

Fisher 行列解析を用いた宇宙論パラメータの制限の推定

平川 拓実 (広島大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙の平坦性問題や地平線問題を解決する有力なシナリオとしてインフレーションという初期宇宙での指数関数的な宇宙の加速膨張がある。これは WMAP や Planck 衛星で観測された宇宙背景放射 (CMB) の異方性も上手く説明している理論モデルである。しかしながら、その理論モデルは未だに決定しておらず現在も様々なインフレーションモデルが研究されている。インフレーションモデルを決定するためにはインフレーションを引き起こすポテンシャルを決める必要があり、CMB や銀河の大規模構造 (LSS) の大規模サーベイ観測はこれに制限を与える。Fisher 行列解析は実際に観測を行う前に、将来のサーベイ観測によってインフレーションに関わる宇宙論パラメータをどの程度制限することができるか見積もることができる。そして、それによってインフレーションのポテンシャルの形をどの程度制限できるか予想することができる。本収録では Fisher 行列解析の理論とその宇宙論への応用についてレビューする。

1 Introduction

研究の Motivation は曲率 $K < 0$ になるようなインフレーションモデルの制限を考えることである。そのために "Landscape Paradigm" という仮定を考える [1]。この仮定では、永遠にインフレーションを続けている "megaverse" と呼ばれる宇宙の中に多数の真空が存在する状態を考える。その中の相対的に高いエネルギーを持つ真空は偽真空と呼ばれる。そして、偽真空からよりエネルギーの低い真空への tunneling event によって "pocket universe" というものが生まれる。多数の真空の存在は多くの pocket universe を生み出し、その pocket universe のうち宇宙定数などの条件が絶妙に調整された pocket universe が現在、私達が存在している宇宙になっていると考えられている。tunnelling event によって生じる宇宙の特徴は負の曲率 ($K < 0$) を持って生まれてくることである。現在宇宙で観測される曲率パラメータ $\Omega_k (= -K/H_0^2)$ はインフレーションによって tunneling 直後の負の曲率が引き伸ばされて観測されるもので tunneling event 後のインフレーションの長さに依存している。したがって観測によって $\Omega_k > 0$ ということが確認されればインフレーションに強い制限を与えることができる。また、もう一つのインフレーションを特徴付けるパラメータとして spectral index n_s というものがあり、このパラメータは tunneling event 後の

インフレーションの傾きに依存している。本収録では Fisher 行列解析という手段を用いて、インフレーションに関するパラメータ Ω_k, n_s の二つについて将来の観測実験によりどの程度制限を与えることができるかということを推定していく。

そこでまず、2 章では Fisher 行列解析がどのようなものなのかを review する。そして 3 章では銀河の大規模構造のパワースペクトル解析に対する Fisher 行列の計算について概説し、4 章で具体的に Fisher 行列の計算結果について述べる。5 章では、結論と今後について述べる。

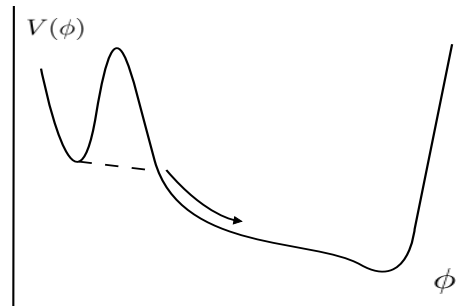


図 1: tunneling event のイメージ。左の "谷" (偽真空) から右の相対的に低いポテンシャルを持つ真空へ点線に沿って tunneling を起こり pocket universe が生まれる様子を表している。

2 Fisher 行列解析

まず、ベイズの定理より次の式が与えられる。

$$\mathcal{L}(D|\theta) = \frac{\mathcal{L}(D)}{\mathcal{L}(\theta)} \mathcal{L}(\theta|D) \quad (1)$$

