

Expanding Universe with non linear gravitational wave

池田 大志 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

Issacson の短波長重力波の研究によると、短波長重力波の有効的なエネルギー運動量テンソルはトレースレスになり、その結果短波長重力波のみで満たされた宇宙の膨張則は放射成分で満たされた宇宙と同じになることが示される。しかし、この先行研究では重力波の振幅が小さい等の仮定や短波長重力波の平均化が入っており、これらの計算がどこまで妥当かどうかは再確認が必要である。

そうした中で本発表では、重力波だけで満たされた宇宙 (重力波宇宙) の膨張則について議論する。重力波宇宙の時間発展は数値相対論を用いて、フルな Einstein 方程式を解くことで得る。この膨張則を調べることで、Issacson の研究結果を再確認するとともに、Issacson の計算では追うことのできない長波長領域での宇宙の膨張則を明らかにする。

1 Introduction

Issacson の短波長重力波の研究によると、短波長重力波は局所的に平均化することで、重力波の有効的なエネルギー運動量テンソルを定義することができ、そのエネルギー運動量テンソルはトレースレスであることが示される。それにより、フリードマン宇宙に短波長重力波が入っているときには、そのエネルギー密度は放射成分と同様に $\rho^{(GW)} \propto 1/a^4$ となる。そのため、短波長重力波のみの宇宙は放射成分だけの宇宙と同様に $H \propto 1/a^2$ と振る舞うことが結論される。

しかし、この Isaacson の短波長重力波の研究は、通常の摂動論とは異なるため何と比べてどの程度短波長の重力波であればこの近似が有効かはよくわからない。また、平均化の仕方も曖昧でより正確な評価が必要である。そこで、今回は Issacson の近似がどの程度正しいかを、数値的に調べることにした。そのために重力波宇宙を構成し時間発展させる。また通常重力波の計算で行われるような背景時空と重力波の分離は行わず、計量の時間発展をフルに解いていく。そのため、考えている宇宙は一様等方でなくなりスケール因子の評価の仕方に任意性がある。今回はスケール因子の評価として、固有体積、固有面積、固有長さを用いる。おのおのの評価でスケール因子を計算した際にどの程度 Issacson 近似が使える

のかを調べていく。

2 3+1 分解

Einstein 方程式を数値的に解くためには方程式の中の時間発展の式と拘束条件の式とをあらわに書く必要がある。そのために使われるのが 3+1 分解である。ここでは簡単に 3+1 分解を説明していく。3+1 分解の基本的な変数は 3 次元計量 γ_{ij} 、lapse α 、shift vector β 、外曲率 K_{ij} である。それぞれ次の式で定義できる。

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt) \quad (1)$$

$$K_{ij} = \nabla_i n_j \quad (2)$$

ここで \times は考えている (3D) 超曲面の法線ベクトルである。これらの変数を使って (真空の) Einstein 方程式を書くと拘束条件の式と時間発展の式が得られる。まず拘束条件については次の momentum 拘束条件と Hamiltonian 拘束条件が得られる。

$$D_j K^j_i - D_i K = 0 \quad (3)$$

$$R + K^2 - K_{ij} K^{ij} = 0 \quad (4)$$

また時間発展の式は次のように得られる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}_\beta\right) K_{ij} = -D_i D_j \alpha + \alpha \{R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K^k_j\} \quad (5)$$

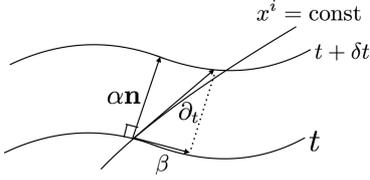


図 1: lapse と shift の幾何学的意味

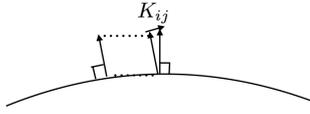


図 2: 外曲率の幾何学的意味

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}_\beta\right)\gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} \quad (6)$$

