

# Chern-Simons 重力理論における相対論的 Sagnac 効果

菊池 大貴 (弘前大学大学院 理工学研究科)

## Abstract

Chern-Simons(CS) 修正重力理論は、低エネルギー極限でパリティ対称性の破れを示唆する理論としても注目されており、Okawara らによって、CS 重力における量子干渉効果から理論パラメータに制限を与えられる可能性が示唆されている (Okawara et al. 2012) . 本研究の目的は彼らの研究を進展させ、CS 理論についてより詳しく調べることである。

本研究では、従来の理論モデルより一般化された Smith らの理論モデル (Smith et al. 2008) を用いて、光の干渉効果を考え、干渉計を置く位置やその向きに対する依存性を調べた。その結果、上記の依存性に関して様々な条件で実験することができれば、理論パラメータに制限を与えられる可能性があることがわかった。

## 1 Introduction

これまで重力理論は、数々の実験による検証とともに発展してきた。現在では Einstein の一般相対性理論 (以下 GR) が最も有効な重力理論であり、様々な実験や観測によってその正当性が裏付けられている。この重力理論の発展の歴史の中には、干渉効果を用いた地上実験による理論検証の例が多々存在する。

Newton 重力のポテンシャルによる干渉効果は、1974 年に予言され、その翌年に中性子干渉計を用いた実験によって実際に測定された (Colella et al. 1975) . この実験は 3 人の頭文字をとって COW 実験と呼ばれている。そして 1979 年の Werner らによる干渉実験では、地球の自転による効果が確認された (Werner et al. 1979) . 地上に干渉計を固定すると、地球の自転に伴い干渉計そのものも回転する。この干渉効果は、回転座標系で生じる見かけの力であるコリオリ力によって引き起こされるものである。当時、この地球の自転による効果は「非慣性系における量子力学」として複数の研究者によって議論された (Anandan 1977; Sakurai 1980) .

さて、回転天体に関する一般相対論的效果の一つとして、Lense-Thirring 効果 (以下 LT 効果) がある。この効果は地球のような弱い重力場を及ぼす天体が、ゆっくり自転している場合に、その周りの時空が回転方向に沿って引きずられるという現象である。この効果は 1918 年に、Lense と Thirring により、線形近似を用いた研究の結果として初めて予言され、後に、

Papini によって一般相対性理論における弱い重力場の効果として指摘された (Papini 1967) . これによると、この時空の周囲の経路を一周する粒子は、角運動量が等しくても、回転方向の違いで要する時間に差が生じることになる。従ってこの非 Newton 力学的な LT 効果の影響も、上記の干渉実験においては、同様に位相差のずれとして現れるはずである。このことから、時空の状態に起因するこの干渉効果を相対論的 Sagnac 効果とも呼んでいる。ただし、地球の自転による LT 効果の大きさは非常に小さいため、地上実験では未だ検出されていない。

一方で宇宙空間においては、2004 年に打ち上げられた NASA の重力観測衛星、Gravity probe B による観測結果が既に発表されており、LT 効果の大きさが誤差の範囲内で理論値と一致するということがわかっている (Everitt et al. 2011) . このような衛星実験の継続で、より高精度な検証結果が得られると期待されるが、多額の費用と時間がかかるという点が課題である。

近年の宇宙観測技術の発達に伴い、渦巻き銀河の回転運動や宇宙ジェットのような、GR では説明できない現象がいくつか見つかっている。このような問題を受け、既存の GR を修正することでその溝を埋めようとする立場から修正理論の導入が議論されている。その中の一つとして、Chern-Simons(以下 CS) 修正重力理論がある。現在の素粒子物理学では、基本粒子を小さな「ひも」とみなす超弦理論というアイデ

アが注目されており, CS 理論はその研究において低エネルギー極限で示唆されるものである. この理論は GR では予言できない現象やパリティ対称性の破れを示唆するという点で注目されている. 最近では 2012 年, Okawara らによって, 中性子干渉計を用いた量子干渉効果を用いて理論に制限が与えられる可能性が指摘された (Okawara et al. 2012).

