

Λ LTB 宇宙における非一様性の観測量への影響

徳竹真人 (名古屋大学 QG 研 M1)

Abstract

宇宙モデルを考える上では、「宇宙は大域的に一様等方である」とする宇宙原理を仮定し、一様等方な宇宙として Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) モデルを考えるのが一般的であり、実際に FLRW モデルはこれまでに多くの観測事実を説明することに成功している。特に、宇宙マイクロ波背景放射の観測によって、宇宙の等方性については高い精度で確かめられている。しかし、球対称な非一様性についての観測的制限については十分に研究されていない。この制限を与えるためには、球対称で非一様な宇宙モデルを仮定し、実際の観測量と宇宙の非一様性との間にどのような関係があるのか知ることが必要となる。ここでは、宇宙項入りの球対称非一様ダスト宇宙モデルである ALTB モデルを考える。観測量としては一様宇宙での距離-赤方偏移関係を与え、その距離-赤方偏移関係を再現するような ALTB の非一様性を表すパラメータ $k(z), m(z)$ を得る手法を与える。

1 Introduction

1990 年代中頃までは、宇宙原理を仮定し、重力理論として一般相対性理論を適用することで宇宙の物理を記述できると考えられていた。ところが、様々な観測により、宇宙の膨張速度は加速していることが知られるようになると、加速膨張を説明するための一つの手法として、一般相対性理論にダークエネルギーと呼ばれる斥力項を加えたモデルが考えられるようになった。しかし、宇宙原理の仮定を外し、宇宙に非一様性があることを認めると、一様な宇宙とはダークエネルギーの存在量が異なる。そのため、ここでは球対称非一様なモデルとして知られている Lemaitre-Tolman-Bondi 解に宇宙項 Λ を加えたモデルを考え、非一様性が Λ に及ぼす影響について調べる。

2 ALTB モデル

非一様・等方な宇宙を表すモデルとして、Lemaitre-Tolman-Bondi (LTB) 解が知られている。LTB 解の metric は次のように書ける

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{(\partial_r R(t, r))^2}{1 - k(r)r^2} dr^2 + R(t, r)^2 d\Omega^2 \quad (1)$$

ここで、 $k(r)$ は r の任意関数で曲率を表し、 $R(t, r)$ は面積半径を表す。物質はダストを考え、エネルギー

運動量テンソルは、

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu \quad (2)$$

となる。LTB 解を Einstein 方程式に代入すると、次式が得られる。

$$(\partial_t R)^2 = -k(r)r^2 + \frac{m(r)r^3}{3R} + \frac{1}{3}\Lambda_{LTB}R^2 \equiv f(r, R) \quad (3)$$

$m(r)$ は積分定数。これを解くと、

$$t - t_B(r) = \int_0^R \frac{1}{\sqrt{f(r, X)}} dX \quad (4)$$

ここで、 $t_B(r)$ は big bang time と呼ばれる r の関数である。LTB 解に現れる独立なパラメータは $k(r), m(r), t_B(r)$ の 3 つであり、これらを redshift z で parametrize すると、 z についての未知関数は $t(z), r(z), k(z), m(z), t_B(z)$ の 5 つとなる。ただし、ここでは初期宇宙が一様であったと仮定することにより、 $t_B = 0$ とする。次節では、残りの 4 つの未知関数を決定するために必要な 4 つの基礎方程式を与える。

3 基礎方程式の導出

3.1 r のゲージ自由度

いま、観測者は宇宙の中心 $r = 0$ にいるとし、 $t = t_0, r = 0$ を原点とした past light cone を考える。r のゲージ自由度を固定するために、次の light cone gauge condition

$$t(z) = t_0 - r(z) \quad (5)$$

を適用する。この条件はいま考えている past light cone 上で満たされる。

3.2 Null geodesic equations

LTB 解の null geodesic equations は次のように与えられる。

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{1}{1+z} \frac{\partial_r R}{\partial_t \partial_r R} \quad (6)$$

$$\frac{dr}{dz} = \frac{1}{1+z} \frac{\sqrt{1-kr^2}}{\partial_t \partial_r R} \quad (7)$$