$\mathcal{L}(D|\theta)$ はパラメータ θ が与えられた時のデータの確率分布関数で likelihood と呼ばれる。また、 $\mathcal{L}(\theta|D)$ はデータが与えられた時のパラメータ θ の確率分布関数で posterior と呼ばれる。 $\mathcal{L}(\theta), \mathcal{L}(D)$ はパラメータ θ とデータの確率分布関数で、ここでは、それぞれ定数と置く。以上より $\mathcal{L}(D|\theta) \propto \mathcal{L}(\theta|D)$ という関係がベイズの定理から成り立つことがわかる。

そして Fisher 行列は既知の確率分布関数 $\mathcal{L}(D|\theta)$ を使って次のように定義される。

$$F_{ij} \equiv - \left\langle \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}(D|\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\rangle \quad (2)$$

θ_i, θ_j は知りたいパラメータに対応している（本収録では Ω_k, n_s そしてバイアスパラメータに対応している）。そして、これを使って $\ln \mathcal{L}(D|\theta)$ のテイラー展開から $\mathcal{L}(D|\theta)$ を次のように表せる。

$$\mathcal{L}(D|\theta) = N \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{ij} \Delta \theta_i F_{ij} \Delta \theta_j \right] \quad (3)$$

さらに先ほどの likelihood と posterior の比例関係より次のようにも書くことができる。

$$\mathcal{L}(\theta|D) = N' \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{ij} \Delta \theta_i F_{ij} \Delta \theta_j \right] \quad (4)$$

(ただし N, N' は規格化定数、 $\Delta \theta$ はパラメータの誤差。) このように未知の確率分布関数 $\mathcal{L}(\theta|D)$ を既知の確率分布関数 $\mathcal{L}(D|\theta)$ で定義した Fisher 行列を使って表すことができる。

またパラメータの誤差は、 χ^2 の定義

$$\Delta \chi^2 \equiv 2 \Delta \ln \mathcal{L} = \sum_{ij} \Delta \theta_i F_{ij} \Delta \theta_j \quad (5)$$

$$\begin{cases} \Delta \chi^2 = \chi^2(\theta) - \chi_0^2(\theta_0) \\ \Delta \ln \mathcal{L} = \Delta \ln \mathcal{L}(\theta_0|D) - \Delta \ln \mathcal{L}(\theta|D) \end{cases}$$

と表 1 から求めることができる (θ_0 : 確率分布関数が最大になる時のパラメータ) [2]。

表 1: パラメータの数と CL に関する χ^2 の値

CL	1	2	3
68.3%(1 σ)	1.00	2.30	3.53
95.4%(2 σ)	2.71	4.61	6.25
99.73%(3 σ)	9.00	11.8	14.2

このような Fisher 行列解析を用いる有用性は、実際に観測を行う前にパラメータの誤差を推定することができるということである。これにより将来の観測実験のセットアップを探索することができ、より効率の良い観測実験の計画をたてることが可能になる。さらに全く独立な観測実験の補完性も探索できる。

3 銀河の大規模構造での Fisher 行列の計算

銀河のパワースペクトル (likelihood) がガウス分布であると仮定し具体的に Fisher 行列を計算していく。このとき確率分布関数は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{L}(D|\theta) &= -\frac{1}{2} \int d\vec{k} \int d\vec{k}' (P^{obs}(\vec{k}) - \langle P(\vec{k}) \rangle) \\ &\quad \times C(\vec{k}, \vec{k}') (P^{obs}(\vec{k}') - \langle P(\vec{k}') \rangle) \end{aligned} \quad (6)$$

ただし、

$$C(\vec{k}, \vec{k}') = \frac{V}{2(2\pi)^3 (P(\vec{k} + \frac{1}{n}))^2} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \quad (7)$$

で $\langle P(\vec{k}) \rangle, \langle P(\vec{k}') \rangle$ のみがパラメータ θ_i, θ_j 依存するとする。すると Fisher 行列は次のように書き下すことができる。[2]

