

ストカスティック- δN 形式による曲率ゆらぎへの非摂動的アプローチ

多田 祐一郎 (東京大学 Kavli IPMU)

Abstract

我々はストカスティック形式と δN 形式を結びつけた、インフレーション中に生成される曲率ゆらぎを計算する新しい手法を提唱した。この手法では、曲率ゆらぎをインフラトン場について摂動展開する必要がなく、非摂動的取り扱いに成功している。また我々はこの手法を実際にカオティックインフレーションとハイブリッドインフレーションに適用し、曲率ゆらぎのパワースペクトルを計算した。特にハイブリッドインフレーションでは、臨界点以降のタキオン不安定性によるピークがパワースペクトルに見られた。

1 Introduction

近年、Planck collaboration (Ade et al. 2013) や BICEP2 collaboration (Ade et al. 2014) の観測により、初期宇宙のインフレーション機構が強く示唆されるようになってきた。インフレーションとは初期宇宙において、時空が指数関数膨張しているとされる時期のことである。標準的なインフレーション理論では、インフレーションを引き起こすインフラトンと呼ばれるスカラー場の量子ゆらぎによって、初期の時空の曲率ゆらぎが生成され、それがのちの宇宙背景放射 (Cosmic Microwave Background; CMB) の温度ゆらぎや大規模構造 (Large Scale Structure; LSS) の種になるとされる。

Planck collaboration の CMB 観測から、CMB スケールでの初期の曲率ゆらぎは $\sim 10^{-5}$ と非常に小さいことがわかっているが、より小さいスケールでは大きくなっている可能性がある。そしてそのような場合、原始ブラックホール (Primordial Black Hole; PBH) (Carr 1975) や超コンパクトミニハロー (UltraCompact MiniHalo; UCMH) (Bringmann et al. 2012) などの非常に興味深い天体の形成が示唆されている。さらに、我々が示したように、ハイブリッドインフレーションというモデルでは、実際に特定のスケールに大きなピークを持つような曲率ゆらぎを作ることができる。従ってそのような大きな曲率ゆらぎを考えることは非常に興味深い。

インフレーションによって作られる曲率ゆらぎは、一般的にインフラトン場 ϕ について摂動的に求められる。しかしこのような方法は大きな曲率ゆらぎを

計算する時にはあまり良くないだろう。なぜならそのような場合、高次摂動項の効果を無視できないからである。実際多重場インフレーションにおいて、インフラトン場のゆらぎはその平均より大きくなり摂動論が破綻することが起きうる。そのような状況で曲率ゆらぎを計算するのに必要なのが、我々が提唱する非摂動的手法である。

我々は、Fujita et al. (2013) でストカスティック形式 (Starobinsky 1986) と δN 形式 (Starobinsky 1985) を結びつけ、新たな曲率ゆらぎの非摂動的計算手法を提唱した。また Fujita et al. (2014) では提唱した手法を実際にカオティックインフレーションとハイブリッドインフレーションに適用し、特にハイブリッドインフレーションでは曲率ゆらぎにピークが出ることを確かめた。本集録ではこれらの結果をまとめる。

本集録の構成は以下のようなものである。2 章では、標準的な線形摂動論を簡単に復習する。3 章では我々の非摂動的手法、ストカスティック- δN 形式について説明する。4 章ではストカスティック- δN 形式をカオティックインフレーションとハイブリッドインフレーションに適用し、曲率ゆらぎを計算した。5 章は結論に当てた。

2 Linear perturbation theory

まず標準的な線形摂動理論を簡単に復習しよう。インフレーションで最も一般的な物の 1 つであるスローロールインフレーションは、一様なスカラー場がポテンシャルエネルギーを長い間稼いでいると起

こる。実際一様なインフラトンが、運動エネルギーよりポテンシャルエネルギーで主にエネルギーを稼いでいるとき、Friedmann 方程式は $3M_p^2 H^2 = V$ となる。ここで M_p は換算 Planck 質量 $(8\pi G)^{-1/2} = 2.453 \times 10^{18}$ GeV であり、 $a(t)$ をスケール因子として $H = \dot{a}/a$ は Hubble パラメータである。従って V がほぼ一定の時 H もまたほぼ一定で、時空は $a(t) \propto e^{\int H dt}$ の指数関数膨張をする。この指数部 $N = \int H dt$ は e-folds と呼ばれ、無次元時間変数としてしばしば使われる。

さて、インフラトンはほぼ一様で、空間依存性は摂動としてのみ存在するとしよう。

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \phi_0(t) + \delta\phi(t, \mathbf{x}). \quad (1)$$

