真空の量子揺らぎと相互作用する粒子のランダム運動における熱的性質

大下 翔誉 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

Minkowski 真空中を加速度運動している観測者は Unruh 温度 $\frac{a}{2\pi}$ に対応する黒体スペクトルを持つ粒子を観測する (温度 $\frac{a}{2\pi}$ の熱浴に浸される) と考えられている。これは Unruh 効果 [W.G. Unruh. (1976)] と呼ばれ、これが検証されれば BH の熱的性質、宇宙の大規模構造の種となるインフレーションの議論で用いられる曲がった時空における場の量子論の正当性が示される。この効果を検証するために量子場と相互作用した荷電粒子を用いる検証法が Chen, Tajima によって示された [P.Chen and T. Tajima. (1999)]。しかし、この検証法が本当に有効なものかどうかは理論的に自明でない。なぜなら Unruh 効果によって生じる熱浴で、荷電粒子がどのように熱化されるかは明らかにされていない問題だったからである [S. Iso, Y. Yamamoto and S. Zhang. (2011)]。本研究 [N. Oshita, K. Yamamoto. and S. Zhang. (2014)] では真空の量子揺らぎと相互作用する荷電粒子のブラウン運動を先行研究よりも厳密に計算し、その結果として荷電粒子の量子揺らぎ中での熱化問題を解決することができた。

1 Introduction

Minkowski 真空中を加速度運動している観測者は Unruh 温度 $\frac{a}{2\pi}$ に対応する黒体スペクトルをもつ粒子を観測すると考えられている。これは Unruh 効果と言われているが、この効果を検証する方法として量子場と couple した荷電粒子を用いるのが適切であると考えられている。加速した荷電粒子に生じる Unruh 効果由来の熱的揺らぎから生じる放射 (Unruh 放射) を観測できたならば、それは Unruh 効果の実証、延いては曲がった時空の場の量子論のアプローチが正しいことの証明となる。しかし、どのような Unruh 放射が現れるかを計算するには、荷電粒子がどのように熱的に揺らぐか (真空の熱的な量子揺らぎと相互作用する荷電粒子が熱化するかどうかは自明ではない) という問題を調べる必要がある。

この問題に取り組んだ先行研究 [S. Iso, Y. Yamamoto and S. Zhang. (2011)] では、荷電粒子の進行方向に対して transverse な方向 (以後「荷電粒子の進行方向に対して」を略し「transverse 成分」とする) の熱的揺らぎが生じることを、量子場を white noise として近似的に扱う計算で明らかにした。しかし、longitudinal 成分に対する計算ではこの近似は荒すぎることが示され、荷電粒子の熱化の問題は完全に明らかにされなかった。本研究では量子場 noise に近似を施すことなく厳密に計算を行うことで、Unruh 効果による荷電粒子のゆらぎを完全に記述することに成功した。ここでは荷電粒子の熱的な揺らぎを厳密に評価した結果を示す。本研究で行った計算でも荷電粒子は transverse 成分に熱的に揺らぐことが示され、先行研究を再現できることがわかった。一方、問題であった longitudinal 成分の計算に厳密な計算を適用した結果、Unruh 効果による熱的揺らぎがこの成分に関しては生じていないことが明らかとなった。したがって厳密な量子場 noise の取り扱いによる計算方法によって、加速された荷電粒子は longitudinal 成分には Unruh 効果による熱浴からのエネルギーが等分配されず、transverse 成分のみに分配されるという描像が浮かび上がってきたのである。

2 Methods

荷電粒子の質量を m、電荷を e、時空の計量を $g_{\mu\nu}$、Ricci テンソルを $R_{\mu\nu}$、荷電粒子の軌道を z^{μ} としたとき一般の時空における荷電粒子の運動方程式は以下で与えられる。

$$m\frac{D\dot{z}^\mu}{D\tau} = \frac{e^2}{12\pi}\Big(\frac{D^2\dot{z}^\mu}{D\tau^2} + \dot{z}^\mu\Big(\frac{D\dot{z}}{D\tau}\Big)^2\Big) + \frac{e^2}{24\pi}(g^{\mu\nu} - \dot{z}^\mu\dot{z}^\nu)R_{\nu\alpha}\dot{z}^\alpha + F_q^\mu + F_a^\mu \quad (1)$$

