^+) \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\tau,\tilde{\xi}) = \int_0^\infty \frac{d\Omega}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\Omega}}(\mathrm{e}^{-i\Omega u}\hat{b}_\Omega^- + \\ \mathrm{e}^{i\Omega u}\hat{b}_\Omega^+ + \mathrm{e}^{-i\Omega v}\hat{b}_{-\Omega}^- + \mathrm{e}^{i\Omega v}\hat{b}_{-\Omega}^+) \end{aligned} \tag{18}$$

となる。ここで、

$$\bar{u} = t - x, u = \tau - \tilde{\xi}$$

$$\bar{v} = t + x, v = \tau + \tilde{\xi}$$

を導入した。Ω, ω はそれぞれの場での運動量であり、$\Omega > 0, \omega > 0$　また $\hat{a}_\omega^\pm$,$\hat{b}_\Omega^\pm$ は、各時空での生成消滅演算子であり、$\hat{a}_\omega^-, \hat{b}_\Omega^-$ と $\hat{a}_\omega^+, \hat{b}_\Omega^+$ はをれぞれエルミート共役の関係にある。また

$$\hat{a}_\omega^-|0_M >= 0 \tag{19}$$

$$\hat{b}_\Omega^-|0_R >= 0 \tag{20}$$

が成り立っている。ここでミンコフスキー真空を $|0_M>$ リンドラー真空を $|0_R>$ とおいた。

4　ボゴリューボフ変換

次に、量子場の 2 つの表現を結びつけるボゴリューボフ変換を説明する。
(11), (12) 式より、$\bar{u}$ を u の関数、$\bar{v}$ を v の関数として見ることができるため、(17) 式と (18) 式の場を結びつけることができる。ここで恒等式の関係より、$\bar{u}$ と u について

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\mathrm{e}^{-i\omega\bar{u}}\hat{a}_\omega^- + \mathrm{e}^{i\omega\bar{u}}\hat{a}_\omega^+) \\ &= \int_0^\infty \frac{d\Omega}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\Omega}}(\mathrm{e}^{-i\Omega u}\hat{b}_\Omega^- + \mathrm{e}^{i\Omega u}\hat{b}_\Omega^+) \end{aligned} \tag{21}$$

と書ける。両辺フーリエ変換して整理すると

$$\hat{b}_\Omega^- = \int_0^\infty d\omega[\alpha_{\omega\Omega}\hat{a}_\omega^- + \beta_{\omega\Omega}\hat{a}_\omega^+] \tag{22}$$

となる。ここで

$$\alpha_{\omega\Omega} = \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} [\mathrm{e}^{-i\Omega u - i\omega \bar{u}}] \tag{23}$$

$$\beta_{\omega\Omega} = \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} [\mathrm{e}^{-i\Omega u + i\omega \bar{u}}] \tag{24}$$

を導入した。α, β は一般にボゴリューボフ係数と呼ばれるものであり、この場合

$$\alpha_{\omega\Omega} = \beta_{\omega\Omega} \exp\left(\frac{\pi\Omega}{a}\right) \tag{25}$$

の関係を示すことができる。

5　粒子の数密度

3 節でミンコフスキー真空とリンドラー真空が異なる状態であることを見た。ここで、固有座標系にいる観測者はミンコフスキー真空をどのような状態としてみるのかについて考える。固有座標系における粒子の数密度演算子は、$\hat{N}_\Omega = \hat{b}_\Omega^+ \hat{b}_\Omega^-$ で定義される。したがって、固有座標系においてミンコフスキー真空を観測した時の粒子の平均数は

$$\begin{aligned} < \hat{N}_\Omega > &= < 0_M | \hat{b}_\Omega^+ \hat{b}_\Omega^- | 0_M > &(26)\\ &= \int_0^\infty d\omega |\beta_{\omega\Omega}|^2 &(27)\\ &= \left[\exp\left(\frac{2\pi\Omega}{a}\right) - 1\right]^{-1} \delta(0) &(28) \end{aligned}$$

ここで $\delta(0)$ は発散量因子と呼ばれ、空間の体積を表す。これより数密度は

$$n_\Omega = \left[\exp\left(\frac{2\pi\Omega}{a}\right) - 1\right]^{-1} \tag{29}$$

となる。

6　アンルー温度

運動量 Ω で質量 0 の粒子のエネルギーは $E = |\Omega|$ である。したがって、ボーズ・アインシュタイン分布の式

$$n(E) = \left[\exp\left(\frac{E}{T}\right) - 1\right]^{-1} \tag{30}$$

と (29) 式を比較することで

$$T = \frac{a}{2\pi} \tag{31}$$

が求まる。SI 単位系で書くと

$$\begin{aligned} T &= \frac{\hbar}{kc}\frac{a}{2\pi} &(32)\\ &\cong \left(\frac{a}{10^{20} m/s^2}\right) K &(33) \end{aligned}$$

となる。ここで k はボルツマン定数
$1K$ の温度を観測するために必要な加速度は

$$a = 10^{20} m/s^2 \tag{34}$$

となり、極めて大きな加速度を必要とする。

7　まとめと展望

本発表ではまず実験室系と固有座標系を導入し、それぞれの計量での時空がミンコフスキー時空とリンドラー時空となることを見た。次に、質量 0 のスカラー場 ϕ をこの 2 の時空について量子化した。それぞれの時空の真空状態をボゴリューボフ変換によって結びつけることで、固有座標系にいる観測者がミンコフスキー真空を観測した時に見る粒子の平均数とアンルー温度を求めることができた。本文で見たように、実際にアンルー効果を観測するのは困難に見えるが、最近では超高強度レーザーをによる電磁場を用いて粒子を加速させ、アンルー効果によって観測される粒子との相互作用によるブラウン運動から、アンルー効果を検証しようとする試みも議論されている。

Reference

Sergei Winitzki「Elementary Introduction to Quantum Fields in Curved Spacetime Lecture notes」,(2006)