Cylindrical Thin Shell Wormhole の安定性に関する考察

矢久間 司 (大阪市立大学大学院 理学研究科)

Abstract

ワームホールとはある時空と別の時空が繋がれた構造を指し、そのような構造が考えられた頃から通過可能性、すなわちエネルギーが正の物質が通過した際に構造が消滅しないのかという議論が行われてきたが、研究の前提となるワームホールの構造は、計算の容易さから球対称なものが選ばれがちで、円筒対称なワームホールを研究した例は少ない。
本講演では二つの時空が円筒対称 Shell で繋がれたワームホールを紹介した後、Shell にエネルギーと圧力を与えた場合ワームホールの安定・不安定が決まるという事を、Shell のエネルギーと圧力を時空の計量から求める段階から確認し、最後にエネルギー密度が正で十分通過可能な計量を紹介する。

1 Setup

時空は静的かつ円筒対称とするから計量は対称軸や円周、時間には依らない。ここで $\pm$ は領域を区別するための符号である。

$$\begin{aligned} ds^2 = -e^{2\gamma_\pm(r_\pm)}dt_\pm^2 + e^{2\alpha_\pm(r_\pm)}dr_\pm^2 \\ +e^{2\xi_\pm(r_\pm)}dz_\pm^2 + e^{2\beta_\pm(r_\pm)}d\phi_\pm^2 \end{aligned} \tag{1}$$

timelike な ShellΣ は r 座標一定面に分布し、Shell の固有時 τ で測ると r 座標値は変動する。

$$r = a(\tau) \tag{2}$$

一方で Shell 上の計量 ds_Σ^2 は (3) 式のようになる。

$$ds_\Sigma^2 = -d\tau^2 + e^{2\xi(a)}dz^2 + e^{2\beta(a)}d\phi^2 \tag{3}$$

(1) 式に (2) 式を代入したものとの比較で τ と t の関係も分かる。

2 Extrinsic Curvature

外的曲率を考えるために法線ベクトルを定義するその為に (4) のような関数を考える。

$$H = r - a(\tau) \tag{4}$$

H の値が変化すれば Shell の位置が変わり、Shell の跡は層状になる。Shell 上の各点は層から層へと移動したのだが、その方向は層に対し垂直である。よって法線ベクトル n_a は (5) 式となる。

$$n_a^{(\pm)} = \left(\pm\left|g^{bc}\frac{\partial H}{\partial x^b}\frac{\partial H}{\partial x^c}\right|^{\frac{1}{2}}\frac{\partial H}{\partial x^a}\right)_\Sigma \tag{5}$$

次に法線ベクトルの方向に座標軸を 1 つ取り、残りの Shell 上の方向に適当に座標を張ることを考える。計量は射影子 $h_{\mu\nu}$ を用いて次のように表すことができる。ちなみに射影子とは法線方向の成分を 0 にするような作用素で、$h_{ab} = g_{ab} - \epsilon n_a n_b$ である。

$$ds^2 = dY^2 + h_{\mu\nu}dX^\mu dX^\nu \tag{6}$$

法線ベクトルが spacelike なので $\epsilon = 1$ とした。Y は Shell から突き抜けた座標軸で、$\{X^\mu\}$ 系は Shell の上に張られた座標系つまり、$\{\tau, z, \phi\}$ 系なのである。Y も含めて $\{X^\mu\}$ 系と呼ぶことにすれば、初めに時空の円筒対称性に従って設定した $\{t, r, z, \phi\}$ 系との間に座標変換の規則が成り立つ。以降 $\{t, r, z, \phi\}$ 系を $\{x^\mu\}$ 系と略す。
外的曲率は法線ベクトルを Shell に沿って移動させた時、どれくらい Shell に平行な成分が変化したのかを見た量であるから添字は Shell 上の変数の添字で、法線ベクトルの間の変換則すなわち座標変換則が分かれば数式による定義は (7) 式で与えられる。

$$K_{\mu\nu}^{(\pm)} = -n_\rho^{(\pm)}\left(\frac{\partial^2 x_\pm^\rho}{\partial X_\pm^\mu \partial X_\pm^\nu} + \Gamma_{\pm\alpha\beta}^\rho \frac{\partial x_\pm^\alpha}{\partial X_\pm^\mu}\frac{\partial x_\pm^\beta}{\partial X_\pm^\nu}\right)_\Sigma \tag{7}$$

