Instability of black holes immersed in magnetic fields

野田　宗佑 (名古屋大学 理学研究科 M2)

Abstract

外部磁場中で、ブラックホールのスカラー摂動に対する安定・不安定性について議論する。
1957 年の Regge-Wheeler 方程式の発見以来、ブラックホールの摂動に対する安定・不安定性は議論されてきたが、ブラックホールの周辺環境を考慮した議論はあまりされてこなかった。Jet の発生機構の解明をブラックホールの物理学に求める場合、その候補の１つとして回転しているブラックホールからのエネルギー引き抜き機構があり、この場合には磁場中でのブラックホールからのエネルギー引き抜き機構を考える必要がある。また、エネルギー引き抜きに関する現象として Super radiant instability やブラックホールボムと呼ばれるものがあり、これは箱で囲ったブラックホールの摂動を考えた場合にエネルギー引き抜き機構が関わると系が不安定になるというものである。磁場がスカラー場を閉じ込める働きをするならば、磁場中でのエネルギー引き抜き機構を考えるとブラックホール-周辺系は不安定になるはずであるが、外部磁場がある場合にはエネルギー引き抜きの条件は求められる一方で解くべき方程式が変数分離不可能な形となり、これまでに確立している方法では安定・不安定性の計算までを行うことはできない。
そこで、ここでは変数分離ができない系の安定・不安定の計算方法について提案する。

1　Motivation

宇宙には活動銀河核（AGN）と呼ばれる天体が存在する。これは系外銀河の中心に見つかっている天体で、非常に大きなエネルギーを放出しているが、その発生機構はいまだ解明されていない。しかし、AGN の中心にはブラックホールが存在することが間接的には（直接的な証拠はまだ無い。）分かっており、ブラックホールに物質が降着するときの重力エネルギーや、回転しているブラックホールの性質の１つであるエネルギー引き抜き機構が AGN から放出されるエネルギーの源になっているとも言われている。また、このようなブラックホールの周りには周辺環境が作り出す磁場があると考えられるため、磁場がある環境下でエネルギー引き抜き機構を考える必要がある。

2　ブラックホールの安定・不安定性

ここではブラックホール時空上の場の振る舞いについて考えるが、その場の安定性はブラックホールそのものの安定性を議論するのとほぼ同値である。ほぼと言っているのは、ここでは場のエネルギー運動量テンソルが計量に与える影響を無視しているからである。
しかし、このような近似のもとでもブラックホールに摂動を与えているというのは重力摂動を考えるとよくわかる。これは

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{BG} + h_{\mu\nu} \tag{1}$$

のように摂動を加えるものであり、見方によっては Back Ground の計量は変えずに、その上に重力波がいる状況を考えていると見ることもできる。
今回ここで議論するのは、この重力波の代わりにスカラー場を考えた場合である。

3　Super radiance

以下では、Kerr ブラックホール上でのスカラー場の振る舞いについて考える。
まず Kerr 計量は

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left(1-\frac{2Mr}{\Sigma}\right)dt^2 - \frac{2aMr\sin^2\theta}{\Sigma}2dtd\phi + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 \\ &+\Sigma d\theta^2 + \left(r^2+a^2+\frac{2a^2Mr\sin^2\theta}{\Sigma}\right)\sin^2\theta d\phi^2 \end{aligned} \tag{2}$$

のように Boyer-Lindquist 座標で書き、この時空の上で Klein-Gordon 方程式を考える。

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \Phi = 0 \tag{3}$$

Ansatz として $\Phi = \frac{R_{lm}(r)}{\sqrt{r^2+a^2}} S_{lm}(\theta) e^{-i\omega t} e^{im\phi}$ と置き上式に代入すると、ｒについての式は

$$\frac{d^2R}{dr_*^2} + (\omega^2 - V(r))R = 0 \tag{4}$$

となる。
ここで、$V(r)$ は

$$V \equiv \frac{4Mram\omega - a^2m^2 + \Delta(a^2\omega^2 + \Lambda_{lm})}{(r^2+a^2)^2} + \frac{\Delta(3r^2 - 4Mr + a^2)}{(r^2+a^2)^3} - \frac{3\Delta^2 r^2}{(r^2+a^2)^4} \tag{5}$$

