原始重力波と B-mode 偏光の生成

大場 淳平 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

ビッグバン宇宙モデルはその予言と観測との数多くの一致により標準宇宙モデルとして広く受け入れられているが、同時にいくつかの宇宙論的問題を持っている。その解決案の 1 つとして、宇宙初期に加速的な膨張が起こったとされるインフレーション理論が提唱されている。インフレーション理論は現在までに様々な観測から示唆されており、強く支持されている。さらなる観測的証拠を得るためにも、インフレーション理論の重要な帰結として生成される原始重力波の検出が強く待ち望まれている。重力波は宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) の B-mode 偏光として痕跡を残すため、世界的に CMB の B-mode 偏光の観測が精力的に進められている。

このような状況の中、2014 年 3 月に BICEP2 により CMB の大スケールの B-mode 偏光が観測されたと発表され、インフレーション理論の強い証拠として注目された。しかし、観測された B-mode が重力波由来であるとすると、その結果から予想される温度揺らぎの値はこれまで行われてきた *Planck* などの観測の結果に矛盾する。

今回の発表では、並進対称性という宇宙原理を見直すことにより重力波が B-mode のみを生成し、温度揺らぎを作り出さないことを示した論文 [1] をレビューする。論文 [1] では並進対称性を破った場合に B-mode のみが生成される機構を導入することで、これまで観測されてきた温度揺らぎの値を変更することなく、今回の BICEP2 の観測結果を説明することについて議論している。この論文は現在の宇宙論の根本原理である宇宙原理を破ることで観測結果を説明する非常に野心的な研究である。

1 Introduction

原始重力波はインフレーション理論の重要な帰結であり、その検出はインフレーションの検証に必要不可欠である。原始重力波は CMB の温度揺らぎだけでなく、E, B-mode 偏光も生成する。特に B-mode 偏光は重力波によって作られる成分であることから、世界的に B-mode 偏光の観測が精力的に進められている。このような状況の中、今年の 3 月に BICEP2 により CMB の B-mode 偏光が観測されたと発表され、インフレーション理論の強い証拠として注目された。しかし、BICEP2 による CMB の偏光観測から示されるテンソル・スカラー比 (r) の値は $r \simeq 0.2$ であり、これまで行われてきた *Planck* のよる CMB の温度揺らぎの観測から予想される制限値 $r \lesssim 0.1$ と矛盾してしまう。

両者の観測結果の間にある矛盾については現在様々な議論がなされており、将来 *Planck* による B-mode 偏光の観測結果が BICEP2 の結果を棄却し矛盾が解消されることが期待されている。しかし、もし *Planck* による将来観測の結果が BICEP2 の結果と同等なものであった場合、CMB の温度揺らぎと B-mode 偏光それぞれの観測から制限される r の値が違うことの物理的な意味は何なのだろうか。これを考察することが今回のモチベーションである。そのために、揺らぎの解析方法として従来のような平面波展開ではなく TAM(total-angular-momentum) wave 展開 [2] を用いた。第 2 章では TAM wave 展開の方法を説明し、第 3 章で結果の考察を行う。

2 Methods

まず、平面波展開の場合に重力波 (transverse-traceless tensor field) は、

$$h_{ab}(\vec{x}) = \sum_{\vec{k},s} h_s(\vec{k})\hat{\epsilon}^s_{ab}(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{1}$$

のように書ける。ここで、a, b は 3 次元空間のテンソル成分、$\vec{k}$ は波数ベクトル、s は偏光のモードで $+$ または $\times$ を表す。$\hat{\epsilon}^s_{ab}(\vec{k})$ は偏光テンソルである。平面波展開では偏光 s という独立なモードによって重力波を分解し、$\hat{\epsilon}^s_{ab}(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ が完全正規直交基底を構成する。よってパワースペクトル $P_h(k)$ は、

$$\left\langle h_s(\vec{k})h^*_{s'}(\vec{k'})\right\rangle = \delta_{ss'}(2\pi)^3\delta^{(3)}_D(\vec{k}-\vec{k'})\frac{P_h(k)}{4} \tag{2}$$

