

Bigravity 理論の線形及び非線形解析と宇宙論的応用

青木 勝輝 (早稲田大学大学院 先進理工学研究科)

Abstract

我々は、bigravity 理論に基づき、いくつかの具体的な背景時空からの線形摂動と非線形摂動を考えた。背景時空は宇宙項をもつ一般相対論の解で与えられる。線形摂動領域においては、我々の時空にダークマターを導入しなくても、bigravity 理論は銀河スケールから宇宙論スケールまでの全てのダークマターの起源を説明できる。一方、非線形領域では Vainshtein 機構により bigravity 理論は一般相対論を回復すると信じられている。我々は、球対称静的時空や一様等方時空に対しては、Vainshtein 機構が働くことが示した。さらに、我々は一様等方時空を背景とした非線形摂動を考え、Vainshtein 機構の有無について議論した。

1 Introduction

現在の宇宙の標準理論であるビッグバン理論は一般相対論と宇宙の一様等方性を基礎として構築されており、宇宙背景放射などの様々な観測から支持されている。しかし観測からダークマター、ダークエネルギーといった未知の物質が我々の宇宙に大量に存在していることが判明した。これらの暗黒成分の起源は未だにわかっていない。ダークマター、ダークエネルギーの正体は現代宇宙論に残された最重要課題の 1 つであり、重力理論の修正といった新たな物理を示唆しているかもしれない。

重力理論の修正として 1 つ自然なアプローチは、重力子に質量を持たせることである。一般相対論は素粒子論的立場から見た場合、質量ゼロのスピン 2 粒子 (重力子) の理論と言える。しかし重力子が本当に質量を持たないのかはわかっておらず、理論と観測の両面から質量の有無を調べる必要がある。このような理由から質量を持った重力子を考える理論 (Massive gravity) が 1930 年代から研究されていた (M. Fierz and W. Pauli. (1939))。特に近年これまでの理論的困難を解決した非線形 massive gravity 理論が提案され注目を浴びている (de Rham et al. (2011))。Bigravity 理論はこの非線形 massive gravity 理論の拡張の 1 つであり、2 つの計量を導入し、質量項を拡張した相互作用を考える (Hassan and Rosen. (2012))。そして一方の計量を我々の住む時空と解釈することにする。Bigravity 理論に基づくことで、ダークエネルギーを導入せずとも実効的に宇宙項が現れ、加速

膨張を実現できることが示されている (K. Aoki and K. Maeda. (2014) など)。

Bigravity 理論は massless graviton と massive graviton をもつ。我々は、massive graviton の Compton 波長が銀河スケール程度の値をもつと、ダークマターの起源を説明できることを示した。一方で、質量をもった理論は質量ゼロ極限で質量ゼロの理論 (一般相対論) を回復することが自然である。しかし、bigravity 理論は線形摂動論においては質量ゼロ極限で一般相対論を回復しない。この不連続性は、摂動の非線形効果により解消されると考えられている (Vainshtein 機構)。一様等方時空や重力の弱い球対称静的時空においては、質量ゼロ極限で線形近似は破綻し、非線形効果により一般相対論を回復することが示される¹。一方、一様等方時空まわりのスカラー摂動においては、質量ゼロ極限でも線形近似は破綻しないが、不安定である。我々は、質量ゼロ極限で Vainshtein 機構をもつ非線形解を発見した。

2 Hassan-Rosen bigravity

Bigravity 理論は、1 つの多様体に 2 つの計量 $g_{\mu\nu}, f_{\mu\nu}$ を導入する。計量間の相互作用項は、ゴーストを持たない条件から

$$\mathcal{U}(g, f) = \sum_{k=0}^4 b_k \mathcal{U}_k(g, f), \quad (1)$$

¹ 球対称静的時空に関しては、簡単な場合は次で既に示されている: E. Babichev and M. Crisostomi. (2013)

のように書かれ、5つの独立な項をもつ（具体的な関数形は次を参照:Hassan and Rosen. (2012)）。ここで5つの項に対して、5つの任意の結合定数をもつ。この相互作用を用いて、作用は次で与えられる。

$$S = \frac{1}{2\kappa_g^2} \int d^4x \sqrt{-g} R(g) + \frac{1}{2\kappa_f^2} \int d^4x \sqrt{-f} \mathcal{R}(f) + S^{[m]}(g, f, \psi_g, \psi_f) - \frac{m^2}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{U}(g, f) \quad (2)$$

ここで $R(g), \mathcal{R}(f)$ はそれぞれの計量のリッチスカラー、 $\kappa_g^2 = 8\pi G, \kappa_f^2 = 8\pi \mathcal{G}$ である。なお $g_{\mu\nu}$ を我々の時空と解釈する。また、本集録において、基本的には $g_{\mu\nu}$ の各量は添え字 g を、 $f_{\mu\nu}$ の各量は添え字 f を用いて表す。

