Astrophysical black holes in screened modified gravity

小川 潤 (立教大学大学院 理学研究科 M1)

Abstract

近年の観測により, 宇宙は加速膨張していることがわかっている. その源の正体はダークエネルギーであることが分かっているが, ダークエネルギーそのものについては未解明である. 現在, 宇宙論的スケールで, 一般相対論を修正し, 加速膨張を記述する修正重力理論が盛んに研究されている. スカラー場と物質が結合する理論では, 第 5 の力が結合によって生じる. この力が宇宙論的スケールではダークエネルギーのように振る舞い, 局所スケールではその力が抑制される. このような機構を screened modified gravity という. 今回は, ブラックホール近傍でのスカラー場の振る舞いをカメレオン機構を使って調べる. ブラックホール近傍に非一様な密度分布があるとき, 非一様なスカラー分布が得られることがわかった.

1 Introduction

近年の観測により, 現在の宇宙は加速膨張していることが強く示唆されている. その源は, ダークエネルギーと呼ばれているが, このエネルギーの起源については未解明である. 例えば, 観測との整合性が良い ΛCDM 模型では, 宇宙項 Λ の源を真空のエネルギーとしているが, 観測値と理論値とでは 120 桁もの不一致が生じる. 一方では, 重力理論を修正することにより, 宇宙の加速膨張を記述する研究が進められている. その中で, 宇宙論的スケールで Einstein-Hilbert 作用を書き換え, かつ観測との整合性を保つ理論を, 修正重力理論と呼ぶ. ダークエネルギーの起源がスカラー場とする模型では, スカラー場が物質と結合するため第 5 の力が発生する. 第 5 の力を局所的なスケールでは抑制され, 宇宙論的なスケールではダークエネルギーのように振る舞うというのが, この模型の特徴である.

この模型において, スカラー場が周囲の物質の密度に依存して有効質量を得る, screend modified gravity という機構を適応する. 今回は, カメレオン機構を例に挙げ, スカラー場の有効質量の違いにより第 5 の力が抑制されるのを見る. また, ブラックホール近傍に非一様な密度分布があると, 非自明なスカラー分布が得られることを見る. この帰結によると, ブラックホール近傍に取り巻く物質に第 5 の力が働き, その影響を観測によって発見できる可能性がある.

2 物質とスカラー場が結合する模型

物質とスカラー場が結合する模型の作用は次のようになる (Khoury, J., Weltman, A. (2004)):

$$S_{\rm c} = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\left(\frac{M_p^2 R}{2}\right) - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + V(\phi)\right] + \int d^4x \mathscr{L}_m(\Psi_i, g^{(i)}_{\mu\nu}). \tag{2.1}$$

ただし, $M_{\rm p} = 1/\sqrt{8\pi G}$ はプランク質量, R はスカラー曲率, Ψ_i は物質場, i は物質の種類を意味するラベルである. このとき, ジョルダン系における計量 $g^{(i)}_{\mu\nu}$ と, アインシュタイン系における計量 $g_{\mu\nu}$ には

$$g^{(i)}_{\mu\nu} = e^{2\beta_i\phi/M_{\rm p}} g_{\mu\nu} \tag{2.2}$$

という関係がある. ただし, β_i は結合定数と呼ばれ, 物質とスカラー場の結合の強さを表す.

スカラーテンソル理論のジョルダン系での作用を考えたとき, $\beta = -1/\sqrt{6}$ としたとき $F(R)$ 理論に帰着する. このように, カメレオン機構はいくつかのスカラーテンソル理論に適応できることがわかっている.

第 5 の力は, (2.2) 式を用いてアインシュタイン系の非相対論的物質の測地線方程式:

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta + \frac{\beta}{M_{\rm p}}(2\phi_{,\alpha}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\mu + g^{\mu\lambda}\phi_{,\lambda}) = 0 \tag{2.3}$$

を見ると分かりやすい.(2.3) 式の右辺二項は重力による加速度, 右辺第三項の部分がスカラー場の寄与による加速度となり, 第 5 の力と呼ばれる. この第 5 の力を局所的に抑える機構がカメレオン機構である.

