2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

ダークマターハローの速度分散の非等方性に関する考察

淺羽 信介 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

超新星の観測より現在の宇宙は加速膨張していることがわかっている。この加速膨張を説明する理論としてダークエネルギーモデルと修正重力理論がある。両者の理論では、物質の密度揺らぎや速度の発展が違うことが知られている。よって、観測から銀河の空間分布の情報を得ることで両者の理論を区別することができる。特に、分光観測から得られる赤方偏移空間の銀河分布が銀河の固有速度によって歪む効果 (赤方偏移変形) の情報が修正重力理論の制限において有用であることが知られている。その一方で、銀河の固有速度を直接観測することで密度揺らぎの線形成長率のスケール依存性を測定することができるようになってきた。線形成長率がスケールによって変化することは修正重力理論の一つの特徴であり、固有速度の直接観測は修正重力理論の制限において重要である。しかし、固有速度の測定において非線形効果の理解は完全ではなく、大きな不定性となっている。宇宙論的 N 体シミュレーションから銀河の固有速度の方向の並び方と大規模構造には相関があることが確かめられており、これは固有速度の非線形性の理解の手助けになると考えられる。今回は、ダークマターハローの速度分散の非等方性に着目する。ダークマターハローの速度分散も修正重力理論の影響を受けるため、修正重力理論の制限に使える。また、速度分散の非等方性と大規模構造の相関を調べることで銀河の固有速度の非線形効果を理解することができ、更なる重力のテストをすることができる可能性がある。

1 Introduction

超新星の観測から、現在の宇宙は加速膨張をしていることがわかっている。我々が知っている通常の物質の運動は宇宙論スケールでは重力によって決定されるため、通常の物質だけでは加速膨張を説明することができない。そのため、負の圧力を持つ未知のエネルギー (ダークエネルギー) を導入するモデルが現在の標準的な宇宙モデル (ΛCDM モデル) となっている。しかし、ダークエネルギーの候補である真空のエネルギーが予言する値は超新星の観測から予測される値とは 100 桁以上違うという問題がある。ΛCDM モデルは一般相対性理論を基に構築されているが、宇宙論スケールで一般相対性理論が正しいかはわかっていない。そこで重力理論を宇宙論スケールで拡張することで、未知のエネルギーを導入することなく超新星の観測を説明する修正重力理論が考えられた。宇宙の加速膨張を説明する理論としてダークエネルギーモデルと修正重力理論のどちらが正しいかを決めることは、宇宙論の重要な課題である。

修正重力理論では、ΛCDM モデルと同様に宇宙の加速膨張を説明することができる。また、物質の密度揺らぎや速度などの摂動量の発展が ΛCDM モデルと修正重力理論では違うことがわかっている。例えば、修正重力理論の一つであるアインシュタイン・ヒルベルト作用を拡張した f(R) Gravity 理論では、小スケールで $G_{\rm eff}/G = 4/3$ となる。そのため、密度揺らぎの成長が f(R) Gravity 理論ではスケール依存性を持つことが知られている。しかし、この効果を物質の密揺らぎから測定するには振幅の不定性が大きいため難しい。その一方で、線形理論において固有速度と密度揺らぎの間には $v = -aHf\delta$ という関係がある。ここで、f は線形成長率と呼ばれ、重力理論によって時間発展が違う量である。そのため、銀河の固有速度によって赤方偏移空間の銀河の空間分布が歪む効果である赤方偏移変形から、固有速度を測定することが重力理論のテストする上でとても有用である (Asaba et al., 2013)。また、銀河の固有速度の直接観測もできるようになり、線形成長率のスケール依存性を調べることができるようになってきた (Johnson et al., 2014)。しかし、今までの観測

で得られた線形領域付近の観測量では、まだ、どちらの理論が正しいのかという決着はついていない。(Dossett et al., 2014)。そのため、より高精度な議論をするために非線形領域の更なる研究が必要である。特に、修正重力理論が予言するダークマターハロー (DMH) のような高密度の領域で、重力の増幅が抑制される効果であるスクリーニング機構が観測量に与える影響の理解は不十分である。本研究では、DMH の速度分散の非等方性について注目する。DMH は力学的に安定しているため、ビリアル定理からその質量と速度分散にはとても強い関係があることが理論的に予想される。しかし、ビリアル定理の関係は球対称を仮定しているが、実際には球対称が完全に成り立っている訳ではない。球対称からのずれはそのハローが存在する環境に依存してい、速度分散の非等方性から環境の情報を得ることができると考えられる。環境の情報はスクリーニング機構を議論する上で重要であり、また、固有速度の非線形効果の理解の手助けになる可能性ある (Forero-Romero et al., 2014)。

2 Method and Simulation

DMH は宇宙の大規模構造を構成する重力的に束縛されたダークマターの塊である。また、宇宙論的 N 体シミュレーションで簡単に再現することができる。1 つの DMH が力学的に平衡状態にあるとすると、ビリアル平衡の式

$$W + 2K = 0, \tag{1}$$

に従う。ここで W はポテンシャルエネルギー、K は運動エネルギーである。まず、球対称な DMH を考える。質量を M、半径を R とし、N 個の質量 m のダークマター粒子で構成されているとすると

$$W = -\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{N}\frac{Gm^2}{|x^i - x^j|} = -\frac{GM^2}{2R}, \tag{2}$$

$$K = \sum_{i}^{N}\frac{m(v^i - \bar{v})^2}{2} = \frac{M\sigma_v^2}{2}, \tag{3}$$