(5),(6),(7) 式より $t(z)$ を消去すると、null condition

$$\partial_r R = \sqrt{1-kr^2} \quad (8)$$

が得られる。

3.3 Distance-redshift relation

angular diameter distance D_A は面積半径を表すので、

$$R = D_A(z) \quad (9)$$

という関係がある。また、 R は t と r の関数であるから、 z による微分は、

$$\frac{dR}{dz} = \frac{dt}{dz} \partial_t R + \frac{dr}{dz} \partial_r R \quad (10)$$

$$= (-\sqrt{f} + \sqrt{1-kr^2}) \frac{dr}{dz} \quad (11)$$

となる。これに (9) 式を用いると、

$$\frac{dr}{dz} = \frac{1}{-\sqrt{f} + \sqrt{1-kr^2}} \frac{dD_A(z)}{dz} \quad (12)$$

が得られる。

3.4 $r(z), m(z), k(z)$ の従う微分方程式

前節で r のゲージ自由度を用いて $t(z)$ を消去したため、残る未知関数は $r(z), m(z), k(z)$ の 3 つである。(6),(8),(12) 式より、これらの未知関数に対する次の微分方程式を得ることができる。

$$\frac{dr}{dz} = \frac{1}{-\sqrt{f} + \sqrt{1-kr^2}} \frac{dD_A(z)}{dz} \quad (13)$$

$$\frac{dm}{dz} = A(r, m, k, \Lambda_{LTB}) \frac{dr}{dz} + B(r, m, k, \Lambda_{LTB}) \quad (14)$$

$$\frac{dk}{dz} = \frac{r}{3R} \frac{dm}{dz} + C(r, m, k, \Lambda_{LTB}) \frac{dr}{dz} \quad (15)$$

$$+ D(r, m, k, \Lambda_{LTB}) \quad (16)$$

ここで、

$$A = \frac{3R}{r^3 P - r^3 R Q} \left(\sqrt{\frac{1-kr^2}{f}} + r^2 m Q \right) \quad (17)$$

$$- \frac{mr^2 P}{R} + \left(\frac{mr^3}{3R^2} - \frac{2}{3} \Lambda R \right) P \sqrt{1-kr^2} \quad (18)$$

$$B = -\frac{2\sqrt{f(1-kr^2)}}{1+z} \quad (19)$$

$$C = -\frac{2k}{r} + \frac{m}{R} - \left(\frac{mr}{3R^2} - \frac{2\Lambda R}{3r^2} \right) \sqrt{1-kr^2} \quad (20)$$

$$D = -\frac{1}{r^2} \frac{2\sqrt{f(1-kr^2)}}{1+z} \quad (21)$$

であり、

$$P = -\frac{1}{2} \int_0^R \sqrt[3]{f^2(r, X)} dX \quad (22)$$

$$Q = -\frac{1}{2} \int_0^R \frac{\sqrt[3]{f^2(r, X)}}{X} dX \quad (23)$$

である。

4 中心付近での regularity

方程式 (13)-(15) を数値的に解く際に、 $z = 0$ での境界条件が必要となる。ただし、 $z = 0$ において、(13)-(15) は方程式の特異点を持つため、 $z=0$ 付近で r, m, k を次のように展開し、漸近形を求める必要がある。

$$r = r_1 z + \frac{1}{2} r_2 z^2 + O(z^3) \quad (24)$$

$$m = m_0 + m_1 z + O(z^2) \quad (25)$$

$$k = k_0 + k_1 z + O(z^2) \quad (26)$$

展開形を (13)-(15) 式に代入し、 z の -1 次の項の係数が 0 になるように評価すると、次の関係式を得る。

$$r_1 = D_{A1} \quad (27)$$

$$-3k_0 + m_0 + \Lambda_{LTB} = 3 \quad (28)$$

ここで、 D_{A1} は D_A の 1 次の係数である。また、現在のハッブル定数を $H_0 = 1$ と規格化してある。この 2 つの方程式によって r_1, k_0 を決定すると、 z の 0 次で自由な展開パラメータは m_0 と Λ_{LTB} となる。よって、 m_0 と Λ_{LTB} を与えることで k_0 も求まり、より高次の項も同様に評価していくことで 1 次以降の展開パラメータも逐次求めることができる。