のようになる。ここで、偏光 s はヘリシティーに書き換えることができるということを先の議論のためにここで補足しておく。

一方、TAM wave 展開では、独立なモードとして E-mode(パリティー 偶), B-mode(パリティー 奇) の TAM wave で重力波を分解することができる。実際に重力波の TAM wave 展開を見ていく前に、テンソル場の TAM wave 展開の準備としてスカラー場の TAM wave 展開を見ていく。TAM wave を用いるとスカラー場は、

$$\phi(\vec{x}) = \sum_{lm}\int\frac{k^2dk}{(2\pi)^3}\phi_{lm}(k)4\pi i^l\Psi^k_{(lm)}(\vec{x}) \tag{3}$$

$$\phi_{lm}(k) = \int d^3x\phi(\vec{x})[4\pi i^l\Psi^k_{lm}(\vec{x})]^* \tag{4}$$

ここで、$\Psi^k_{lm}(\vec{x})$ はスカラー TAM wave であり、

$$\Psi^k_{lm}(\vec{x}) \equiv j_l(kr)Y_{lm}(\vec{n}) \tag{5}$$

である。$j_l(x)$ は球ベッセル関数、$Y_{lm}(\vec{n})$ は球面調和関数である。TAM wave 展開はこのように球面調和関数を用いている。さて、テンソル量である重力波はテンソル TAM wave を用いて、

$$h_{ab}(\vec{x}) = \sum_{lm}\int\frac{k^2dk}{(2\pi)^3}4\pi i^l[h^E_{lm}(k)\Psi^{E,k}_{(lm)ab}(\vec{x}) + h^B_{lm}(k)\Psi^{B,k}_{(lm)ab}(\vec{x})] \tag{6}$$

のように書ける。ここで、$h^{E(\mathrm{or}\,B)}_{lm}(k)$ は TAM wave 展開のもとでのフーリエ成分であり、$\Psi^{E(\mathrm{or}\,B),k}_{(lm)ab}(\vec{x})$ は transverse-traceless なテンソル TAM wave である。テンソル TAM wave はスカラー TAM wave に次のような演算子をかけることで得られる。

$$T^E_{ab} = K_aM_b + M_aK_b + 2D_aK_b \tag{7}$$

$$T^B_{ab} = M_aM_b - K_aK_b + 2D_aM_b \tag{8}$$

ここで、

$$D_a \equiv \frac{i}{k}\nabla_a, \quad K_a \equiv -iL_a, \quad M_a \equiv \epsilon_{abc}D^bK^c \tag{9}$$

である。$\nabla^2 = -k^2$、$L_a = i\epsilon_{abc}x^b\nabla^c$、$\epsilon_{abc}$ は Levi-Civita の完全反対称テンソルである。これらの演算子を用いて transverse-traceless なテンソル TAM wave の具体的な表現は、

$$\Psi^{E,k}_{(lm)ab}(\vec{x}) = -\sqrt{\frac{(l-2)!}{2(l+2)!}}T^E_{ab}\Psi^k_{(lm)}(\vec{x}) \tag{10}$$

$$\Psi^{B,k}_{(lm)ab}(\vec{x}) = -\sqrt{\frac{(l-2)!}{2(l+2)!}}T^B_{ab}\Psi^k_{(lm)}(\vec{x}) \tag{11}$$

のように書ける。

一方で、式 (10), (11) はヘリシティー $s = \pm 2$ を用いて式 (12) のように書ける。

$$h_{ab}(\vec{x}) = \sum_{lm}\sum_{s=\pm 2}\int\frac{k^2dk}{(2\pi)^3}4\pi i^l h^s_{lm}(k)\Psi^{s,k}_{(lm)ab}(\vec{x}) \tag{12}$$

ここで、

$$h^{s=\pm 2}_{lm}(k) = \left[h^E_{(lm)}(k) \pm ih^B_{(lm)}(k)\right]/\sqrt{2} \tag{13}$$

$$\Psi^{s=\pm 2,k}_{(lm)ab}(\vec{x}) = \left[\Psi^{E,k}_{(lm)ab}(\vec{x}) \pm i\Psi^{B,k}_{(lm)ab}(\vec{x})\right]/\sqrt{2} \tag{14}$$

