

強重力場における光の曲がり角

鈴木 聡人 (弘前大学大学院 理工学研究科)

Abstract

今回レビューを行う Iyer & Petters (2007) では Schwarzschild 時空中における光の曲がり角について調べた。Schwarzschild 時空中における光の曲がり角は 1919 年に A. Eddington 隊による日食観測ですでに知られている。

Schwarzschild 時空中における光の曲がり角の表式は楕円積分となるため、初等関数で表すことができない。そのため、一般的に弱場や強場で近似を行うが、展開次数が低くごく狭い範囲のみでしか適用できない。そこで Iyer & Petters (2007) では楕円積分の級数展開を用いて、系統的に展開次数を上げることができた。

レビューに加えてこれらの近似の精度を調べるために独自に数値計算を行い、近似計算との誤差を調べた。その結果、Iyer & Petters (2007) の弱場近似と強場近似を合わせて無限遠から光球近傍までを数値計算との誤差 2% 以内で表すことができた。

1 Introduction

現在、重力レンズの観測においては光が弱場を通る小さな曲がりのみしか観測することができない。しかし、今後の観測機器の向上によってブラックホールの降着円盤や中性子星から出る光といった強い重力場中を通る光の曲がりを観測することができる。それによりこのようなコンパクト天体の詳細な情報を知ることができると考えられる。

Schwarzschild 時空中における光の曲がり角はすでによく知られており、太陽などの恒星による光の曲がり角は精度よく近似式を導くことができている。また、Darwin (1959) では光球 (photon sphere) と呼ばれる重力源の近傍を無限回回る不安定円軌道の近傍 (強場) における光の曲がり角の近似式を求めた。しかし、これらの弱場や強場の近似は Schwarzschild 半径の数～十数倍の距離を通る光の曲がりを調べるには不十分である。そこで Iyer & Petters (2007) では楕円積分の級数展開を用いることで系統的に展開次数を上げることが可能になり、より広い範囲で近似の精度を上げることができた。

2 Methods

2.1 曲がり角の表式の導出

Schwarzschild 計量

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

について、光の運動を考える。ここで $G = c = 1$ である。光源から観測者までの光の軌道は平面 ($\theta = \frac{\pi}{2}$) とする。

$ds^2 = 0$ より、 $u = 1/r$ として軌道方程式

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = 2Mu^3 - u^2 + \frac{1}{b^2} \quad (1)$$

が求まる。ここで b は衝突径数であり、光子の角運動量 L と全エネルギー E より $b = L/E$ で表される。

(1) 式の右辺を

$$B(u) = 2M(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)$$

と書く。 $B(u)$ は最大で 2 つの正の解を持ち、負の解は多くても 1 つであるから、 $u_1 < 0 < u_2 < u_3$ とする。ここでそれぞれの解の中間の定数 Q を与えてやれば

$$u_1 = \frac{r_0 - 2M - Q}{4Mr_0}, u_2 = \frac{1}{r_0}, u_3 = \frac{r_0 - 2M + Q}{4Mr_0}$$

と書ける. ここで r_0 は光の最近接距離である.
また b と r_0 の関係は

$$b^2 = \frac{r_0^2}{r_0 - 2M} \quad (2)$$

である.

(1) 式の定数項から

$$Q^2 = (r_0 - 2M)(r_0 + 6M)$$

が求まる.

これより, 光の曲がり角 $\hat{\alpha}$ は

$$\hat{\alpha} = 2 \int_0^{\frac{1}{r_0}} \frac{du}{\sqrt{2Mu^3 - u^2 + \frac{1}{b^2}}} - \pi \quad (3)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{M}} \int_0^{\frac{1}{r_0}} \frac{du}{\sqrt{(u - u_1)(u_2 - u)(u_3 - u)}} - \pi \quad (4)$$

となる.

2.2 弱場における 1 次近似

光の軌道が重力源に対して十分遠方 ($2M \ll b$) を仮定すると $b \simeq r_0$, $u_1 \simeq -1/b$, $u_2 \simeq 1/b$, $u_3 \simeq 1/2M$ と近似できる.