本研究の目的は, 彼らの研究を進展させ, CS 理論の性質をより詳しく調べることである. 1 つ目の改良点は, Smith らによって提案された理論モデル (以下 SECK モデル) を用いたことである (Smith et al. 2008). 従来のモデルは重力源を質点とみなしているが, このモデルでは重力源を質点ではなく広がりを持ったものと考え, 天体の内部と外部の重力場の両方が考慮している. また 2 つ目の改良点として, 光を用いた Sagnac 干渉計を考えた. 原子炉を必要とする中性子干渉計と比較して様々な観測地に設置できることに加え, 観測精度のさらなる向上が期待されるという点で, 光干渉計の利用には大きなメリットがある. 本研究では, LT 効果による干渉効果とそれに対する CS 重力によるずれを調べ, 特に干渉計の方向依存性 (緯度, 方位角) と高度依存性について具体的に議論する.

## 2 Relativistic Sagnac effect

静止座標系における線素を, 時間成分と空間成分とに区別して書くと,  $i, j = 1 \cdots 3$  として,

$$ds^2 = g_{00}c^2dt^2 + 2g_{0i}cdtdx^i + g_{ij}dx^i dx^j. \quad (1)$$

光の座標はヌル測地線に従うため,  $ds^2 = 0$  を  $dt$  について解くと,

$$cdt = -\frac{g_{0i}}{g_{00}}dx^i + \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}dl. \quad (2)$$

ここでは,  $g_{00} < 0$  と仮定し, 空間距離要素  $dl$  と空間の計量  $\gamma_{ij}$  を,

$$dl^2 \equiv -\gamma_{ij}dx^i dx^j, \quad \gamma_{ij} \equiv \left( g_{ij} - \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} \right), \quad (3)$$

とした. また, (2) 式右辺第 2 項の符号は, 距離の増加 ( $dl > 0$ ) に従い, 時間も増加 ( $dt > 0$ ) するように + を採用した.

光がある閉じた経路  $C$  を一周するのに要する座標時間  $t_C$  は,

$$t_C = c \oint_C dt = - \oint_C \frac{g_{0i}}{g_{00}} dx^i + \oint_C \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} dl. \quad (4)$$

これより,  $C$  と進行方向が逆の経路  $\bar{C}$  を一周する 2 つの光の光路差  $c\Delta t$  は,

$$c\Delta t \equiv t_{\bar{C}} - t_C = 2 \oint_C \frac{g_{0i}}{g_{00}} dx^i. \quad (5)$$

ここでは,  $C$  と  $\bar{C}$  は同じ経路と仮定し,  $dl$  積分は向きに依らないため同符号, また  $dx^i$  積分は逆向きの経路では逆符号になることを用いた. (5) 式を一般相対論的 Sagnac 公式と呼ぶ.

回転天体の作る重力場を記述する計量は, (a) 一つの天体の周り (b) 弱場 (c) 自転速度  $\ll$  光速という仮定の下で以下のように書ける.

$$g_{00} = \eta_{00} + h_{00} + O(h^2) \doteq -1, \quad (6)$$

$$g_{0i} = \eta_{0i} + h_{0i} + O(h^2) = h_{0i} + O(h^2). \quad (7)$$

ここでは平坦時空からのずれを  $h_{\mu\nu}$  とし, 以降の計算では,  $h_{\mu\nu}$  の 2 次以降は無視する. (6),(7) 式を (5) 式に代入すると,

$$c\Delta t \doteq 2 \oint_C h_{0i} dx^i = -2 \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{h}) \cdot \vec{N}_I dS. \quad (8)$$

ここでは, Stokes の定理で面積分に変形し, 干渉計の面  $S$  の単位法線ベクトルを  $\vec{N}_I$ , また  $\vec{h} \equiv h_{0i}$  と定めた. この式に LT 効果の計量  $\vec{h}_{LT} \equiv h_{0i}^{LT}$  と, CS 重力による補正項  $\vec{h}_{CS} \equiv h_{0i}^{CS}$  をそれぞれ代入することで, 時空の様子を干渉効果として算出することができる.