である。TAM wave 展開での E, B-mode のパワースペクトルは次のように表記する。

$$\left\langle h^E_{lm}(k)[h^E_{lm}(k)]^*\right\rangle \propto P_{EE}(k) \tag{15}$$

$$\left\langle h^B_{lm}(k)[h^B_{lm}(k)]^*\right\rangle \propto P_{BB}(k) \tag{16}$$

CMB に関する物理はパリティー不変なので、異なるパリティーのものが混ざることは無い。従って、パリティー 偶, 奇のモードはそれぞれ独立に発展し、TAM wave 展開で式 (15), (16) のように書かれるパワースペクトルはそれぞれ独立である。

3 Discussion

TAM wave で見ると TAM wave 成分の E-mode(パリティー 偶), B-mode(パリティー 奇) のパワースペクトルはそれぞれ独立なので CMB の温度揺らぎ (パ

リティー 偶), B-mode 偏光 (パリティー 奇) の観測から得られるそれぞれの r の値は違っていても良いことが分かった。本章ではそれぞれの r の値が違うということの物理的な意味について考察する。
ここでは宇宙原理の一つである並進対称性について議論をし、並進対称性を課したときに TAM wave 成分のパワースペクトルにどのような要請がされるのかを見ていく。まず、並進対称性を満たすならば (ヘリシティー s で分解した) 平面波展開のもとでのフーリエ成分のパワースペクトルには、

$$\left\langle h_s(\vec{k}) h^*_{s'}(\vec{k'}) \right\rangle \propto \delta_D^{(3)}(\vec{k}-\vec{k'}) \tag{17}$$

という関係が成り立つ。一方、TAM wave 展開のもとでのフーリエ成分でのパワースペクトルは、

$$\left\langle h^s_{lm}(k)[h^{s'}_{l'm'}(k')]^* \right\rangle = P_{ss'}(k)\delta_{ll'}\delta_{mm'}\frac{(2\pi)^3}{k^2} \times \delta_D^{(1)}(k-k') \tag{18}$$

である。ここで、

$$P_{ss'}(k) = \begin{pmatrix} P_{2,2}(k) & P_{2,-2}(k) \\ P_{-2,2}(k) & P_{-2,-2}(k) \end{pmatrix}$$

であり、それぞれ、

$$P_{2,2}(k) = \frac{1}{2}[P_{EE}(k) + P_{BB}(k)] - \mathrm{Im}P_{EB}(k) \tag{19}$$

$$P_{-2,-2}(k) = \frac{1}{2}[P_{EE}(k) + P_{BB}(k)] + \mathrm{Im}P_{EB}(k) \tag{20}$$

$$\begin{aligned} P_{2,-2}(k) &= [P_{-2,2}(k)]^* \\ &= \frac{1}{2}[P_{EE}(k) - P_{BB}(k)] - i\mathrm{Re}P_{EB}(k) \end{aligned} \tag{21}$$

である。

次に平面波展開のもとでのフーリエ成分と TAM wave 展開のもとでのフーリエ成分の間の関係

$$h_s(\vec{k}) = \sum_{lm}\left[{}_{-s}Y_{(lm)}(\hat{\vec{k'}})\right]^* h^s_{lm}(k) \tag{22}$$

を用いて平面波展開のもとでのフーリエ成分のパワースペクトルを TAM wave 展開のもとでのフーリエ成分のパワースペクトル $P_{ss'}$ で書き表すと、

$$\begin{aligned} \left\langle h_s(\vec{k}) h^*_{s'}(\vec{k'}) \right\rangle &= P_{ss'}(k)\frac{(2\pi)^3}{k^2}\delta_D^{(1)}(k-k') \\ &\times \sum_{lm}\left[{}_{-s}Y_{(lm)}(\hat{\vec{k'}})\right]^* {}_{-s'}Y_{(lm)}(\hat{\vec{k}}) \end{aligned} \tag{23}$$

