

コンパクト天体の存在下におけるカメレオン場の宇宙論的進化

高橋 一史 (東京大学大学院理学系研究科)

Abstract

ダークエネルギー問題を解決する試みの中で、様々な修正重力理論が提案されてきた。 $f(R)$ 重力などの理論は、共形変換によって Einstein-Hilbert 作用にスカラー場を含んだ理論の形に書き換えることができ、これによって宇宙の加速膨張が説明される。このときスカラー場と物質との結合により、物質に働く力は逆 2 乗則からずれてしまうことが問題となるが、これはカメレオン機構が働くことにより解決される。

本研究では、特に $f(R)$ 重力理論に着目し、天体の外側で宇宙論的な解と矛盾なく接続する解を構成した。また、天体が安定に存在することを要請し、 $f(R)$ 重力理論への新しい種類の制限を発見した。

1 Introduction

近年 Ia 型超新星の観測により、宇宙が加速膨張していることが示された。この加速膨張を引き起こすダークエネルギーの正体は未だに解明されていないが、候補の一つとして宇宙定数がある。宇宙定数の起源を量子場の零点振動による真空のエネルギーと考えると、観測されたダークエネルギーの密度との間におよそ 120 桁もの齟齬が生じる。この「宇宙定数問題」を解決するため、これまで様々なモデルが提案されてきた。その中で一般相対論を変更することで宇宙の加速膨張を説明しようとする理論も多く提案され、それらは修正重力理論と総称される。

修正重力理論の一つに、 $f(R)$ 重力理論という枠組みがある。これは一般相対論の Einstein-Hilbert 作用に含まれるリッチスカラー R を、 R の一般の関数 $f(R)$ に置き換えるというものである。 $f(R)$ 重力理論は、共形変換によって Einstein-Hilbert 作用にスカラー場を含んだ理論の形に書き換えることができる (K. Maeda, 1988)。このとき、スカラー場 ϕ のポテンシャル $V(\phi)$ は関数 $f(R)$ から決まる。さらに、 ϕ は通常物質とも相互作用するため、実効的には物質密度 ρ の寄与が加わったポテンシャル $V_{\text{eff}}(\phi)$ 中を運動することになる。物質密度の時間変化に伴って $V_{\text{eff}}(\phi)$ も変化し、 ϕ は基本的にはその極小を追って時間発展する。この新しい系は Einstein フレーム、元の系は Jordan フレームと呼ばれ、数学的には等価である。

Einstein フレームで見ると、このスカラー場 ϕ がスローロールすることにより宇宙の加速膨張が説明さ

れる。しかし、 ϕ と物質とが結合しているため、物質に働く力は逆 2 乗則からずれてしまう(「第 5 の力」)。この問題は、スカラー場にカメレオン機構が働くことにより解決される (J. Khoury and A. Weltman, 2004)。カメレオン機構とは、周囲の物質の密度が大きいほど ϕ の実効的な質量が大きくなり、第 5 の力の到達距離が小さくなるため、これまで行われてきた地球スケールでの一般相対論の検証実験には抵触しなくなるというものである。このときスカラー場は、カメレオン場とも呼ばれる。

従来の研究においては、天体近傍におけるカメレオン場の振舞いを考える際、初めから静的な解を仮定していた。そこで本研究では、平坦な FLRW 背景時空において、天体の外側で宇宙論的な解と問題なく接続するような解を構成した。また、その解を用いて $f(R)$ 重力理論への新たな制限を発見した。

2 $f(R)$ Gravity

$f(R)$ 重力理論の作用は、次で与えられる。

$$\begin{aligned} S &= S_g + S_m \\ &= \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + \int d^4x \mathcal{L}_m \end{aligned} \quad (1)$$

M_{Pl} は換算 Planck 質量、 S_m は物質場の作用である。共形変換

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu} = f'(R)g_{\mu\nu} \quad (2)$$

により Einstein フレームに移ると,

$$S_g = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[\frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \bar{R} - \frac{1}{2} (\bar{\nabla}_\mu \phi)^2 - V(\phi) \right] \quad (3)$$

となる. ここでスカラー場 ϕ は

$$e^{2\beta\phi/M_{\text{Pl}}} = f'(R), \quad \beta \equiv \frac{1}{\sqrt{6}} \quad (4)$$

により定義され, ポテンシャル $V(\phi)$ は

$$V(\phi) = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \frac{Rf'(R) - f(R)}{f'(R)^2} \quad (5)$$

で与えられる (ϕ 依存性が顕わでないが, 式 (4) を通じて ϕ の関数となっている). また, S_m に含まれる計量テンソルを通じて, ϕ は物質場と結合することになる.

