

## インフレーション宇宙における原始磁場形成

林中 貴宏 (東京大学大学院 理学系研究科研究科 ビッグバン宇宙国際研究センター)

### Abstract

初期宇宙における原始磁場形成理論では、電磁場の共形不変性を破るカップリングを考えることで、インフレーション中の電磁場の進化が議論されてきた。このような理論では磁場ではなく、電場のほうが大きくなってしまふことが知られている。そのため、原始磁場形成理論はうまくいかないと考えられてきた。しかし、この電場のエネルギー密度は、インフラトンのエネルギー密度程度まで成長し、質量  $m$  の粒子が Schwinger 効果で生成する典型的な電場のスケール  $eE \sim m^2$  を超える可能性があると考えられる。Schwinger 効果による粒子生成が効率的に起これば、インフレーション中の真空の電気伝導度が十分に上がり、電場を消すことができる。したがってこの可能性が妥当なものであるかどうか研究することは重要である。

本研究では、原始磁場形成理論において Schwinger 効果が果たす役割を明らかにすることを目的とし、インフレーション中のスカラー QED の場合について、強い背景電場による粒子生成を議論した。さらに、生成粒子によって生じる電流や、電気伝導度を Adiabatic renormalization に基づいて計算した。

### 1 イントロ

現在の宇宙には遍く磁場が存在している。そのスケールは天体 ( $\sim \text{km}$ ) ほどの大きさから宇宙論的なスケール ( $\sim 1\text{Mpc}$ ) に亘り、強度は、宇宙論的な大規模磁場では  $10^{-20} \sim 10^{-15}\text{G}$  程度、マグネターのようなコンパクト天体では  $10^{15}\text{G}$  に到ると考えられている。宇宙の中での磁場の姿は、電波観測や  $\text{GeV} \sim \text{TeV}$  領域  $\gamma$  線の多波長同時観測によって明らかにされつつある。「宇宙磁場の起源と進化」は電波望遠鏡 SKA での科学目標の一つに位置づけられており、将来、より詳細なデータが得られると期待される。

本講演では、宇宙論的なスケールをもつ磁場の起源に焦点を当て、これをインフレーション中の電磁場の量子ゆらぎに求めるアプローチについて既存の研究に対して指摘されてきた問題点を示し、それに対する解決策を提案する。

### 2 大規模磁場とその起源

ブレーザーと呼ばれる天体からの  $\text{TeV} \gamma$  線と 2 次  $\text{GeV} \gamma$  線の測定から、銀河間磁場の強度に対して  $|\mathbf{B}| > 10^{-20}\text{G}$  という下限が付けられている。(A. Neronov et al. 2010)

この磁場の強さは非常に小さいが、膨張宇宙の中では放射成分のエネルギー密度はスケールファクタ  $a$  の 4 乗に反比例して落ちるので、宇宙の初期から銀河間磁場の「種」となる原始磁場が存在していたとすると、その強さは非常に大きかったと考えられる。Ratra は、この種磁場を、宇宙初期に起こったインフレーション中の電磁場の量子ゆらぎによって作るという理論を考えた。(B. Ratra 1992) このような理論は、大きなスケールにわたってコヒーレントな磁場を作り得るという特徴を持っている。

### 3 原始磁場形成

この章ではまず、インフレーション中に原始磁場を生成する理論について簡単に説明する。続いてそのような理論が抱える困難について説明する。

インフレーション中には、時空は次の計量  $g_{\mu\nu}$  を持つ de Sitter 時空で表される。

$$g_{\mu\nu} = a^2(\eta)\eta_{\mu\nu} \quad (1)$$

ここで、 $a(\eta) = 1/(1 - H\eta) = e^{Ht}$  はスケールファクタであり、 $H$  はハッブル定数、 $\eta$  は Conformal time(共形時間)、 $t$  は Cosmic time、 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  は Minkowski 計量である。こ

の時空の上での電磁場の作用 Action は、

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{EM} \quad (2)$$

で与えられ、電磁場  $A_\mu$  の Lagrangian  $\mathcal{L}_{EM}$  は Field Strength  $F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$  で、

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \quad (3)$$

と書かれる。しかし、 $g^{\mu\nu} = a^{-2} \eta_{\mu\nu}$  と  $\sqrt{-g} = a^4$  より (2) 式の Action は

$$S = \int d^4x \left( -\frac{1}{4} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \right) \quad (4)$$

のように、平坦な時空の Action と同じ形になってしまう。もちろん平坦な時空では、真空から電磁場が勝手に生成したりはしない。このような電磁場の性質は Conformal invariance(共形不変性)と呼ばれる。この不変性のせいで、Conformal 変換(共形変換:  $g_{\mu\nu}(x)$  を任意関数  $\Omega(x)$  で  $\Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x)$  に移す変換)で平坦な時空に移る時空では、電磁場の生成は起こらない。

