最も一般的なスカラーテンソル理論における宇宙論的密度揺らぎの赤方偏移空間でのパワースペクトル

宅嶌　祐一郎 (広島大学大学院 理学研究科)

Abstract

最も一般的なスカラーテンソル理論における宇宙論的密度揺らぎの密度-密度パワースペクトル、密度-速度パワースペクトル、速度-速度パワースペクトルを計算し、いくつのパラメータにどのように依存しているのかを調べた。また具体的な模型として、KGB 模型を用いて定量的な評価を行った。本収録ではその導出方法について紹介する。

1 Introduction

観測から示唆されている宇宙の加速膨張を説明する理論として、一般相対論に宇宙項を加えた宇宙項模型が標準理論として考えられている。その一方で、重力理論を修正して加速膨張を説明しようとする試みもあり、盛んに研究されている。本研究で扱う修正重力理論である最も一般的なスカラーテンソル理論はスカラー場を一つ加えることで重力の効果を修正した理論である。これは場の運動方程式が 2 階の微分方程式になるという条件の下で最も一般的な理論であり、様々な修正重力理論を包括した理論になっている。また Vainshtein 機構によって、太陽系スケールの重力のテストをパスできる可能性がある。

重力理論には様々なモデルが存在するため、その検証が課題になっている。修正重力理論の制限の 1 つとして、宇宙の大規模構造の進化の進化を調べる方法がある。本研究では宇宙の大規模構造を特徴付ける物理量の一つである宇宙論的密度揺らぎが修正重力理論の場合にどのような特徴を持つのかを調べるために、標準摂動理論を用いて 3 次まで計算を行った。またその計算結果を用いて、赤方偏移空間パワースペクトルの一般的な表式を得た。

本収録では 2 章で宇宙論的密度揺らぎの 3 次まで計算し、3 章で赤方偏移空間パワースペクトルを簡単に紹介し、4 章では具体的な修正重力理論の模型を用いて定量的な評価を行う。

2 Cosmological density perturbations

最も一般的なスカラーテンソル理論の作用は以下で与えられる。

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}\left(\mathcal{L}_2+\mathcal{L}_3+\mathcal{L}_4+\mathcal{L}_5+\mathcal{L}_{\rm m}\right), \quad (1)$$

$$\mathcal{L}_2=K(\phi,X), \quad (2)$$

$$\mathcal{L}_3=-G_3(\phi,X)\Box\phi, \quad (3)$$

$$\mathcal{L}_4=G_4(\phi,X)R+G_{4X}\left[(\Box\phi)^2-(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2\right], \quad (4)$$

$$\mathcal{L}_5=G_5(\phi,X)G_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu\phi-\frac{1}{6}G_{5X}\left[(\Box\phi)^3-3\Box\phi(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2+2(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^3\right]. \quad (5)$$

K,G_3,G_4,G_5 はスカラー場 ϕ とその運動項 $X(=-(\partial\phi)^2/2)$ の任意関数であり、G_{iX} は $\partial G_i/\partial X$ を表している。4 つの任意関数 K,G_3,G_4,G_5 の選び方によって、様々な修正重力理論を再現する。計量はニュートンゲージにとる。

$$ds^2=-(1+2\Phi)dt^2+a^2(1-2\Psi)d\mathbf{x}^2. \quad (6)$$

スカラー場の摂動は

$$\phi\to\phi(t)+\delta\phi(t,\mathbf{x}), \quad (7)$$

とし、物理量 Q を以下で定義する。

$$Q\equiv H\frac{\delta\phi}{\dot\phi}. \quad (8)$$

また宇宙論的密度揺らぎを $\delta(t,\mathbf{x})$、速度場を $\mathbf{u}(t,\mathbf{x})$ とする。5 つの量 $\delta,\mathbf{u}[\theta],\phi,\psi,Q$ を 5 つの方程式