と書ける。ここで x^i と v^i は DMH 内の i 番目のダークマター粒子の位置と速度であり、$\bar{v}$ は DMH の固有速度 ($\bar{A}$ は DMH 内のダークマター粒子間の物理量 A の平均を表す)、σ_v は DMH 内のダークマター粒子の速度分散である。よって、DMH がビリアル平衡にある場合は

$$\sigma_v^2 = \frac{GM}{2R}, \tag{4}$$

が成り立つ。球対称の場合はさらに、

$$\sigma_{v_x}^2 = \sigma_{v_y}^2 = \sigma_{v_z}^2 = \sigma_v^2, \tag{5}$$

である。ここで $\sigma_v^2 \equiv (\sigma_{v_x}^2 + \sigma_{v_y}^2 + \sigma_{v_z}^2)/3$ である。さらに、DMH 内で密度が一定であると見なせるとすると $M \propto R^3$ なので、

$$\sigma_{v,\mathrm{vir}} \propto M^{1/3}, \tag{6}$$

となる。この関係は様々なコードの N 体シミュレーションで確かめられており、宇宙論パラメータによらず強固な関係であることがわかっている (Evrard et al., 2008)。その一方で、N 個のダークマター粒子からなる DMH が平衡に達する時間は

$$T \propto \frac{\sqrt{NR^3}}{\log N}, \tag{7}$$

で与えられる。

ここで DMH が球対称であることはあくまでも仮定であり、そこからのずれを考えることで更なる情報を得ることができる可能性がある。そのずれを見るために本研究では速度分散の非等方性を考える。速度分散の非等方性として、DMH 内で速度分散が最大 (最小) となる方向を求めた。速度の分散共分散行列 $\boldsymbol{C}$

$$C_{ij} = \frac{1}{N}\sum_{k}^{N}(v_i^k - \bar{v}_i)(v_j^k - \bar{v}_j), \tag{8}$$

の固有値を $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ とすると、$\lambda_1(\lambda_3)$ を与える固有ベクトル $\vec{e}_{v_1}(\vec{e}_{v_3})$ の方向が速度分散が最大 (最小) となる方向を表す。また、その方向の速度分散 $\sigma_{v_1}^2$ は λ_1 で与えられる。

本研究では、Gadget-2(Springel, 2005) を用いて N 体シミュレーションを行った。宇宙論パラメータとして、$(\Omega_m, \Omega_b, \Omega_\Lambda, h, \sigma_8) = (0.307, 0.048, 0.693, 0.678, 0.678, 0.8288)$ を用いた。また、粒子数 $N_p = 512^3$、ボックスサイズ $L = 150[\mathrm{Mpc}/h]$ として計算した。DMH は Friend-of-Friend 法 (Davis et al., 1985) で特定した。以下では、赤方偏移 $z = 0$ の結果を示す。

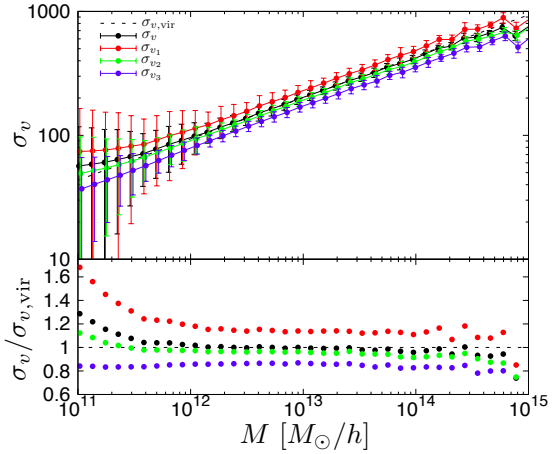


図 1: 上図は DMH の速度分散の平均と分散。速度の分散共分散行列から求めた固有値から求めた値 (σ_{v_1}:赤、σ_{v_2}:緑、σ_{v_3}:青) と 3 方向の平均を取った値 (σ_v:黒)。また、破線は σ_v から式 (6) の振幅を決めた時の理論線 $\sigma_{v,\mathrm{vir}}$。下図は理論線に対するそれぞれの速度分散の割合。

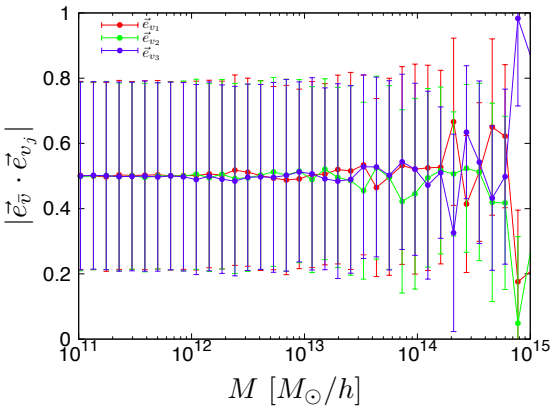


図 2: DMH の固有速度の方向と速度の分散共分散行列の固有ベクトルとの相関。

3 Results

N 体シミュレーションで得られた DMH のサンプルから速度の分散共分散行列を求め、各 DMH の速度分散が最大 (最小) になる方向とその速度分散を求めた。図 1 に、質量でビン分けした中での速度分散の平均と分散を示す。固有値から得られた値 σ_{v_i} に加え、3 方向の平均したときの値 σ_v を示している。さらに理論的に予測される速度分散と質量の関係である式 (6) も示す。振幅は $M = 10^{13} M_\odot/h$ での σ_v の値を用いた。また、下図に理論線に対するそれぞれの値の比も合わせて示す。

4 Discussion

図 1 からわかるように、$M > 10^{12} M_\odot/h$ では確かに理論的に予言される質量と速度分散の関係が成り立っている。また、球対称のようにどの方向でも速度分散が等しい訳ではなく、各 DMH において速度分散が大きくなる方向がある。つまり、DMH の速度分散は非等方性を持つと言える。さらに、速度分散の最大値と最小値の平均値に対する比は、$M > 10^{13} M_\odot/h$ では質量の依存性がないことがわかる。その一方で、式 (7) は軽い DMH の方が早くビリアル平衡に達することを意味している。そのため、低質量側 ($M < 10^{12} M_\odot/h$) の DMH ほうがよりビリアル定理が予言する関係により従いやすいと考えられる。しかし、低質量側で式 (6) の冪から外れており、その上、低質量ほど分散が大きくなっていることがわかる。ビリアル平衡の議論は孤立系を仮定しているが、実際の DMH は互いに相互作用しているため、周りの DMH のがつくる環境の影響を受ける。例えば、合体している途中の DMH ではビリアル定理は成り立たない。また、その DMH 自身が作る重力ポテンシャルよりも、周りにある重い DMH が作る重力ポテンシャルが大きい場合は速度分散が大きくなる。その効果は軽い DMH の方が顕著であるため、図 1 の様な結果になる。さらに、速度分散の最大値が予測される値よりも低質量側でより大きくなっていることから、速度分散が最大となる方向は環境によって決まると考えられる。その一方で、速度分散の最小値は低質量側でも理論が予測する冪からほとんどずれていない。よって、速度分散の最小値はその DMH の質量によって決定されると考えられる。