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \int_{-1}^1 \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} \frac{\partial \ln P_g(k, \mu)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \ln P_g(k, \mu)}{\partial \theta_j} \\ &\quad \times V_{\text{eff}}(k, \mu) \frac{k^2 dk d\mu}{2(2\pi)^2} \\ &\quad (i, j = n_s, \Omega_k, b_0, A_1, A_2) \end{aligned} \quad (8)$$

このとき、

$$P_g(k, \mu) = (b(k) + f\mu^2) P_m(k, \mu) \quad (9)$$

は銀河のパワースペクトル、そして

$$V_{\text{eff}}(k, \mu) \equiv \left[\frac{n P_g(k, \mu)}{n P_g(k, \mu) + 1} \right]^2 V_{\text{survey}} \quad (10)$$

を定義する。さらに $b(k)$ はクラスタリングバイアス、 f は成長率、 μ は視線方向と波数ベクトルの間の角度の余弦、 $P_m(k, \mu)$ はダークマターのパワースペクトル、 n は銀河の数密度、 V_{survey} はサーベイの体積である。

ダークマターのパワースペクトルは物質の密度揺らぎから

$$P_m(k) = \langle |\delta_k^{(m)}|^2 \rangle \quad (11)$$

と定義され、図 2 のような振る舞いをする。ことからダークマターのパワースペクトルが n_s, Ω_k に依存していることを使うことで銀河の大規模構造からインフレーションの情報を引き出せるということがわかる。

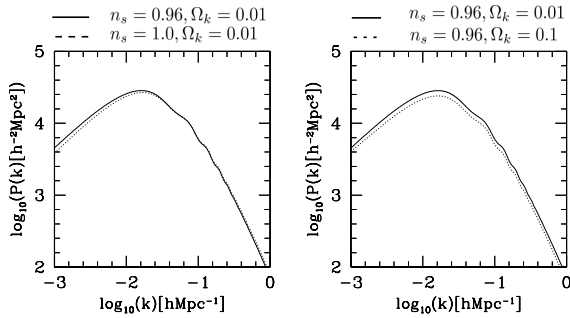


図 2: ダークマターのパワースペクトル

銀河の密度揺らぎは物質の密度揺らぎを反映しているが、これらは必ずしも一致しない。このことをクラスタリングバイアスと呼び、これが銀河の形成プロセスや銀河のタイプに依存することは分かっているがまだ完全には理解されていない。そこで今回はクラスタリングバイアスを次のように仮定して計算を行った。 (b_0, A_1, A_2) は定数

$$b(k) = b_0 \frac{1 + A_2 k^2}{1 + A_1 k} \quad (12)$$

線形成長率 f は線形理論での物質揺らぎの成長を表す成長因子 D_1 を用いて次のように定義される。

$$f \equiv \frac{d \ln D_1}{d \ln a} \quad (13)$$

また、実際の計算では式 (6) を数値計算して Fisher 行列の各成分の値を求めるのだが、本収録では Ω_k と n_s の誤差についてだけ解析したいので、 Ω_k と n_s 以外のパラメータ (バイアスパラメータ) を Marginalize してやる必要がある。例えば、バイアスパラメータ A_2 を Marginalize する場合、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(n_s, \Omega_k, b_0, A_1 | D) &= \int d\Delta A_2 \mathcal{L}(\theta | D) \\ &= N'' \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{ij} \Delta\theta_i \left(F_{ij} - \frac{F_{iA_2} F_{jA_2}}{F_{A_2 A_2}} \right) \Delta\theta_j \right] \\ &= N'' \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{ij} \Delta\theta_i \widetilde{F}_{ij} \Delta\theta_j \right] \end{aligned} \quad (i, j = n_s, \Omega_k, b_0, A_1) \quad (14)$$

と書き直すことができる (ただし N'' は規格化定数)。これをあと、 b_0, A_1 について行えば、 $\mathcal{L}(n_s, \Omega_k | D)$ を求めることができ、 n_s と Ω_k についての 2×2 の Fisher 行列をバイアスパラメータの影響も考慮しつつ求めることができ、それを使って二つパラメータの誤差について解析を行うことができる。