- 連続の方程式
- オイラー方程式
- 重力場の方程式 (2 つ)
- スカラー場の方程式

を用いて解いていく。このうち重力場の方程式とスカラー場の方程式についてはサブホライズン近似を用いて [3] で計算されているので、これらを使って計算する。また 2 次の計算までは [5] にまとめている。

まず 5 つの量をフーリエ変換する。

$$\delta(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\,\delta(t,\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \tag{9}$$

$$u^j(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\frac{-ik^j}{k^2}aH\theta(t,\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \tag{10}$$

Φ,Ψ,Q に関しては δ と同じように行う。θ は速度場のスカラー関数を表す。5 つの物理量を以下のように展開して標準摂動理論を用いて、方程式を解くことにする。

$$Y(t,\mathbf{k}) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(t,\mathbf{k}). \tag{11}$$

Y は $\delta,\theta,\Phi,\Psi,Q$ を表す。

まず $n=1$、すなわち線形理論の場合を考える。5 つの方程式を連立させると、密度揺らぎの時間に関する 2 階の微分方程式を得る。

$$\frac{\partial^2\delta_1(t,\mathbf{k})}{\partial t^2} + 2H\frac{\partial\delta_1(t,\mathbf{k})}{\partial t} + L\delta_1(t,\mathbf{k}) = 0. \tag{12}$$

ここで H はハッブルパラメータを表し、L は 4 つの任意関数 K,G_3,G_4,G_5 やハッブルパラメータなどの関数で時間に依存している。この微分方程式は 2 つの独立解（成長解 $D_+(t)$ と減衰解 $D_-(t)$）を持つが、減衰解は急激に減衰するので、構造形成には寄与しない。よって成長解のみを残して、1 次の密度揺らぎは以下のように表される。

$$\delta_1(t,\mathbf{k}) = D_+(t)\delta_{\mathrm{L}}(\mathbf{k}). \tag{13}$$

ここで $\delta_{\mathrm{L}}(\mathbf{p})$ は初期の線形な密度揺らぎを表し、ガウス分布に従うと仮定する。また連続の方程式にこの解を代入することで、速度場の 1 次の解を得る。

$$\theta_1(t,\mathbf{k}) = -fD_+(t)\delta_{\mathrm{L}}(\mathbf{k}). \tag{14}$$

ここで $f(=d\ln D_+/d\ln a)$ は線形成長率を表す。紙面の都合上、Φ_1,Ψ_1,Q_1 は省略する。

次に 2 次の解を求める。1 次の場合と同様に方程式を連立させることで、2 次の微分方程式を得る。

$$\frac{\partial^2\delta_2(t,\mathbf{k})}{\partial t^2} + 2H\frac{\partial\delta_2(t,\mathbf{k})}{\partial t} + L\delta_2(t,\mathbf{k}) = S_{\delta2}(t,\mathbf{k}). \tag{15}$$

2 次の微分方程式には非同次項が現れる。これは 1 次では異なるスケールの波数は独立に進化するが、2 次以上になると互いに影響し合うことを表している。この異なるモードの結合を表す関数をモードカップリングの関数と呼ぶ。2 次では 3 つのモードカップリングの関数が現れる。

$$\alpha^{(s)}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) = 1 + \frac{(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_2)(k_1^2+k_2^2)}{2k_1^2k_2^2}, \tag{16}$$

$$\beta(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) = \frac{(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_2)|\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2|^2}{k_1^2k_2^2}, \tag{17}$$

$$\gamma(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) = 1 - \frac{(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_2)^2}{k_1^2k_2^2}. \tag{18}$$

α は連続の式、β はオイラー方程式、γ は重力場の方程式とスカラー場の方程式に現れるモードカップリングの関数である。しかしこの 3 つは独立ではなく関係式が存在する。

$$\beta(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) = \alpha^{(s)}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) - \gamma(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2). \tag{19}$$

