

反ドジッター時空における非線形ダイナミクスと AdS/CFT 対応

星野 悠一郎 (早稲田大学大学院 先進理工学研究科)

Abstract

本研究では、5 次元の Schwarzschild AdS Black Hole 時空における Cohomogeneity-one string を考え、その可積分性を Poincaré 断面や Lyapunov 指数を求め判定した。

1 Introduction

超弦理論の研究に端を発する AdS/CFT 対応は現在では、様々な分野に拡張され非摂動的現象や強結合領域の解析に幅広く応用されている。この AdS/CFT 対応とは、1997 年に Maldacena が 4 次元の $\mathcal{N} = 4$ $SU(N_c)$ Super Yang-Mills 理論と $AdS_5 \times S^5$ 上の Type IIB 超重力理論が等価であることを主張したものである (J. M. Maldacena. (1998))。数学的に厳密な証明は与えられてないが、それを支持する多くの結果が知られている。この対応関係を用いれば、 $N_c \rightarrow \infty$ の下で CFT (conformal field theory) 側での強結合領域の物理を重力側で反ドジッターに漸近する時空での古典論で解析することが可能となる。その応用範囲は物性物理、流体力学、非平衡系に至るまで様々であるが、非線形物理学において重要な概念の一つであるカオスを伴う系についての解析はあまりされていない。そこで、反ドジッター時空 (または漸近的な反ドジッター時空) におけるカオス系の研究が必要である。

曲がった時空におけるテスト粒子のカオス的振舞いの研究としては、4 次元ブラックホール時空におけるスピンを持つテスト粒子のダイナミクスが (K. Maeda et al. (1997, 2004)) で詳しく調べられている。また、閉弦のカオス的な運動について議論しているものとしては (L. A. Pando Zayas et al. (2014)) や (Da-Zhu Ma et al. (2014)) があるが、十分な解析が行われているとは言えない。AdS/CFT 対応の観点から考えると、5 次元 AdS ブラックホール時空において閉弦がどのように振舞うかを理解することは非常に興味深い問題である。

一方、5 次元の Kerr AdS ブラックホールにおいて、この時空の対称性を用いて閉弦の埋め込みを考

えると、系はある軌道空間上の測地線方程式に帰着され、あるパラメータを特別に選ぶと可積分となる場合が存在することが知られている (T. Igata and H. Ishihara. (2010))。本研究では、別のパラメータを選んだ際の可積分性を調べるために Poincaré 断面や Lyapunov 指数を求め、この系の特徴を調べる。

2 Cohomogeneity-one string

D 次元時空多様体 (\mathcal{M}, g_{MN}) における world sheet Σ の埋め込みについて考える。 \mathcal{M} の座標 X^M に対し、 Σ の埋め込みは

$$X^M = X^M(\zeta^a), \quad (\zeta^0 = \tau, \zeta^1 = \sigma) \quad (1)$$

と表現できる。ここで ζ^a は Σ 上の座標である。

いま、時空 (\mathcal{M}, g_{MN}) 上にあるキリングベクトル場 ξ が存在するものとすれば、 ξ による積分曲線が存在し、これによって (\mathcal{M}, g_{MN}) 上に作用する 1 次元等長変換群 $K = \{\phi_\sigma\}_{\sigma \in \mathbb{R}}$ が考えられる。そこで、world sheet Σ としてこのキリングベクトルに接したものを考えることで、軌道空間 $\mathcal{O} = \mathcal{M}/K$ 上の曲線として捉えることが可能になる。このような world sheet Σ で記述される string をキリングベクトル場 ξ に関する cohomogeneity-one (C1) string と呼ぶ。これにより、南部・後藤作用

$$S_{\text{NG}} = -T_0 \int d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma}, \quad (\gamma = \det[\gamma_{ab}]) \quad (2)$$

は以下のように書き直せる。

$$S_{\text{C1}} = -T_0 \int_{\mathcal{C}} d\tau \sqrt{-F h_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} \quad (3)$$