以上の観察からインフレーション中に真空から電磁場を生成するには、Conformal invariance を何らかの形で破ってやらなければいけないことが分かる。例えば、何らかのスカラール場  $\varphi$  と電磁場の間に

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} I^2(\varphi) F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \quad (5)$$

のようなカップリングを考えて、 $I(\varphi)$  の関数形を決めてやることで、手で Conformal invariance を破り、原始磁場形成を議論することができる。

(3) 式の代わりに (5) 式を用いて作られる Action から電磁場に対する運動方程式を導き、電場や磁場がどのように成長するかを解析することができるが、このような理論は一般的に次のような問題を持つことが知られている。(V. Mukhanov et al. 2009)

- 磁場よりも電場のほうが非常に強くなる
- 電磁場のエネルギー密度が非常に大きくなり、インフレーションが壊れる

波数  $k$  の電場  $E$  と磁場  $B$  の強さの比は、およそ  $|E|/|B| \sim a/k$  となる。大きなスケールで十分な強さの磁場を生成しようとする、電場のエネルギー密度がすぐにインフラトンのエネルギー密度を超えて

しまい、放射優勢の宇宙になるためインフレーションは長続きしないのである。逆に、インフレーションが十分長く続くという条件のもとでは、現在の宇宙に生成できる磁場の大きさは、Mukhanov et al. によると、Mpc スケールで  $10^{-32} \text{G}$  以下であり、期待される大規模磁場の強さよりも 10 桁以上小さい。こういった理由で原始磁場形成は困難だと考えられてきた。

しかし、以上の議論では、電場が強くなる場合に真空から粒子が生成する現象は考えられていない。この現象は Schwinger 効果 (J. Schwinger 1951) として知られるもので、これを原始磁場形成理論に取り入れた場合には、電場の成長を抑え、磁場を効率的に生成できる可能性が残されている。

## 4 Schwinger 効果-Elementary

ここでは、強い電場によって真空から粒子が生成される Schwinger 効果について直感的な説明をする。

真空に  $z$  軸方向の一様な電場  $E$  をかける場合を考えよう。量子論では、真空中においても粒子・反粒子の対生成・対消滅が絶え間なく起こっている。質量  $m$  電荷  $\pm e$  を持った粒子対の間の「距離」は、Compton 波長で与えられ  $d \sim 1/m$  程度の長さを持つ。一方この粒子対の間の電場によるエネルギーの大きさは  $eEd$  である。粒子対を生成するのに必要なエネルギーは静止エネルギー  $2m$  であるから、 $eEd > 2m$  となると電場のエネルギーから粒子対を生成したほうがエネルギーが低く、真空からの粒子対生成が起り始める。これが Schwinger 効果の直感的な描像である。したがって、粒子生成の起り始める典型的な電場のスケールは  $eE \sim m^2$  となる。また、単位時間・単位体積あたりの生成粒子数密度は、

$$n \sim \exp\left(-\frac{\pi m^2}{eE}\right) \quad (6)$$

となることが知られている。明らかに、この表式は gauge coupling  $e$  の正幂で展開できないから、Schwinger 効果は非摂動的な効果である。

## 5 Schwinger 効果-Advanced

Minkowski 時空での Schwinger 効果は古くから議論されてきた。インフレーション中の曲がった時空の中で、強い電場が存在するときの Schwinger 効果は以下のように議論することができる。

ここでは、エネルギー密度一定、 $z$  方向の一様電場が de Sitter 時空中に存在する場合の粒子生成を議論する。簡単のため、電場も時空も background として扱う。荷電粒子もスカラーの場合について考える。時空は (1) 式の計量で与えられる。電場は、 $A_\mu = (0, 0, 0, A_z)$  として

$$A_z(\eta) = -\frac{E}{H} (a(\eta) - 1) \quad (7)$$

によって与えられるものを考える。この時、 $-\frac{\partial_\eta A_z^{dS}}{a^2} = E = \text{const.}$  となっている。また、 $a(\eta) = \frac{1}{1-H\eta} = e^{Ht}$  より、 $H \rightarrow 0$  の極限で、 $\eta \rightarrow t$  なので  $A_z \rightarrow -Et$  となる。

Lagrangian は scalar QED のもので、(複素) スカラー場を  $\phi$ 、共変微分を  $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$  として ( $e > 0$  にとる)

$$\mathcal{L} = g^{\mu\nu} (D_\mu \phi)^\dagger (D_\nu \phi) + m^2 \phi^\dagger \phi + \frac{1}{4} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \quad (8)$$

