

# Planck と BICEP2 の観測結果による single field inflation モデルへの制限

大石 直矢 (京都大学大学院 基礎物理学研究所)

## Abstract

今年 (2014 年 3 月) 南極にある望遠鏡 BICEP2 で宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) を観測してきた研究チームが CMB の偏光を解析した結果、inflation 由来の原始重力波が時空を歪めることにより生じるとされる CMB の B-mode パワースペクトルが発見された。そしてその観測によると、B-mode のパワースペクトルは  $1\sigma$  のレベルで  $r = 0.20^{+0.07}_{-0.05}$  のテンソル・スカラー比を与え、さらに  $r = 0$  は  $7\sigma$  のレベルで棄却されることが分かった。これは原始重力波の存在を強く支持する結果を示している。これらの結果を受けて、今回の発表では、主に [1] の論文を参考にして、chaotic inflation、natural inflation の 2 つの single field inflation モデルについて slow-roll 近似を用いて、テンソルスカラー比とランニングを理論計算し、Planck と BICEP2 の観測結果からそれぞれどのような制限を受けるのかを考察する。

## 1 Introduction

南極にある望遠鏡 BICEP2 で CMB を観測し解析した結果、CMB の B-mode パワースペクトルが発見された。[図 1] ここで CMB の E-mode とは、温度揺らぎをつくる揺らぎの波数ベクトルに平行あるいは垂直な偏光のことで、これは密度揺らぎや重力波の + mode によって現れる。また、B-mode とは、温度揺らぎをつくる揺らぎの波数ベクトルに対し 45 度傾いた偏光のことで、これは重力波の  $\times$  mode によって現れる。よって B-mode が観測されたということは、背景重力波の存在を間接的に示唆している [3]。この観測結果からパワースペクトルを解析することで、様々な理論の inflation モデルに制限をかけることができる。しかし制限をかけることができると言っても好き勝手なモデルを考えてしまうと、inflation モデル自体が "inflation" してしまう。そこでまずは inflation モデルを (i) 重力理論に補正を加えた inflation モデル (ii) single field inflation モデル (iii) ハイブリッド inflation 等の multi inflation モデルと 3 つに大別した中で、今回は比較的 simple である (ii) の single field inflation モデルを考える。しかし (ii) の中でも更に様々なモデルが考えられるが、まずは最も単純なモデルである Chaotic inflation モデルについて考察し、続いて自然な理由で導入される Natural inflation

モデルに焦点を当てる。

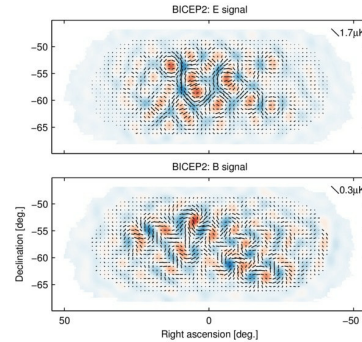


図 1: BICEP2 による CMB の E-mode B-mode 観測データ [2]

## 2 Single field inflation の一般論

### 2.1 inflaton 場の方程式

実スカラー場 (inflaton 場) を考える。まず作用は、

$$S = S_G + S_M = \int d^4x \sqrt{-g} (\mathcal{L}_G + \mathcal{L}_M) \quad (1)$$

である。ここで、

$$\mathcal{L}_G = a + bR + O(R^2)$$

であり  $a$  と  $b$  は、 $R$  の 1 次までとって Newton 極限から

$$a = -2\lambda b \quad b = \frac{1}{16\pi}$$

と決まる。ここで  $\lambda$  は宇宙項である。まず (1) を重力場  $g_{\mu\nu}$  で変分をとって、

$$\delta_g S_G = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{16\pi} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \lambda g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu}$$

$$\begin{aligned} \delta_g S_M &= \int d^4x \left[ \frac{\partial(\mathcal{L}_M \sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial(\mathcal{L}_M \sqrt{-g})}{\partial \left( \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right)} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

