# Unruh de Witt detector を用いた量子場の解析

久木田　真吾 (名古屋大学大学院 理学研究科)

## Abstract

Hawking を端緒とする重力理論と熱力学、また量子論との関連についての研究は今多様な形で花開いている。その中でもとりわけ、量子情報の分野からの重力に対するアプローチが現在、だんだんとはやってきてた。本研究では、直感的な立場から量子情報の分野と重力をつなぐ足がかりとして、簡単な量子系（典型的には 2 level system）を時空上の量子場などと相互作用させせることで解析を行う Unruh de Witt detector の手法を用いてアプローチを行った。このような 2 level system を用いるモデルに対して従来から知られている計算手法は通常の摂動計算、およびマスター方程式 によるものがあるが、その関係性についてはあまり議論されておらず、明白でない。これに対し、最近提案された時間粗視化近似の上でのマスター方程式がある種の特異摂動計算であることを示し、通常の摂動計算との対応を明らかにした。また、その近似によって得られる長時間のダイナミクスは従来の計算手法の元での近似からは素朴には予想できない形をしていたので、その結果について報告する。

## 1　Introduction

時空の熱力学的な性質 [Hawking] を見る一つの方法として、Unruh De Witt detector を用いる手法は古くから調べられてきた。そもそもは、Unruh 効果を慣性形の観測者がどのように感じるのかという問いに対して、実際に detector と呼ばれる外部の温度を測ることができるようなものを加速させることで物理的な効果として抽出する、というのがもともとの目的であった。更に最近では、量子情報的な観点からもこの detector の解析は注目を集めており、エンタングルメントの評価などの研究も多くの先行研究がある。この解析については素朴な摂動計算を用いた手法がオリジナルであるが、これは永年項と呼ばれる発散を含むため、ある程度技巧的な処理をしなければ時間発展の情報を引き出すことはできない。また、そうして引き出された情報が実際の時間発展に対応しているのかどうかということについては疑問が残る。最近になってこれとは別な解析方法としてマスター方程式の方法論を当てはめた手法が登場した [Benatti]。この方法は永年項が無く時間発展を記述しているといえる手法だが、これはしばしば回転波近似と呼ばれる計算とともに用いられ、通常の摂動計算の手法と同じ時間領域で違う計算結果を出す。そのため、その関係性はよく分かっていなかった。特に我々が興味を持っている 2 体エンタングルメントについては、回転波近似というの意味する、量子的な遷移の禁止がダイレクトに効いてくると予想される。近年、回転波近似をより一般化した coarse graining approximation という手法が導入された [Schaller] が、依然摂動計算との関連は議論されいない。最終的には曲がった時空の上で、量子論固有の、エンタングルメントのような量がどのように発展するのかを知りたいのであるが、手法同士の関係性が分かっていないような状態ではこれはままならない。そこで、本研究では主としてこの関係性に重きをおいて解析を行った。

## 2　2 particle entanglement

量子情報の観点からもっとも興味のある量はエンタングルメントと呼ばれる量である。我々は、このエンタングルメントがどのように時間発展するのかを知りたい。一般的な 2 つの系のエンタングルメントを評価するのは容易ではない。しかし、2 つの系が 2 準位である場合にはこの評価は容易であり、以下ではそのような状況を考える。

エンタングルメントを評価する指標としてもっとも有名なのはエンタングルメントエントロピーだが、

今はこれは使えない。なぜならば、系が一般に混同状態をとりうるからである。混合状態においては、コンカレンスやネガティビティなどがエンタングルの指標として用いられ、2 体 2 準位の場合にはすべての指標が投下であることが分かっている。そのため、我々は一般性を失うことなくネガティビティをエンタングルメントの指標として採用可能である。