物質成分は、一般には、2つの計量に相互作用するような物質も考えられるが、等価原理を仮定すると

$$S^{(m)}(g, f, \psi_g, \psi_f) = S_g^{[m]}(g, \psi_g) + S_f^{[m]}(f, \psi_f), \quad (3)$$

のように2つに分解される。それぞれの物質はそれぞれの計量とのみ相互作用する。

変分することにより、運動方程式は

$$G^\mu{}_\nu = \kappa_g^2 (T^{[\gamma]\mu}{}_\nu + T^{[m]\mu}{}_\nu), \quad (4)$$

$$G^\mu{}_\nu = \kappa_f^2 (\mathcal{T}^{[\gamma]\mu}{}_\nu + \mathcal{T}^{[m]\mu}{}_\nu), \quad (5)$$

と得られる。ここで $T^{[\gamma]\mu}{}_\nu, \mathcal{T}^{[\gamma]\mu}{}_\nu$ は、相互作用項をそれぞれの計量で変分することにより得られる。また $T^{[m]\mu}{}_\nu, \mathcal{T}^{[m]\mu}{}_\nu$ は、それぞれの物質のエネルギー運動量テンソルである。

物質はそれぞれの時空で保存則を満たす。これと Bianchi 恒等式から次の式も得られる。

$$\nabla_\mu^{(g)} T^{[\gamma]\mu}{}_\nu = 0, \quad \nabla_\mu^{(f)} \mathcal{T}^{[\gamma]\mu}{}_\nu = 0. \quad (6)$$

特殊解として、2つの時空が相似である解を考える。すなわち

$$f_{\mu\nu} = K^2 g_{\mu\nu}, \quad (7)$$

を仮定する。ここで K は任意のスカラー関数とする。このとき

$$\kappa_g^2 T^{[\gamma]\mu}{}_\nu = -\Lambda_g(K) \delta^\mu{}_\nu, \\ \kappa_f^2 \mathcal{T}^{[\gamma]\mu}{}_\nu = -\Lambda_f(K) \delta^\mu{}_\nu,$$

と計算される。ここで

$$\Lambda_g(K) = m^2 \frac{\kappa_g^2}{\kappa^2} (b_0 + 3b_1 K + 3b_2 K^2 + b_3 K^3),$$

$$\Lambda_f(K) = m^2 \frac{\kappa_f^2}{\kappa^2} (b_4 + 3b_3 K^{-1} + 3b_2 K^{-2} + b_1 K^{-3}). \quad (8)$$

で定義される。式(6)より、 K は定数であることが導かれる。従って、2つの計量は比例する。さらにこれより、運動方程式から

$$\Lambda_g(K) = K^2 \Lambda_f(K), \quad (9)$$

$$\kappa_f^2 \mathcal{T}^{[m]\mu}{}_\nu = \kappa_g^2 T^{[m]\mu}{}_\nu \quad (10)$$

が得られる。すなわちこの解は物質成分を微調整したときのみ得られる。また(9)より K の値は4次方程式の解で与えられる。なお真空中では(10)は常に成り立つことに注意しておく。

この解の特徴は、相互作用のエネルギー運動量テンソルが実効的に宇宙項になることである。すなわち、この解は一般相対論の解で与えられる。またこの解を相似解と呼ぶことにする。

3 Linear perturbation theory

相似解の周りで次のような線形摂動を考える。

$$g_{\mu\nu} = {}^{(0)}g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{[g]}, \quad (11)$$

$$f_{\mu\nu} = {}^{(0)}f_{\mu\nu} + K^2 h_{\mu\nu}^{[f]} = K^2 \left({}^{(0)}g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{[f]} \right) \quad (12)$$

また物質成分は

$$\kappa_g^2 T^{[m]\mu}{}_\nu = \kappa_g^2 \left[T^{(0)[m]\mu}{}_\nu + T^{(1)[m]\mu}{}_\nu \right], \quad (13)$$

$$K^2 \kappa_f^2 \mathcal{T}^{[m]\mu}{}_\nu = K^2 \kappa_f^2 \left[\mathcal{T}^{(0)[m]\mu}{}_\nu + \mathcal{T}^{(1)[m]\mu}{}_\nu \right] \quad (14)$$