FLRW 時空でのスカラーの運動方程式は、

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - a^{-2}\nabla^2\phi + V' = 0, \quad (2)$$

であるが、これを ϕ_0 まわりで展開すれば、 $\delta\phi$ に関しての線形方程式を得ることができる。その解は 2 点関数の Fourier モードであるパワースペクトルとして表示するとわかりやすい。

$$\mathcal{P}_\phi(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \int d^3x \langle \delta\phi(\mathbf{x}=0)\delta\phi(\mathbf{x}) \rangle e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (3)$$

質量が Hubble パラメータに対して無視できる場合、初期条件として真空のモード関数を選べばパワースペクトルは以下のようになる。

$$\mathcal{P}_\phi(k) = \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2, \quad \frac{k}{aH} \rightarrow 0. \quad (4)$$

すなわち、物理的波長 a/k がホライズン半径 H^{-1} を十分超えたモードは、相関が定数 $(\frac{H}{2\pi})^2$ に漸近するということである。これを**ゆらぎの凍結**と呼ぶ。

ホライズンを超えたゆらぎは凍結し、 ϕ の値をわずかにずらすので、インフレーションの持続時間も空間点によってわずかにゆらぐことになる。一方計量の空間成分が $a(t) \propto e^N$ であることから、持続時間 N のゆらぎはまさに時空の曲率ゆらぎそのものである。実際 δN 形式によれば、ゲージ不変な曲率ゆらぎ ζ は線形摂動の範囲で次のように解かれる。

$$\zeta_{\mathbf{k}} = \delta N_{\mathbf{k}} = \left. \frac{dN}{d\phi}(\phi_0) \right|_{k=aH} \delta\phi_{\mathbf{k}}. \quad (5)$$

$N(\phi)$ はインフラトン場の値が ϕ の時、そこからインフレーション終了までにかかる e-folds を表し、 $\delta\phi_{\mathbf{k}}$ のゆらぎはホライズンクロス $k = aH$ のタイミングで凍結するとして、最右辺は $k = aH$ の時刻で評価している。背景場 $\phi_0(t)$ はスローロールして運動方程式 (2) 中で $\ddot{\phi}$ を落とせるとすれば、 $\phi_0(t)$ の運動方程式は、

$$3H\dot{\phi} = -V' \Leftrightarrow \frac{d\phi}{dN} = \frac{V'}{3H^2}, \quad (6)$$

となる。ここでの N はインフレーション終了を 0 とし、 $dN = -Hdt$ であることに気をつけよう。

以上より線形摂動の範囲で、ゲージ不変な曲率ゆらぎの相関は、

$$\mathcal{P}_\zeta(k) = \left. \frac{dN}{d\phi} \right|_{k=aH} \mathcal{P}_\phi(k) = \frac{3H^2}{V'} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \Big|_{k=aH}, \quad (7)$$

と求められる。この処方では $\zeta_{\mathbf{k}}$ には $\delta\phi_{\mathbf{k}}$ のゆらぎしか寄与してないことに気をつけよう。実際にはモード \mathbf{k} のゆらぎが凍結した後もインフレーション終了までにより大きい波数のモードが次々と凍結し、 $\zeta_{\mathbf{k}}$ に寄与するはずであるが、線形摂動理論の枠組みでは違う波数のモードの寄与を取り入れることができない。次章からは我々が提唱した、特に摂動展開 (5) 式が破綻しているときにも有効な、より一般的処方を説明する。

3 Stochastic- δN formalism

ストカスティック形式は前章で見た凍結したゆらぎを、背景場の運動方程式に直接取り込むことができる手法である。前章では一様場 $\phi_0(t)$ を背景場とし、そこに摂動 $\delta\phi(t, \mathbf{x})$ を乗せたが、ストカスティック形式ではスーパーホライズンスケールで粗視化した以下のような場を背景と考える。

$$\phi_{\text{IR}} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \theta(\epsilon a(t)H(t) - k) \phi_{\mathbf{k}}(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (8)$$

ϵ は 1 より十分小さい正のパラメータである。階段関数 $\theta(\epsilon aH - k)$ によって IR 場には $k < \epsilon aH$ のスーパーホライズンモードだけが寄与している。ホライズンの中にいる観測者にとってスーパーホライズンスケールのゆらぎと一様場は区別がつかないので、む

