

6次元位相空間における無衝突ボルツマン方程式による自己重力系の数値シミュレーション

土屋 将太郎 (筑波大学大学院 数理物質科学研究科)

Abstract

DIRECT INTEGRATION OF THE COLLISIONLESS BOLZMANN EQUATION IN SIX-DIMENSIONAL PHASE SPACE; SELF-GRAVITATING SYSTEM のレビューを行う。

6次元位相空間における無衝突ボルツマン方程式を数値的に解くことで自己重力系の数値シミュレーションコードを開発し、重力不安定性、ランダウダンピング、キング球の安定性を含むいくつかのシミュレーションを行い、線形予測理論と比較することでそのコードの精度を確かめた。更に、N体シミュレーションと比較することでN体シミュレーションに対する長所・短所を調べ、宇宙の大規模構造形成の数値シミュレーションにおけるN体シミュレーションとの妥当性を調べる。

1 Introduction

銀河・銀河団・宇宙の大規模構造形成などの自己重力系の数値シミュレーションはこれまでN体シミュレーションが採用されてきたが、物理量に含まれるショットノイズや人工的な2体緩和などの粒子数の制限からくる問題点がある。その点、無衝突ボルツマン方程式を数値的に解く手法ではこれらの問題点がなく優位性があるとされてきたが計算コストや必要メモリ容量の膨大さからこれまで低次元のシミュレーションしか行われてこなかった。

この論文では、近年の計算機の発達によって可能となった6次元位相空間での無衝突ボルツマン方程式の数値シミュレーションを行い、その妥当性の評価とN体シミュレーションとの比較による優劣の見極めを目的とする。また、これらの結果から宇宙の大規模構造形成におけるダークマターの密度ゆらぎに大きな速度分散を持つニュートリノによる無衝突減衰効果の数値シミュレーションを行うことが最終的な目的である。

2 Numerical scheme

無衝突自己重力系について物質の分布関数 $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ は以下の Vlasov-Poisson 方程式に従う。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (1)$$

ここで \mathbf{x} と \mathbf{v} はそれぞれ空間座標、速度空間座標であり、 ϕ は以下の Poisson 方程式を満たす重力ポテンシャルである。

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho = 4\pi G \int f d^3v \quad (2)$$

Poisson 方程式についてはフーリエ変換による畳み込み法で解き、Vlasov-Poisson 方程式については位相空間を有限体積法で離散化し、それぞれの方向に分けて6つの1次元移流方程式として解く。

1次元移流方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

の数値解法としては、質量の保存・分布関数の正値性・最大値の原理を保障した Positive Flux Conservation(PFC) スキーム (Filbet et al 2001) を採用した。

3 Test calculations

数値シミュレーションの妥当性を評価するために、以下のテストシミュレーションを行った。

- i. 初期条件に速度分散と密度ゆらぎを与えて、密度ゆらぎが重力不安定性による成長と無衝突減衰(ランダウ減衰)によるゆらぎの減衰が線形摂動理論と一致しているか確認するテスト
- ii. Vlasov-Poisson 方程式の安定な定常解を持つ King 球が定常状態を保っているのか確認するテスト
- iii. 2つの King 球を衝突させたシミュレーションを N 体シミュレーションでの結果と比較するテスト

4 Results

ここでは、i. と iii. についてのシミュレーション結果を載せる。

i. について、1次元自己重力系において初期条件を

$$f(x, v, t) = \frac{\bar{\rho}}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right) (1 + A \cos kx) \quad (4)$$

とおき、 σ は速度分散、 A はゆらぎの大きさ、 k は密度ゆらぎの波数である。この波数 k がジーンズ波数 k_J より小さいとき ($k < k_J$) は密度ゆらぎは重力不安定性により成長していく、また $k > k_J$ の時は無衝突減衰によってゆらぎが減衰していく。ジーンズ波数は以下で与えられる。

$$k_J = \left(\frac{4\pi G\bar{\rho}}{\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

それぞれの k/k_J での密度ゆらぎの時間発展を図 1 に表わした。また太線は線形理論での成長・減衰率を表わしている。上 2 つは $k < k_J$ の場合でゆらぎは重力不安定性により成長し、した 2 つは $k > k_J$ の場合で無衝突減衰によってゆらぎが減少していることがわかる。どの k/k_J も初期段階においては線形理論とよく一致している。 $k/k_J = 2.0$ については物質の大部分が重力ポテンシャルに束縛されポテンシャルを浅くするのに運動エネルギーを消費してしまって途中で無衝突減衰が止まってしまった。この傾向は $k/k_J = 1.1$ での $t > 3T$ にも同様の傾向が見られた。

iii. について King 球の初期条件を

$$f(\varepsilon) = \begin{cases} \rho_1(2\pi\sigma^2)^{-3/2}(e^{\varepsilon/\sigma^2} - 1) & (\varepsilon > 0) \\ 0 & (\varepsilon < 0) \end{cases}$$