3 Chameleon Mechanism

式 (3) を ϕ について変分すると

$$\bar{\square}\phi = V'(\phi) + \frac{\beta}{M_{\text{Pl}}} e^{4\beta\phi/M_{\text{Pl}}} g^{\mu\nu} \sum_i T_{\mu\nu}^{(i)} \quad (6)$$

を得る. ただし $T_{\mu\nu}^{(i)}$ は, Jordan フレームにおける i 番目の物質のエネルギー運動量テンソルである. 以下では簡単のため, 1 種類の非相対論的物質のみが存在する場合を考える.

Einstein フレームでは, ϕ と物質場との結合により ρ そのものは保存しないが, $\tilde{\rho} \equiv e^{3\beta\phi/M_{\text{Pl}}} \rho$ という組合せが保存する. つまり $\tilde{\rho}$ は ϕ と独立である. これを用いると, 式 (15) は以下のように書ける.

$$\bar{\square}\phi = V'(\phi) + \frac{\beta}{M_{\text{Pl}}} \tilde{\rho} e^{\beta\phi/M_{\text{Pl}}} \quad (7)$$

この式の右辺から, ϕ の運動は物質場に依存した実効ポテンシャル

$$V_{\text{eff}}(\phi) \equiv V(\phi) + \tilde{\rho} e^{\beta\phi/M_{\text{Pl}}} \quad (8)$$

により決まることがわかる. 以下

$$V'(\phi) < 0, \quad V''(\phi) > 0, \quad V'''(\phi) < 0 \quad (9)$$

を要請する. このとき $V_{\text{eff}}(\phi)$ の概形は図 1 のようになり, 極小を持つ.

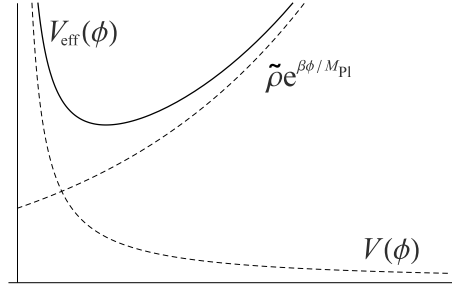


図 1: 実効ポテンシャル $V_{\text{eff}}(\phi)$

V_{eff} を極小にするような $\phi = \phi_{\text{min}}$ は

$$V'(\phi_{\text{min}}) + \frac{\beta}{M_{\text{Pl}}} \tilde{\rho} e^{\beta\phi_{\text{min}}/M_{\text{Pl}}} = 0 \quad (10)$$

を満たし, その極小のまわりの摂動に対応する質量は

$$m^2 = V''(\phi_{\text{min}}) + \left(\frac{\beta}{M_{\text{Pl}}} \right)^2 \tilde{\rho} e^{2\beta\phi_{\text{min}}/M_{\text{Pl}}} \quad (11)$$

となる. 式 (9) の要請の下では, 密度 ρ の増加とともに m も増加することがわかる.

コンパクト天体近傍のカメレオン場の形状は, 天体があまり小さくない場合には, 内側では天体の密度 ρ_c から, 外側では背景密度 ρ_b からそれぞれ決まる $V_{\text{eff}}(\phi)$ の極小をとると考えられる. この場合には, カメレオン場の値の変化は天体表面にごく近い領域 (thin-shell) でのみ起こる (J. Khoury and A. Weltman, 2004). 天体内外で滑らかに接続するような静的な解は, 次のようになる.

$$\phi = \begin{cases} \phi_c & , \text{inside} \\ \frac{\beta \rho_c}{3M_{\text{Pl}}} \left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_s^3}{r} - \frac{3}{2} R_s^2 \right) + \phi_c & , \text{shell} \\ -\frac{\beta \rho_c}{M_{\text{Pl}}} \epsilon \frac{R_c^3}{r} e^{-m_b(r-R_c)} + \phi_b & , \text{outside} \end{cases}$$

ここで ρ_c, R_c はそれぞれ天体の密度と半径, ϕ_c, ϕ_b は天体の充分内側, 外側における ϕ_{min} の値である. また, ϵ は thin-shell パラメータと呼ばれ, shell の厚さ $R_c - R_s$ および $\delta\phi_c \equiv \phi_c - \phi_b$ と, 次のように関係する.

$$\epsilon = \frac{M_{\text{Pl}}}{\beta} \frac{|\delta\phi_c|}{R_c^2 \rho_c} \approx \frac{R_c - R_s}{R_c} \quad (12)$$

本研究では, $\epsilon \ll 1$ の場合のみ考える.