## 3 Chern-Simons gravity

本研究で用いる SECK モデルにおける作用は,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2\kappa^2} R + \frac{\ell}{12} \vartheta \mathbf{R}\tilde{\mathbf{R}} - \frac{1}{2} (\partial\vartheta)^2 - V(\vartheta) + \mathcal{L}_{mat} \right], \quad (9)$$

ただし,  $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$  であり, また

$$\mathbf{R}\tilde{\mathbf{R}} \equiv R^\beta{}_\alpha{}^{\gamma\delta} \tilde{R}^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}, \quad \kappa^2 = \frac{8\pi G}{c^4}, \quad (10)$$

である。ここで、 $R\vec{R}$  は Riemann テンソルと双対 Riemann テンソルの積、 $R$  は Ricci スカラー、 $\vartheta$  はダイナミカルなスカラー場、 $\ell$  は長さの次元を持つパラメーター、 $\mathcal{L}_{mat}$  は物質場に対するラグランジアン密度、 $G$  は重力定数、 $c$  は光速である。

SECK モデルでは、

$$(\vec{\nabla} \times \vec{h}_{CS}) = -\frac{12GM}{c^3 R} \left[ D_1(r)\vec{\omega} + D_2(r)\vec{n} \times \vec{\omega} + D_3(r)\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\omega}) \right],$$

ただし、

$$\begin{cases} D_1(r) = \frac{2R}{r} j_2(m_{CS}R) y_1(m_{CS}r), \\ D_2(r) = m_{CS} R j_2(m_{CS}R) y_1(m_{CS}r), \\ D_3(r) = m_{CS} R j_2(m_{CS}R) y_2(m_{CS}r), \end{cases} \quad r \geq R. \quad (11)$$

である。ここで、 $M$ ,  $R$ ,  $r$  はそれぞれ地球質量、地球半径、地球中心からの動径距離であり、また、干渉計を置く緯度に関する単位位置ベクトルを  $\vec{n} (\equiv \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|})$ 、地球の自転の角速度ベクトルを  $\vec{\omega}$  とした。なお、(11) 式に現れる関数  $j_l(x)$ ,  $y_l(x)$  はそれぞれ、第 1 種、第 2 種球 Bessel 関数である。

$m_{CS}$  は [長さ<sup>-1</sup>] の次元を持つ理論パラメーターであり、 $m_{CS} \equiv -\frac{3}{\ell \kappa^2 \vartheta}$  のように定義される。この議論では、 $\vartheta$  は時間のみに依存し、(a)  $\dot{\vartheta} \neq 0$  (b)  $\ddot{\vartheta} \sim 0$ , (c)  $\vartheta$  は空間的に一様、と仮定することで、有効的に“non-dynamical”として扱うことができる。一方、LT 効果については、

$$(\vec{\nabla} \times \vec{h}_{LT}) = -\frac{4GMR^2}{5c^3 r^3} [3(\vec{\omega} \cdot \vec{n})\vec{n} - \vec{\omega}] \quad (12)$$

