

非最小結合するアインシュタイン・マックスウェル理論の安定性解析

森 友紀 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

現在の宇宙は加速膨張しているということが、近年の観測から示されている。アインシュタイン重力では加速膨張を説明できなかつたが、新たにダークエネルギーを導入することで説明した。一方で、重力理論そのものを書き換えることで加速膨張を説明する修正重力理論も提唱されている。現在では様々な修正重力のモデルが存在している。これらの修正重力理論が物理的に可能であるためには、タキオンやゴースト場が存在してはならない。その有無を判断するためには、場の摂動に対して安定性解析を行う必要がある。

[1] の論文では、高次元の重力理論から導かれる Horndeski vector-tensor 理論において、de Sitter 時空や Schwarzschild 時空などを背景として、ベクトル場のゴースト不安定性等を議論している。この理論の特徴は、ベクトル場と重力が結合しているという点である。この結合があるため、ゴースト場等が存在する不安定なパラメータ領域がある。本収録では、まず 1 章で [1] の論文をレビューし、さらに [1] の拡張として、2 章でより一般のベクトル-重力結合を考えこの理論の安定性解析を行い、3 章でこの結果について議論する。

1 Horndeski vector-tensor theory

1.1 Action

修正重力理論のモデルの 1 つとして、Horndeski vector-tensor 理論が提唱された。この理論の作用は、

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} M_{\text{p}}^2 R - \frac{1}{4} F^2 + \frac{1}{2M^2} (RF^2 - 4R_{\mu\nu} F^{\mu\sigma} F^{\nu}_{\sigma} + R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta}) \right] \quad (1)$$

である。ただし、 $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$ である。作用には重力とベクトル場がカップリングパラメータ M^2 で結合する項が含まれ、ベクトル場 A について時間の 2 階微分の運動方程式になるように、かつ F の最低次の項まで考慮されている。これは 5 次元時空上の Gauss-Bonnet 項を 4 次元にコンパクト化することによっても導かれる。

1.2 Instability analysis

Horndeski vector-tensor 理論の安定性について解析する。まず、等方・非等方に関する安定性解析を

行う。background を固定して、一般に z 方向に一様なベクトル場が存在すると、非等方な膨張は

$$ds^2 = dt^2 - a_{\perp}^2(t)(dx^2 + dy^2) - a_{\parallel}^2(t)dz^2 \quad (2)$$

と表される。 z 方向に垂直・平行な膨張率はそれぞれ、

$$H_{\perp} = \frac{\dot{a}_{\perp}}{a_{\perp}} = H(1 - R), \quad (3)$$

$$H_{\parallel} = \frac{\dot{a}_{\parallel}}{a_{\parallel}} = H(1 + 2R) \quad (4)$$

である。ここで R は非等方パラメータであり、 $R = 0$ のとき一様等方、 $R \neq 0$ のとき非等方を表す。 R に対するベクトル場の発展を見ると、カップリングパラメータに依らず $R = 0$ で安定点、 $R = 1$ で不安定点となる。このことより、等方な膨張の方が安定であることが分かったので、これ以降は一様等方な background について考えることとする。次に、運動項が負である Ghost 場は不安定なので、Ghost 場が出ない条件を考える。さらに、波動方程式の伝搬速度 C_s^2 が $C_s^2 > 0$ となるような条件を課す。これは $C_s^2 < 0$ であると、指数関数的に成長する解があり不安定になる為であり、このことを Laplacian 不安定と呼ぶ。代表的な一様等方時空の例として、background を FLRW 時空にして考える。FLRW 時空のメトリックは

$$ds^2 = a(\eta)^2(d\eta^2 - d\vec{x}^2) \quad (5)$$

であり η は conformal time である。このとき、作用は、

$$S = \frac{1}{2} \int d^3x d\eta \left[\left(1 + \frac{4\mathcal{H}^2}{a^2 M^2} \right) (\vec{A}_\perp)^2 - \left(1 - \frac{4q\mathcal{H}^2}{a^2 M^2} \right) (\vec{\nabla} \times \vec{A}_\perp)^2 \right] \quad (6)$$