各 DMH において速度分散が最大または最小となる方向の物理的な意味を見ていく。ここでは DMH にとって特別な方向であると考えられる固有速度の方向と長軸または、短軸の方向の相関を考える。まず、各 DMH の固有速度方向の単位ベクトルと、速度の分散共分散から求めた固有ベクトルの内積を計算した。図 2 に DMH を質量でビン分けし、各ビン

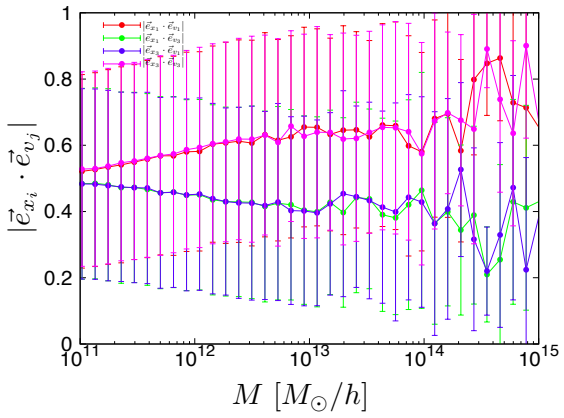


図 3: DMH の長軸方向 $\vec{e}_{x_1}$(短軸方向 $\vec{e}_{x_3}$) と速度分散が最大 (最小) となる方向 $\vec{e}_{v_1}$($\vec{e}_{v_3}$) との相関。

での内積の平均値と分散を示す。図からわかるように、質量に関係なく平均値が 0.5 であることがわかる。これは 2 つのベクトルが完全に無相関であることを意味している。つまり、DMH の固有速度方向と速度分散の非等方性に関係はないと言える。これは 1 つまたは複数の DMH からなる系が平衡状態にある場合、その中の DMH の速度分散の非等方性は慣性系の取り方によらないためであると考えられる。次に、各 DMH の長軸や短軸の方向と速度分散が最大 (最小) となる方向の内積を計算した。図 3 にその結果を示す。図から長軸 (短軸) 方向と速度分散が最大 (最小) になる方向の内積の平均値が 0.5 よりも大きくなっていることがわかる。つまり、長軸 (短軸) 方向と速度分散が最大 (最小) になる方向が揃っていることを意味している。また、重い DMH ほど平均値が大きくなっている。よって、速度分散の非等方性はその DMH の形と相関があり、重い DMH ほど強い相関があることがわかる。逆に、軽い DMH の速度分散は DMH の形だけでは決まらず、非等方性から環境の情報を得ることができると考えられる。

5 Conclusion

本研究では、宇宙の大規模構造を使った修正重力理論の更なる制限に向けて、DMH の速度分散の非等方性について調べた。N 体シミュレーションから DMH の速度分散と質量には強い関係があることがわかっているが、軽い DMH では環境の影響によってずれる。速度分散の非等方性を調べることで更なる情報を得ることできる可能性がある。まず、速度の分散共分散行列から DMH の最大値と最小値を求めた。$M > 10^{12} M_\odot/h$ では、質量に関係なく速度分散の最大値 (最小値) と平均値の比は一定であり、また、最小値は低質量側でも質量と強い関係があることがわかった。次に、速度分散が最大 (最小) になる方向の物理的意味を調べるために、DMH の固有速度の方向や長軸 (短軸) の方向との相関を計算した。まず、速度分散の非等方性と固有速度の方向には関係がないことがわかった。また、速度分散が最大 (最小) になる方向と長軸 (短軸) の方向には相関があり、重い DMH ほど相関が強いことがわかった。

今後の課題

(1)3 軸不等な崩壊モデル (Nadkarni-Ghosh & Singhal, 2014) を考えることで DMH の長軸 (短軸) と速度分散の最大値 (最小値) の関係を解析に求める。

(2) 修正重力理論やスクリーニング機構が速度分散の非等方性にどのように影響するかを調べる。

Reference

Asaba, S., Hikage, C., Koyama, K., et al. 2013, JCAP, 8, 29

Johnson, A., Blake, C., Koda, J., et al. 2014, arXiv:1404.3799

Forero-Romero, J. E., Contreras, S., & Padilla, N. 2014, arXiv:1406.0508

Dossett, J., Hu, B., & Parkinson, D. 2014, JCAP, 3, 46

Evrard, A. E., Bialek, J., Busha, M., et al. 2008, ApJ, 672, 122

Springel, V. 2005, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 364, 1105

Davis, M., Efstathiou, G., Frenk, C. S., & White, S. D. M. 1985, ApJ, 292, 371

Nadkarni-Ghosh, S., & Singhal, A. 2014, arXiv:1407.1945

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

強重力場における光の曲がり角

鈴木 聡人 (弘前大学大学院 理工学研究科)

Abstract

今回レビューを行う Iyer & Petters (2007) では Schwarzschild 時空における光の曲がり角について調べた.Schwarzschild 時空における光の曲がりは 1919 年に A. Eddington 隊による日食観測ですでに知られている.

Schwarzschild 時空における光の曲がり角の表式は楕円積分となるため, 初等関数で表すことができない. そのため, 一般的に弱場や強場で近似を行うが, 展開次数が低くごく狭い範囲のみでしか適用できない. そこで Iyer & Petters (2007) では楕円積分の級数展開を用いて, 系統的に展開次数を上げることができた.

レビューに加えてこれらの近似の精度を調べるために独自に数値計算を行い, 近似計算との誤差を調べた. その結果,Iyer & Petters (2007) の弱場近似と強場近似を合わせて無限遠から光球近傍までを数値計算との誤差 2% 以内で表すことができた.

1 Introduction

現在, 重力レンズの観測においては光が弱場を通る小さな曲がりのみしか観測することができない. しかし, 今後の観測機器の向上によってブラックホールの降着円盤や中性子星から出る光といった強い重力場中を通る光の曲がりを観測することができる. それによりこのようなコンパクト天体の詳細な情報を知ることができると考えられる.

Schwarzschild 時空における光の曲がりはすでによく知られており, 太陽などの恒星による光の曲がりは精度よく近似式を導くことができている. また,Darwin (1959) では光球 (photon sphere) と呼ばれる重力源の近傍を無限回回る不安定円軌道の近傍 (強場) における光の曲がり角の近似式を求めた. しかし, これらの弱場や強場の近似は Schwarzschild 半径の数〜十数倍の距離を通る光の曲がりを調べるには不十分である. そこで Iyer & Petters (2007) では楕円積分の級数展開を用いることで系統的に展開次数を上げることが可能になり, より広い範囲で近似の精度を上げることができた.