4 解析結果

この章では、前章の Fisher 行列の計算を使ってパラメータの誤差を解析する。本収録では Fisher 行列を計算する際に、銀河のサーベイの体積と銀河の数密度に

$$V_{\text{survey}} = 10^{11} (h^{-3} \text{Mpc}^3), n = 10^{-4} (h^3 \text{Mpc}^{-3})$$

(20000 平方度, $0.5 \leq z \leq 2.0$) という値を代入した。これは将来行われる予定の観測 (Euclid 衛星、DESI など) のサーベイの体積を想定している。また波数の範囲 $k_{\text{max}}, k_{\text{min}}$ は $0.01 \leq k \leq 0.2$ とし、クラスタリングバイアスと線形成長率には $b_0 = 2.0, A_1 = -0.1, A_2 = 0.2, f = 0.52$ という値をそれぞれ代入した。

以上のような値を式 (6) に代入して数値計算し Fisher 行列を求めパラメータの誤差を解析した結果が図 3 である。この図より 1σ の範囲でパラメータ

Ω_k, n_s は $\Delta\Omega_k \sim \pm 0.008, \Delta n_s \sim \pm 0.025$ の範囲での制限が推定され、このような誤差の範囲でインフレーションモデルが制限される可能性があるということがわかった。

えていきたい。

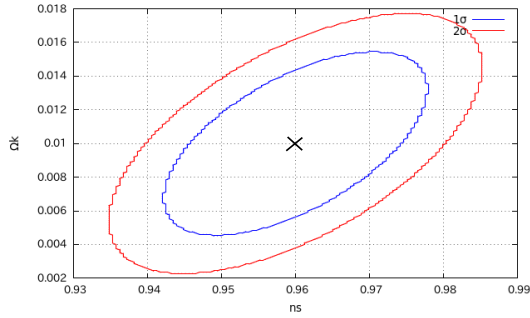


図 3: 二つのパラメータ n_s, Ω_k 以外の誤差が CMB などの観測で精度良く決まっているとしたときの、 n_s, Ω_k の誤差。縦軸が n_s 、横軸が Ω_k 、 \times 印は Ω_k と n_s のターゲットパラメータで $\Omega_k = 0.01, n_s = 0.96$ を選んだ。内側の青色の線が 1σ (68.3%) の等高線、外側の赤色の線が 2σ (95.4%) の等高線である。

参考文献

- [1] Ben Freivogel, Matthew Kleban, Maria Rodriguez Martinez and Leonard Susskind. JHEP03(2006)039
- [2] Licia Verde arXiv:0911.3105v1(2012)
- [3] Zhiqi Huang, Licia Verde and Filippo Vernizzi arXiv:1201.5955v2(2012)
- [4] K.Yamamoto ApJ 595:577-588(2003)
- [5] Raphael Bousso, Daniel Harlow and Leonardo Senatore arXiv:1309.4060v2(2013)

5 まとめ、結論

本収録では、Landscape Paradigm で考えられるような曲率パラメータ $\Omega_k > 0$ のインフレーションモデルの制限を推定するために、銀河の大規模構造での Fisher 行列を計算しインフレーションに関するパラメータ n_s, Ω_k についての制限を推定した。

しかし、この計算はまだ不十分で Cosmological distortion の効果も加える必要があるのでまず計算を完成させることが今後の課題であり、その上で前章の結果に対してバイアスの値、銀河の数密度の値もしくは、 k の範囲を変えた場合にパラメータ n_s, Ω_k の誤差にどれだけ影響がでるのかを統計的に調べる必要もある。

また、本収録では銀河の大規模構造でのみ Fisher 行列解析を行ってきたが、今後は CMB での Fisher 行列解析も計算してその時のパラメータ n_s, Ω_k の誤差を解析しインフレーションモデルを具体的に決定できるか調べると共に tunnelling event によって初期揺らぎにどのぐらい影響があるのかということも考