ネガティビティとは、2 体系の密度行列に対して、片方の系に対応する自由度を転置（部分転置）したときの、負になっている固有値の和であらわされる。2 体 2 準位系の場合には密度行列は pauli 行列のテンソル積で表されるが、片方の自由度の Pauli 行列をすべて転置すればよい。こうして得られた部分転置行列の固有値を $\{\lambda_i\}_i$ とすると、ネガティビティは

$$\mathcal{N} := \sum \frac{1}{2}[|\lambda_i| - \lambda_i] \tag{1}$$

と定義される。

## 3 CGA master equation

本研究では、近年提案された coarse graining approximation(以下 CGA) 型の近似を用いた Master 方程式を用いて解析を行った。以下でそのマスター方程式の一般論を展開する。

相互作用している二つの系からなる孤立系を考え、片方の系のみのダイナミクスを見る状況を考える。これは量子開放系を議論するときによく用いられる手法である。見たいほうの系を対象系、もう片方を環境系と呼称する。孤立系のユニタリ発展は Liouville-von-Neumann 方程式、

$$\frac{\partial \rho_{tot}}{\partial t} = -iL_{H_{tot}}[\rho] := -i[H_{tot}, \rho] \tag{2}$$

によって記述される。ここで

$$H_{tot} = H_s + H_B + \lambda H_{int} \tag{3}$$

である。前から、対象系、環境系、相互作用のハミルトニアンである。今対象系すなわち $\rho_S(t) := \mathrm{Tr}_B(\rho)$ のダイナミクスを見たいとする。相互作用表示

$$\tilde{\rho}_{tot}(t) = e^{i(H_S+H_B)(t-t_0)}\rho_{tot}(t)e^{-i(H_S+H_B)(t-t_0)}. \tag{4}$$

を導入し、Markov 性（直感的にいえば環境系が対象系に対して十分大きいことに対応）などを仮定して結合定数に対する摂動計算を進めることで．対象系の密度行列に対して以下の方程式を得る。

$$\dot{\tilde{\rho}}_S(t) = -\frac{\lambda^2}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\int_{t_0}^{t'} \mathrm{Tr}_B[\tilde{H}_{int}(t'), [\tilde{H}_{int}(t''), \tilde{\rho}_{tot}(t)]]. \tag{5}$$

これが CGA マスター方程式であり、$\Delta t$ なるフリーパラメータを持っている。この近似は回転波近似を $\Delta t \to \infty$ の極限で含む。ハイゼンベルクの不確定性 $\Delta E \Delta t \sim \hbar$ と同じことを主張している。この方程式をもう少し変形してやると、

$$]\dot{\rho_S} = -i[H_{eff}, \rho_S] + \mathcal{L}[\rho] \tag{6}$$

という式が得られる。これは、環境系の影響がハミルトニアンに補正を加えた $H_{eff}$ の部分と、そういう形にかけない、俗に散逸項といわれる $\mathcal{L}[\rho]$ の部分からなる。特徴的な効果は、散逸項によってユニタリ性が保証されなくなっていることであり、これが開放系たるゆえんである。

## 4 Results

上記の method を 2 つの Unruh detector 系に適応し、そのエンタングルメントを見る。これは対象系を 2 自由度を持つ系、環境系を無質量スカラー場 $\phi(x)$（これは簡単のためであり、無質量スカラー場である必要は無い。）と置き換えればよい。

すなわち、対象系のハミルトニアンを

$$H_S = \frac{1}{2}\sigma_3^{(1)} + \frac{1}{2}\sigma_3^{(2)} \tag{7}$$

とおき、相互作用を

$$H_{int} = \lambda(\sigma_1^{(1)}\phi(x_1) + \sigma_1^{(2)}\phi(x_2)) \tag{8}$$

として計算する。ここでそれぞれ $x_1$、$x_2$ は detector の位置であり、$\sigma$ は Pauli 行列である。

また、以下で簡単のため行列の形を x 型に固定することにする。この部分を初期条件とするダイナミクスはこの部分のみで閉じるため、計算が簡単になる。

以上の方程式が与えられると、この方程式に従って時間発展を追うことで Unruh DeWitt detector の永年項を含まない長時間発展を追うことができる。しかし、この方程式は線形ではあるものの固有値方程式として 6 次の連立方程式を持つので、これを解析的に解くことはできない。