3 カメレオン機構

以下では, 見通しをよくするためカメレオン機構をアインシュタイン系で取り扱う. まず, スカラー場の運動方程式は, (2.1) 式において, ϕ について変分を取り

$$\Box\phi = V_{,\phi} + \sum_i \frac{\beta_i}{M_{\rm p}} e^{4\beta_i\phi/M_{\rm p}} g^{\mu\nu}_{(i)} T^{\mu\nu}_{(i)} \tag{3.1}$$

となる.□ はダランベルシアンである. また, ジョルダン系における i 番目の物質によるエネルギー運動量テンソル $T^{(i)}_{\mu\nu} = (2/\sqrt{-g})\delta\mathscr{L}_m/\delta g^{\mu\nu}_{(i)}$ を用いた. 非相対論的物質かつ, 完全流体であるとすると, エネルギー密度は

$$T_{\mu\nu} g^{\mu\nu}_{(i)} = -\tilde{\rho}_i \tag{3.2}$$

と表すことができる. このエネルギー密度 $\tilde{\rho}_i$ はジョルダン系における量であるので, この代わりにアインシュタイン系において保存される量 $\rho_i = \tilde{\rho}_i e^{3\beta\phi}$ を使う. すると, (3.1) 式は

$$\Box\phi = V_{,\phi} + \sum_i \frac{\beta_i}{M_{\rm p}} \rho e^{\beta_i \phi/M_{\rm p}} := V_{\rm eff}(\phi)_{,\phi} \tag{3.3}$$

となる. 有効ポテンシャル $V_{\rm eff}$ は物質密度とポテンシャルによって決まる量である. ここで, $V(\phi)$ を単調減少関数とおき, その例として

$$V(\phi) = M^{4+n}\phi^{-n} = V_0\phi^{-n} \tag{3.4}$$

とおく. ただし, $n > 1$ で, $V_0 = M^{4+n}$ と便宜的に置いた. 有効ポテンシャルの形は図 3.1 のようになる.

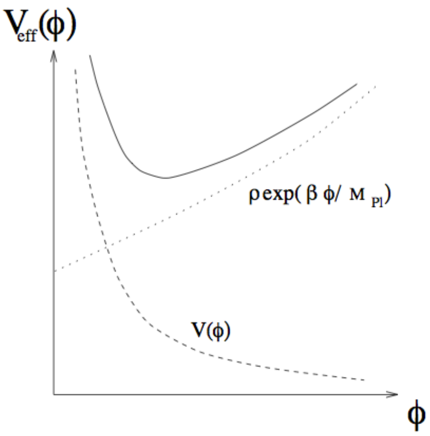

図 3.1: 高密度スケールにおける有効ポテンシャルの図

今は簡単にスカラー場が取り巻く物質を一様とする ($\beta_i \to \beta, \rho_i \to \rho$ となり, 各成分が各物質成分に対して等価). これにより, 有効ポテンシャルは, $\phi < M_{\rm p}$ とし低エネルギースケールで考えると

$$V_{\rm eff}(\phi,\rho) \approx \frac{V_0}{\phi^n} + \frac{\rho\beta\phi}{M_{\rm p}} \tag{3.5}$$

となる. さらに, 有効ポテンシャルを最小値にするスカラー場の値 $\phi_{\rm min}$ は

$$\phi_{\rm min}^{n+1} = \frac{nV_0M_{\rm p}}{\rho\beta} \tag{3.6}$$

で与えられる. よって, 有効ポテンシャルを最小にするスカラー場の質量は, クラインゴルドン方程式におけるスカラー場の質量項からの類似から,

$$\begin{aligned} m^2(\rho) &= V_{\rm eff}(\phi,\rho)_{,\phi\phi}|_{\phi_{\rm min}} \\ &\approx \frac{\rho\beta}{M_{\rm p}}\left[(n+1)\left(\frac{\rho\beta}{nV_0M_{\rm p}}\right)^{\frac{1}{n+1}} + \frac{\beta}{M_{\rm p}}\right] \end{aligned} \tag{3.7}$$

となる.