である。ここで $\mathcal{H} = a'/a = aH$ は conformal Hubble、 $q = -\mathcal{H}'/\mathcal{H}^2$ は減速パラメーター、ベクトルポテンシャルは $A_\mu = (0, \vec{A}_\perp)$ である。したがって、Ghost 場が出ない条件より、

$$1 + \frac{4\mathcal{H}^2}{a^2 M^2} > 0 \quad (7)$$

である。さらに、Laplacian 不安定でない条件より、

$$C_s^2 = \frac{1 + \frac{4\mathcal{H}^2}{a^2 M^2}}{1 - \frac{4q\mathcal{H}^2}{a^2 M^2}} > 0 \quad (8)$$

なので、式(7)(8)より、安定領域は図1のようにになる。

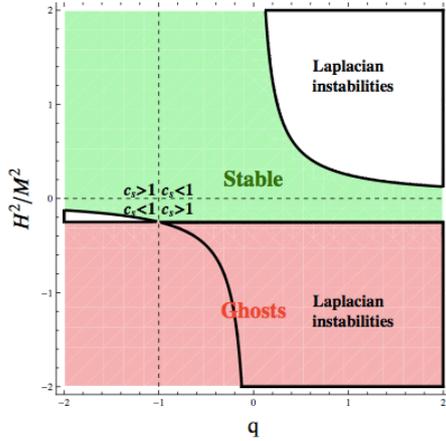


図 1: background を FLRW 時空にしたときの安定領域が緑で示されている。赤の領域が Ghost 不安定性によって棄却され、黒の太線で囲まれた領域が Laplacian 不安定性によって棄却される。([1] より引用)

2 Non-minimally coupled Einstein-Maxwell theory

2.1 action

Horndeski vector-tensor 理論の重力とベクトル場が結合する項をより一般化した作用

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} M_p^2 R - \frac{1}{4} F^2 + \alpha R F^2 + \beta R_{\mu\nu} F^{\mu\sigma} F^\nu{}_\sigma + \gamma R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \right] \quad (9)$$

について考える。ここで α, β, γ は新たに導入したカップリングパラメーターである。この理論の安定性を解析的に議論する。background が FLRW 時空のとき、作用は、

$$S = \frac{1}{2} \int d^3x d\eta \left[(1 - (Uq - V)H^2) (\vec{A}_\perp)^2 - (1 - (Vq - U)H^2) (\vec{\nabla} \times \vec{A}_\perp)^2 \right] \quad (10)$$

となる。ここで、 $U \equiv 8(3\alpha + \beta + \gamma)$ 、 $V \equiv 4(6\alpha + \beta)$ としてカップリングパラメーターを再定義した。

2.2 Instability analysis

1.2 章と同様にして、Ghost 場が出ない条件より、

$$\frac{H_{\text{inf}}^2}{H^2} > (Uq - V)H_{\text{inf}}^2 \quad (11)$$

と分かる。また、Laplacian 不安定でない条件は、

$$\frac{H_{\text{inf}}^2}{H^2} > (Vq - U)H_{\text{inf}}^2 \quad (12)$$

と分かる。ただし、それぞれ inflation 中のハッブルパラメーター H_{inf} で規格化した。式(11)(12)より安定領域は図2のようにになる。この安定領域の $|U - V|$ の幅は、reheating 終了時のハッブルパラメーター H_{reh} によって、 $|U - V|H_{\text{reh}}^2 < 1$ と制限される。さらに、初期条件から制限を加える。宇宙が一様等方に膨張する場合、ベクトル場は subdominant である。また、エネルギー密度が正であるので、