と与えられる。

Canonical な場を  $\chi = a\phi$  で定義し、

$$\begin{aligned} \chi(\eta, x, y, z) \\ = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{ik \cdot x} \left( \chi_k(\eta) a_k + \chi_k^*(\eta) b_{-k}^\dagger \right) \end{aligned} \quad (9)$$

と展開すると、 $a$ -particle が positron に対応し、 $b$ -particle が electron に対応する。mode function  $\chi_k$  に対する e.o.m は、Action を変分して

$$(\partial_\eta^2 + \omega_k^2(\eta)) \chi_k(\eta) = 0 \quad (10)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \omega_k^2(\eta) &= \alpha a^2(\eta) + \beta a(\eta) + \gamma \\ \alpha &= \tilde{m}^2 + l^2 \\ \beta &= 2l(k_z + l) \\ \gamma &= k^2 + 2lk_z + l^2 \end{aligned}$$

であり、 $\tilde{m}^2 = m^2 - 2H^2$ ,  $l = \frac{eE}{H}$  である。(10) 式によって荷電粒子の振る舞いが記述されるので、これを解析することで粒子数生成が議論できる。

(9) 式で定義される演算子  $a_k, b_k$  によって、真空状態  $|0\rangle$  を、すべての  $k$  について  $a_k |0\rangle = b_k |0\rangle = 0$  が成り立つ状態として定義できる。

ここで、 $\chi_k^-(\eta)$  と  $\chi_k^+(\eta) = (\chi_k^-(\eta))^*$  を用いて、

$$\chi_k(\eta) = \alpha_k(\eta) \chi_k^-(\eta) + \beta_{-k}(\eta) \chi_k^+(\eta) \quad (11)$$

のように表されるとする。これを (9) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} \chi(\eta, x, y, z) \\ = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{ik \cdot x} \left( \chi_k(\eta) a_k + \chi_k^*(\eta) b_{-k}^\dagger \right) \\ = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{ik \cdot x} \left( \chi_k^-(\eta) \tilde{a}_k(\eta) + \chi_k^+(\eta) \tilde{b}_{-k}^\dagger(\eta) \right) \end{aligned} \quad (12)$$

となり、新しい生成消滅演算子  $\tilde{a}_k(\eta), \tilde{b}_{-k}(\eta)$  は、

$$\begin{aligned} \tilde{a}_k(\eta) &= \alpha_k(\eta) a_k + \beta_{-k}^*(\eta) b_{-k}^\dagger \\ \tilde{b}_{-k}^\dagger(\eta) &= \beta_{-k}(\eta) a_k + \alpha_k^*(\eta) b_{-k}^\dagger \end{aligned} \quad (13)$$

を満たす。 $\tilde{a}_k(\eta), \tilde{b}_{-k}(\eta)$  で表される波数  $k$  の粒子の個数の「真空」期待値は

$$\begin{aligned} N_k &= \langle 0 | \tilde{a}_k^\dagger \tilde{a}_k | 0 \rangle = \langle 0 | \tilde{b}_{-k}^\dagger \tilde{b}_{-k} | 0 \rangle \\ &= |\beta_{-k}(\eta)|^2 \end{aligned} \quad (14)$$

と計算され、一般には 0 にならない。このことは、時間とともに真空と粒子の定義が変化するせいで、ある時刻に真空であった状態でも、他の時刻では粒子を含む状態になるためと理解される。当然、 $\chi_k^\pm$  の選び方の分だけそれぞれ異なる真空状態が存在するので、適切な粒子描像を与える  $\chi_k^\pm$  を選んでやらなければならない。一般にはこのような選択を行うための先験的な原理はないのだが、WKB 近似 (断熱近似, Adiabatic approximation) に基づく方法を使うことができる。特に、(11) 式で生成粒子を表現する  $\beta(\eta)$  が smooth になるという条件を用いて  $\chi_k^\pm$  を定めることができる。(M. V. Berry 1990)

この方法によって、生成粒子数の期待値は

$$|\beta_k(\eta)|^2 = \frac{1}{4} |\text{Erfc}(-\sigma_k(\eta)) e^{-F_k^{(0)}}|^2 \quad (15)$$

と表される。ここで  $\text{Erfc}(-x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-x^2}$  は誤差関数の一つ、 $\sigma_k(\eta) = \frac{\Im F_k(\eta)}{\sqrt{2\Re F_k(\eta)}}$  は  $\eta$  の単調増加関数である ( $\Re, \Im$  は実部と虚部を表す)。

$F_k(\eta) = 2i \int_{\eta_c}^{\eta} d\eta \omega_k(\eta)$  は Singulant と呼ばれる量で  $\eta_c$  は  $\omega_k(\eta)$  のゼロ点で  $\eta$  の複素平面の上半面にあるものである。 $\Re \eta$  軸上で  $\Im F_k(\eta) = 0$  となる点  $\eta = \eta_0$  が存在し、 $F_k^{(0)} = F_k(\eta_0) \in \mathbb{R}$  である。