以上の議論から, 高密度スケールではスカラー場の質量が大きくなることが分かる. スカラー場の寄与は, 高密度スケールでは湯川型のポテンシャルに比例するため, 典型的な寄与のスケールが高密度スケールでは短くなる. これがカメレオン機構である.

4 局所的スケールにおけるカメレオンの振る舞い

例として, 太陽や地球などの物体でのスカラー場 ϕ の解析を行う. 物体は静的で球対称, 半径 R_c, 一様密度 ρ_c, 全質量 $M_{\rm c} = 4\pi R_c^3\rho_c/3$ とする. また, 物体は孤立した系に存在し, 周囲の影響は受けず, 一様な背景密度 ρ_∞ の中にあるとする. ただし, 背景密度は物質の密度に対して十分小さいとする ($\rho_c \gg \rho_\infty$).

このとき, スカラー場の方程式 (3.3) 式を球座標で書き直すと次のようになる:

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\phi}{dr} = V_{,\phi} + \frac{\beta}{M_{\rm p}}\rho(r)e^{\beta\phi/M_{\rm p}} (= V_{{\rm eff},\phi}). \tag{4.1}$$

ここで, $\rho(r)$ は, 物体の物質密度と背景密度の関係を満たす:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_{\rm c} & (r < R_c) \\ \rho_\infty & (r > R_c) \end{cases} \tag{4.2}$$

また, それぞれの密度領域において ϕ_c と ϕ_∞ は $V_{\rm eff}$ を最小にするものとする:

$$\phi_c := \phi_{\rm min}|_{\rho=\rho_c}, \quad m_c := m(\phi_c) \tag{4.3}$$

$$\phi_\infty := \phi_\infty|_{\rho=\rho_\infty}, \quad m_\infty := m(\phi_\infty) \tag{4.4}$$

さらに, 大きい物体の外部の解は $m_\infty R_c \ll 1$ という近似が行える. 一方, 物体の十分内側では $\phi \simeq \phi_c$ であるとし, スカラー場の質量は $m_c \gg m_\infty$ とする.

スカラー場の振る舞いを解析すると, 物体の外部では有効ポテンシャル $V_{\rm eff}$ は減衰振動のように近似ができるので, $r \to \infty$ のとき$\phi \to \phi_\infty$ となる次のような解を得る:

$$\phi(r) \simeq -\left(\frac{\beta}{4\pi M_{\rm p}}\right)\left(\frac{3\Delta R_c}{R_c}\right)\frac{M_c e^{-m_\infty r}}{r} + \phi_\infty. \tag{4.5}$$

ただし, $\Delta R_c/R_c$ は殻の薄さを表す因子で, thin-shell 因子と呼ぶ. ニュートンポテンシャル $\Phi_c = M_c/8\pi M_{\rm p}^2 R_c$ を用いて, $\Delta R_c/R_c$=$(\phi_\infty - \phi_c)/6\beta M_{\rm p}\Phi_c$ と表記できる.

この結果から, 物体内部のスカラー場の質量は大きいので, スカラー場の寄与は指数関数的に減少する. このスカラー場の寄与の抑制が物体の内部のほとんどで成立するが, 物体の殻 (ΔR_c) の部分では抑制されずに外に染み出す.

スカラー場による第 5 の力は, スカラー場の勾配によって発生する. すなわち, $\Delta R_c/R_c \ll 1$ であれば, 外部の解

(4.5) 式より, スカラー場による第 5 の力が抑制される. つまり, スカラー場がカメレオンのように物体内部に隠れてしまうのである. これを表したのが図 4.1 である.