3 Einstein Equation

考えている時空のリーマンテンソルとリッチテンソルは、埋め込んでいる Shell 上のそれらと、Shell の外的曲率とを用いて次のように書ける。これをガウス・コダッチ方程式と呼ぶ。
ここで D_a は Shell の中で行う共変微分を表し、上付きの括弧の中に (D) や $(D-1)$ と書いたのは、時空の量か Shell 上の量かの区別である。

$$R^{(D-1)}_{abcd} = h^i_a h^j_b h^k_c h^l_d R^{(D)}_{ijkl} + \epsilon\left(K_{ac}K_{bd} - K_{bc}K_{ad}\right) \tag{8}$$

$$h^b_a n^{c(D)} R_{bc} = D_b K^b_a - D_a K \tag{9}$$

リッチテンソルとリッチスカラーから求められるアインシュタインテンソルは、$\{X^\mu\}$ 系で成分ごとに見ると 3 種類に分けることができる。

$$\begin{aligned} G_{ab}n^a n^b &= \kappa^2 T_{ab} n^a n^b \\ G_{ab}h^a_c n^b &= \kappa^2 T_{ab} h^a_c n^b \\ G_{ab}h^a_c h^b_d &= \kappa^2 T_{ab} h^a_c h^b_d \end{aligned} \tag{10}$$

上二つにガウス・コダッチ方程式を適用したものは次のようになる。

$$\begin{aligned} 2G^{(D)}_{ab} n^a n^b &= -\epsilon^{(D-1)}R + K^2 - K_{ab}K^{ab} \\ &= 2\kappa^2 T_{ab} n^a n^b \end{aligned} \tag{11}$$

$$D_b K^b_a - D_a K = R^{(D)}_{bc} h^c_a n^b = \kappa^2 T_{bc} h^c_a n^b \tag{12}$$

しかしこれは保存則で運動を表すには不充分である。
そこで（8）の三つ目について考察し、法線ベクトルの方向に沿った Y に関するリッチテンソルの二階微分方程式、すなわち発展方程式を導く。
まず Shell 近傍の層から層へと移る状況を設定する。
まず計量を (8) 式のように表す。

$$ds^2 = \epsilon N^2 dY^2 + h_{\mu\nu}\left(dX^\mu + N^\mu dY\right)\left(dX^\nu + N^\nu dY\right) \tag{13}$$

さらにリー微分の定義を用いて、外的曲率を射影子で表す。

$$\mathcal{L}_U V^\mu = U^\nu \nabla_\nu V^\mu - V^\nu \nabla_\nu U^\mu \tag{14}$$

$$K_{ab} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_n h_{ab} \tag{15}$$

(11) 式両辺に h^{bd} を掛ける。

$$\begin{aligned} R^{(D-1)}_{ac} &= h^i_a h^{jl} h^k_c R^{(D)}_{ijkl} + \epsilon\left(K_{ac}K - K_{bc}K^b_a\right) \\ &= \nabla_a\left(h^i_a h^k_c R^{(D)}_{ik} - h^i_a h^k_c \epsilon n^j n^l R^{(D)}_{ijkl}\right) \\ &\quad + \epsilon\left(K_{ac}K - K_{bc}K^b_a\right) \end{aligned} \tag{16}$$