すなわち、独立なものは 2 つである。これらを用いて、密度揺らぎの 2 次の解は以下のように表される。

$$\delta_2(t,\mathbf{k}) = D_+^2(t)\delta_{2K}(t,\mathbf{k}), \tag{20}$$

$$\delta_{2K}(t,\mathbf{k}) \equiv \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2\,\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2) \times F_2(t,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\delta_{\mathrm{L}}(\mathbf{k}_1)\delta_{\mathrm{L}}(\mathbf{k}_2), \tag{21}$$

$$F_2(t,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) = \alpha^{(s)}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) - \frac{2}{7}\lambda(t)\gamma(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2). \tag{22}$$

同様に速度場の 2 次の解は

$$\theta_2(t,\mathbf{k}) = -fD_+^2(t)\theta_{2K}(t,\mathbf{k}), \tag{23}$$

$$\theta_{2K}(t,\mathbf{k}) \equiv \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2\,\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2) \times G_2(t,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\delta_{\mathrm{L}}(\mathbf{k}_1)\delta_{\mathrm{L}}(\mathbf{k}_2), \tag{24}$$

$$G_2(t,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) = \alpha^{(s)}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) - \frac{4}{7}\lambda_\theta(t)\gamma(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2). \tag{25}$$

となる。パラメータはそれぞれ 1 つずつ現れる（密度揺らぎに λ、速度場に λ_θ）。これら 2 つのパラメータは作用に現れる任意関数の関数になっているので、修正重力理論を特徴づけるパラメータになっている。またこれらは時間に依存することに留意しよう。物質優勢期の初期では 1 になるが、時間が経過するとともに重力を修正した効果によって、1 からずれていく。λ と λ_θ には関係式

$$\lambda_\theta(t) = \lambda(t) + \frac{\dot{\lambda}(t)}{2fH}, \tag{26}$$

があるので、関数としては独立とは言えないが、観測ではある赤方偏移の 1 点の値を調べるので、パラメータとしては独立であると考えられる。

次に 3 次の解を考える。3 次では、方程式のモードカップリングの関数と 2 次の解のモードカップリングの関数が結合することで新たにモードカップリングの関数は 8 つと、3 次の方程式独自のモードカップリングの関数 1 つの合計 9 つ現れる。しかしこれらの間にも 2 次の場合と同様に関係式があり、全てが独立という訳ではない。整理すると、3 次の微分方程式に現れる 1 次独立なモードカップリングの関数は 5 つになる。この結果密度揺らぎは

$$\delta_3(t,\mathbf{k}) = D_+^3(t)\delta_{3K}(t,\mathbf{k}), \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\delta_{3K}(t,\mathbf{k}) \equiv \int & d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 \delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3) \\ & \times F_3(t,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3)\delta_{\rm L}(\mathbf{k}_1)\delta_{\rm L}(\mathbf{k}_2)\delta_{\rm L}(\mathbf{k}_3),\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}&F_3(t,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3) \\ &\quad = \alpha\alpha - \frac{2}{7}\lambda\alpha\gamma_R - \frac{2}{7}\lambda\alpha\gamma_L - \frac{2}{21}\mu\gamma\gamma + \frac{1}{9}\nu\xi,\end{aligned} \tag{29}$$

と表され、速度場は

$$\theta_3(t,\mathbf{k}) = -fD_+^3(t)\theta_{3K}(t,\mathbf{k}), \tag{30}$$

$$\begin{aligned}\theta_{3K}(t,\mathbf{k}) \equiv \int & d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 \delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3) \\ & \times G_3(t,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3)\delta_{\rm L}(\mathbf{k}_1)\delta_{\rm L}(\mathbf{k}_2)\delta_{\rm L}(\mathbf{k}_3),\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}&G_3(t,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3) \\ &\quad = \alpha\alpha - \frac{4}{7}\lambda_\theta\alpha\gamma_R - \frac{2}{7}\lambda\alpha\gamma_L - \frac{2}{7}\mu_\theta\gamma\gamma + \frac{1}{3}\nu_\theta\xi,\end{aligned} \tag{32}$$