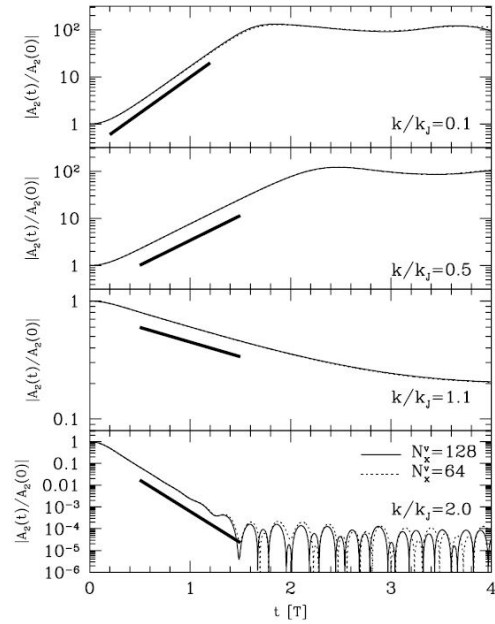


図 1: $k/k_J = 0.1, 0.5, 1.1, 2.0$ での密度ゆらぎの時間発展、太線は線形理論での傾き

とおき、 ε は相対エネルギー、 ρ_1, σ は King 球の全体の形状と全質量 M から決められた定数である。また空間分布を特徴づける King パラメータ $W = \Psi(0)/\sigma^2$ はここでは $W = 3$ としてある。この 2 つの King 球を $x-y$ 平面对称に配置し、 x 軸にそって反対向きの速度を与え 2 つの King 球のオフセット衝突させる。

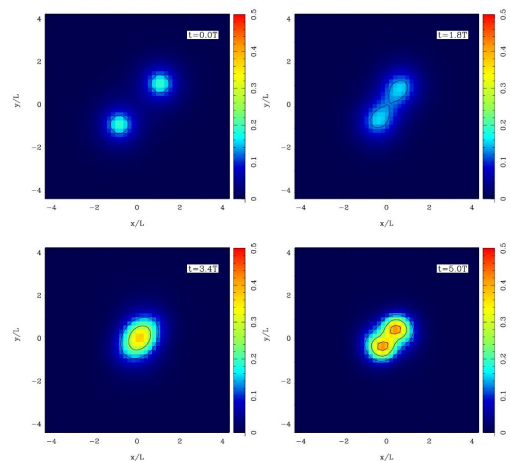


図 2: 位置空間での $t = 0.0$ (左上), $1.8T$ (右上), $3.4T$ (左下), $5.0T$ (右下) での質量密度マップ

図 2 は、Vlasov シミュレーションでの位置空間において質量密度マップの時間発展を表わしている。 $t = 3.4T$ のとき最初に 2 つの King 球が衝突し、すり抜けていく。図 3、図 4 は $t = 5.0T$ における Vlasov シミュレーションと N 体シミュレーションでの位置空間における質量密度マップである。