ここで右辺の最後から二つ目の項は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} h^i_a h^k_c n^j n^l R^{(D)}_{ijkl} &= R^{(D)}_{abcd} n^b n^d \\ &= n^b\left(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a\right) n_c \\ &= \nabla_a\left(n^b\nabla_b n_c\right) - \left(\nabla_a n^b\right)\left(\nabla_b n_c\right) \\ &\quad - n^b\nabla_b\nabla_a n_c \end{aligned} \tag{17}$$

ここで (18) 式を用いると、(17) 式はリー微分を用いた (19) 式の形に書ける。

$$\nabla_a n_b = K_{ab} - n_a D_b \ln N \tag{18}$$

$$\begin{aligned} & h^i_a h^k_c n^j n^l R^{(D)}_{ijkl} \\ &= -\epsilon N^{-1} D_a D_c N - \mathcal{L}_n K_{ac} + K^b_a K_{bc} \end{aligned} \tag{19}$$

この (19) 式を (16) 式に代入し移項すると (20) 式となる。アインシュタイン方程式を用いてエネルギー・運動量テンソルで書くと (21) 式になる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n K_{ac} =& 2K_{ab}K^b_c - KK_{ac} - \epsilon N^{-1} D_a D_c N \\ & + \epsilon R^{(D-1)}_{ac} - \epsilon h^b_a h^d_c R^{(D)}_{bd} \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n K_{ac} &= 2K_{ab}K^b_c - KK_{ac} - \epsilon N^{-1} D_a D_c N \\ &\quad + \epsilon R^{(D-1)}_{ac} - \epsilon\kappa^2\left(h^c_a h^d_b T_{cd} - \frac{1}{D-2} h_{ab} T\right) \end{aligned} \tag{21}$$

当初のアインシュタイン方程式 (10) は、(11) 式、(12) 式そして (21) 式へと分解された。ここで考えている状況を思い出すと、Shell に垂直に spacelike な方向に立つ方向を n に選んで座標を張るのだから、$\epsilon = 1$ で、$N = 1, N_i = 0$ の場合に相当する。具体的にその状況で、今関心のある (21) 式を書くと (22) 式になる。

$$R^{(D)}_{\mu\nu} = -\partial_Y K_{\mu\nu} - KK_{\mu\nu} + 2K^\alpha_\mu K_{\nu\alpha} + R^{(D-1)}_{\mu\nu} \tag{22}$$

4 Israel's Junction Condition

Shell は − で表した領域にも + にもあり、それぞれを Σ_-、Σ_+ と区別する。2 つの領域を張り合わせ、ワームホールの構造を持たせると、− と + で表したそれぞれの領域が timelike な Shell で隔てられる。Shell に垂直に立ち − 領域から + 領域へ向かう座標が Y であると考えられるから、Σ の位置を $Y=0$ としたとき次の式で表される量が Shell のエネルギーや圧力である。

$$S_{\mu\nu} = \int_{-\delta}^{\delta} T_{\mu\nu} dY \tag{23}$$

前のセクションで紹介した法線方向の発展方程式を、$Y=0$ 近傍で積分すると、左辺と右辺第一項のみが残り次の式が書ける。

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{-\delta}^{\delta} R^{(D)}_{\mu\nu} dY = -\lim_{\delta\to 0}\int_{-\delta}^{\delta} \partial_Y K_{\mu\nu} dY \tag{24}$$

右辺はただ差を取るだけである。エネルギー・運動量テンソルで書けば (25) 式となる。

$$\lim_{\delta\to 0}\left[K_{\mu\nu}\right]^{\delta}_{-\delta} = -\kappa^2 \lim_{\delta\to 0}\int_{-\delta}^{\delta}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{D-2}h_{\mu\nu}T\right)dY \tag{25}$$

よってイスラエルの接続条件が導かれる。
ここで (25) 式の左辺は $[K_{\mu\nu}]^-$ と略した。

$$[K_{\mu\nu}]^- = -\kappa^2\left(S_{\mu\nu} - \frac{1}{D-2}h_{\mu\nu}S\right) \tag{26}$$