となる。ここで、${}_sY_{(lm)}(\hat{\vec{k}})$ はスピン球面調和関数である [3]。式 (23) は $s = s'$ のときのみ、

$$\sum_{lm}\left[{}_{-s}Y_{(lm)}(\hat{\vec{k'}})\right]^* {}_{-s}Y_{(lm)}(\hat{\vec{k}}) = \delta_D^{(2)}(\hat{\vec{k}} - \hat{\vec{k'}}) \tag{24}$$

のようになり、

$$\begin{aligned} \left\langle h_s(\vec{k}) h^*_s(\vec{k'}) \right\rangle &\propto \delta_D^{(1)}(k-k')\delta_D^{(2)}(\hat{\vec{k}} - \hat{\vec{k'}})/k^2 \\ &= \delta_D^{(3)}(\vec{k}-\vec{k'}) \end{aligned} \tag{25}$$

となる。これは並進対称性を課したときの条件を満たす。また $s \neq s'$ のときは、

$$\begin{aligned} &\sum_m \left[{}_{s_1}Y_{(lm)}(\hat{\vec{k'}})\right]^* \left[{}_{s_2}Y_{(lm)}(\hat{\vec{k}})\right] \\ &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}[{}_{s_2}Y_{(ls_1)}(\beta,\alpha)]e^{-is_2\gamma} \neq \delta_D^{(2)}(\hat{\vec{k}} - \hat{\vec{k'}}) \end{aligned} \tag{26}$$

となってしまうので、並進対称であるためには $s \neq s'$ のときのパワースペクトルの値がゼロとなることが必要である。よって、

$$\begin{aligned} P_{2,-2}(k) &= [P_{-2,2}(k)]^* \\ &= \frac{1}{2}[P_{EE}(k) - P_{BB}(k)] - i\mathrm{Re}\left[P_{EB}(k)\right] = 0 \end{aligned} \tag{27}$$

従って並進対称性を課したときに、TAM wave 展開のもとでのフーリエ成分のパワースペクトルについて次のような条件が得られる。

$$P_{EE}(k) = P_{BB}(k) \tag{28}$$

$$i\mathrm{Re}\left[P_{EB}(k)\right] = 0 \tag{29}$$

以上のことから並進対称性を課すと TAM wave 展開のもとでの E-mode(パリティー 偶), B-mode(パリ

ティー 奇) のフーリエ成分のパワースペクトルは同じになることが分かった。従って、宇宙が並進対称ならば CMB の温度揺らぎ (パリティー 偶), B-mode 偏光 (パリティー 奇) の観測からそれぞれ得られる r の値は同じ値にならなければならない。逆に、両者の値が違うということは並進対称性が破れていることを示唆する。よって、*Planck* による温度揺らぎ (パリティー 偶) の観測と, BICEP2 による B-mode 偏光 (パリティー 奇) の観測からそれぞれ異なる r の値が得られたということの物理的な意味として、宇宙の並進対称性が破れていると解釈することが可能である。

4 Summary

平面波展開では偏光の状態を用いて独立なモードに展開していたが、TAM wave 展開ではパリティーによって展開できるということが重要である。CMB に関する物理はパリティーが不変なので、TAM wave 展開のもとでのフーリエ成分の E-mode(パリティー 偶), B-mode(パリティー 奇) のパワースペクトルはそれぞれ独立である。よって、CMB の温度揺らぎ (パリティー 偶), B-mode 偏光 (パリティー 奇) の観測から得られるそれぞれの r の値は違っていても良いことが分かった。ただし、宇宙に並進対称性を課すとそれぞれの r の値は同じになる。従って、*Planck* による温度揺らぎ (パリティー 偶) の観測と, BICEP2 による B-mode 偏光 (パリティー 奇) の観測から得られる r の値が違うということの物理的意味として、宇宙の並進対称性が破れていると解釈可能である。

Reference

[1]. M.Kamionkowski. and L.Dai. and D.Jeong. 2014. arXiv:1404.3730

[2]. L. Dai. and M. Kamionkowski. and D. Jeong. 2012. arXiv:1209.0761

[3]. E. Newman. and R. Penrose. 1966. J. Math. Phys. **7**, 863