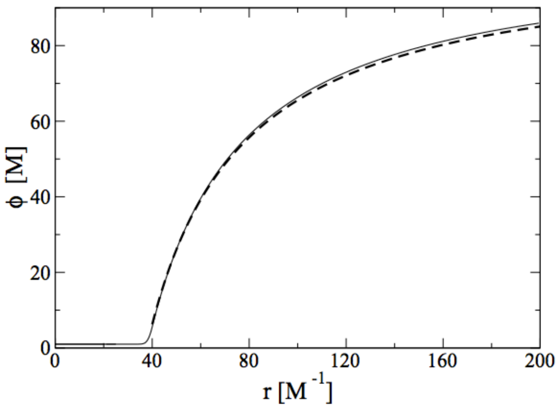

図 4.1: 縦軸がスカラー場 ϕ, 横軸が天体の半径 r とした, 高密度天体におけるスカラー場の分布. 半径が $R_c = 40M^{-1}$, $\phi_c/M = 1, \phi_\infty/M = 100$, $\Delta R_c/R_c \approx 0.0625$ という条件の元でプロットした. 天体表面に近づくまでスカラー場は隠されているということが分かる.

5 ブラックホール (BH) 近傍でのスカラー場の振る舞い

BH から取り出せる観測量は, no-hair 定理より「質量」「電荷」「角運動量」のみであるとされている.BH 近傍での非一様な物質密度を考え, カメレオン機構が働くと, この観測量に「スカラー場の分布」を加える事ができる. もし, 非自明なスカラー場の分布を得られたら, BH の種類を区別することが可能となる (Davis, A. -C., Gregory, R. Jha, R., Muir, J. (2014)).

5.1 BH の条件

今回扱う BH について条件を与える. 天体物理的には BH は回転をしているが, 今はブラックホール近傍でスカラー分布が非自明な分布をするかということに興味があるので, 簡単にシュバルツシルト BH で話しを進める. さらに, BH において, 事象の地平面 R_s と最内円安定軌道 (ISCO)$R_0 = 3R_s$ で領域を分ける.R_s より内側からは情報を得ることができない. また, ISCO の内側では, 粒子はすぐに地平面に落ち込んでしまう. 一方, ISCO の外側では一様密度 $\rho_\star$ で, BH を取り巻いていると仮定する. すると, 密度分布は

$$\rho(r) := \begin{cases} 0 & R_s < r < R_0(\text{Region I}) \\ \rho_\star & r > R_0(\text{Region II}) \end{cases} \tag{5.1}$$

と 2 つの領域に分けることができる.

5.2 スカラー場の分布 (解析解)

今, ISCO 付近でのスカラー場の振る舞いを簡単に記述するために,

$$\hat{\phi} = \frac{\phi}{\phi_\star}, x = \frac{r}{R_s}, \hat{m}^2 = m_\star^2 R_s^2 = (n+1)\frac{\rho_\star \beta R_s^2}{M_{\rm p}\phi_\star} \tag{5.2}$$

と無次元化を行い, (3.3) 式を

$$\hat{\phi}'' + \frac{2x-1}{x(x-1)}\hat{\phi}' = \frac{x}{x-1}\frac{\hat{m}^2}{(n+1)}\left[\Theta[x-x_0] - \frac{1}{\hat{\phi}^{n+1}}\right] \tag{5.3}$$

と書き換える. さらに, Region II の外側では, スカラー場の値は一定値 $\phi_\star$ となるように置く.$\phi_\star$ のように, $\star$ 表記は, ISCO の外側の有効ポテンシャルを最小にする ϕ_{min} を表す. 一方で, ISCO 付近では, Region I と Region II の境界条件を考慮する必要がある. そこで, Region I のスカラー場の振る舞いについて, 次のようになると期待する.

まず, Region II でのスカラー場の質量が大きいとき, Reigion I でのスカラー場の値が大きくなり, ISCO に近づくにつれて, スカラー場が急激に転がる. これは, Region I に密度がなく, 場を最小にする $\phi_{\rm min}$ の値が大きくなるというスカラー場の有効ポテンシャルから理解できる.