であることが既に知られている。

(11),(12) 式をそれぞれ (8) 式に代入し、時空の様子を干渉効果として算出する。 $r \gg \sqrt{S}$  と仮定し、積分を行うと LT 効果による光路差と、CS 重力によるずれはそれぞれ、

$$(c\Delta t)_{LT} = \frac{8GMS|\vec{\omega}|}{5c^3 R} \Delta_{LT}, \quad \Delta_{LT} \equiv \frac{R^3}{r^3} \left[ 3\vec{n} (\vec{n} \cdot \vec{N}_I) - \vec{N}_I \right] \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}. \quad (13)$$

$$(c\Delta t)_{CS} = \frac{24GMS|\vec{\omega}|}{c^3 R} \Delta_{CS}, \quad \Delta_{CS} \equiv \left[ (D_1(r) - D_3(r))\vec{N}_I + D_2(r) (\vec{N}_I \times \vec{n}) + D_3(r)\vec{n} (\vec{n} \cdot \vec{N}_I) \right] \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}. \quad (14)$$

$\Delta_{LT}$  と  $\Delta_{CS}$  は、 $\vec{\omega}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{N}_I$  の 3 つのベクトルの組み合わせと  $m_{CS}$  の値に依存する、無次元の方向依存成分である。本研究では、干渉効果における方向依存性に着目し、 $\vec{\omega}$  に対する  $\vec{n}$  と  $\vec{N}_I$  の方向によって、 $\Delta_{LT}$  と  $\Delta_{CS}$  がそれぞれどう変わるかを具体的に調べる。

## 4 The altitudinal, latitudinal and directional dependence

図 1 の上図は緯度  $\phi$  と方位角  $\alpha$  に対する  $\Delta_{LT}$  のグラフである。これより LT 効果による干渉効果は、赤道上 ( $\phi = 0^\circ$ ) かつ、北、または南向き ( $\alpha = 0^\circ, 180^\circ$ ) の場合に大きくなり、逆に東、または西向き ( $\alpha = 90^\circ, 270^\circ$ ) の場合は、干渉効果がゼロになることが見て取れる。

図 1 の下図は緯度と方位角に対する  $\Delta_{CS}$  のグラフである。これを見ると CS 重力に依る干渉効果が大きくなるのは、赤道上かつ南東、または北西向きに近い方向 ( $\alpha \sim 130^\circ, 310^\circ$ ) の場合であり、これは LT 効果の場合と明らかに異なっている。また、このグラフでは理論パラメーターを  $m_{CS} = 0.01$  としているが、 $m_{CS}$  の値によって  $|\Delta_{CS}|$  を大きくする方位角の条件も変化する。

図 2 は  $m_{CS}$  に対する光路差の比、

$$\frac{(c\Delta t)_{CS}}{(c\Delta t)_{LT}} = 15 \frac{\Delta_{CS}}{\Delta_{LT}}, \quad (15)$$

であり、上図は干渉計を赤道に置いた場合 (地上) で、3 通りの方位角 ( $\alpha = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ ) について比較したもの、また下図は、赤道かつ北向きの場合で 2 通りの高度 ( $h = 0, 400[\text{km}]$ ,  $h \equiv r + R$ ) について比較したものである。これを見ると、 $m_{CS}$  の値によって干渉効果の大きさは敏感に影響を受け、その効果は振動的に現れることが見て取れる。しかし、緯度や方位角、さらには高度にも依存する性質を用いて、様々な

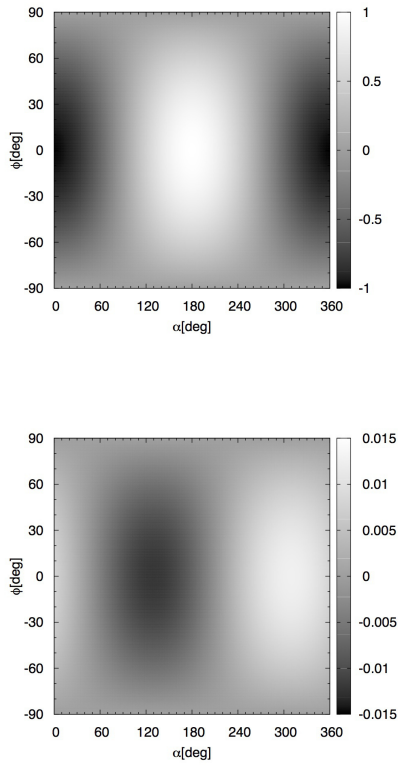


図 1: 上図は  $\Delta_{LT}(\alpha, \phi)$  の射影図. 下図は  $m_{CS} = 0.01$  とした場合の  $\Delta_{CS}(\alpha, \phi)$  の射影図.