こうして Einstein 方程式の拘束条件の式と時間発展の式が得られたが、数値的な安定性の為に以下で定義される変数 Ψ 、 $\tilde{\gamma}_{ij}$ 、 \tilde{A}_{ij} 、 K 、 α 、 β^i を用いる。

$$\gamma_{ij} = \Psi^{-4}\tilde{\gamma}_{ij} \quad (7)$$

$$\det(\tilde{\gamma}_{ij}) = 1 \quad (8)$$

$$A_{ij} = K_{ij} - \frac{1}{3}K\gamma_{ij} \quad (9)$$

$$\tilde{A}_{ij} = \Psi^{-4}A_{ij} \quad (10)$$

これらの変数を用いて拘束条件の式を書くと

$$\tilde{D}_j\tilde{A}^{ij} + 6\tilde{A}^{ij}\tilde{D}_j\ln\Psi - \frac{2}{3}\tilde{D}^i K = 0 \quad (11)$$

$$\tilde{D}^2\Psi - \frac{1}{8}\tilde{R}\Psi + \left(\frac{1}{8}\tilde{A}^{ij}\tilde{A}_{ij} - \frac{1}{12}K^2\right)\Psi^5 = 0 \quad (12)$$

を得る。また時間発展の式も書くことができる。拘束条件は任意の時刻で成立しなくてはならないので、時間発展を構成するときには拘束条件を満たすように構成しなくてはならない。

3 初期値の構成

今回は重力波の宇宙の膨張則への影響を調べたいので、真空中で重力波のみの宇宙を調べる。その宇宙

の時間発展を数値的に追うために、対応する宇宙の初期値を拘束条件を解いて構成する。

以下の条件を満たすように構成していく。

- 各時刻で Hubble 定数を定義するために $trK = \text{const}$ を要請する。
- 線形化したときに線形重力波になるようにする。
- 周期的境界条件を要請する。計算領域としては重力波、1 波長分。

これらの条件を満たすような初期値を拘束条件を解いて構成していく。

拘束条件は次の Hamilton 拘束条件と、momentum 拘束条件である。

$$\tilde{D}^2\Psi - \frac{1}{8}\tilde{R}\Psi + \left(\frac{1}{8}\tilde{A}^{ij}\tilde{A}_{ij} - \frac{1}{12}K^2\right)\Psi^5 = 0 \quad (13)$$

$$\tilde{D}_j\tilde{A}^{ij} + 6\tilde{A}^{ij}\tilde{D}_j\ln\Psi - \frac{2}{3}\tilde{D}^i K = 0 \quad (14)$$

まず、先の仮定から

$$K = \text{const} \quad (15)$$

である。ここから K の空間微分の項は落ちる。さらに

$$\tilde{A}_{ij} = 0 \quad (16)$$

とする。こうすることで momentum 拘束条件は自明に満たされ、さらに初期時刻での shift vector β を 0 と置くことで

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\gamma}_{ij} = \mathcal{L}_\beta\tilde{\gamma}_{ij} - 2N\tilde{A}_{ij} - \frac{2}{3}\tilde{D}_k\beta^k\tilde{\gamma}_{ij} = 0 \quad (17)$$

となる。これは (線形化したときに) 構成する初期値が、波の振幅が最大になった瞬間の時刻に対応していることを意味している。さらに

$$\tilde{\gamma}_{ij} = \text{diag}\left(\frac{1+h^{(3)}}{1+h^{(2)}}, \frac{1+h^{(1)}}{1+h^{(3)}}, \frac{1+h^{(2)}}{1+h^{(1)}}\right) \quad (18)$$

とおく。ここで

$$h^{(i)} = \text{Amp} \cos(\omega x^i) \quad (19)$$

である。これは線形化したときに

$$\tilde{\gamma}_{ij} \simeq \text{diag}(1+h^{(3)}-h^{(2)}, 1+h^{(1)}-h^{(3)}, 1+h^{(2)}-h^{(1)}) \quad (20)$$

となり、+モード重力波の重ね合わせになっている。あとは周期的境界条件を課して Hamilton 拘束条件を Ψ について解けば欲しい初期値が得られる。

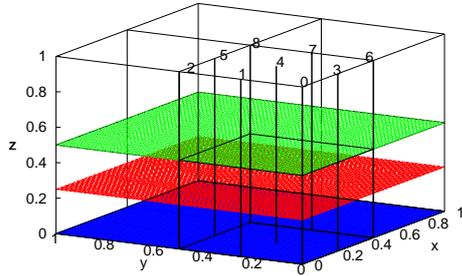


図 3: 重力波の一周期分の BOX である。面積は図の色がついた 3 つの領域でのそれぞれの評価を用いることにする。また長さについては 0 から 8 までの各場所について評価をする。