4 Solution for a Compact Object and Constraint on $f(R)$

平坦な FLRW 背景時空を考え、中心に一様密度 ρ_c 、半径 R_c の球対称なコンパクト天体が存在しているとする。Jordan フレームにおける計量は conformal Newtonian ゲージを採用する。

$$ds^2 = -(1 + 2\Psi)dt^2 + a^2(1 + 2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j \quad (13)$$

本研究では、天体が安定に存在し、かつ天体外部で宇宙論的な解に接続するような解を構成した。つまり天体が膨張・収縮しないよう、天体内部で背景宇宙の膨張速度を打ち消すような速度ゆらぎ

$$\delta u^i = \begin{cases} -Hr^i & , \text{inside} \\ 0 & , \text{outside} \end{cases} \quad (14)$$

を持ち、かつ無限遠で摂動量が消えるような解である。解析にあたり、以下の仮定をおいた。

- ρ_c, R_c : 一定
- $\rho_c \gg \rho_b$ (ρ_b : 背景密度)
- ρ_b から決まる ϕ の質量を m_b として

$$H \ll m_b \ll R_c^{-1}$$

- $|\beta\phi/M_{\text{Pl}}| \ll 1$
- $|\beta\dot{\phi}/M_{\text{Pl}}| \ll H$
- コンパクト天体は thin-shell を持つ

解くべき式は、Klein-Gordon 方程式

$$-\ddot{\delta\phi} - 3H\dot{\delta\phi} + \frac{\Delta}{a^2}\delta\phi = \begin{cases} 0 & , \text{inside} \\ \frac{\beta}{M_{\text{Pl}}}\rho_c & , \text{shell} \\ m_b^2\delta\phi & , \text{outside} \end{cases} \quad (15)$$

および Einstein 方程式

$$-\frac{\Delta}{a^2}\tilde{\Phi} + 3H(\dot{\tilde{\Phi}} + H\tilde{\Phi}) = \begin{cases} 4\pi G V_c^{\text{eff}} & , \text{inside} \\ 4\pi G \rho_c & , \text{shell} \\ 0 & , \text{outside} \end{cases} \quad (16)$$

$$\partial_i(\dot{\tilde{\Phi}} + H\tilde{\Phi}) = 4\pi G \rho \delta u_i \quad (17)$$

$$\tilde{\Phi} + \tilde{\Psi} = 0 \quad (18)$$

である。ただし $V_c^{\text{(eff)}} \equiv V^{\text{(eff)}}(\phi_c)$ であり、

$$\tilde{\Phi} = \Phi - \frac{\beta}{M_{\text{Pl}}}\delta\phi, \quad \tilde{\Psi} = \Psi - \frac{\beta}{M_{\text{Pl}}}\delta\phi \quad (19)$$

とおいた。

式 (15) の解は、近似の最低次で

$$\delta\phi = \begin{cases} \delta\phi_c & , \text{inside} \\ \frac{\beta\rho_c}{3M_{\text{Pl}}}\left(\frac{a^2r^2}{2} + \frac{R_s^3}{ar} - \frac{3}{2}R_s^2\right) + \delta\phi_c & , \text{shell} \\ -\frac{\beta\rho_c}{M_{\text{Pl}}}\epsilon\frac{R_c^3}{ar}e^{-m_b(ar-R_c)} & , \text{outside} \end{cases}$$

となる。一方、式 (16) の解は

$$\tilde{\Phi} = \begin{cases} 2\pi G[V_c^{\text{eff}}(R_c^2 - \frac{a^2r^2}{3}) - 2V_cR_c^2\epsilon] & , \text{inside} \\ 2\pi G[\rho_c(R_c^2 - \frac{a^2r^2}{3}) + \frac{2}{3}V_c\frac{R_s^3}{ar}] & , \text{shell} \\ \frac{4\pi G}{3}V_c^{\text{eff}}\frac{R_c^3}{ar}\left(1 - \frac{V_c}{V_c^{\text{eff}}}\epsilon\right) & , \text{outside} \end{cases}$$

となるが、これを式 (17) に代入して δu^i を求めると、shell および天体外部では式 (14) と一致するが、shell よりも内側では

$$\delta u^i = -\left[1 + \frac{V(\phi_c)}{\rho_c}\right]Hr^i \quad (20)$$

となりずれがある。従って

$$V(\phi_c) \ll \rho_c \quad (21)$$

が必要となることがわかる。

式 (21) は、式 (5) を通じて関数 $f(R)$ のパラメータ領域に制限を与える。この制限は、膨張宇宙において天体が安定に存在することを要請して初めて得られるものであり、 $f(R)$ 重力理論への新しい種類の制限となる。

これまでの議論では、結合定数 $\beta = 1/\sqrt{6}$ のカメレオン理論としての $f(R)$ 重力を扱ってきた。しかし上記制限において β の値は本質的でないため、 $\beta = \mathcal{O}(1)$ であるような一般のカメレオン理論に対しても、この制限は成り立つと考えられる。

5 Conclusion

本研究では、平坦な FLRW 背景時空に球対称なコンパクト天体が存在する場合に、天体外部で宇宙論的な解に漸近するような解を構成した。また、天体が安定に存在することを要請し、 $f(R)$ 重力理論への新たな制限を与えた。この結果は、より一般のカメレオン理論においても成り立つ。

Reference

K. Maeda, Phys. Rev. D 39, 3159 (1988)

J. Khoury and A. Weltman, Phys. Rev. D 69, 044026
(2004)