2 Methods

2.1 曲がり角の表式の導出

Schwarzschild 計量

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

について, 光の運動を考える. ここで $G=c=1$ である. 光源から観測者までの光の軌道は平面 ($\theta=\frac{\pi}{2}$) とする.

$ds^2=0$ より,$u=1/r$ として軌道方程式

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = 2Mu^3-u^2+\frac{1}{b^2} \tag{1}$$

が求まる. ここで b は衝突径数であり, 光子の角運動量 L と全エネルギー E より $b=L/E$ で表される.

(1) 式の右辺を

$$B(u) = 2M(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)$$

と書く.$B(u)$ は最大で 2 つの正の解を持ち, 負の解は多くても 1 つであるから,$u_1<0<u_2<u_3$ とする. ここでそれぞれの解の中間の定数 Q を与えてやれば

$$u_1=\frac{r_0-2M-Q}{4Mr_0}, u_2=\frac{1}{r_0}, u_3=\frac{r_0-2M+Q}{4Mr_0}$$

と書ける. ここで r_0 は光の最近接距離である.
また b と r_0 の関係は

$$b^2 = \frac{r_0^2}{r_0 - 2M} \tag{2}$$

である.
(1) 式の定数項から

$$Q^2 = (r_0 - 2M)(r_0 + 6M)$$

が求まる.
これより, 光の曲がり角 $\hat{\alpha}$ は

$$\hat{\alpha} = 2\int_0^{\frac{1}{r_0}} \frac{du}{\sqrt{2Mu^3 - u^2 + \frac{1}{b^2}}} - \pi \tag{3}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{M}} \int_0^{\frac{1}{r_0}} \frac{du}{\sqrt{(u-u_1)(u_2-u)(u_3-u)}} - \pi \tag{4}$$

となる.

2.2 弱場における 1 次近似

光の軌道が重力源に対して十分遠方 ($2M \ll b$) を仮定すると $b \simeq r_0, u_1 \simeq -1/b, u_2 \simeq 1/b, u_3 \simeq 1/2M$ と近似できる.
よって (4) は

$$\hat{\alpha} \simeq \sqrt{\frac{2}{M}} \int_0^{\frac{1}{b}} \frac{\left(\frac{1}{2M} + \frac{u}{2}\right) du}{\sqrt{(u-u_1)(u_2-u)}} - \pi$$

$$\simeq \frac{4M}{b}$$

となる.
臨界衝突径数 $b_c = 3\sqrt{3}M$ で規格化した

$$b' = 1 - \frac{b_c}{b}$$

を用いると

$$\hat{\alpha}_{Einstein}(b') = \frac{4}{3\sqrt{3}}(1 - b') \tag{5}$$

と書き換えることができる. ここでは (5) 式を Einstein 項と呼ぶことにする.

2.3 強場における 1 次近似

ここでは Bozza (2002) の方法を用いる.
(3) 式を $z = 1 - r_0/r$ として書き換えると

$$\hat{\alpha} = 2\int_0^1 f(z, r_0)dz - \pi$$

$$f(z, r_0) = \frac{1}{\sqrt{\alpha z + \beta z^2 - \frac{2M}{r_0} z^3}}$$

$$\alpha = 2 - \frac{6M}{r_0}, \beta = \frac{6M}{r_0} - 1$$

$f(z, r_0)$ を $r \to r_0$ で, つまり $z = 0$ で展開すると

$$f(z, r_0) \simeq f_0(z, r_0) = \frac{1}{\sqrt{\alpha z + \beta z^2}}$$

これを用いて

$$\hat{\alpha} = 2\int_0^1 [f_0(z, r_0) + g(z, r_0)]dz - \pi$$

$$g(z, r_0) = f(z, r_0) - f_0(z, r_0)$$

光球半径 ($r_m = 3M$) 近傍を光が通る ($r_0 - r_m = 0$) として近似すると α と β は

$$\alpha \simeq \frac{4}{3}\left(\frac{r_0}{r_m} - 1\right), \beta(r_0) \simeq \beta(r_m) = 1$$

となるから $f_0(z, r_0)$ の積分は

$$\int_0^1 f_0(z, r_0)dz = -\log\left(\frac{r_0}{r_m} - 1\right) + \log 2$$

また $g(z, r_0)$ について $r_0 - r_m = 0$ で展開を行うと $g(z, r_0) \simeq g(z, r_m)$ とできるから $g(z, r_0)$ の積分は

$$\int_0^1 g(z, r_0)dz = \log 6(2 - \sqrt{3})$$

となる. よって曲がり角は r_0 で表すことができる.

$$\hat{\alpha} = 2\log\left[\frac{36(2-\sqrt{3})M}{r_0 - 3M}\right] - \pi$$

ここで (2) 式を $r_0 - r_m = 0$ で展開すると

$$b - b_c \simeq \frac{\sqrt{2}}{M}(r_0 - r_m)^2$$

となるから, 曲がり角を b' で表すと

$$\hat{\alpha}_{Darwin}(b') + \pi = \log\left[\frac{216(7 - 4\sqrt{3})(1 - b')}{b'}\right] \tag{6}$$

これは Darwin (1959) の結果と一致するため, ここでは Darwin 項と呼ぶ.

2.4 Iyer & Petters (2007) による近似

(4) は楕円積分であり, 以下のように書き表す事ができる.

$$\hat{\alpha} = 4\sqrt{\frac{r_0}{Q}}[K(k) - F(\Psi, k)] - \pi \tag{7}$$

ここで $F(\Psi, k)$ と $K(k)$ はそれぞれ第一種楕円積分, 第一種完全楕円積分であり

$$\begin{aligned} F(\Psi, k) &= \int_0^{\Psi} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} \\ K(k) &= F(\frac{\pi}{2}, k) \\ k^2 &= \frac{Q - r_0 + 6M}{2Q} \\ \Psi &= \sin^{-1} \sqrt{\frac{Q + 2M - r_0}{Q + 6M - r_0}} \end{aligned}$$

で表される.
第一種楕円積分の級数展開は

$$\begin{aligned} F(\Psi, k) &= \frac{2\Psi}{\pi} K(k) \\ &\quad -\frac{1}{2}\sin(2\Psi)\left[\frac{1}{2}k^2 A_2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4 A_4 + \cdots\right] \\ K(k) &= \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 k^{2n} \end{aligned}$$

$$A_2 = \frac{1}{2},\ A_4 = \frac{1}{4}\sin^2\Psi + \frac{3}{2\cdot 4},\ \cdots$$