しろこの IR 場をその観測者の背景場と考えるほうが正しいのである。

さらに $k > \epsilon aH$ のサブホライズンモードもホライズンスケール aH が指数関数的に増えることから次々とスーパーホライズンモードに変化し、IR 場に寄与するようになってくる。もともと量子的であったサブホライズンモードは ϵaH を超えると凍結すると考えられるが、このとき観測者のまわりで実際にどの値に凍結するかは予測できない。純粋に分散 \mathcal{P}_ϕ の Gauss 分布に従う乱数である。実際 IR 場の運動方程式は式 (6) にこの乱数が加わり、

$$\frac{d\phi}{dN} = -\frac{V'}{3H^2} + \mathcal{P}_\phi^{1/2}(N)\xi(N, \mathbf{x}), \quad (9)$$

となる。ただし $\xi(N, \mathbf{x})$ は各ホライズン距離ごとに独立な、平均 0 の Gauss 分布白色雑音である。またここでは時間変数 N を t と同じ方向にとっている。

式 (9) を全空間点で同時に解けば曲率ゆらぎの空間分布も完全にわかる。しかしそれはインフレーション中の宇宙全体の進化を追うことを意味し、もちろん不可能である。逆に 1 点の運動のみを考えるなら、式 (9) はただの確率常微分方程式となり数値計算するのは容易い。そこで最後に 1 点の運動から 2 点相関の情報を抽出する方法を述べてこの章を終わろう。

曲率ゆらぎのパワースペクトルは 2 点相関の Fourier 変換として定義されから、逆に 1 点相関である分散は、パワースペクトルの逆 Fourier 変換の $\mathbf{x} \rightarrow 0$ 極限として求められる。

$$\langle \delta N^2 \rangle = \int_{k_i}^{k_f} \frac{dk}{k} \mathcal{P}_{\delta N} \simeq \int_{\ln k_f - \langle N \rangle}^{\ln k_f} \mathcal{P}_{\delta N} dN. \quad (10)$$

ただしゆらぎはインフレーション開始時のホライズンスケール $k_i = \epsilon aH|_i$ から終了時のそれ $k_f = \epsilon aH|_f$ まででしか生成されてないとした。また最後の等式では $k_i \simeq k_f e^{-\langle N \rangle}$ の近似を用いた。この式を両辺 $\langle N \rangle$ で微分すればパワースペクトルを得る。

$$\mathcal{P}_\zeta = \left. \frac{d\langle \delta N^2 \rangle}{d\langle N \rangle} \right|_{\langle N \rangle = \ln(k_f/k)}. \quad (11)$$

インフラトン場を任意の値から開始して式 (9) を解けば、インフレーション終了までにかかる e-folds の平均 $\langle N \rangle$ とその分散 $\langle \delta N^2 \rangle$ を得ることができるから、これを上式に代入すれば求めたかった曲率ゆらぎのパワースペクトルがわかる。

この手法は式 (5) のように曲率ゆらぎをインフラトン場で線形近似しているわけではない、非摂動的なものである。ストカスティック形式によりあらゆるモードのゆらぎは自動的に運動方程式に取り入れられているので、異なったモード間の影響も考慮されている。

4 Chaotic inflation and hybrid inflation

ストカスティック- δN 形式を 2 つのシンプルなインフレーションモデルに適用して、曲率ゆらぎのパワースペクトルを計算してみよう。まずカオティックインフレーションを考える。ここでは特に質量項カオティックインフレーションを考えよう。インフラトンポテンシャルは質量項 $V = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ のみで与えられる。このモデルではインフラトン場が Planck スケールより大きな値を持ったとき、Hubble パラメータが十分大きくなり式 (2) の $3H\dot{\phi}$ が Hubble 摩擦として強く効き、スローロールインフレーションが実現できる。

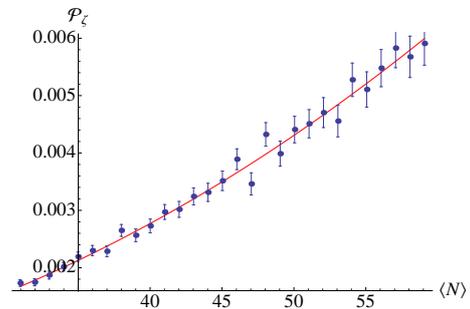


図 1: インフラトン質量 $m = 0.01M_p$ の時のストカスティック- δN 形式による計算 (青ドット) と、線形摂動理論 (7) による計算 (赤線) の比較。カオティックインフレーションのような単一場インフレーションにおいてストカスティック- δN 形式と線形摂動理論は無矛盾であることが確かめられる。

図 1 に曲率ゆらぎパワースペクトルの計算結果をのせた。青ドットはストカスティック- δN 形式による計算であり、赤線は線形摂動理論 (7) による結果である。カオティックインフレーションのようなインフラトンが 1 つしかない単一場インフレーションでは