ここで T_0 は弦の張力であり、 F は ξ のノルム、 $h_{\mu\nu}$ は \mathcal{O} への射影テンソルである。

3 C1 string in Kerr AdS BH

5次元の Kerr AdS Black Hole の計量は以下で与えられる。

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & -\frac{\Delta_\theta \Xi_r dt^2}{\Xi_a \Xi_b} + \frac{2M}{\Sigma} \left(\frac{\Delta_\theta dt}{\Xi_a \Xi_b} - \nu \right)^2 \\
 & + \frac{\Sigma dr^2}{\Delta_r} + \frac{\Sigma d\theta^2}{\Delta_\theta} + \frac{r^2 + a^2}{\Xi_a} \sin^2 \theta d\Phi^2 \\
 & + \frac{r^2 + b^2}{\Xi_b} \cos^2 \theta d\Psi^2
 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\Xi_a = 1 - a^2 \lambda^2, \quad \Xi_b = 1 - b^2 \lambda^2, \quad \Xi_r = 1 + \lambda^2 r^2, \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_r &= \frac{(r^2 + a^2)(r^2 + b^2)(1 + \lambda^2 r^2)}{r^2} - 2M, \\
 \Delta_\theta &= 1 - a^2 \lambda^2 \cos^2 \theta - b^2 \lambda^2 \sin^2 \theta,
 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
 \nu &= a \sin^2 \theta \frac{d\Phi}{\Xi_a} + b \cos^2 \theta \frac{d\Psi}{\Xi_b}, \\
 \Sigma &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta,
 \end{aligned} \quad (7)$$

ただし、 M は質量パラメータ、 a と b は二つの独立な回転パラメータである。また λ は宇宙項 Λ と $\lambda^2 = -\Lambda/6$ の関係にある。計量の形から時空は3つの交換するキリングベクトル $\partial_t, \partial_\Phi, \partial_\Psi$ を持っていることが分かる。

ここで、以下のようなキリングベクトルに接している world sheet を考える。

$$\xi = \partial_\Phi + \alpha \partial_\Psi \quad (8)$$

ただし、 α は定数であり、 Φ と Ψ 方向の巻きつき数の比である。したがって、 $\alpha \in \mathbf{Q}$ であれば閉弦の world sheet を記述する。ここで、

$$\phi = \Phi, \quad \psi = \Psi - \alpha \Phi, \quad (9)$$

のような座標変換の後により、 ξ に関する C1 string を考えることができるので測地線系における Hamilton-Jacobi の方程式

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} + \frac{N}{2} \frac{h^{\mu\nu}}{F} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} = 0, \quad (10)$$

が得られる。ここで、 N は Lagrangian multiplier で S は Hamilton の主関数である。今、 S に対して変数分離を仮定し計算すると

$$\begin{aligned}
 2F\Sigma \times \left[\frac{\partial S}{\partial \tau} + \frac{N}{2} \frac{h^{\mu\nu}}{F} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} \right] \\
 = R(r) + \Theta(\theta) + T_0^2 F\Sigma = 0
 \end{aligned} \quad (11)$$

と書けて

$$\begin{aligned}
 T_0^2 F\Sigma &= 2MT_0^2 \left(\frac{\alpha b \cos^2 \theta}{\Xi_b} + \frac{a \sin^2 \theta}{\Xi_a} \right)^2 \\
 &+ T_0^2 (r^2 + a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta) \\
 &\times \left[\frac{(r^2 + b^2)\alpha^2 \cos^2 \theta}{\Xi_b} + \frac{(r^2 + a^2) \sin^2 \theta}{\Xi_a} \right]
 \end{aligned}$$

より、 $\alpha = 1$ かつ $a = b, \lambda \neq 1$ の時に変数分離可能であることが言える。これより、この系における閉弦は可積分であることが分かる。

4 Schwarzschild AdS Black Hole 時空における解析

前節において、C1 string は特別な場合において変数分離可能であり、可積分であることがわかった。つまり、 $\alpha \neq 1$ の時はいかなる場合もこの座標系では変数分離は不可能である。しかしながら、一般に変数分離不可能であるからといって、可積分でないとは言えない。そこで、 $a = b = 0$ である場合、つまり Schwarzschild AdS Black Hole 時空において $\alpha \neq 1$ の場合について数値的な解析を行った。

5次元の Schwarzschild AdS Black Hole は以下の計量で与えられる。

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} \\
 & + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Phi^2 + \cos^2 \theta d\Psi^2)
 \end{aligned} \quad (12)$$

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{b^2} - \frac{\omega_4 m}{r^2} \quad (13)$$