$\delta_g S_G = 0$  から真空のアインシュタイン方程式が出てくる。また  $T_{\mu\nu}$  はエネルギー・運動量テンソルである。実スカラー場のラグランジアン密度は、ポテンシャルを  $V(\phi)$  として

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi)$$

であるから、この時エネルギー・運動量テンソルは

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + g_{\mu\nu} \mathcal{L}_M$$

となる。ここで背景時空を平坦な FLRW 時空として一様等方性から空間微分を無視することによって、

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (2)$$

$$p = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (3)$$

$\delta_g S = 0, \lambda = 0$  からフリードマン方程式

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{M_{pl}} \sqrt{\frac{\rho}{3}} \quad (4)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6M_{pl}^2} (\rho + 3p) \quad (5)$$

ここで、planck 質量と換算プランク質量を（こだけ単位系を元に戻す。）

$$m_{pl} \equiv \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \sim 10^{19} \quad M_{pl} \equiv \frac{m_{pl}}{\sqrt{8\pi}} \sim 10^{18} [GeV/c^2]$$

とする。続いて (1) の作用を inflaton 場  $\phi$  で変分をとることで、( $\delta_\phi S_M = 0$ ) 運動方程式

$$\delta_\phi S_M = \int d^4x \left[ \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \dot{\phi}} \right) \right] \delta \phi$$

$$\Rightarrow \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad H \equiv \frac{\dot{a}}{a} \quad (6)$$

が得られる。

## 2.2 slow-roll 条件

inflation 条件として、slow-roll 条件①指数関数的膨張条件（膨張時間  $1/H$  の間、 $H$  の変化の割合が十分小さい。）② slow-roll 近似（膨張時間  $1/H$  の間、 $\dot{\phi}$  の変化の割合が十分小さい。）を課す。

$$\epsilon \equiv \frac{M_{pl}^2}{2} \left| \frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right|^2 \ll 1 \quad (\text{①から}) \quad (7)$$

$$|\eta| \equiv M_{pl}^2 \left| \frac{V''(\phi)}{V(\phi)} \right| \ll 1 \quad (\text{①と②から}) \quad (8)$$

slow-roll 近似の下では、上の 2 つの条件が成り立っている間、inflation が起こっていると考える。

inflation 中の時刻  $t$  から終了時刻  $t_e$  までの加速膨張の程度を表す量 e-folding 数を

$$N(t) \equiv \ln \frac{a(t_e)}{a(t)} \approx -\frac{1}{M_{pl}^2} \int_\phi^{\phi_e} \frac{V(\phi)}{V'(\phi)} d\phi \quad (9)$$

を定義し、inflation 終了時の  $\phi_e$  は、加速膨張しなくなる  $\epsilon(\phi_e) = 1$  で定義する。

## 2.3 観測量

まずは相関関数のフーリエ変換である、パワースペクトルを理論計算した結果は

・密度揺らぎのパワースペクトル

$$P_R(k) = \left( \frac{H^2}{2\pi\dot{\phi}} \right)_{t=t_*}^2 = \frac{1}{12\pi^2 M_{pl}^6} \frac{V^3(\phi)}{V'^2(\phi)}_{t=t_*}$$

・テンソル揺らぎのパワースペクトル

$$P_T(k) = \frac{8}{M_{pl}^2} \left( \frac{H}{2\pi} \right)_{t=t_*}^2$$

となる [4]。ここで、それぞれの揺らぎは  $k < aH$  で一定になるので  $k = aH$  となる時の  $t = t_*$  の値で考える。（長波長近似）

