

Spacetime approach to force-free magnetospheres

小笠原 康太 (立教大学 理論物理学研究室)

Abstract

force-free 電気力学 (Force-Free Electrodynamics, FFE) は、磁気圏の相対論的プラズマを記述し、パルサーやブラックホールを扱う際に重要な役割を担っている。扱う主な式は Maxwell 方程式、及び force-free 条件 $F_{\mu\nu}j^\nu = 0$ である。FFE は ADM 形式で扱われることが多いが、今回は wedge 積、外微分を用いて、FFE を記述する。これによって計量に依らず式を記述する事が可能になる。

1 はじめに

FFE を満たす電磁場は Euler ポテンシャル ϕ_1, ϕ_2 を用いて

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi_1\partial_\nu\phi_2 - \partial_\mu\phi_2\partial_\nu\phi_1 \quad (1)$$

$$F = d\phi_1 \wedge d\phi_2 \quad (2)$$

と書ける。(2) は (1) の微分形式による表現である。

ϕ_1, ϕ_2 一定の超曲面を flux surface という。これに垂直なベクトル場を flux surface の生成子とよび、FFE は flux surface の存在に基づく幾何学理論となっている。

ここでは (1)、(2) の表式の導出と、EEF の中で中心的な役割を担う Euler ポテンシャルについて、時空がある対称性をもつ場合の一般的な Euler ポテンシャルの選び方を示す。

なお、計量は $(-, +, +, +)$ 、単位系として $c = G = 1$ 、Maxwell 方程式には Heaviside-Lorentz 単位系を用いる。

2 force-free 電気力学

force-free 条件は以下のように導出される。Maxwell 方程式及び、電磁場のエネルギー運動量テンソル

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu \quad (3)$$

$$T_{\text{EM}}^{\mu\nu} = F^{\mu\rho}F^\nu{}_\rho - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \quad (4)$$

より

$$\nabla_\nu T_{\text{EM}}^{\mu\nu} = -F^\mu{}_\nu j^\nu \quad (5)$$

全系のエネルギー運動量テンソル

$$T_{\text{full}}^{\mu\nu} = T_{\text{EM}}^{\mu\nu} + T_{\text{matter}}^{\mu\nu} \quad (6)$$

は保存則 $\nabla_\nu T_{\text{full}}^{\mu\nu} = 0$ を満たす。FFE は系のエネルギーは電磁場が支配的とするものであり、これは

$$T_{\text{full}}^{\mu\nu} \approx T_{\text{EM}}^{\mu\nu} \quad (7)$$

と考えることと等しい。これより force-free 条件

$$F_{\mu\nu}j^\nu = 0 \quad (8)$$

を得る。

3 微分形式

本集録、発表で使用する微分形式の用語、計算を紹介する。

3.1 外微分 k 形式 (k -form)

n 次元空間の外微分 k 形式 (k -form) u は、以下のように表現される。

$$u = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad (9)$$

k -form は、基底 $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ の線形結合で表現され、1 次独立な基底の数は ${}_n C_k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ 個存在する。 k を微分形式の次数といい、 k -form は ${}_n C_k$ 次線形空間である。例として 3 次元デカルト座標系を考えると、1-form の張る空間は 3 次元ベクトル空間の双対空間になっている。

3.2 wedge 積： \wedge

wedge 積には以下のような計算のルールがある。

$$dx^i \wedge dx^i = 0 \quad (10)$$

$$x^i \wedge dx^j = -x^j \wedge dx^i \quad (11)$$

$$(fu) \wedge v = u \wedge (fv) = f(u \wedge v) \quad (12)$$

u, v は任意の微分形式、 f は関数である。その他、分配法則、結合法則も成立する。

3.3 外微分： d

外微分を用いる利点は、座標不変性である。これにより、座標系に関係なく物理量の微積分計算が可能になる。主に用いる計算は

$$\begin{aligned} du &= d(f_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \right) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \end{aligned} \quad (13)$$

$$d(dv) = 0 \quad \forall v \quad (14)$$

(14) は Poincaré の補助定理といい、今後の計算では頻繁に用いる。

3.4 スター演算子： $*$

ここでは volume form を $dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$ と取る。 n 次元空間の k 形式 $\lambda = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ に対する star 演算子 $*$ の作用は

$$*\lambda = \sigma dx^{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}, \quad \sigma = \pm 1 \quad (15)$$

であり、 $*\lambda$ の張る空間は λ の張る空間の双対空間になっている。 σ の符号は

$$\lambda \wedge *\lambda = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (16)$$

となるように決める。

$*$ を 2 回作用させれば自分自身のもとの基底で表現されるが、符号は空間の次元 n と元の次数 k によって $*(*\lambda) = (-1)^{k(n-k)}$ となる。以降基本的に 4 次元を扱うので、 $n = 4$ の場合は

$$k = (\text{even}) \Rightarrow *(*\lambda) = \lambda \quad (17)$$

$$k = (\text{odd}) \Rightarrow *(*\lambda) = -\lambda \quad (18)$$

となる。

3.5 Maxwell 方程式/微分形式による表現

微分形式において電磁場は 2-form で表現され、テンソルで書かれたものとの対応は以下ようになる。

$$\nabla_\rho F_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow dF = 0 \quad (19)$$