4 時間発展

拘束条件を解いて時間発展の初期値は得られたので、時間発展を計算する。各時刻での Hubble 定数は

$$H = \frac{1}{3}K \quad (21)$$

で定義する。これは FLRW とのアナロジーである。またスケール因子としては固有体積、固有面積、固有長さを用いた 3 通りの方法で定義する。

$$L_V = \left(\int_{\text{wavelength}} \sqrt{\gamma} d^3x \right)^{1/3} \quad (22)$$

$$L_A(z) = \left(\int_{\text{wavelength}} \sqrt{\gamma_{xx}\gamma_{yy}} dx dy \right)^{1/2} \quad (23)$$

$$L_L(x, y) = \int_{\text{wavelength}} \sqrt{\gamma_{zz}} dz \quad (24)$$

このようにスケール因子の定義に任意性があるのは空間が一様等方でないからである。ここで面積と長さによる評価では、どの場所で評価するか任意性があるので適当な箇所 (3) で評価をすることにする。こうして各々の評価の仕方でもスケール因子と Hubble 定数との関係を調べていく。

5 Conclusion

体積と面積での評価は図 (4) と図 (5) の通りである。図からわかる通り体積と面積による評価では

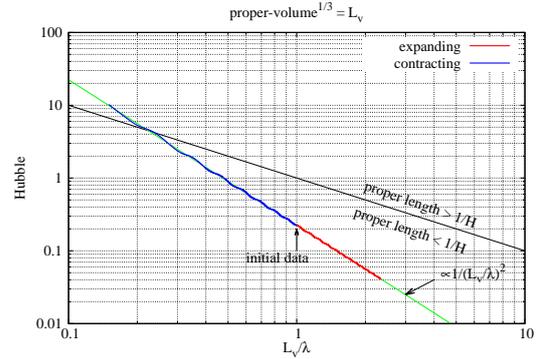


図 4: 体積で評価したスケール因子と Hubble 定数の関係。青線と赤線が計算結果で緑線が短波長領域で Issacson のべきで fit したものである。

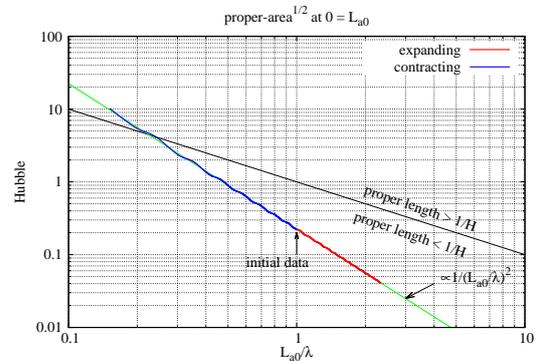


図 5: 図 (3) の青の領域での面積で評価したスケール因子と Hubble 定数の関係。青線と赤線が計算結果で緑線が短波長領域で Issacson のべきで fit したものである。

Issacson の近似はかなりよいことがわかる。また長さによる評価は図 (6) である。長さによる評価では波の物理的な長さが Hubble distance と同程度になると、Issacson の fit からの差が出ていることがわかる。

今回は面積と長さによる評価についてのグラフは一部しか載せることができなかったが、他の箇所での面積、長さによる評価でも同様な振る舞いが見られた。長さによる評価で Issacson の近似が悪くなることから、重力波の平均化が不十分な場合には Issacson の近似が使えなくなることがわかる。

Reference

R. A. Isaacson. 1968. Phys. Rev. 166, 1263

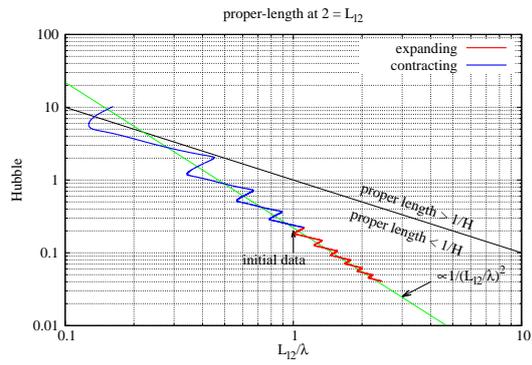


図 6: 図 (3) の箇所での長さで評価したスケール因子と Hubble 定数の関係。青線と赤線が計算結果で緑線が短波長領域で Isaacson のべきで fit したものである。

R. A. Isaacson. 1968. Phys. Rev. 166, 1272