よって (4) は

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &\simeq \sqrt{\frac{2}{M}} \int_0^{\frac{1}{r_0}} \frac{\left(\frac{1}{2M} + \frac{u}{2}\right) du}{\sqrt{(u - u_1)(u_2 - u)}} - \pi \\ &\simeq \frac{4M}{b} \end{aligned}$$

となる.

臨界衝突径数 $b_c = 3\sqrt{3}M$ で規格化した

$$b' = 1 - \frac{b_c}{b}$$

を用いると

$$\hat{\alpha}_{Einstein}(b') = \frac{4}{3\sqrt{3}}(1 - b') \quad (5)$$

と書き換えることができる. ここでは (5) 式を Einstein 項と呼ぶことにする.

2.3 強場における 1 次近似

ここでは Bozza (2002) の方法を用いる.

(3) 式を $z = 1 - r_0/r$ として書き換えると

$$\hat{\alpha} = 2 \int_0^1 f(z, r_0) dz - \pi$$

$$f(z, r_0) = \frac{1}{\sqrt{\alpha z + \beta z^2 - \frac{2M}{r_0} z^3}}$$

$$\alpha = 2 - \frac{6M}{r_0}, \beta = \frac{6M}{r_0} - 1$$

$f(z, r_0)$ を $r \rightarrow r_0$ で, つまり $z = 0$ で展開すると

$$f(z, r_0) \simeq f_0(z, r_0) = \frac{1}{\sqrt{\alpha z + \beta z^2}}$$

これを用いて

$$\hat{\alpha} = 2 \int_0^1 [f_0(z, r_0) + g(z, r_0)] dz - \pi$$

$$g(z, r_0) = f(z, r_0) - f_0(z, r_0)$$

光球半径 ($r_m = 3M$) 近傍を光が通る ($r_0 - r_m = 0$)

として近似すると α と β は

$$\alpha \simeq \frac{4}{3} \left(\frac{r_0}{r_m} - 1 \right), \beta(r_0) \simeq \beta(r_m) = 1$$

となるから $f_0(z, r_0)$ の積分は

$$\int_0^1 f_0(z, r_0) dz = -\log \left(\frac{r_0}{r_m} - 1 \right) + \log 2$$

また $g(z, r_0)$ について $r_0 - r_m = 0$ で展開を行うと

$g(z, r_0) \simeq g(z, r_m)$ とできるから $g(z, r_0)$ の積分は

$$\int_0^1 g(z, r_0) dz = \log 6(2 - \sqrt{3})$$

となる. よって曲がり角は r_0 で表すことができる.

$$\hat{\alpha} = 2 \log \left[\frac{36(2 - \sqrt{3})M}{r_0 - 3M} \right] - \pi$$

ここで (2) 式を $r_0 - r_m = 0$ で展開すると

$$b - b_c \simeq \frac{\sqrt{2}}{M}(r_0 - r_m)^2$$

となるから, 曲がり角を b' で表すと

$$\hat{\alpha}_{Darwin}(b') + \pi = \log \left[\frac{216(7 - 4\sqrt{3})(1 - b')}{b'} \right] \quad (6)$$

これは Darwin (1959) の結果と一致するため, ここでは Darwin 項と呼ぶ.

2.4 Iyer & Petters (2007) による近似 展開すると

(4) は楕円積分であり, 以下のように書き表す事ができる.

$$\hat{\alpha} = 4\sqrt{\frac{r_0}{Q}}[K(k) - F(\Psi, k)] - \pi \quad (7)$$

ここで $F(\Psi, k)$ と $K(k)$ はそれぞれ第一種楕円積分, 第一種完全楕円積分であり

$$\begin{aligned} F(\Psi, k) &= \int_0^\Psi \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} \\ K(k) &= F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \\ k^2 &= \frac{Q - r_0 + 6M}{2Q} \\ \Psi &= \sin^{-1} \sqrt{\frac{Q + 2M - r_0}{Q + 6M - r_0}} \end{aligned}$$

で表される.