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu \Rightarrow d*F = J \quad (20)$$

$$(J = *j, \quad J_{\mu\nu\rho} = j^\sigma \epsilon)$$

4 Euler ポテンシャル

FFE を満たす電磁場が Euler ポテンシャルを用いて (1) の形に書けることを示す。まず、非相対論的な MHD(magnetohydrodynamics) の形式から出発する。非相対論的な MHD において、ベクトルポテンシャル A はスカラー関数 α, β, χ を用いて以下のように書ける。

$$A = \alpha \nabla \beta + \nabla \chi \quad (21)$$

これより磁場 B は

$$B = \nabla \times A = \nabla \alpha \times \nabla \beta \quad (22)$$

と書け

$$B \cdot \nabla \alpha = B \cdot \nabla \beta = 0 \quad (23)$$

となっている。 $\nabla \chi$ の項は、ベクトル解析の公式 $\nabla \times \nabla \phi = 0 \quad \forall \phi$ より消えるので、以下では α, β を非相対論的な MHD での Euler ポテンシャルとよぶことにする。

force-free 条件が成立している場合、磁場 B と電場 E は $B \cdot E = 0$ を満たす。これを用いて Maxwell 方程式 $\partial_t B + \nabla \times E = 0$ を以下のように書き換える。ベクトル解析の公式より

$$E + \partial_t \alpha \nabla \beta - \partial_t \beta \nabla \alpha + \nabla(\alpha \partial_t \beta) = \nabla f \quad (24)$$

f は任意のスカラー関数。さらに、(23) と $B \cdot E = 0$ より

$$B \cdot \nabla(f - \alpha \partial_t \beta) = 0 \quad (25)$$

を得る。これと、 $B = \nabla \alpha \times \nabla \beta$ を考えると

$$\psi(\alpha, \beta) := f - \alpha \partial_t \beta \quad (26)$$

という α と β の任意スカラー関数 ψ を導入することで、電場と磁場は以下のように書ける。

$$\mathbf{E} = -\partial_t \alpha \nabla \beta + \partial_t \beta \nabla \alpha + \nabla \psi(\alpha, \beta) \quad (27)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \alpha \times \nabla \beta \quad (28)$$

ここで、(1) より \mathbf{E} 、 \mathbf{B} を書き下してみると

$$\mathbf{E} = -\partial_t \phi_1 \nabla \phi_2 + \partial_t \phi_2 \nabla \phi_1 \quad (29)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \phi_1 \times \nabla \phi_2 \quad (30)$$

であり、 α, β を用いて書いたものと比較すると $\nabla \psi(\alpha, \beta) = 0$ となれば両者が一致することがわかる。以下では電磁場がいつでも (29)、(30) の形で書けることを微分形式を用いて示す。

(27)(28) より、この電磁場は 2-form で

$$F = d\alpha \wedge d\beta + d\psi \wedge dt \quad (31)$$

と書ける。Euler potential ϕ_1, ϕ_2 を用いた場合は $F = d\phi_1 \wedge d\phi_2$ となるので、(31) がこの形で書けることを示す。(27) と (29) の違いは $\nabla \psi(\alpha, \beta)$ の項なので、ここがゼロ ($\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = \frac{\partial \psi}{\partial \beta} = 0$) の場合は自明なので、($\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \neq 0$) の場合を考える。この場合

$$F = d\alpha \wedge d\beta + d\psi \wedge dt \quad (32)$$

$$= \frac{\partial \alpha}{\partial \psi} d\psi \wedge d\beta + d\psi \wedge dt \quad (33)$$

$$= d\psi \wedge \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial \psi} d\beta + dt \right\} \quad (34)$$

と変形でき、さらに

$$\Phi(\psi, \beta) := \int \frac{\partial \alpha(\psi, \beta)}{\partial \psi} d\beta \quad (35)$$

を定義すれば (34) は以下ようになる。

$$F = d\psi \wedge \left\{ dt + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} d\psi \right\} \quad (36)$$

これより

$$\phi_1 = \psi, \quad \phi_2 = t + \Phi(\psi, \beta) \quad (37)$$

と ϕ_1, ϕ_2 を選べば、 $F = d\phi_1 \wedge d\phi_2$ を得る。

この Euler ポテンシャルは時空の計量などから決定されるが、一意には決まらない。変換

$$\phi_1 \rightarrow \tilde{\phi}_1 = \tilde{\phi}_1(\phi_1, \phi_2), \quad \phi_2 \rightarrow \tilde{\phi}_2 = \tilde{\phi}_2(\phi_1, \phi_2) \quad (38)$$

で得られる $(\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2)$ もまた Euler ポテンシャルとなる。この変換に対して電磁場は $F_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{F}_{\mu\nu}$ となり以下のように変化する。

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \tilde{\phi}_1 \partial_\nu \tilde{\phi}_2 - \partial_\mu \tilde{\phi}_2 \partial_\nu \tilde{\phi}_1 \\ &= \left(\frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial \phi_1} \frac{\partial \tilde{\phi}_2}{\partial \phi_2} - \frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial \phi_2} \frac{\partial \tilde{\phi}_2}{\partial \phi_1} \right) F_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (39)$$