と摂動する。なお背景時空の量は添え字(0)をつけて表す。

運動方程式等、詳細は K. Aoki and K. Maeda. (2014) の付録に記してある。ここで重要な点は

$$h_{\mu\nu}^{[-]} = h_{\mu\nu}^{[g]} - h_{\mu\nu}^{[f]}, \\ h_{\mu\nu}^{[+]} = \frac{m_f^2}{m_{\text{eff}}^2} h_{\mu\nu}^{[g]} + \frac{m_g^2}{m_{\text{eff}}^2} h_{\mu\nu}^{[f]} \quad (15)$$

により、質量項に対する固有状態が得られることである。 $h_{\mu\nu}^{[+]}$ は massless mode、 $h_{\mu\nu}^{[-]}$ は massive mode を表す。Massive mode の有効質量 m_{eff} は

$$m_{\text{eff}}^2 = m_g^2 + m_f^2, \quad (16)$$

$$m_g^2 = \frac{m^2 \kappa_g^2}{\kappa^2} (b_1 K + 2b_2 K^2 + b_3 K^3), \quad (17)$$

$$m_f^2 = \frac{m^2 \kappa_f^2}{K^2 \kappa^2} (b_1 K + 2b_2 K^2 + b_3 K^3) \quad (18)$$

で与えられる。それぞれの運動方程式は線形化された一般相対論と Fierz-Pauli 理論で与えられている。ただし、これらは質量項に対する固有状態であるため、物質項に対する固有状態でない。すなわち、massless mode, massive mode はどちらの物質成分とも相互作用する。

4 Results

我々の時空の摂動量は

$$h_{\mu\nu}^{[g]} = h_{\mu\nu}^{[+]} + \frac{m_g^2}{m_{\text{eff}}^2} h_{\mu\nu}^{[-]} \quad (19)$$

で与えられる。特に massive graviton の Compton 波長の外側では massive mode は減衰するため、我々の時空は massless mode のみによって表される。ここで massless mode は一般相対論と同じ運動方程式であるが、両方の物質と相互作用する。すなわち、もう一方の時空の物質は我々の時空に影響を与え、かつ、それはダークマターとして振る舞う (図 1, 図 2, 図 3 を参照)。

一方、Compton 波長の内側ではもう一方の物質は我々の時空で斥力を生み出し、実効的に重力を弱める (図 2 参照)。また、斥力の影響で構造形成において、小さなスケールのゆらぎの進化は標準モデルと異なる進化を示す (図 3 を参照)。

今後、銀河スケールのダークマターを説明するために、重力子質量は実効的な宇宙項より非常に大きいと仮定する。

一様等方時空に対しては、スケールファクタが増大するにつれ、相似解がアトラクターとして振る舞う。ここで

$$m_{\text{eff}}^2 \ll |\kappa_g^2 \rho_g - K^2 \kappa_f^2 \rho_f| \sim H^2 \quad (20)$$

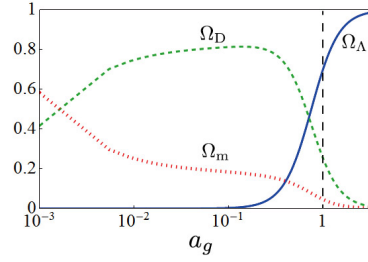


図 1: 一様等方時空における我々の時空における密度パラメータの時間変化。 Ω_m は我々の時空の物質、 Ω_Λ は実効的な宇宙項の密度パラメータである。 Ω_D は、単純にはもう一方の物質が我々の時空に生み出す密度パラメータである。線形領域では Ω_D はダークマターとして振る舞う (図右側)。非線形領域では Vainshtein 機構により、 Ω_D は遮蔽される (図左側)。

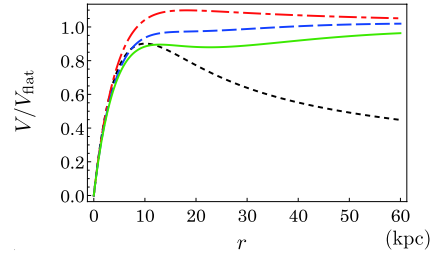
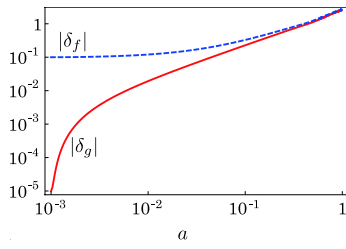


図 2: 我々の時空の回転曲線。ここで $m_{\text{eff}}^{-1} = 5$ (赤線), 10 (青線) and 15 kpc (緑線) である。なお物質は $\rho_g(r) = \rho_g(0) \exp[-r/r_{\text{gal}}]$, $\rho_f(r) = \rho_f(0)(1 + (r/r_{\text{halo}})^2)^{-1}$, と分布すると仮定し, $r_{\text{gal}} = r_{\text{halo}} = 3$ kpc, $\rho_g(0) = \rho_f(0)$ とした。黒線は、 f の物質をゼロとした場合である。またこれらのモデルにおいて、線形近似は $r \gtrsim 1$ kpc で有効である。