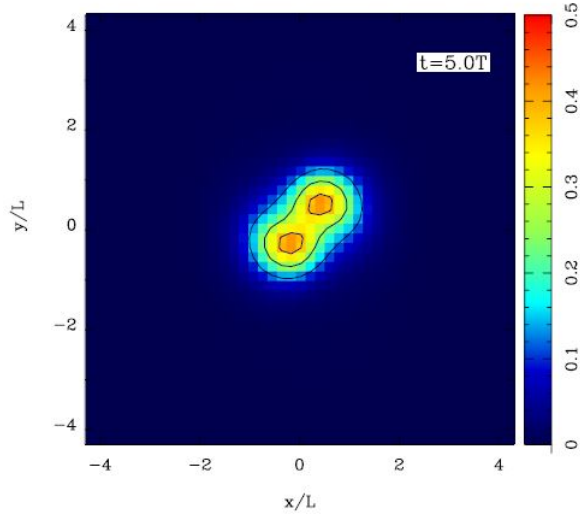


図 3: Vlasov シミュレーションでの位置空間において $t = 5.0T$ での質量密度マップ

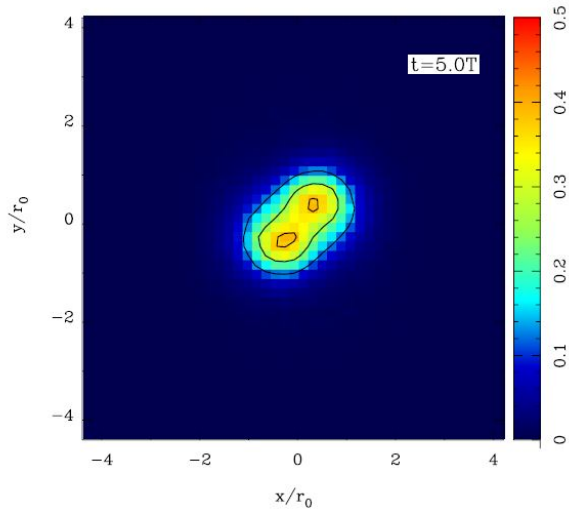


図 4: N 体シミュレーションでの位置空間において $t = 5.0T$ での質量密度マップ

N 体シミュレーションではそれぞれの King 球を 10^6 個の粒子で再現している。ショットノイズなどの影響で N 体シミュレーションでは 2 つのピークが若干非対称になっているが、位置空間においては 2 つのシミュレーションではほとんど差はなかった。

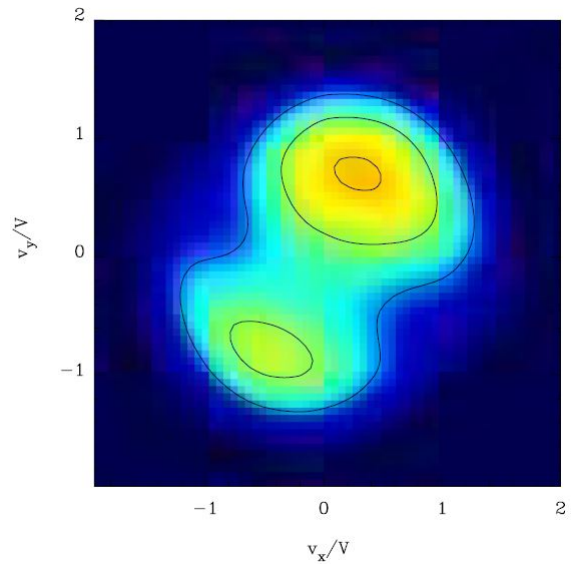


図 5: Vlasov シミュレーションでの速度空間において $t = 4.2T$ での密度マップ

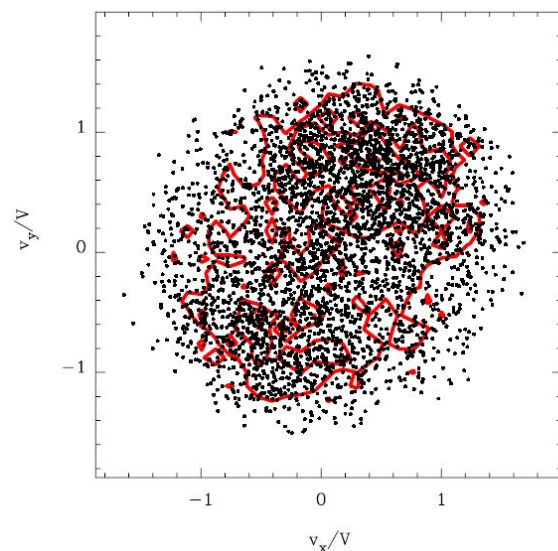


図 6: N 体シミュレーションでの速度空間において $t = 4.2T$ での密度マップ

次に速度空間において Vlasov シミュレーションと N 体シミュレーションの比較を行う。図 5、図 6 は 2 つのシミュレーションから $t = 4.2T$ での位置空間において、2 つの King 球の中心付近の 1 メッシュを速度空間での密度マップに表わしたものである。図 5 ではしっかりと 2 つのピークが見られるが、図 6 の N 体シミュレーションではこのような 2 つのピークはショットノイズなどの影響によりうまく再現できてないと思われる。

5 Summary and Discussion

6 次元位相空間での Vlasov-Poisson 方程式系の数値シミュレーションを達成し、一連のテストシミュレーションから開発したコードの精度を確かめた。N 体シミュレーションとの比較から空間成分においては大きな差は見られなかったが、速度空間成分については Vlasov シミュレーションのほうが有効であることがわかった。これにより、宇宙の大規模構造形成における大きな速度分散をもつニュートリノによるダークマターの密度ゆらぎの無衝突減衰効果をうまく扱える。また、今まで N 体シミュレーションが主流であったが、Vlasov シミュレーションコードの開発により 2 成分シミュレーションも可能となった。

Reference

著者 K, Yoshikawa, N, Yoshida, and M, Umemura. 2013, 発行元 ApJ,762,116