また、 $\chi_k^{\pm}(\eta)$  は WKB 解の形で、

$$\chi_k^{\pm}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\Omega_k(\eta)}} \exp\left(\pm i \int d\eta \Omega_k(\eta)\right) \quad (16)$$

と表されるが、 $\Omega_k(\eta)$  は通常の WKB 近似とは異なり、 $\Omega_k(\eta) = \omega_k(\eta) \sum_{i=0}^M \varphi_k^{(i)}(\eta)$  のように級数解で与えられる。ただし、 $M \sim \frac{1}{2}(F_k^{(0)} - 1)$  にとる。

## 6 原始磁場形成と Schwinger 効果

以上の解析に基づいて、真空から生成された荷電粒子のエネルギーや、荷電粒子の運動がもたらすカレントの真空期待値を計算することができる。例えば、カレントの電場と平行な成分の期待値は

$$\langle j_z \rangle = e \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (k_z - eA_z) |\chi_k(\eta)|^2 \quad (17)$$

と表される。

一般には、これらの量は真空からの寄与のため発散しているので、繰り込みをしなければいけない。この発散の処理は  $\chi = \alpha\chi^- + \beta\chi^+$  のうち、真空部分に対応する  $\chi^-$  の項を落として、 $\chi = \beta\chi^+$  とすることで自明に行うことができる (Adiabatic subtraction)。

図 1 は時間  $H\eta$  が進むのに伴って電流の期待値が急激に大きくなる様子を表している。上下の線は与える一様電場の大きさの違いで、電場が大きいほど生じる電流も大きい。

図 2 は同じ時刻  $\eta = 0$  で比べると、電流は電場に対して単調に増加する様子を表している。3 本の線は荷電粒子の質量の違いで、この質量が重いほど生じる電流は小さくなる。

今後は、具体的な原始磁場形成モデルにおいて、ど

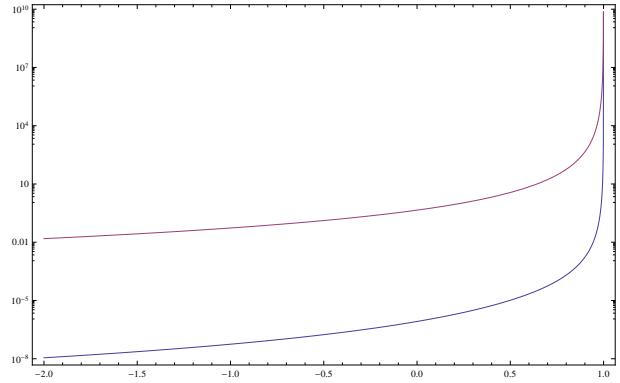


図 1: 電流の時間変化 縦軸:  $\langle j_z \rangle$  横軸:  $H\eta$

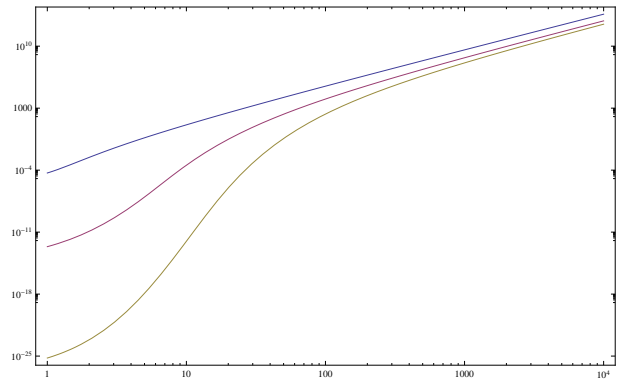


図 2: 電流と与える電場 縦軸:  $\langle j_z \rangle$  横軸:  $eE$

のような場合に荷電粒子の効果が無視できなくなるかを調べ、荷電粒子の効果で前述の困難を解決できるかどうか調べる予定である。

## Reference

- J. Schwinger, Phys. Rev. 82 664 (1951)
- M. V. Berry, PRSL A427, 265-280 (1990)
- B. Ratra, Astrophys. J. 391 L1 (1992)
- J. Martin, J. Yokoyama, JCAP 01, 025 (2008)
- V. Demozzi, V. Mukhanov, H. Rubinstein, JCAP 08, 025 (2009)
- A. Neronov, I. Vovk, Science, 328, 73 (2010)
- M. Frob, J. Garriga, S. Kanno, M. Sasaki, J. Soda, T. Tanaka, A. Vilenkin, JCAP 04 009 (2014)