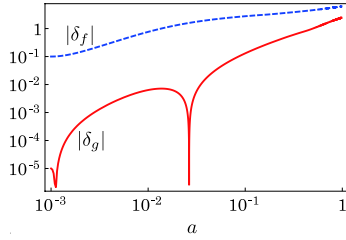
を満たす時期では、相似解からの線形近似が破綻しており、それ以降の時期では相似解からの線形摂動で解を記述できる。非線形領域では宇宙のダイナミクスは一般相対論を回復する (図 1 参照)。

背景時空を相似な Minkowski 時空とみなせると仮定し、Newton 極限を考える。それぞれの時空に 2 つの質点を考え、質量を M_g, M_f とすると、線形近似は

$$m_{\text{eff}}^2 \ll \frac{|GM_g - K^2 \mathcal{G} M_f|}{r^3}, \quad (21)$$



(I) $k^{-1} = 10^4$ kpc



(II) $k^{-1} = 10^2$ kpc

図 3: ダスト優勢宇宙における密度ゆらぎの進化。それぞれ、 f の物質によって、 g の物質の密度ゆらぎが引きずられて成長する。なお $m_{\text{eff}}^{-1} = 1$ kpc とした。常にゆらぎのスケールが Compton 波長より大きい場合は、 δ_g の進化は Λ CDM モデルとほぼ同様である。

を満たす領域で破綻する²。非線形領域では一般相対論を回復する。

最後に宇宙論的摂動論における重力のスカラーモードについて議論しておく。地平線スケールより非常に小さいスケールでは、massive graviton のスカラーモード ϕ は

$$h_{\mu\nu}^{[-]} \supset \partial_\mu \partial_\nu \phi \quad (22)$$

で現れる。背景時空の物質は非相対論的物質と仮定しすると、線形解周りで重力のスカラーモードは

$$m_{\text{eff}}^2(-\ddot{\phi} + \Delta\phi) + H^2(-\ddot{\phi} - \Delta\phi) = 0 \quad (23)$$

に従う。これより、 $m_{\text{eff}}^2 \gg H^2$ では通常の波動方程式が得られるが、 $m_{\text{eff}}^2 \ll H^2$ では、勾配不安定性が現れる³。したがって相似解周りの線形なスカラー重力波は質量ゼロ極限で不安定である。

²この条件は物質が球対称に分布をもっている場合にも、容易に一般化される。

³より正確な議論は次を参照：A. De Felice, A. E. Gümrükçüoğlu and S. Mukohyama. (2014)

線形解は質量ゼロ極限において一般相対論を回復しない。一方、我々は質量ゼロ極限において、Vainshtein 機構を含む非線形解を発見した。この解において、密度ゆらぎなど物理的な変数は一般相対論と同様な時間変化をする。この解周りのスカラーモードの安定性は現在解析中である。

5 Conclusion

我々は、bigravity 理論を用いていくつかの宇宙論的応用を考えた。銀河スケールのコンプトン波長をもつ重力子を考えると、ダークマターの起源を説明できることを示した。特に、結合定数を微調整すれば、bigravity 理論は同時にダークエネルギーの起源も説明できる。

さらに、いくつかの時空において、bigravity 理論は質量ゼロ極限で一般相対論を回復することを示した。これは、ビッグバン元素合成や太陽系近傍の実験と bigravity 理論が矛盾しないことを示す。

したがって、我々の解析は bigravity 理論はさまざまな観測的制限を巧妙に回避可能であり、さらにダークマター、ダークエネルギーの起源を説明可能であることを示唆する。特に重力子が重い質量を持つ場合、将来の重力波観測などで検証される可能性があり、非常に興味深いモデルとなっている (A. De Felice, T. Nakamura and T. Tanaka. (2014))。

Reference

- M. Fierz and W. Pauli, Proc. Roy. Soc. Lond. A **173**, 211 (1939).
- C. de Rham, G. Gabadadze and A. J. Tolley, Phys. Rev. Lett. **106**, 231101 (2011).
- S. F. Hassan and R. A. Rosen, J. High Energy Phys. **02** (2012) 126.
- K. Aoki and K. Maeda, Phys. Rev. D **89**, 064051 (2014).
- E. Babichev and M. Crisostomi, Phys. Rev. D **88**, 084002 (2013).
- A. De Felice, A. E. Gümrükçüoğlu and S. Mukohyama, J. Cosmol. Astropart. Phys. **1406** (2014) 037.
- A. De Felice, T. Nakamura and T. Tanaka, Prog. Theor. Exp. Phys. **2014**, 043E01 (2014).