$$0 < \frac{\rho_A}{\rho} \ll 1 \quad (13)$$

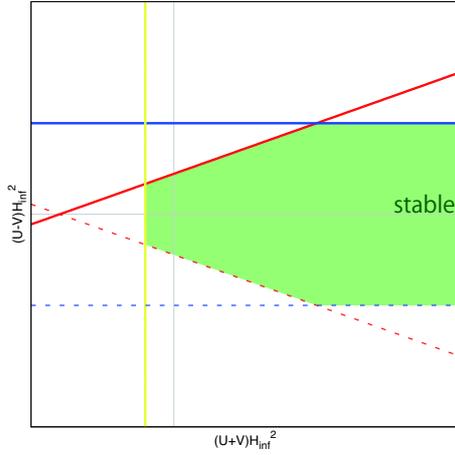


図 2: background を FLRW 時空にしたときの安定領域が緑で示されている。黄色が inflation、赤が reheating、青が radiation を表す。また、実線が Ghost 場が出ない条件、破線が Laplacian 不安定でない条件である。

である。また、ベクトル場の密度は、

$$\rho_A = \frac{1}{2a^4} \left(1 + (-2Uq + 2U + 3V)H^2 + \frac{4U(Uq^2 + (U - V)q - V)H^4}{1 + (-Uq + V)H^2} \right) \times \frac{|\vec{A}_p|^2}{(1 + (-Uq + V)H^2)^2}, \quad (14)$$

$$\vec{A}'' = \vec{A}_p \frac{1}{1 + (-Uq + V)H^2} \quad (15)$$

である。宇宙全体の密度に対するベクトル場の密度 ρ_A/ρ の発展を見ると、inflation の始めでベクトル場が subdominant であれば、それ以後は subdominant になるということが分かる。したがって、inflation 中の密度 ρ_{inf} とすると、 $0 < \rho_A/\rho_{\text{inf}} \ll 1$ であればよい。ここで inflation の始めのスケールファクター a_{inf} を 1 とし、 $|\vec{A}_p|^2/\rho_{\text{inf}}$ を仮定すると制限がつく。 $|\vec{A}_p|^2/\rho_{\text{inf}} \sim 1$ とすると、式 (13) は、

$$(U - V)H_{\text{inf}}^2 > -7(U + V)H_{\text{inf}}^2 - 2, \quad (16)$$

$$(U - V)H_{\text{inf}}^2 \gg \frac{1}{2}(U + V)H_{\text{inf}}^2(2(U + V)H_{\text{inf}}^2 - 3) \quad (17)$$

と書き換えられる。したがって、安定領域は図 3 のようになる。初期条件による制限からは安定領域に上限をつけることができなかった。

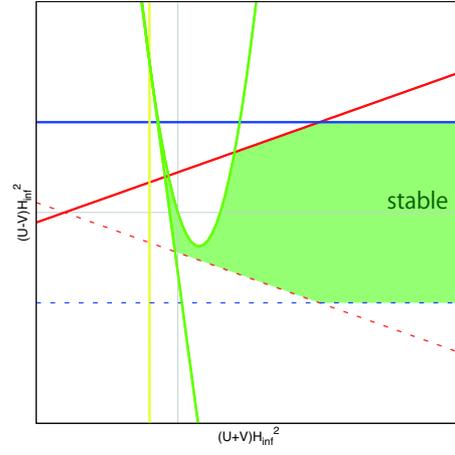


図 3: 図 2 に式 (16)(17) の条件を加えたもの。

3 Summary & Conclusion

1 章では [1] をレビューし、Horndeski vector-tensor 理論は、background によっては不安定な領域が存在することを紹介した。さらに、2 章で Horndeski vector-tensor 理論の重力とベクトル場が結合する項をより一般化したモデルで安定な領域を求めた。その領域は reheating の温度によって決まり、 $|U - V|H_{\text{reh}}^2 < 1$ という制限がついた。さらに、初期条件による制限を求めたが、 $(U + V)H^2$ に上限をつけることができなかった。今後の目標は、reheating 後の熱浴と熱平衡なベクトル場の安定性を調べることで、このモデルにより厳しい制限をつけることである。

Reference

- [1] JCAP **1310**, 064 (2013) [arXiv:1308.1867 [hep-th]].