ここで、 b を改めて AdS 半径とし、 m は質量、 ω_4 は適当な定数である。前節と同様に測地線系に帰着さ

せ、その Hamiltonian を考える。適当なパラメータの再定義を行えば、以下の正準方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
 2H &= fp_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2 + \frac{L^2(\sin^2 \theta + \alpha^2 \cos^2 \theta)}{r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta} \\
 &- \frac{E^2}{f} + r^2(\sin^2 \theta + \alpha^2 \cos^2 \theta) = 0, \\
 \dot{r} &= fp_r, \\
 \dot{p}_r &= -\frac{f'}{2f^2} E^2 - \frac{1}{2} f' p_r^2 + \frac{1}{r^3} p_\theta^2 \\
 &+ \frac{L^2(\sin^2 \theta + \alpha^2 \cos^2 \theta)}{r^3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta} - r(\sin^2 \theta + \alpha^2 \cos^2 \theta), \\
 \dot{\theta} &= \frac{1}{r^2} p_\theta, \\
 \dot{p}_\theta &= -\frac{L^2}{r^2} \left(\frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} - \frac{\alpha^2 \cos \theta}{\sin^3 \theta} \right) \\
 &- r^2 \sin \theta \cos \theta (1 - \alpha^2)
 \end{aligned}$$

ただし、

$$f(r) = 1 + r^2 - \frac{M}{r^2}, \quad f'(r) = 2r + \frac{2M}{r^3} \quad (14)$$

系を特徴づけるパラメータは E, L, M であり、それぞれエネルギー、角運動量、質量に対応するものである。

適当なパラメータを選び、Poincaré 断面と Lyapunov 指数の解析結果を以下に示す。

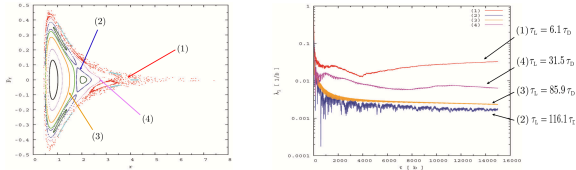


図 1: $\alpha = 0$ における $E = 1, L = 0.4, M = 0.01$ での Poincaré 断面と 4 つの異なる初期条件に対する最大 Lyapunov 指数 (τ_D は系のダイナミカルな時間スケール)

解析の結果、 $\alpha = 0, \alpha = 1.5$ の場合ともカオス的な振る舞いを見ることがわかった。特に図 2 の断面の振る舞いは、近可積分系として有名な Hénon-Heiles 系のもものと良く似ている (M. Hénon and C. Heiles (1964))。以上の結果より、これらのパラメータにおける可積分性は存在しないと考えられる。

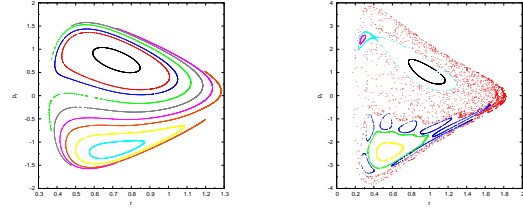


図 2: $\alpha = 1.5, L = 0.4, M = 0.01$ における $E = 3$ (左), $E = 5$ (右) での Poincaré 断面

5 Conclusion

一般に系のカオス性を解析する方法は複数あり、本研究では Poincaré 断面と Lyapunov 指数のみを用いて解析を行った。パワースペクトルやフラクタル次元を求めるといった方法についても議論する必要がある。また、先に述べた AdS/CFT 対応の観点から見ると、重力側で閉弦がカオス的な振舞いをするという結果、またはそれを特徴づける Lyapunov 指数などの量に対応する場の理論側においてどのように解釈できるかということも非常に興味深い問題である。今後はこのような観点からも研究を行いたい。このような議論は未だに理解が十分でない量子カオスの研究への 1 つのアプローチとなるかもしれない。

Reference

- J. M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. 2, 1998.
- S. Suzuki and K. Maeda, Phys. Rev. D 55 4848, 1997.
- K. Kiuchi and K. Maeda, Phys. Rev. D 70 064036, 2004.
- L. A. Pando Zayas and C. A. Terrero-Escalante, JHEP 1009, 2010.
- Da-Zhu Ma, Jian-Pin Wu and Jifang Zhang, Phys. Rev. D 89, 086011 2014.
- T. Igata and H. Ishihara, Phys. Rev. D 81 044024, 2010.
- M. Hénon and C. Heiles, Astron. J. 69, 73-79, 1964.