であるから $h = M/r_0$ をパラメータとして無限遠 $(h = 0)$ で h の 4 次まで展開すると弱場の曲がり角は

$$\begin{aligned} &\hat{\alpha}_{weak}(h) \\ &= 4h + \left(-4 + \frac{15}{4}\pi\right)h^2 + \left(\frac{122}{3} - \frac{15}{2}\pi\right)h^3 \\ &+ \left(-130 + \frac{3465}{64}\pi\right)h^4 + O(h^5) \end{aligned}$$

となる.
強場では $h = 1/3$ となるが, 簡単のために $h' = 1 - 3h$ で書き直し, $h' = 0$ で曲がり角の式を h' の 3 次まで展開すると

$$\begin{aligned} &\hat{\alpha}_{strong}(h) = -\pi + 2\log\left(\frac{12(2-\sqrt{3})}{h'}\right) + \frac{2h'}{3} \\ &+\frac{1}{18}\left[6\sqrt{3} - 35 + 15\log\left(\frac{12(2-\sqrt{3})}{h'}\right)\right]h'^2 \\ &+\frac{1}{162}\left[295 - 36\sqrt{3} - 90\log\left(\frac{12(2-\sqrt{3})}{h'}\right)\right]h'^3 \\ &+O(h'^4) \end{aligned}$$

を得る.
ここで (2) 式を Viete の解で解くと b' と h' の関係式が求まる.

$$h' = 1 - \frac{1-b'}{2}\sec\left[\frac{1}{3}\cos^{-1}[-(1-b')]\right]$$

これを $b' = 0$ で展開すると

$$h' = \sqrt{\frac{2}{3}}b'^{1/2} + \frac{2}{9}b' - \frac{7}{54\sqrt{6}}b'^{3/2} + \frac{5}{243}b'^2 + O(b'^{5/2})$$

となる.
よって, 弱場と強場の曲がり角を b' で表すと

$$\begin{aligned} &\hat{\alpha}_{weak}(b') \\ &= \frac{4}{3\sqrt{3}}(1-b') + \frac{5\pi}{36}(1-b')^2 + \frac{128}{243\sqrt{3}}(1-b')^3 \\ &+\frac{385\pi}{5184}(1-b')^4 + O(1-b')^5 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &\hat{\alpha}_{strong}(b') \\ &= (\sigma_0 + \sigma_1 b' + \sigma_2 b'^2 + \sigma_3 b'^3 + \cdots) \\ &\qquad\qquad \times \log\left[\frac{216(7-4\sqrt{3})}{b'}\right] \\ &+ \left(\rho_0 + \rho_1 b' + \rho_2 b'^2 + \rho_3 b'^3 + \cdots\right) \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \sigma_0 = 1 & \rho_0 = -\pi \\ \sigma_1 = \frac{5}{18} & \rho_1 = \frac{-17+4\sqrt{3}}{18} \\ \sigma_2 = \frac{205}{1296} & \rho_2 = \frac{-879+236\sqrt{3}}{1296} \\ \sigma_3 = \frac{68145}{629856} & \rho_3 = \frac{-321590+90588\sqrt{3}}{629856} \end{cases}$$

となる. 弱場の最低次の項は (5) 式の Einstein 項と一致するが, 強場の最低次の項を見てみると

$$\hat{\alpha}_{0th\ order}(b') + \pi = \log\left[\frac{216(7-4\sqrt{3})}{b'}\right] \tag{10}$$

である.(6) 式の Darwin 項と比較すると,$-b'$ だけ一致しないが, 光球半径のごく近傍では両式は一致する.

3 Results

曲がり角の近似式と (4) 式の数値計算との誤差を以下のグラフに示す.

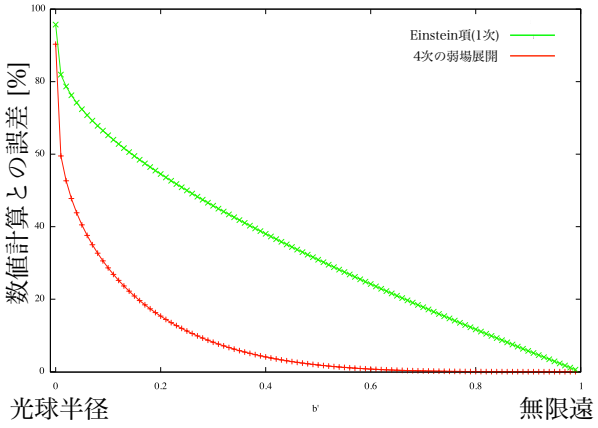


図 1: 弱場近似と数値計算との誤差

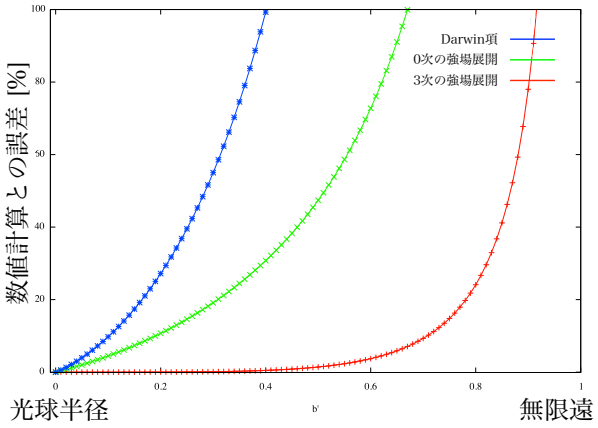


図 2: 強場近似と数値計算との誤差

このグラフから b' の値が大きくなると,(10) 式に比べ Darwin 項の誤差が大きくなることがわかる.

図 3 の 2 本のグラフが交差する点は $b' \approx 0.47$ で誤差は約 1.6% である. よって (8) 式と (9) 式を用いることで誤差 2% 以内で無限遠から光球半径近傍までを表すことができる.