となる。パラメータとモードカップリングの関数の変数と、Φ_3, Ψ_3, Q_3 は省略した。また $\alpha\alpha$ などの定義も省略する。カーネル F_3, G_3 に現れる $\alpha\alpha$, $\alpha\gamma_R$, $\alpha\gamma_L$, $\gamma\gamma$, ξ の 5 つが 3 次の独立なモードカップリングの関数であり、$\lambda, \mu, \nu, \lambda_\theta, \mu_\theta, \nu_\theta$ がパラメータである。λ と λ_θ は 2 次で現れたパラメータであるから、3 次で現れる新しいパラメータは $\mu, \nu, \mu_\theta, \nu_\theta$ の 4 つである。また μ と μ_θ、ν と ν_θ の間にも係数は異なるが (26) と同様な関係がある。

3 Power spectrum

バイアスや減衰の効果を無視した場合、赤方偏移空間パワースペクトルは以下のように書ける。

$$P^s(t,k,\mu) = P_{\delta\delta}(t,k) - 2\mu^2 f P_{\delta\theta}(t,k) + \mu^4 f^2 P_{\theta\theta}(t,k). \tag{33}$$

上式の μ は先ほどのパラメータではなく、波数と観測者の視線方向の余弦を表す。$P_{\delta\delta}$, $P_{\delta\theta}$, $P_{\theta\theta}$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}&\langle\delta(t,\mathbf{k})\delta(t,\mathbf{k}')\rangle \\ &\qquad \equiv (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{k}+\mathbf{k}')P_{\delta\delta}(t,k),\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}&\langle\delta(t,\mathbf{k})\theta(t,\mathbf{k}')\rangle \\ &\qquad \equiv (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{k}+\mathbf{k}')(-f)P_{\delta\theta}(t,k),\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}&\langle\theta(t,\mathbf{k})\theta(t,\mathbf{k}')\rangle \\ &\qquad \equiv (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{k}+\mathbf{k}')f^2 P_{\theta\theta}(t,k),\end{aligned} \tag{36}$$

と定義した。それぞれのパワースペクトルは以下のようにガウス分布に従う線形パワースペクトル $P_{\rm L}$ と非線形パワースペクトルに分けることが出来る

$$\begin{aligned}P_{\delta\delta}(t,k) = {}& D_+^2(t)P_{\rm L}(k) \\ & + D_+^4(t)\left(P_{\delta\delta}^{(22)}(t,k) + 2P_{\delta\delta}^{(13)}(t,k)\right),\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}P_{\delta\theta}(t,k) = {}& D_+^2(t)P_{\rm L}(k) \\ & + D_+^4(t)\left(P_{\delta\theta}^{(22)}(t,k) + 2P_{\delta\theta}^{(13)}(t,k)\right),\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}P_{\theta\theta}(t,k) = {}& D_+^2(t)P_{\rm L}(k) \\ & + D_+^4(t)\left(P_{\theta\theta}^{(22)}(t,k) + 2P_{\theta\theta}^{(13)}(t,k)\right).\end{aligned} \tag{39}$$

$P_{\rm L}$ は修正重力理論と一般相対論では変わらない。これは 1 次の解を求める際に、$\delta_{\rm L}$ を初期の線形な密度

揺らぎとしたことに対応している。修正の効果を受けるのは $P_{\delta\delta}^{(22)}, P_{\delta\delta}^{(13)}, P_{\delta\theta}^{(22)}, P_{\delta\theta}^{(13)}, P_{\theta\theta}^{(22)}, P_{\theta\theta}^{(13)}$ であり、それぞれ

$$\begin{aligned} &P_{\delta\delta}^{(22)} \supset \lambda, && P_{\delta\delta}^{(13)} \supset \lambda, \mu, \\ &P_{\delta\theta}^{(22)} \supset \lambda, \lambda_\theta, && P_{\delta\theta}^{(13)} \supset \lambda, \mu, \lambda_\theta, \mu_\theta, \\ &P_{\theta\theta}^{(22)} \supset \lambda_\theta, && P_{\theta\theta}^{(13)} \supset \lambda, \mu_\theta, \end{aligned}$$