第一種楕円積分の級数展開は

$$\begin{aligned} F(\Psi, k) &= \frac{2\Psi}{\pi} K(k) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sin(2\Psi) \left[\frac{1}{2} k^2 A_2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 A_4 + \dots \right] \\ K(k) &= \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 k^{2n} \end{aligned}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}, \quad A_4 = \frac{1}{4} \sin^2 \Psi + \frac{3}{2 \cdot 4}, \quad \dots$$

であるから $h = M/r_0$ をパラメータとして無限遠 ($h = 0$) で h の 4 次まで展開すると弱場の曲がり角は

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{weak}(h) &= 4h + \left(-4 + \frac{15}{4}\pi\right) h^2 + \left(\frac{122}{3} - \frac{15}{2}\pi\right) h^3 \\ &\quad + \left(-130 + \frac{3465}{64}\pi\right) h^4 + O(h^5) \end{aligned}$$

となる.

強場では $h = 1/3$ となるが, 簡単のために $h' = 1 - 3h$ で書き直し, $h' = 0$ で曲がり角の式を h' の 3 次まで

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{strong}(h) &= -\pi + 2 \log \left(\frac{12(2 - \sqrt{3})}{h'} \right) + \frac{2h'}{3} \\ &\quad + \frac{1}{18} \left[6\sqrt{3} - 35 + 15 \log \left(\frac{12(2 - \sqrt{3})}{h'} \right) \right] h'^2 \\ &\quad + \frac{1}{162} \left[295 - 36\sqrt{3} - 90 \log \left(\frac{12(2 - \sqrt{3})}{h'} \right) \right] h'^3 \\ &\quad + O(h'^4) \end{aligned}$$

を得る.

ここで (2) 式を Viète の解で解くと b' と h' の関係式が求まる.

$$h' = 1 - \frac{1 - b'}{2} \sec \left[\frac{1}{3} \cos^{-1}[-(1 - b')] \right]$$

これを $b' = 0$ で展開すると

$$h' = \sqrt{\frac{2}{3}} b'^{1/2} + \frac{2}{9} b' - \frac{7}{54\sqrt{6}} b'^{3/2} + \frac{5}{243} b'^2 + O(b'^{5/2})$$

となる.

よって, 弱場と強場の曲がり角を b' で表すと

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{weak}(b') &= \frac{4}{3\sqrt{3}}(1 - b') + \frac{5\pi}{36}(1 - b')^2 + \frac{128}{243\sqrt{3}}(1 - b')^3 \\ &\quad + \frac{385\pi}{5184}(1 - b')^4 + O(1 - b')^5 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{strong}(b') &= (\sigma_0 + \sigma_1 b' + \sigma_2 b'^2 + \sigma_3 b'^3 + \dots) \\ &\quad \times \log \left[\frac{216(7 - 4\sqrt{3})}{b'} \right] \\ &\quad + (\rho_0 + \rho_1 b' + \rho_2 b'^2 + \rho_3 b'^3 + \dots) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \sigma_0 = 1 & \rho_0 = -\pi \\ \sigma_1 = \frac{5}{18} & \rho_1 = \frac{-17+4\sqrt{3}}{18} \\ \sigma_2 = \frac{205}{1296} & \rho_2 = \frac{-879+236\sqrt{3}}{1296} \\ \sigma_3 = \frac{68145}{629856} & \rho_3 = \frac{-321590+90588\sqrt{3}}{629856} \end{cases}$$

となる. 弱場の最低次の項は (5) 式の Einstein 項と一致するが, 強場の最低次の項を見てみると

$$\hat{\alpha}_{0th\ order}(b') + \pi = \log \left[\frac{216(7 - 4\sqrt{3})}{b'} \right] \quad (10)$$

である.(6) 式の Darwin 項と比較すると, $-b'$ だけ一致しないが, 光球半径のごく近傍では両式は一致する.

3 Results

曲がり角の近似式と (4) 式の数値計算との誤差を以下のグラフに示す.