また一方で, Region II でのスカラー場の質量が小さいとき, Region I でのスカラー場の値が小さくなり, ISCO に近づくとき, ゆっくりと $\phi_\star$ へとなるようなスカラー場の振る舞いになる.

どちらの場合においても, Region II でのスカラー場の値は ISCO 付近で急激に減衰する形とおき, $\hat{\phi} \simeq 1 + \delta\hat{\phi}$ となると期待する. ただし,

$$\delta\hat{\phi} \simeq C\frac{e^{-\hat{m}(x-x_0)}}{x^{1+\hat{m}/2}} \tag{5.4}$$

とおき, C は定数である.

●$\hat{m}x_0 \ll 1$ のとき

このときは, 長距離スカラー場となる.$\hat{\phi}$ の値は, ほとんど変化しない. そのため, Region I でのスカラー場の運動方程式 (5.3) 式は

$$[x(x-1)\hat{\phi}']' = -\frac{\hat{m}^2 x^2}{(n+1)\hat{\phi}_h^{n+1}}(1 + \mathcal{O}(\delta\hat{\phi}/\hat{\phi}_h)) \tag{5.5}$$

となり, 解は

$$\hat{\phi} = \hat{\phi}_h - \frac{\hat{m}^2}{6(n+1)\hat{\phi}_h^{n+1}}[x^2 + 2x + 2\ln x - 3] \tag{5.6}$$

となる. 外部の解との接続条件から,

$$\hat{\phi}_h = 1 + \frac{\hat{m}^2}{6(n+1)\hat{\phi}_h^{n+1}}\left[x_0^2 + 2x_0 + 2\ln x_0 - 3 + \frac{4x_0^2 + 4x_0 + 4}{2\hat{m}x_0 + 2 + \hat{m}}\right] \tag{5.7}$$

$$C = \frac{\hat{m}^2}{3(n+1)\hat{\phi}_h^{n+1}}\frac{x_0^{1+\hat{m}/2}(x_0^2 + x_0 + 1)}{\hat{m}x_0 + 1 + \hat{m}/2} \tag{5.8}$$

となる.ISCO の内側と外側の解は次のようになる:

$$\hat{\phi} \simeq 1+\begin{cases} \frac{\hat{m}^2}{6(n+1)}[3x_0^2-x^2+4x_0-2x+2+2\ln\frac{x_0}{x}] & x<x_0 \\ \frac{\hat{m}^2}{3(n+1)}(x_0^2+x_0+1)\frac{x_0}{x}e^{-\hat{m}(x-x_0)}] & x>x_0 \end{cases} \tag{5.9}$$

地平面での値 $\hat{\phi}_h$ は (5.6) 式の $x<x_0$ における $\hat{m}x_0$ の最低次を見ればよく

$$\hat{\phi}_h \approx 1+\frac{\hat{m}^2 x_0^2}{2(n+1)}, \qquad \delta\phi_h \approx \frac{\rho_\star \beta R_0^2}{2M_{\rm p}} \tag{5.10}$$

となる.$\delta\phi_h$ は結合定数 β, ISCO 外側の密度 $\rho_\star$, スカラー場が転がることができる距離 R_0 に比例していることが分かる.

●$\hat{m}x_0 \gg 1$ のとき

この場合は, 短距離スカラー場となる. ここでは, 上でやった通りの近似を使うが, $\hat{\phi}_h$ についてを調べるよりも, ISCO 付近でのスカラー場の急激な転がりを計算するほうが今は重要である. $\hat{\phi}$ の変化はポテンシャルが支配的になるので, スカラー場の運動方程式は

$$\hat{\phi}'' \simeq -\frac{\hat{m}^2}{(n+1)}\frac{1}{\hat{\phi}^{n+1}} \tag{5.11}$$