ただし、右辺 3 項目、4 項目は荷電粒子に働く外力を表しており、それぞれ量子場の真空揺らぎによる noiseF_q^μ、荷電粒子を加速度運動させるための外力 F_a^μ である。また、$\frac{D}{D\tau} = \dot{z}^\mu\nabla_\mu$ は固有時に関する共変微分を表す。

Eq.(1) を用いて Rindler 時空において静止している (等加速度運動している) 荷電粒子のブラウン運動を記述する方程式を導出する。荷電粒子の軌道 z^μ は

$$z^\mu = z_{cl}^\mu + \delta z^\mu = (\bar{x}^0,\ \delta\bar{x}^1,\ \delta\bar{x}^2,\ \delta\bar{x}^3).$$

ここで荷電粒子の揺らぎの longitudinal 成分および transverse 成分を

$$\delta z_L = (0, 0, 0, \delta\bar{x}^3),\ \delta z_R = (0, \delta\bar{x}^1, \delta\bar{x}^2, 0)$$

とすると $z_{cl}^\mu = (\bar{x}^0, 0, 0, 0)$ として $z^\mu = z_{cl}^\mu + \delta z_L + \delta z_R$ と表される。

Rindler 時空の計量は、一様加速度を $a(\ll m)$ として

$$ds^2 = e^{2a\delta\bar{x}^3}(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - e^{2a\delta\bar{x}^3}(dx^3)^2 \quad (2)$$

荷電粒子に働く外力 F_q^μ は

$$F_q^\mu = e\Big(\frac{D\dot{z}^\mu}{D\tau}\phi_h + \dot{z}^\mu\dot{z}^\alpha\frac{\partial\phi_h}{\partial x^\alpha} - g^{\mu\alpha}\frac{\partial\phi_h}{\partial x^\alpha}\Big)\Big|_{x=z(\tau)} \quad (3)$$

荷電粒子に働く外力 F_a^μ は

$$F_a^\mu = ma(\sinh a\tau,\ \cosh a\tau,\ 0,\ 0). \quad (4)$$

これらを Eq.(1) に代入し、一次のオーダーまでとることで、荷電粒子の longitudinal 成分の揺らぎ、transverse 成分の揺らぎを決める Langevin 方程式はそれぞれ以下で表される。

$$m(\delta\ddot{\bar{x}}^3 - a^2\delta\bar{x}^3) = \frac{e^2}{12\pi}\left(\delta\dddot{\bar{x}}^3 - a^2\delta\dot{\bar{x}}^3\right) + e\vartheta\phi_h\big|_{x=z(\tau)} \quad (5)$$

$$m\delta\ddot{\bar{x}}^i = \frac{e^2}{12\pi}\left(\delta\dddot{\bar{x}}^i - a^2\delta\dot{\bar{x}}^i\right) + e\frac{\partial\phi_h}{\partial x^i}\Big|_{x=z(\tau)} \quad (i = 1, 2) \quad (6)$$

ここで Eq.(5) では $\vartheta \equiv (a + \partial/\partial\bar{x}^3)$ とした。

次に、荷電粒子の速度分散 $\langle\delta\dot{\bar{x}}\delta\dot{\bar{x}}\rangle$ を計算する。まず longitudinal 成分の速度分散の計算から行う。Forier 変換を $\delta\bar{x}^3$ および $\vartheta\phi_h|_{x=z(\tau)}$ に対して用いることで $\langle\delta\dot{\bar{x}}^3(\tau)\delta\dot{\bar{x}}^3(\tau')\rangle$ は以下で与えられる。

$$\langle\delta\dot{\bar{x}}^3(\tau)\delta\dot{\bar{x}}^3(\tau')\rangle = \frac{6}{e^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\omega^3}{a^2 + \omega^2}\frac{e^{i\omega\delta\tau}}{(12\pi m/e^2)^2 + \omega^2}\coth(\pi\omega/a) \quad (7)$$

一方、速度分散の transverse 成分は同様の計算で、以下の積分で与えられる。

$$\langle\delta\dot{\bar{x}}^i(\tau)\delta\dot{\bar{x}}^j(\tau')\rangle = \frac{e^2}{6}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\delta_{ij}\omega(\omega^2 + a^2)e^{i\omega\delta\tau}}{(e^2(\omega^2 + a^2))^2 + (12\pi m\omega)^2}\coth(\pi\omega/a) \quad (8)$$

ここで $\delta\tau \equiv \tau - \tau'$ である。速度分散は Eq.(7)、Eq.(8) で $\delta\tau \to 0$ を取ることで得られる。