である。
この方程式の無限遠、Horizon 近傍での解はそれぞれ

$$R = C_{in} e^{-i\omega r_*} + C_{out} e^{i\omega r_*} \tag{6}$$

$$R = e^{-i(\omega - m\Omega_H)r_*} \tag{7}$$

と求まり、それぞれの点での Wronskian の保存を用いると

$$\left|\frac{C_{out}}{C_{in}}\right|^2 = 1 - \left(\frac{\omega - \Omega_H m}{\omega}\right) \left|\frac{1}{C_{in}}\right|^2 \tag{8}$$

が成りたつ。（ここで Ω_H はブラックホール Horizon 上の角速度である）
これを見ると

$$\omega \leq m\Omega_H \tag{9}$$

という条件を満たす波に対しては反射率が 1 を超え、ブラックホールによる反射で波の増幅が起こることがわかる。
これが Super radiance と呼ばれる、エネルギー引き抜き現象である。（ブラックホールの回転エネルギーを波が引き抜く）

4 Magnetic Super radiance

それでは、この Super radiance を磁場の影響下で考えるとどうなるであろうか。
ここでは Wald 解と呼ばれる無限遠で一様になるような磁場を用いる。

4.1 Wald 解

定常、軸対称な時空の上での Maxwell 方程式の解を求めるが、これは Killing vector lemma, Maxwell 方程式, Kommer integral を用いて、さらに無限遠（ブラックホールから十分離れた場所）では磁場は一様になるようなものを考えるという条件から求まるもので、ベクトルポテンシャルが Killing vector で表される電磁場である。
このベクトルポテンシャルは

$$A^\mu = \frac{B}{2}(\psi^\mu + 2a\eta^\mu) \tag{10}$$

となるが、Gauge 変換をして無限遠で $A_0 = 0$ になるものを用いる。

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu(eBt) \tag{11}$$

η^μ、ψ^μ はそれぞれ定常、軸対称に関する Killing vector である。

4.2 磁場がある場合の Super radiance の条件

磁場中でのスカラー場の振る舞いについて考える。
磁場との相互作用を見るためにここでは複素スカラー場を考え、その電荷を e、質量を μ とする。
この時 Klein-Goldon 方程式は

$$(\nabla_\mu - ieA'_\mu)(\nabla^\mu - ieA'^\mu)\Phi - \mu^2\Phi = 0 \tag{12}$$

である。
この場合にも Horizon の近傍のみを考えると（磁場が一様になってしまうほどの遠方では磁場は無いという近似）磁場が無い場合と同じように変数分離が可能であり、ｒについての方程式は次のようになる。

$$\Delta\frac{d}{dr}\left(\Delta\frac{d}{dr}R(r)\right) + [W^2 - \Delta(\mu_{eff}^2 r^2 + \lambda)]R(r) = 0 \tag{13}$$

ここで、W μ_{eff} はそれぞれ

$$W \equiv \omega(r^2+a^2) - am + 2aMeBr \tag{14}$$

$$\mu_{eff}^2 \equiv \mu^2 - eBm \tag{15}$$

である。
この場合にも磁場が無い場合と同じ手順で Wronskian の保存を用いると、反射率と透過率の関係式が得られる。

$$\left|\frac{C_{out}}{C_{in}}\right|^2 = 1 - \left(\frac{\omega - m\Omega_H + eBa}{\sqrt{\omega^2 - \mu_{eff}^2}}\right)\left|\frac{1}{C_{in}}\right|^2 \quad (16)$$