となる. これを解き, 外部との解との接続を考えると,

$$\hat{\phi} \simeq 1+\begin{cases} \left[\frac{\hat{m}^2(n+2)^2}{2n(n+1)}\right]^{\frac{1}{n+2}}\left(x_0-x+\frac{2}{(n+2)\hat{m}}\right)^{\frac{2}{n+2}} & x<x_0 \\ \left[\frac{2}{n(n+1)}\right]^{\frac{1}{n+2}}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{1+\hat{m}/2}e^{-\hat{m}(x-x_0)} & x>x_0 \end{cases} \tag{5.12}$$

となる. この解をみると, スカラー場の ISCO 付近での急激な変化を見ることが出来る.ϕ_h については (5.12) 式の $x<x_0$ での x_0 と $\hat{m}$ についての最低次の項を見てみると, (5.10) 式と同様な表式を得る:

$$\hat{\phi}_h \simeq \hat{\phi}_c\left(\frac{\hat{m}^2 x_0^2}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.13}$$

ただし, $\hat{\phi}_c^{n+2}=(n+2)^2/2n$ である. 無次元化を直して ϕ_h を書き直すと

$$\phi_h \propto ((n+2)^2 V_0 R_0^2)^{\frac{1}{n+2}} \tag{5.14}$$

となり, ϕ_h は V_0 と R_0 に比例するということが見て取れる (先と同様に, 外側のエネルギー密度に依存するとも言える).

5.3 スカラー場の分布 (数値解)

x_0 付近での解を数値的に求める.$n=4, R_0=3R_s$ と置き, スカラー場の分布を数値的に解いたものが図 5.1 である. 図 4.1 と見比べると, 類推が可能である. 天体の場合, 高密度 → 低密度スケールへとスケールが変わり, それに対応してスカラー場が増える. 一方, BH の場合, 低密度スケール → 高密度スケールとなる. BH にも thin-shell のような振る舞いが見られるということが分かった.

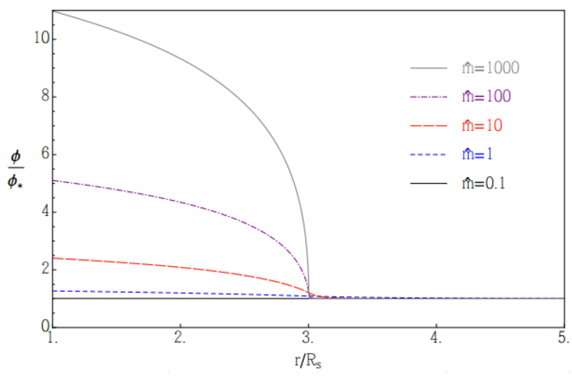

図 5.1: 数値解で求めたスカラー場の分布.$\hat{m}=m_\star R_s$ は, カメレオンの質量を表す.$\hat{m}$ の大小で, スカラー場の振る舞いが大きく変わっている.

この結果より, ISCO の外側の物質分布を変えることでスカラー場の分布が大きく変わるということがわかった. BH 近傍での非自明なスカラー分布を知ることができれば, BH の区別ができるようになる. この区別は, 降着円盤や重力波による観測によっていつか行えるだろう.

6 終わりに

BH 近傍で非一様な密度分布を考えると, 非自明なスカラー場の分布が現れるということがわかり, no-hair 定理にさらに毛を 1 つ生やすことができた. この毛を使って、BH に区別をつけることが可能となる.

今後の課題としては, BH 近傍での密度分布を滑らかに接続し, 今回のようなスカラー場の分布が現れるかを確認したい. 今回のような密度分布をした結果, 非自明なスカラー分布が得られた可能性があるためである. また, BH の ISCO 付近で第 5 の力が生じるので, 降着円盤上への影響を調べたい. これにより, カメレオン機構の新たな制限を提案したい.

Reference

Khoury, J., Weltman, A. “Chameleon Cosmology,” *Phys. Rev. D*, **69**, 044026,(2004)

Davis, A. -C., Gregory, R. Jha, R., Muir, J. ”Astrophysical black holes in screened modified gravity,”arxiv:1402:4737(2014)

Khoury, J., Weltman, A. “Chameleon Fields: Awaiting Surprises for Tests of Gravity in Space,” *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 171104,(2004)