高次摂動の効果は小さいので、線形摂動理論と非摂動解析の違いは無視できる (Fujita et al. 2013)。実際図 1 から単一場インフレーションにおいてストカスティック- δN 形式と線形摂動理論は無矛盾であることが確かめられる。

次にハイブリッドインフレーションの曲率ゆらぎを計算する。ハイブリッドインフレーションには ϕ と ψ の 2 つのスカラーが存在し、そのポテンシャルは次で与えられる。

$$V(\phi, \psi) = \Lambda^4 + \frac{1}{2} \left(\frac{2\Lambda^4}{\mu^2} \right) \phi^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{4\Lambda^4}{M^2} \left(\frac{\phi^2}{\phi_c^2} - 1 \right) \right] \psi^2 + \frac{\Lambda^4}{M^4} \psi^4. \quad (12)$$

Λ, μ, M, ϕ_c は模型のパラメータである。ポテンシャルの底上げ Λ^4 があるので H を稼げ Hubble 摩擦を効かすことができる。ダイナミクスは次のようである。まず ψ^4 項により ψ はすぐに 0 になる。その後スローロールインフレーションが起こり、 ϕ は質量項によってゆっくり原点に向かう。そして ϕ が ϕ_c より小さくなると ψ の質量項 $\frac{1}{2} \left[\frac{4\Lambda^4}{M^2} \left(\frac{\phi^2}{\phi_c^2} - 1 \right) \right]$ が負になりタキオン不安定性を生むことで、 ψ が急激に成長しスローロールインフレーションが終わる。

ϕ_c を臨界点と呼ぶが、臨界点より十分上では ψ はインフレーションのダイナミクスには寄与しない。一方臨界点付近から ψ もインフレーションのダイナミクスに寄与し始めるが、このあたりでは一様モード $\psi_0(t)$ は 0 である。すなわち ψ についての摂動展開は破綻している。従って臨界点付近に線形摂動理論は適用できない。一方我々のストカスティック- δN 形式なら解析が可能である。

パラメータとして、

$$\frac{\mu}{M_p} = 100, \quad \frac{M}{M_p} = \frac{\phi_c}{M_p} = 0.13, \quad \frac{\Lambda}{M_p} = 1.2 \times 10^{-4}, \quad (13)$$

を選んだときのストカスティック- δN の結果を図 2 に示した。このパラメータでは臨界点からインフレーション終了までは $\langle N \rangle \sim 17$ ほどかかるが、図 2 では臨界点以降、すなわち $\langle N \rangle < 17$ のスケールにタ

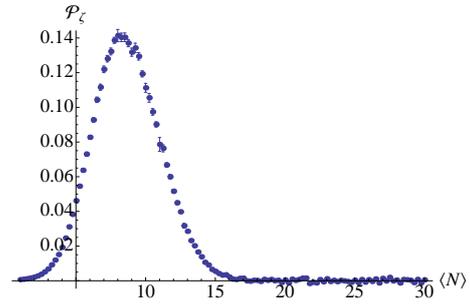


図 2: ハイブリッドインフレーションに対するストカスティック- δN 形式による曲率ゆらぎのパワースペクトルの計算。臨界点 $\langle N \rangle \sim 17$ よりインフレーション終了に近いスケールで、タキオン不安定性によるパワースペクトルのピークが見えている。

キオン不安定性によるパワースペクトルのピークが見えている。

5 Conclusion

本集録では Fujita et al. (2013, 2014) をまとめた。我々はストカスティック形式と δN 形式を結びつけることでインフラトン場について非摂動的に曲率ゆらぎを計算できる新たな手法を提唱し、それをカオティックインフレーションとハイブリッドインフレーションに実際に適用し曲率ゆらぎのパワースペクトルを計算した。

Reference

- T. Fujita, M. Kawasaki, Y. Tada and T. Takesako, JCAP **1312**, 036 (2013).
- T. Fujita, M. Kawasaki and Y. Tada, arXiv:1405.2187.
- P. A. R. Ade et al. [Planck Collaboration], arXiv:1303.5076.
- P. A. R. Ade et al. [BICEP2 Collaboration], arXiv:1403.3985.
- B. J. Carr, Astrophys. J. **201**, 1 (1975).
- T. Bringmann, P. Scott and Y. Akrami, Phys. Rev. D **85**, 125027 (2012).
- A. A. Starobinsky, In *De Vega, H.j. (Ed.), Sanchez, N. (Ed.): Field Theory, Quantum Gravity and Strings*, 107-126 (1986).
- A. A. Starobinsky, JETP Lett. **42**, 152 (1985) [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **42**, 124 (1985)].