そこで、まずはこの方程式を短時間のダイナミクスを見たいとして展開することを考える。つまり、

$$\begin{aligned}\rho(t) = \quad & \rho(t_0) - i(t-t_0)\frac{\lambda^2}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\int_{t_0}^{t'} \\ & \mathrm{Tr}_B[\tilde{H}_{int}(t'), [\tilde{H}_{int}(t''), \tilde{\rho}_{tot}(t)]] \end{aligned} \tag{9}$$

という計算をするわけだが、これは naive な意味での摂動計算と一致していることが見て取れる。ただし、摂動計算の時には $\Delta t$ は通常の時間パラメータ $t$ である。これは CGA マスター方程式が、短時間では、摂動計算を再現していることを意味している（回転波近似では $\Delta t \to \infty$）。であるので、この一致性が見られないことが明らかになる。同時にこれはマスター方程式の手法がある意味での特異摂動（繰り込み群）であることも示唆する。また、この方程式は一つの 0 固有値（定常解）を含み、その状態に振動しながら漸近していく。この状態は摂動計算では見えないものである。つまり、「摂動計算に対応した」長時間解を見ることができる、と解釈することもできる。

このようにして得られた定常解に対して背景の環境系（無質量スカラー場）の情報を入れ、上記のエンタングルメントの評価を行うことができる。この結果が、以下のようなグラフである。背景場として、Minkowski vacuum と Minkowski thermal state を採用した。

ここで、横軸は 2 つの detector の距離であり、縦軸は free parameter $\Delta t$ である。エンタングルしている領域は黒い部分。両方の場合に、$\Delta t$ が小さい領域でエンタングルが切れている部分がある。これは、$\Delta t$ がハイゼンベルクの不確定性から量子揺らぎに対応しており、エンタングルメントが量子的な効果と関連しているとすると、あまり予想できない妙な効果であり、量子ゼノン効果のようなものが働いているのではないかと考えられる。それ以外の部分は基本的に摂動計算とコンシステントな結果になっている。

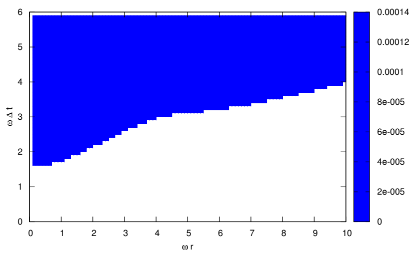

図 1: Minkowski vacuum

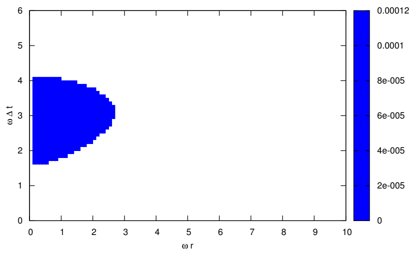

図 2: Minkowski thermal state

## 5　Conclusion

従来の摂動計算では追うことのできない長時間発展を追うことができる手法で、detector の時間発展を調べた。長時間の発展に対して最も興味のある定常状態を具体的に計算し、そのエンタングルメントの振る舞いを評価した。この状態は通常の摂動計算からは予期されない、量子ゼノン効果的な振る舞いを持つ。これはおそらく背景に設定した場の状態に依存しない、普遍的な効果である。

更にその過程で、今まで明らかにされていなかった摂動計算の手法とマスター方程式を用いた手法の具体的な関係を理解することができた。この手法を用いて、情報損失問題や初期宇宙エンタングルメントへのアプローチをすることが今後の課題として考えられる。

## Reference

[Hawking] S. W. Hawking, “Gravitational radiation from colliding black holes,” Phys. Rev. Lett. **26**, 1344 (1971).

[Benatti] F. Benatti and R. Floreanini, “Entanglement generation in the Unruh effect,” quant-ph/0403157.

[Schaller] Gernot Schaller, Tobias Brandes ”Preservation of Positivity by Dynamical Coarse-Graining” Physical Review A 78, 022106, (2008)