5 $m(z), k(z)$ の数値解

angular diameter distance D_A に一様宇宙での Λ をインプットすることで、LTB の Λ とのずれに対応した $m(z), k(z)$ の関数形を求める。まず、一様宇宙での宇宙パラメータの値として、試験的に $\Omega_{m_{FLRW}} = 0.3, \Omega_{k_{FLRW}} = 0, \Omega_{\Lambda_{FLRW}} = 0.7$ を用いる。ここで、 $\Omega_{X_{FLRW}}$ は一様宇宙における X の存在する割合を表し、

$$\Omega_{m_{FLRW}} + \Omega_{k_{FLRW}} + \Omega_{\Lambda_{FLRW}} = 1 \quad (29)$$

と規格化されている。非一様宇宙においても同様に、

$$\Omega_{m_{LTB}} + \Omega_{k_{LTB}} + \Omega_{\Lambda_{LTB}} = 1 \quad (30)$$

とする。このとき、 $D_A(z)$ は、

$$D_A(z) = \frac{1}{1+z} \int_0^z \frac{dz}{H(z)} \quad (31)$$

$$H(z) = \sqrt{(1+z)^3 \Omega_{m_F} + (1+z)^2 \Omega_{k_F} + \Omega_{\Lambda_F}} \quad (32)$$

となる。また、(21),(23) 式より、

$$\Omega_{k_{LTB}} = -k_0 \quad (33)$$

$$\Omega_{m_{LTB}} = \frac{m_0}{3} \quad (34)$$

$$\Omega_{\Lambda_{LTB}} = \frac{\Lambda_{LTB}}{3} \quad (35)$$

が成り立つ。これは、例えば $\Lambda_{LTB} = 2.1$ を与えた時には、 $\Omega_{\Lambda_{LTB}} = 0.7 = \Omega_{\Lambda_{FLRW}}$ となり、方程式 (13)-(15) は一様宇宙での $m(z), k(z)$ を返すことにな

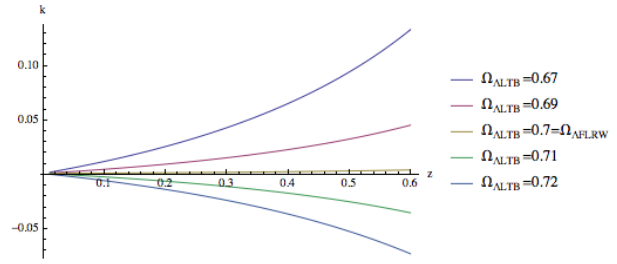


図 1: $k(z)$

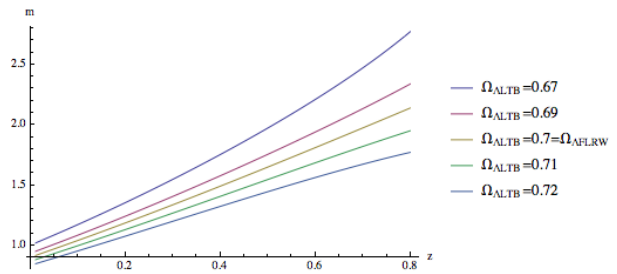


図 2: $m(z)$

る。よって、 $\Lambda_{LTB} = 2.1$ を基準として、これと異なる Λ_{LTB} を与えると、その差に対応した非一様性が $m(z), k(z)$ に現れ、図 1、図 2 のように評価できる。(13) 式の右辺の $\frac{dD_A}{dz}$ は、(24) 式から $z=1.6$ のとき 0 になる。一方 (13) 式の左辺は常に正でなければならぬため、 $z=1.6$ 以降でも解を得るためには、右辺の係数が $z=1.6$ のときに ∞ になるように初期条件を上手く調節しなければならない。

6 Summary and Future works

観測量である angular diameter distance に一様宇宙での値を与えることで、 Λ_{FLRW} と Λ_{LTB} の差に対応するような $m(z), k(z)$ の関数形を、小さな z に対して求めた。一方、大きな z に対して解くには、前節で述べたようなテクニカル面での課題を解決する必要がある。また、非一様性は時間一定面において、 r の関数として評価されるものなので、 $k(r), m(r)$ の関数形を求める必要がある。

Reference

Chul-Moon Yoo, "A Note on the Inverse Problem with LTB Universe", Prog. Theor. Phys. 124 (2010), 645-665