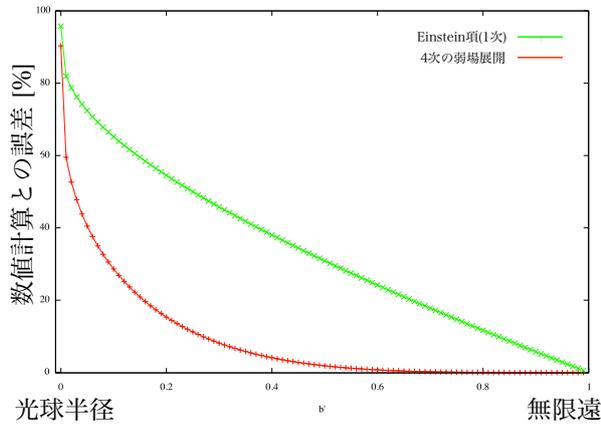


図 1: 弱場近似と数値計算との誤差

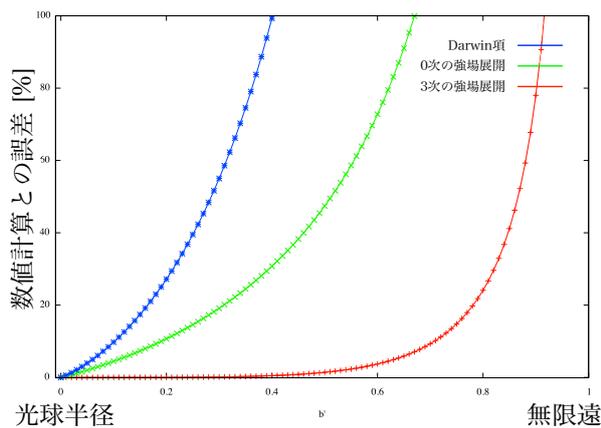


図 2: 強場近似と数値計算との誤差

このグラフから b' の値が大きくなると、(10) 式に比べ Darwin 項の誤差が大きくなるのがわかる.

図 3 の 2 本のグラフが交差する点は $b' \approx 0.47$ で誤差は約 1.6% である. よって (8) 式と (9) 式を用いることで誤差 2% 以内で無限遠から光球半径近傍までを表すことができる.

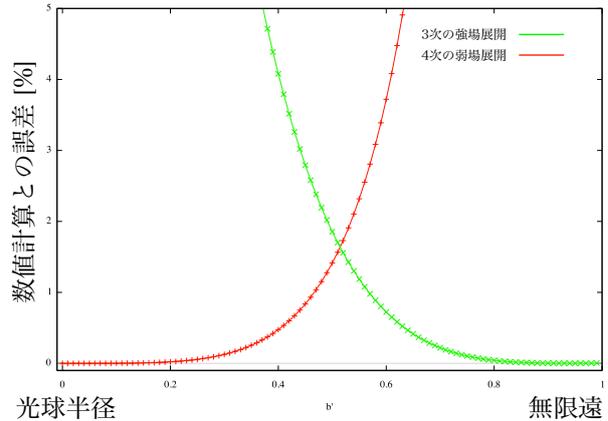


図 3: Iyer & Petters (2007) による弱場・強場近似と数値計算との誤差

4 Conclusion

2.2, 2.3 節ではそれぞれパラメータを近似してから積分を計算していたため、展開次数を上げるとより複雑な計算をしなくてはならなかった. しかし Iyer & Petters (2007) では楕円積分の級数展開を用いて積分を実行するため、系統的に任意の展開次数に上げることができる. 数値計算と Iyer & Petters (2007) の近似式との誤差を見てみると、強場に関しては最低次の項と Darwin 項とは光球近傍では一致するが、 b' がより大きいところでは Iyer & Petters (2007) の最低次の項がより精度良く表すことができています. 4 次の弱場近似と 3 次の強場近似を合わせることで、これまで解析的に求められなかった強い重力場中を通る光の曲がりを表せた. これによりブラックホールの近くを通る光といった Schwarzschild 半径の数~十数倍の距離を通る光の曲がり解析的に調べることができる.

Reference

S. V. Iyer, A. O. Petters. 2007. Gen. Relativ. Gravit. 39, 1563-1582
 V. Bozza. 2002. Phys. Rev. D. 66, 103001
 C. Darwin. 1959. Proc. R. Soc. London A249, 180