よって、このポテンシャルの変換で電磁場が不変になるためには

$$\frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial \phi_1} \frac{\partial \tilde{\phi}_2}{\partial \phi_2} - \frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial \phi_2} \frac{\partial \tilde{\phi}_2}{\partial \phi_1} = \frac{\partial(\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2)}{\partial(\phi_1, \phi_2)} = 1 \quad (40)$$

つまり、変換 (38) の Jacobian が 1 になることが必要。これは電磁場の gauge 自由度に対応する。

5 対称性と Euler ポテンシャル

一般に、時空がある対称性をもっているとき、対応する Euler ポテンシャルがもつ対称性や性質は非自明である。そのため、時空のもつ対称性を Euler ポテンシャルに反映させる方法が必要になる。時空が対称性をもつとき、それに対応する killing ベクトル場が必ず存在する。以下ではこの killing ベクトル場と Euler ポテンシャルとの関係式を議論する。

Killing ベクトル場 X が存在するとき、その Lie 微分は恒等的にゼロである。Cartan's magic formula ($\mathcal{L}_X = (X \cdot) d + d(X \cdot)$)、Maxwell 方程式 ($dF = 0$) より

$$\mathcal{L}_X F = X \cdot (dF) + d(X \cdot F) = 0$$

$$\Rightarrow X \cdot F = df$$

$$\Rightarrow (X \cdot d\phi_1) d\phi_2 - (X \cdot d\phi_2) d\phi_1 = df \quad (41)$$

ここで $\tilde{\phi}_1 = -f$ と選ぶと (40) より

$$-\frac{\partial f}{\partial \phi_1} \frac{\partial \tilde{\phi}_2}{\partial \phi_2} + \frac{\partial f}{\partial \phi_2} \frac{\partial \tilde{\phi}_2}{\partial \phi_1} = 1 \quad (42)$$

の成立が必要なので、ここから $\tilde{\phi}_2$ が決まる。このようにして決まった $\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2$ で (41) を書き直すと

$$(X \cdot d\tilde{\phi}_1) d\tilde{\phi}_2 - (X \cdot d\tilde{\phi}_2) d\tilde{\phi}_1 = -d\tilde{\phi}_1 \quad (43)$$

となるので、 $\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2$ と killing ベクトル場 X との関係式として

$$X \cdot d\tilde{\phi}_1 = 0, X \cdot d\tilde{\phi}_2 = 1 \quad (44)$$

を得る。よって、killing ベクトル場が求まれば、(44) を積分することで、時空の対称性を反映させた Euler ポテンシャルを得ることができる。

6 まとめ

- ・系のエネルギーは電磁場が支配的であると考え、 $(T_{\text{full}}^{\mu\nu} \approx T_{\text{EM}}^{\mu\nu})$ で、force-free 条件 $F_{\mu\nu}j^\nu = 0$ を得る。

- ・force-free 条件を満たす電磁場は、Euler ポテンシャル ϕ_1, ϕ_2 を用いて $F = d\phi_1 \wedge d\phi_2$ と書ける。

- ・Euler ポテンシャルは一意には決まらず、 $\phi_1 \rightarrow \tilde{\phi}_1 = \tilde{\phi}_1(\phi_1, \phi_2)$, $\phi_2 \rightarrow \tilde{\phi}_2 = \tilde{\phi}_2(\phi_1, \phi_2)$ かつ、(Jacobian)=1 を満たす変換の自由度 (gauge 自由度) が存在する。

- ・時空に対称性があり対応する killing ベクトル場が求まったとき、上記の変換の自由度を利用して対称性を反映させた Euler ポテンシャルを得ることができる。

7 今後の課題

回転ブラックホールに存在する磁気圏は回転によりトロイダル磁場とポロイダル電場が発生し、これにより磁気圏に沿って電磁気的エネルギーの輸送がおこる。また、ブラックホールの回転軸に沿って磁力線が伸びている場合、ブラックホール自身の回転エネルギーを電磁場のエネルギーとして遠方に輸送可能になる。巨大ブラックホールが高速回転している場合、現在観測されている γ 線バーストなどのエネルギーを十分説明できる。これには電磁場のエネルギーを運動エネルギーの形に変換する機構が必要になり MHD の理解も欠かせない。

これら興味深い現象をより理解するために、現在提唱されているモデルの深い理解と、理論的考察を進めていきたい。

8 参考文献

- [1] Gralla, Samuel E., and Ted Jacobson. "Space-time approach to force-free magnetospheres." arXiv preprint arXiv:1401.6159 (2014).
- [2] Uchida, Toshio. "Theory of force-free electromagnetic fields. I. General theory." *Physical Review E* 56.2 (1997): 2181.
- [3] Uchida, Toshio. "Theory of force-free electromagnetic fields. II. Configuration with symmetry." *Physical Review E* 56.2 (1997): 2198.
- [4] Poisson, Eric. *A Relativist's Toolkit*. Cambridge University Press, 2004.