(26) 式に $h^{\mu\nu}$ をかけると (27) 式を得る。

$$[K]^- = \frac{\kappa^2}{D-2}S \tag{27}$$

これを用いて、接続条件は次のようにも書く。

$$[K_{\mu\nu} - h_{\mu\nu}K]^- = -\kappa^2 S_{\mu\nu} \tag{28}$$

Shell の円筒対称性から $S^{\mu}_{\nu} = \kappa^2 diag(\sigma, P_z, P_\phi)$ と直ちに Shell のエネルギー密度と圧力に対応する。
具体的に初めに与えていたような時空の計量を入れて計算を進めると次のようになる。ドットは τ 微分である。

$$\sigma = -\left[\left(\xi'_+ + \beta'_+\right)\sqrt{\Delta_+} + \left(\xi'_- + \beta'_-\right)\sqrt{\Delta_-}\right] \tag{29}$$

$$\begin{aligned} P_z = &\frac{\left(\ddot{a} + \left(\alpha'_+ + \gamma'_+\right)\dot{a}^2 + e^{-2\alpha_+}\gamma'_+\right)}{\sqrt{\Delta_+}} \\ &+ \frac{\left(\ddot{a} + \left(\alpha'_- + \gamma'_-\right)\dot{a}^2 + e^{-2\alpha_+}\gamma'_-\right)}{\sqrt{\Delta_-}} \\ &+ \beta'_+\sqrt{\Delta_+} + \beta'_-\sqrt{\Delta_-} \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} P_\phi = &\frac{\left(\ddot{a} + \left(\alpha'_+ + \gamma'_+\right)\dot{a}^2 + e^{-2\alpha_+}\gamma'_+\right)}{\sqrt{\Delta_+}} \\ &+ \frac{\left(\ddot{a} + \left(\alpha'_- + \gamma'_-\right)\dot{a}^2 + e^{-2\alpha_+}\gamma'_-\right)}{\sqrt{\Delta_-}} \\ &+ \xi'_+\sqrt{\Delta_+} + \xi'_-\sqrt{\Delta_-} \end{aligned} \tag{31}$$

計量は Shell で連続だから ± の符号は取り去っていい。

$$\sigma = -2\left(\xi' + \beta'\right)\sqrt{\Delta}] \tag{32}$$

$$\begin{aligned} P_z = &\frac{2\left(\ddot{a} + \left(\alpha' + \gamma'\right)\dot{a}^2 + e^{-2\alpha}\gamma'\right)}{\sqrt{\Delta}} \\ &+ 2\beta'\sqrt{\Delta} \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} P_z = &\frac{2\left(\ddot{a} + \left(\alpha' + \gamma'\right)\dot{a}^2 + e^{-2\alpha}\gamma'\right)}{\sqrt{\Delta}} \\ &+ 2\xi'\sqrt{\Delta} \end{aligned} \tag{34}$$

ここで $\Delta_\pm = e^{-2\alpha_\pm} + \dot{a}^2$ である。

5 Potential

ポテンシャル問題は考えるにおいて、P_z と P_ϕ は σ の関数で与えられているものとする。これらの式より、圧力をエネルギー密度の関数で与えたとき、$\dot{a}=0, \ddot{a}=0$ となる平衡点 $a=a_0$ での議論をあたかも一粒子のポテンシャル問題のように扱うことができる。(32) 式の変形により $\dot{a}^2 + V(a) = 0$ の形に書くことができるし、(33) 式と (34) 式に圧力を表す関数が対応することで、エネルギー密度が完全に a の関数であることが分かる。ちなみに平衡点でのポテンシャルは次のように書ける。

6 参考文献

Stability of generic cylindrical thin shell wormholes(S. Habib Mazharimousavi, M. Halilsoy, Z. Amirabi)