次に上のパワースペクトルを使った観測量を定義する。

・テンソル・スカラー比

$$r_T \equiv \frac{P_T}{P_R} = 16\epsilon$$

- ・スペクトル指数 (slow-roll パラメータの 1 次)

$$n_s - 1 \equiv \frac{d \ln P_R}{d \ln k} = 2\eta - 6\epsilon$$

$$n_t \equiv \frac{d \ln P_T}{d \ln k} = -2\epsilon$$

- ・ランニング (slow-roll パラメータの 2 次)

$$n_s' \equiv \frac{d \ln n_s}{d \ln k} = 16\epsilon\eta - 24\epsilon^2 - 2\xi \quad (\xi \equiv M_{pl}^4 \frac{V' V'''}{V^2})$$

ここで便利な関係式

$$\frac{d}{d \ln k} \approx -M_{pl}^2 \frac{V'}{V} \frac{d}{d\phi}$$

を用いた。これらは基準となる波数  $k_0$  を決めて、そのまわりでパワースペクトルを展開した時の係数となる。

$$\ln P_R(k) = \ln P_R(k_0) + [n_s(k_0) - 1]x + \frac{n_s'(k_0)}{2}x^2 + O(x^3)$$

$$(x \equiv \ln \frac{k}{k_0})$$

ランニングまで考慮に入れるとパワースペクトルは、

$$P_R(k) = P_R(k_0) \left( \frac{k}{k_0} \right)^{n_s - 1 + \frac{n_s'}{2} \ln \frac{k}{k_0}}$$

とかける。これらを観測から求めることで、inflation モデルに制限を与えることができる。

### 3 Chaotic inflation model

$$V(\phi) = \Lambda^4 \left( \frac{\phi}{M_{pl}} \right)^p \quad (p \geq 1)$$

で与えられる Chaotic inflation モデルを考える。(Λ は振幅として観測から求まる。)  $p = 2$  は Klein-Gordon-like な inflation モデルである。ポテンシャルが与えられると slow-roll パラメータや e-folding 数を求めることができる。

$$\epsilon = \frac{M_{pl}^2}{2} p^2 \phi^{-2} \quad \eta = M_{pl}^2 p(p-1) \phi^{-2}$$

$$\xi = M_{pl}^4 p(p-1)(p-2) \phi^{-4} \quad N = \frac{1}{2pM_{pl}^2} (\phi^2 - \phi_e^2)$$

inflation 終了条件から  $\phi_e$  が求められて、結局

$$\phi_e = \frac{pM_{pl}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \phi(N) \approx \sqrt{2pN}M_{pl}$$

となって、N の関数として表せる。N は地平線問題、地平線問題を解決するようにとればよい。(50~60 程度 [3])

以上より観測量は、

$$r_T = \frac{8p(1-n_s)}{p+2}, \quad n_s' = \frac{-2(1-n_s)^2}{p+2} \quad (10)$$

よって観測と照らし合わせると、

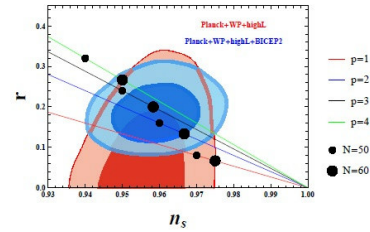


図 2: 縦軸: テンソル・スカラー比 横軸: スペクトル指数 赤: Planck 青: Planck+BICEP2 濃色:  $1\sigma$  薄色:  $2\sigma$ [2][5]

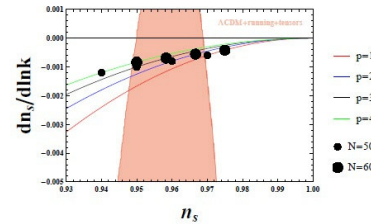


図 3: 縦軸: ランニング 横軸: スペクトル指数 赤: Planck 薄色:  $2\sigma$ [5]

となって、 $2 \leq p \leq 3$  であれば BICEP2 によるテンソル・スカラー比は  $1\sigma$  の範囲に入り、Planck によるランニングは  $2\sigma$  の範囲に入ることが分かる。(注意: Planck のデータでランニングの  $1\sigma$  の領域はオーダーが一桁違うところにあるため、どこにも入らない。)