条件で実験を行い, 結果を組み合わせることで,  $m_{CS}$  に対して制限を与えられる可能性がある.

## 5 Conclusion

本研究では CS 重力の影響を調べるべく, Okawara らの先行研究を発展させ, より一般化された理論モデルを用いた光干渉効果を考えた. 特に干渉効果における方向依存性, 高度依存性に着目し, LT 効果によって生じる光路差と, それに対する CS 重力によるずれとを比較した. 結果として, 干渉計を置く緯度と方向, 高度について様々な条件下で実験を行い, 総合的に分析することで, 理論パラメータに制限を与えられる可能性があることがわかった.

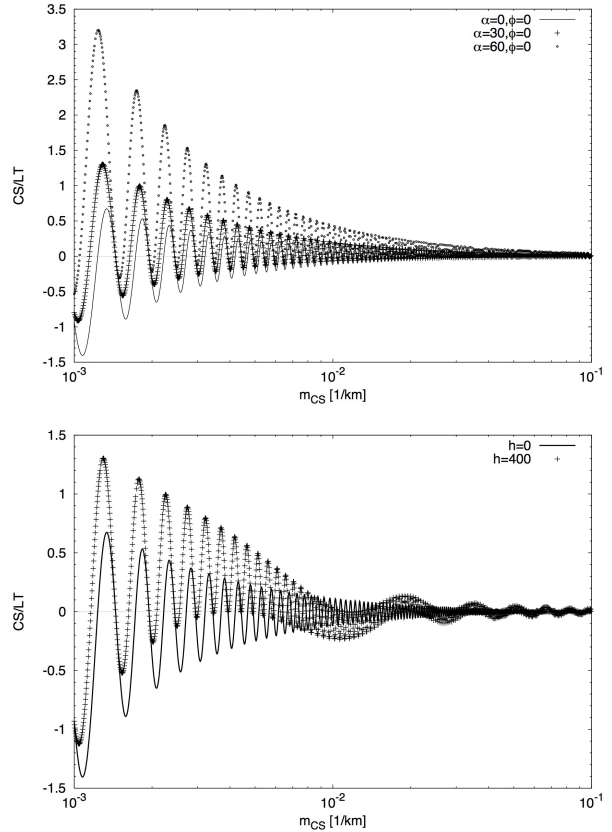


図 2:  $m_{CS}$  に対する光路差の比. 上図は地上かつ,  $\phi = 0^\circ$  で,  $\alpha$  は  $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$  の 3 通り. 下図は  $\phi = 0^\circ$ ,  $\alpha = 0^\circ$  で, 高度  $h$  は  $0[\text{km}], 400[\text{km}]$  の 2 通り.

## Reference

- H. Okawara et al. Phys. Rev. Lett. **109**, 231101 (2012).
- H. Okawara et al. Phys. Rev. D **87**, 084038 (2012).
- T. L. Smith et al. Phys. Rev. D **77**, 024015 (2008).
- R. Colella et al. Phys. Rev. Lett. **34**, 1472 (1975).
- S. A. Werner et al. Phys. Rev. Lett. **42**, 1103 (1979).
- L. A. Page, Phys. Rev. Lett. **35**, 543 (1975).
- J. J. Sakurai, Phys. Rev. D **21**, 2993 (1980).
- J. Anandan, Phys. Rev. D **15**, 1448 (1977).
- G. Papini, Phys. Rev. Lett. **24**, 32 (1967).
- C.W.F. Everitt et al. Phys. Rev. Lett. **106**, 221101 (2011).