3 Results/Discussion

Eq.(7)、Eq.(8) の積分を実行することで以下の結果を得た。

$$\langle\delta\dot{\bar{x}}^3(\tau)\delta\dot{\bar{x}}^3(\tau')\rangle = -\frac{12}{e^2}\left(\ln\frac{12\pi m\delta\tau}{e^2} + \gamma\right) + O\left((a/m)^2\right) \quad (9)$$

$$\langle\delta\dot{\bar{x}}^i(\tau)\delta\dot{\bar{x}}^j(\tau')\rangle = \delta_{ij}\left[\frac{a}{2\pi m} - \frac{12}{e^2}\left(\ln\frac{12\pi m\delta\tau}{e^2} + \gamma\right) + O\left((a/m)^2\right)\right] \quad (i = 1, 2) \quad (10)$$

ここで Eq.(10) では $a/2\pi m$ の項と第二項目に $\delta\tau \to 0$ で発散する項が現れている。この第 2 項目は繰り込みの処方箋で取り込んでよいものとして見なせる。したがって Eq.(10) で物理的に意味のある項は $a/2\pi m$ であり、これから以下の計算で、粒子が温度 $a/2\pi$ の熱浴からエネルギーが分配されていることを示せる。

$$\frac{1}{2}T_U = \frac{1}{2}m\langle\delta\dot{\bar{x}}^i(\tau)\delta\dot{\bar{x}}^i(\tau)\rangle \quad (i = 1, 2)$$
$$T_U = \frac{a}{2\pi} \quad (11)$$

この結果は先行研究での計算とも consistent なものとなっている。ところが、Eq.(9) では Eq.(10) で発散

項として見なした項しか現れてこない。このことは粒子が熱浴に浸されていたとしても longitudinal 方向には熱化しないことを示している。
この物理的な解釈は Eq.(5)、Eq.(6) に求めることができる。これらの Langevin 方程式の違いは Eq.(5) の左辺第 2 項の有無だけである。この項 $-a^2\delta\bar{x}^3$ は荷電粒子に対して不安定な作用を及ぼす。これが荷電粒子の熱化を妨げていると考えられる。この不安定性は Rindler 時空に固有の性質であり、先行研究 [S. Iso, Y. Yamamoto and S. Zhang. (2011)] でも指摘されている。

4 Conclusion

本研究では Minkowski 時空を一様加速度で運動している荷電粒子と真空の量子揺らぎとの相互作用を取り扱い、荷電粒子がどのように熱化されるのかについて考察した。私はこの問題に、荷電粒子の加速度運動によって古典的に現れる放射の反作用を運動方程式に取り入れ、量子場の揺らぎによる noise を厳密に取り扱った計算で取り組んだ。その結果、既に先行研究で知られていた結果と consistent な計算結果を得ることができ、さらに今まで明らかにされていなかった荷電粒子の速度分散の longitudinal 成分を計算することにも成功した。この計算から加速度運動している荷電粒子が熱的に励起した量子場と相互作用すると、transverse な方向には熱化されるが、longitudinal な方向には熱化されないことを明らかにできた。
このようにして荷電粒子の熱化の問題を明らかにできたので今後はこのような熱的な速度分散をもった荷電粒子からどのような量子的な放射が現れるのかについて計算を行っていき、Unruh 効果の検証を Chen、Tajima によって提案された方法で検証できるかどうかを調べていきたい。

Acknowledgement

本研究は広島大学大学院理学研究科の山本一博准教授と岡山量子光学研究所の張 森さんとの共同研究です。特に山本先生には丁寧な指導をして頂きました。山本先生との綿密かつ活発な議論は非常に有益なものでした。この場を借りて感謝申し上げます。

Reference

N. Oshita, K. yamamoto and S. Zhang, Phys. Rev. D **89**, 124028 (2014).

S.W. Hawking, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975); **46**206(E) (1976).

W.G. Unruh, Phys. Rev. D **14**, 870 (1976).

S. Iso, Y. Yamamoto, and S. Zhang, Phys. Rev. D **84**, 025005 (2011).

B. S. De Witt and R. W. Brehme, Ann. Phys. (N. Y.) **9**, 220 (1960).

J. M. Hobbs, Ann. Phys. (N.Y.) **47**, 166 (1968)

S-Y. Lin and B. L. Hu, PRD **73**, 124018 (2006)

C. R. Galley, B. L. Hu, PRD **72**, 084023 (2005)

P.Chen and T. Tajima, Phys. Rev. Lett. **83**, 256 (1999).