## 4 Natural inflation model

前節で考えた Chaotic inflation モデルのように他にも多数考えることができる。ではどのようなモデルを考えるとより良いであろうか？まずは当然であるが観測結果と矛盾しないこと。そして次にそのモデルの inflaton 場が自然に現れるのに十分な理由があることである。もし今ある別の理論から導入されたスカラー場であれば、そのモデルを考えるモチベーションとしては十分である。現在素粒子論で提唱されている粒子のうち発見されているスカラー場のものはヒッグス粒子のみである。しかし inflaton をヒッグス粒子と考えると inflation を自然に終わらせることが難しい。よって別の粒子を考える必要がある。

$$V(\phi) = \Lambda^4 \left[ 1 + \cos\left(\frac{\phi}{f}\right) \right]$$

与えられる Natural inflation モデルを考える。(Λ は振幅として観測から求まる。)これは、Axion-like な inflation モデルである。Axion とは、QCD の strong CP 問題を解決するために導入された Peccei Quinn 対称性が自発的に破れた時に現れる南部ゴールドストーン粒子である。また、Axion はダークマターである条件を満たしており、ダークマターの候補としても注目されている。

先ほどと同様に slow-roll パラメータや e-folding 数を求めると、

$$\epsilon = \frac{M_{pl}^2}{2f^2} \left( \frac{\sin \frac{\phi}{f}}{1 + \cos \frac{\phi}{f}} \right)^2 \quad \eta = -\frac{M_{pl}^2}{f^2} \frac{\cos \frac{\phi}{f}}{1 + \cos \frac{\phi}{f}}$$

$$\xi = -\frac{2M_{pl}^4}{f^2} \epsilon \quad N = \frac{2f^2}{M_{pl}^2} \ln \left[ \frac{\sin \frac{\phi_e}{2f}}{\sin \frac{\phi}{2f}} \right]$$

となるので、観測と照らし合わせると、

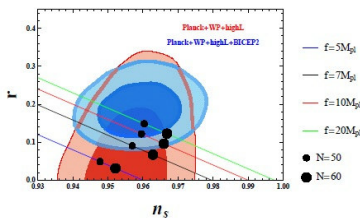


図 4: 図 2 と同様 [2][5]

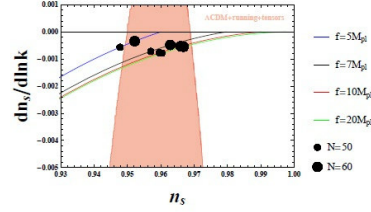


図 5: 図 3 と同様 [5]

となつて、 $f \geq 10M_{pl}$  であれば BICEP2 によるテンソル・スカラー比も、Planck によるランニングも少なくとも  $2\sigma$  の範囲に入ることが分かる。

## 5 Conclusion

今回は 2 つの single field inflation モデルを考えた。  
 ① Klein-Gordon-like な Chaotic inflation  
 ② QCD の CP 対称性の破れを説明するために導入され、ダークマターの候補ともなっている Axion-like な Natural inflation である。そして観測結果から ①  $2 \leq p \leq 3$   
 ②  $f \geq 10M_{pl}$  と制限がつく。しかし特にランニングについては 2 つのモデルとも  $1\sigma$  のレベルで棄却されるが、 $2\sigma$  のレベルの範囲には入っていることが分かった。このモデルがどうなるかについては今後の観測に期待したい。

## Reference

- [1] Qing Gao and Yungui Gong (2014) arXiv:1403.5716v2[gr-qc]
- [2] P.Ade et al. BICEP2 (2014) arXiv:1403.3985v2
- [3] Scott Dodelson (2003) ACADEMIC PRESS MODERN COSMOLOGY
- [4] Andrew R.Liddle and David H.Lyth (2000) CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS Cosmological Inflation and Large-Scale Structure
- [5] P.Ade et al. Planck (2013) arXiv:1303.5082v2