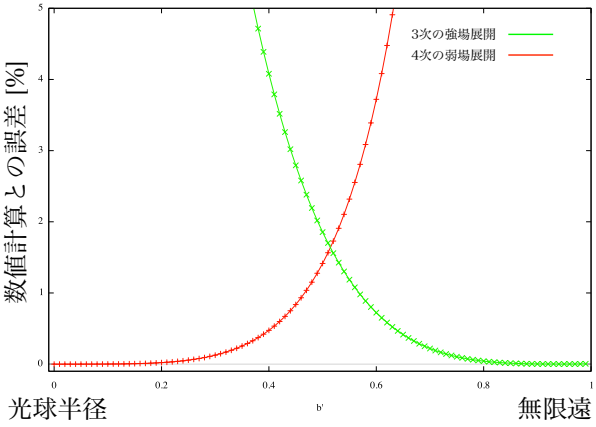


図 3: Iyer & Petters (2007) による弱場・強場近似と数値計算との誤差

4 Conclusion

2.2, 2.3 節ではそれぞれパラメータを近似してから積分を計算していたため, 展開次数を上げるとより複雑な計算をしなくてはならなかった. しかし Iyer & Petters (2007) では楕円積分の級数展開を用いて積分を実行するため, 系統的に任意の展開次数に上げることができる. 数値計算と Iyer & Petters (2007) の近似式との誤差を見てみると, 強場に関しては最低次の項と Darwin 項とは光球近傍では一致するが,b' がより大きいところでは Iyer & Petters (2007) の最低次の項がより精度良く表すことができている. 4 次の弱場近似と 3 次の強場近似を合わせることで, これまで解析的に求められなかった強い重力場中を通る光の曲がりを表せた. これによりブラックホールの近くを通る光といった Schwarzschild 半径の数〜十数倍の距離を通る光の曲がりを解析的に調べることができる.

Reference

S. V. Iyer, A. O. Petters. 2007.
Gen. Relativ. Gravit. 39, 1563-1582

V. Bozza. 2002. Phys. Rev. D. 66, 103001

C. Darwin. 1959. Proc. R. Soc. London A249, 180

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

N 体シミュレーションで探る弱重力レンズ効果に対するバリオンの影響

大里　健（東京大学大学院理学系研究科）

Abstract

弱重力レンズ効果は直接観測が困難なダークマター、ダークエネルギーに関わる情報を引き出すことを可能にする。将来観測において、さらなる広視野、深さでの撮像観測を基にした重力レンズ効果観測が予定されており、宇宙論のさらなる精密化が期待される。そこで、我々はダークマターに加えバリオンによる物理を考慮した宇宙論的 N 体シミュレーションを実行し、模擬観測から求めた重力レンズ統計量に対する影響を評価した。バリオンによる効果（特に feedback や冷却）は小スケール ($l \gtrsim 7000$) で強く現れることを確かめた。また収束場のピークの数密度についても考察する。

1 Introduction

宇宙背景放射（CMB）観測を始めとした様々な観測によって、ダークマター、ダークエネルギー、バリオンを宇宙の構成要素とする ΛCDM 模型は宇宙の進化を記述するモデルとして確固たる地位を獲得した。しかしながら、これで宇宙の謎が全て解けたわけではない。特にダークマター、ダークエネルギーの正体は未だ解明されておらず、宇宙論が抱えている大きな課題の一つである。弱重力レンズ効果観測はこれらの問題を解決できる可能性を秘めている。先述の CMB 観測と比較して、重力レンズ効果はダークエネルギーの性質に対して鋭敏であり、重力場の影響を直接観測できるのでダークマターの性質にも迫ることが出来る。来る将来観測においても、重力レンズ効果を利用した宇宙論のさらなる拡張が期待されている。

これまで重力レンズ効果による理論的研究 (Hu & Tegmark 1999; Takada et al. 2004) とその実践的観測（例えば CFHTLens: Kilbinger et al. (2013)）は大きな成功を収めてきた。一方で、これらの研究からさらに踏み込んで、将来観測がもたらす高い統計精度を最大限活かし、宇宙論を構成するためには標準の冷たいダークマター（CDM）に加え、バリオンによる効果といった副次的効果をも考慮に入れて議論する必要がある。

一口にバリオンの物理と言っても種類は様々であり、効果の及ぶスケールや大きさにも開きがある。例えばバリオンの物理として、adiabatic pressure、輻射冷却、星形成や Feedback などが挙げられる。これらの効果はハロー単体や銀河形成においてダークマターによる重力の作用に加えて影響を及ぼすことが研究されてきた。(Martizzi et al. 2012, 2013; Duffy et al. 2010; Okamoto et al. 2008) これら比較的小スケールの議論は活発になされてきたが、重力レンズ観測の想定する大規模な宇宙に対する影響の評価は困難であった。ただし、ハローを全て NFW profile に従うと見做し、concentration parameter を人為的に上げることでバリオンの効果を擬似的に取り入れた研究 (Yang et al. 2013)、限定的にバリオンの効果を入れてシミュレーションに基づく研究 (Jing et al. 2006; Semboloni et al. 2011) は行われてきた。そこで本研究ではバリオンの物理を考慮した大規模 N 体シミュレーションを実行し、その重力レンズ効果に対する影響を多様な統計量で比較することを目的とした。

重力レンズの観測で実際に得られる情報は光の非等方な歪みに関わる物理量である shear γ_1, γ_2 である。さらに、この二つから等方な拡大・縮小を表す convergence κ が得られる。特に convergence は質量のゆらぎと強い相関があり、convergence がピークとして現れる場所には一定の割合でハローが存在することが知られている。(Hamana, Takada & Yoshida 2004) 本研究ではより精密に、バリオン物理を考慮した N 体シミュレーションのデータを用いて、模擬観測によって得られた convergence からその統計量を議論する。

2 Numerical simulations

この章では、重力レンズで用いられるシミュレーション手法について解説する。

2.1 N-body simulations

N 体シミュレーションは宇宙の物質分布を多数の点に置き換えて、その時間発展を追うことで各時刻における物質分布を得る手法である。広い領域の宇宙の物質分布を一挙に得られる上、非線形な構造成長を追跡することがで可能なため、大規模構造を詳細に調べることが出来る。十分初期の宇宙であれば、ゆらぎはほぼ線形領域にあるので、初期条件としてべき則に従うマターのパワースペクトル $P_{\rm init}(k) \propto k^{n_s}$ を与えればよい。また同じパワースペクトルを再現する初期粒子の配位を変えてシミュレーションを何度も行えば、統計誤差を減らすことが出来る。N 体シミュレーションを利用する大きな利点の一つである。