に依存したパワースペクトルである。3 次までに現れたパラメータ 6 つ全てに依存するわけではなく、2 つのパラメータ ν と ν_θ はパワースペクトルには影響しないことを強調しておく。

4 KGB model

ここまでは一般的な場合にどのような特徴を持つのかを議論したので、この章では具体的な模型を用いて、定量的な評価を行う。今回用いるモデルは KGB 模型である。その中でも作用の 4 つの任意関数を以下のように選んだ模型について考える。

$$K = -X, \qquad G_3 = M_{\rm pl}\left(\frac{r_c^2}{M_{\rm pl}^2}X\right)^n,$$
$$G_4 = \frac{M_{\rm pl}}{2}, \qquad G_5 = 0.$$

n は理論的なパラメータである。アトラクター解を

$$3\dot{\phi}HG_{3X} = 1 \tag{40}$$

と選ぶことでゴーストがなく、加速膨張する解であることが確認されている [4]。ΛCDM 模型の場合と KGB 模型の場合の 2 次と 3 次の解のパラメータの現在の値は表 1 の通りである。表から添字 θ がつくパラメータの方が大きくずれていることが分かる。これは (26) の関係式から分かるように λ_θ は λ の時間微分が影響するが、λ は加速膨張期に入ると急激に変化するためである。μ_θ, ν_θ も同様の理由による。

それぞれのパワースペクトルのグラフは省略するが、少しだけ考察しておく。$k \ll 1$ のときには高次の効果は弱いため、

$$\frac{P_{\rm KGB}}{P_{\Lambda\rm CDM}} \approx \frac{D_{+\rm KBG}^2 P_{\rm L}}{D_{+\Lambda\rm CDM}^2 P_{\rm L}} \approx \frac{D_{+\rm KGB}^2}{D_{+\Lambda\rm CDM}^2}, \tag{41}$$

となることから、波数が小さい部分では成長率 D_+ の修正の効果が分かり、波数 k が 1 に近い部分ではパラメータの違いも含めた重力の修正の効果が分かる。

表 1: パラメータの値 ($z = 0$)

	ΛCDM	KGB(n=1)	KGB(n=2)	KGB(n=5)
λ	0.994	1.003	1.011	1.019
μ	0.996	0.991	0.995	1.001
ν	0.991	1.014	1.034	1.049
λ_θ	0.982	1.043	1.073	1.095
μ_θ	0.991	1.025	1.074	1.116
ν_θ	0.980	1.089	1.136	1.169

5 Conclusion

最も一般的なスカラーテンソル理論における宇宙論的密度揺らぎを計算し、それを用いて赤方偏移空間パワースペクトルの一般的な表式を得た。その結果、密度揺らぎと速度場の 3 次までの解は 6 つのパラメータで特徴づけられるが、パワースペクトルに影響するのはそのうち 4 つのパラメータであることが分かった。

6 参考文献

[1]G.W.Horndeski Int. J. Theor. Phys. 10 (1974) 363-384
[2]T.Kobayashi et al. Prog. Theor. Phys. 126 (2011), 511-529
[3]R.Kimura et al. Phys. Rev. D85. 024023 (2012)
[4]R.Kimura, K. Yamamoto, JCAP 04 (2011) 025
[5]Y.Takushima et al. Phys. Rev. D89. 104007 (2014)

7 Acknowledgement

本研究は広島大学の山本一博准教授、照喜名歩さんとの共同研究に基づいています。