よって、この場合には

$$\omega \leq m\Omega_H - eBa \quad (17)$$

が反射率が 1 を超える、つまり Super radiance が起こる条件である。

5 変数分離できない場合の計算

系が安定か不安定かを測る為には、Super radiance の条件を求めるだけでは不十分であり、ω 自体を求める必要がある。しかし、その計算は変数分離ができる場合のみに使えるものであった。ここでは、変数分離が不可能な場合についての計算方法の１つを見る。

5.1 変数分離ができる場合

この場合には、ｒについての方程式

$$\frac{d^2R}{dr_*^2} + (\omega^2 - V(r))R = 0 \quad (18)$$

を特定の境界条件（問題による）のもとで解く方法は数多く知られており、WKB 近似を用いる方法や Shooting 法などの数値計算で解いていく方法が知られている。ここで解くといっているのは、場の ω を求めるということである。（一般には複素数になる）
例えば、Schwarzschild 時空上で磁場の無い場合に massless スカラー場の ω を Horizon 上で ingoing、遠方で outgoing という境界条件のもと WKB 近似を用いて計算すると

$$\omega = \frac{L}{3\sqrt{3}M} - i\frac{1}{3\sqrt{3}M}\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (19)$$

となる。場の時間依存性が $e^{-i\omega t} = e^{-i\omega_R t}e^{\omega_I t}$ であることを思い出すと、この例では ω の虚部が負であるため系は摂動に対して安定である。

5.2 変数分離ができない場合

ここまで考えた場合は磁場は Wald 解で、かつ Horizon からずっと離れた場所での磁場は無視するという近似を用いていたために特別に変数分離ができた。しかし一般には Kerr 時空上で電磁場とスカラー場が couple する系は変数分離不可能である。
この場合に ω を求める方法について考える。
ここでは、簡単のため A_t,A_ϕ 成分のみを持ち、それらが r,θ の関数になっているような電磁場を考える。

$$A_\mu = A_t(r,\theta)\delta_{t\mu} + A_\phi(r,\theta)\delta_{\phi\mu} \quad (20)$$

この場合に Klein-Gordon 方程式

$$(\nabla_\mu - ieA_\mu)(\nabla^\mu - ieA^\mu)\Phi - \mu^2\Phi = 0 \quad (21)$$

に $\Phi = R_{lm}(r)S_{lm}(\theta)e^{-i\omega t}e^{im\phi}$ を代入する。
ここで S_{lm} は Spheroidal harmonics で、ブラックホールの回転パラメータ a を 0 にすると Legendre 陪関数になるようなものであり、直交関係や規格化条件は Legendre 陪関数と同じである。
S_{lm} の直交関係を用いると、R_{lm} についての方程式は

$$\frac{d}{dr}\left(\Delta\frac{dR_{lm}}{dr}\right) + G(r)R_{lm} + \sum_{l'} A_{ll'm}R_{l'm} = 0 \quad (22)$$

と書ける。ここで、$A_{ll'm}$ は Clebsch Gordan 係数を含むような定数で、この項の存在が系が変数分離不可能であることを意味している。（異なる l を持つ mode が混ざり合う項）
Clebsch Gordan 係数の性質からこの項の $\sum$ は限られた数の和になる。
こうなると lm を指定すれば有限の大きさのベクトル、行列に対する微分方程式（連立微分方程式）になり、あとは変数分離可能な場合と同じように数値計算などで ω を計算する。

6 まとめ

方程式が変数分離できない場合のスカラー場の ω の計算方法についてその方法の概略を説明した。変数分離できる場合には１本の微分方程式を適当な境界条件のもとで解くことで ω を求めることができるが、変数分離不可能な場合には方程式に異なる角運

動量が混ざる項（Clebsch Gordan 係数を含む項）が現れ、適当な境界のもとで連立微分方程式を扱う必要があることが分かった。

Reference

[1]R.Wald, ”Black hole in a uniform magnetic field”, Physical Review D(1974), vol. 10, Issue 6, pp. 1680-1685

[2]Richard Brito, Vitor Cardoso, Paolo Pani, ”Superradiant instability of black holes immersed in a magnetic field” Phys.Rev.D89:104045,(2014)