本研究では Okamoto, Shimizu & Yoshida (2014) に基づいたバリオン物理の入った N 体シミュレーションを行った。上で述べたダークマターのみの重力進化を追う標準の N 体シミュレーションに加え、バリオン粒子を加え圧力の効果を再現する。さらに高密度の領域ではバリオン粒子が星に変換され、星形成の効果も取り入れる。ただし、生成された星は一定時間で超新星として爆発を起こすが、その熱エネルギーをまわりの粒子に与えるということは行わない。最後に、バリオン粒子と星粒子に対しては金属量に応じて輻射冷却によってエネルギーを失う。高密度の部分は冷却によってさらに密度コントラストが強まることになる。妥当性を検討するため stellar mass function を求め、観測値 (Baldry et al. 2012) と比較する。これは行ったシミュレーションの解像度が低いため、質量の小さいところでは観測値と相違が大きい。一定以上の質量（$M \gtrsim 10^{10} M_\odot$）ではある程度一致する。これ以上の一致を実現するためには、AGN feedback など不定性の高い feedback 機構を入れる必要がある。本研究では CDM のみ、CDM+Baryon (圧力のみ)、CDM+Baryon の三種類のシミュレーションを行った。

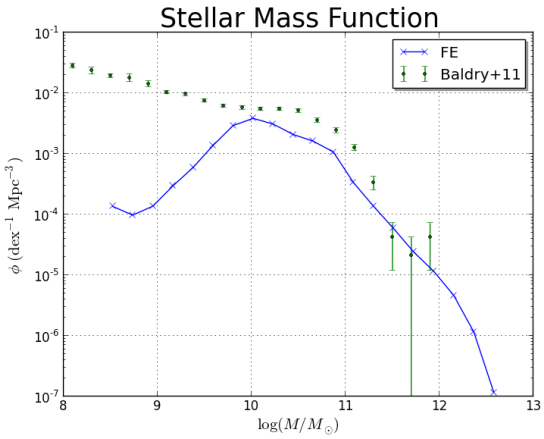


図 1: stellar mass function 青の実線が今回行った N 体シミュレーションによるデータを表す。

2.2 Ray-tracing simulations

弱重力レンズ効果とは、遠方銀河などの光が大規模構造の重力によって軌道が歪められる現象である。この軌道を記述する方程式は一般相対論で導かれる測地線方程式である。しかし、弱い重力レンズ効果においては、宇宙全体に分布するハローの重力場をもとに測地線方程式を直接解くことはほぼ不可能である。ここで、光線の湾曲があまり大きくないことを利用して近似を用いる。ここで用いる近似法は Ray-tracing 法 (Hamana & Mellier 2001) と呼ばれるものである。この手法は光の伝播する領域を何個かに区切り、一つ一つに含まれる質量を一つの面に射影する。光はその有限の面密度をもった面を通過するときのみ光線が湾曲するものとする。ここで具体的に定式化を行う。シミュレーション領域を n 分割し n 枚の面を作る。視線方向を y として i 番目の面の射影された質量ゆらぎを $\delta_i^{\rm proj}$ を次のように定義する。

$$\delta_i^{\rm proj}(x_1, x_2) = \int_{y_{i-1}}^{y_i} dy \delta(x_1, x_2, y) dy \qquad (1)$$

$\delta = \rho/\bar{\rho} - 1$ は三次元の質量ゆらぎである。n 番目の面における光線の位置 $\boldsymbol{\theta}^n$ は

$$\boldsymbol{\theta}^n = \boldsymbol{\theta}^1 - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{f(\chi_n - \chi_i)}{a(\chi_i) f(\chi_n)} \nabla_\perp \Psi^i \qquad (2)$$

χ_i は i 番目の面の共動距離であり、$f(\chi)$ は角径距離である。平坦宇宙（$K = 0$）の場合、$f(\chi) = \chi$ であ

る。レンズポテンシャル Ψ^i は次式で定義される。

$$\nabla^2\Psi^i(x_1,x_2) = \frac{8\pi G\bar{\rho}}{3c^2}\delta_i^{\rm proj}(x_1,x_2) = 3\Omega_{\rm m}\left(\frac{H_0}{c}\right)^2\delta_i^{\rm proj}(x_1,x_2) \quad (3)$$

実際のシミュレーションから作った $\delta_i^{\rm proj}$ から Fourier 変換を施してレンズポテンシャルを求める。optical-tidal matrix U_i と distortion tenser A_n を次のように定義して

$$U_i = \begin{pmatrix} \Psi^i_{,11} & \Psi^i_{,12} \\ \Psi^i_{,21} & \Psi^i_{,22} \end{pmatrix}$$

$$A_n = \begin{pmatrix} 1-\kappa-\gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1-\kappa+\gamma_1 \end{pmatrix}$$

これらは通常積分を通して結びつくが、今の近似では面における和に置き換えられて

$$A_n = I - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{f(\chi_i)f(\chi_n-\chi_i)}{a(\chi_i)\chi_n}U_iA_i \quad (4)$$

結果として、N 体シミュレーションのデータから convergence、shear そして曲がり角を得ることが出来る。弱い重力レンズ効果は文字通り、光線の曲がりがそれほど大きくないため、良い近似法となる。以下に Ray-tracing 法を用いて N 体シミュレーションのデータから得られた convergence の図を示す。

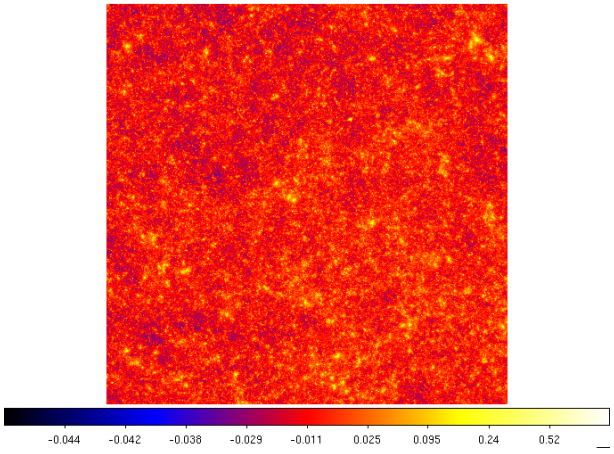


図 2: κ map 一辺は 5 度の領域に対応する。

3 Results

ここではシミュレーションによって得られた convergence の統計量に関して議論する。

3.1 Power spectrum

重要な統計量である convergence のパワースペクトルを調べた。パワースペクトルとは Fourier mode の振幅であり、対応するスケールのゆらぎの大きさを示している。パワースペクトル $P_\kappa(l)$ の定義は次の式で与えられる。

$$\langle\kappa(\tilde{\boldsymbol{l}})\kappa(\tilde{\boldsymbol{l'}})\rangle = (2\pi)^2\delta(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{l'})P_\kappa(l) \quad (5)$$

パワースペクトルは CDM のみの N 体シミュレーションから fitting formula がよく調べられている。以下の図に今回のシミュレーションで得られたパワースペクトルと Takahashi et al. (2012) による HALOFIT のパワースペクトルを示す。

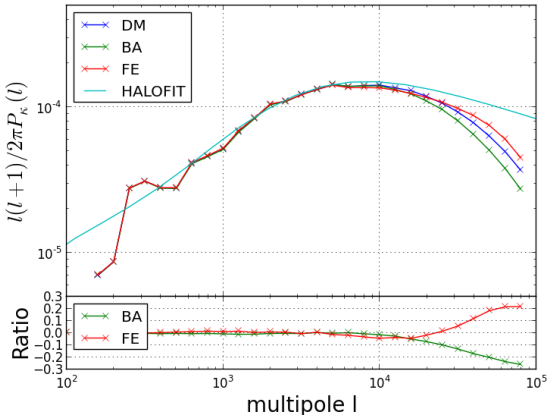


図 3: κ power spectrum

この図から $l \lesssim 7000$ の大スケールではほとんど変化は見られない。しかし $l \gtrsim 7000$ ではバリオンの効果が現れている。圧力のみのシミュレーション（緑の実線）では $l \gtrsim 10000$ の領域で圧力によってゆらぎが抑えられているのが見て取れる。一方 feedback 入りのシミュレーション（赤の実線）では $l \lesssim 7000$ で feedback によってパワースペクトルの値は下がるが、$l \gtrsim 20000$ の小スケールになると今度は冷却による効果でスペクトルの値は上がる。

3.2 Peak statistics

ピーク密度も宇宙論パラメータに依存する。以下にそれぞれのシミュレーションについてピーク密度を示す。横軸は intrinsic noise で normalize した convergence の値であるが、率直にはピークの大きさである。それぞれのシミュレーションにおいて変化は見られるものの、後述のようにエラーバーに埋もれるので影響を観測から評価することは難しい。しかし、ピークのある場所にハローを探す cluster search の観点から見れば、バリオンが強く影響しないということを意味する。

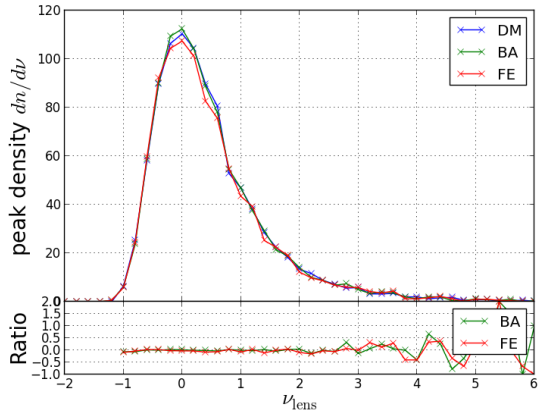


図 4: peak statistics

4 Conclusion

バリオンが弱重力レンズ効果に与える影響を定量的に評価するため、N 体シミュレーションと Ray-tracing シミュレーションを行った。バリオンによる効果は、大規模構造の質量分布を大きく変えるほどではないため大スケールにおいては影響は小さく、これまで考えられてきた ΛCDM 模型における構造形成に矛盾しない。しかしながら、バリオンは個々のハローの質量分布を変化させることは可能である。特に星形成や冷却による効果で中心部の密度が増大する。この描像はパワースペクトルの小スケールの挙動からも支持される。小スケールでの変化は将来観測でも検証可能な値にあり、宇宙論パラメータの決定にも影響を与えることが考えられる。

convergence のピークに対してはピークの数密度は若干の変化があるものの、エラーバーに埋もれてしまう。これは convergence に smoothing をかけたことによる。上述の通り、バリオンの影響は小さいスケールに効くため、smoothing をかけると変化がならされてしまうためである。

現時点では power spectrum とピークに関する統計量に対してのみ考察した。高次統計量（Minkowski functionals (Kratochvil et al. 2012; Shirasaki & Yoshida 2014) など）を調べると、さらに宇宙論的な情報を引き出せる可能性がある。

Acknowledgement

本研究を行うにあたり、東京大学大学院物理学専攻の白崎正人氏、吉田直紀教授、また東京大学大学院天文学専攻の清水一紘博士研究員には、多くの助言と有益な議論をしていただきました。この場を借りて感謝申し上げます。

Reference

Hu, W., & Tegmark, M., 1999, *ApJL*, **514**, 65

Takada, M., & Jain, B., 2004, *MNRAS*, **348**, 897

Kilbinger, M. et al., 2013, *MNRAS*, **430**, 2200

Martizzi, D. et al., 2012, *MNRAS*, **422**, 3081

Martizzi, D. et al., 2013, *MNRAS*, **432**, 1947

Duffy, A. et al., 2010, *MNRAS*, **405**, 2161

Okamoto, T. et al., 2008, *MNRAS*, **385**, 161

Yang, X. et al., 2013, *Phys. Rev. D*, **87**, 023511

Jing, Y. et al., 2006, *ApJL*, **640**, L119

Semboloni, E. et al., 2011, *MNRAS*, **417**, 2020

Hamana, T. et al., *MNRAS*, **350**, 893

Okamoto, T. et al., 2014, ArXiv:1404.7579

Baldry, I., K. et al., 2012, *MNRAS*, **421**, 621

Hamana, T., & Mellier, Y., 2001, *MNRAS*, **176**, 169

Takahashi, R. et al., 2012, *ApJ*, **761**, 152

Kratochvil, J. et al., 2012, *Phys. Rev. D*, **85**, 103513

Shirasaki, M., & Yoshida, N., 2014, *ApJ*, **786**, 43

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

弱い重力レンズ効果の 3 点統計による宇宙論解析

橋本　一彦 (京都大学大学院 理学研究科)

Abstract

銀河や銀河団の分布が示す構造である宇宙の大規模構造には、初期宇宙の物理や、宇宙の構成成分できまるパターンが含まれている。統計量からこのパターンを読み取れば、ダークマターやダークエネルギーの正体、一般相対論は正しいのか、といった宇宙の標準モデルが内包する謎に迫る手がかりとなる。この大規模構造の情報を読み取る手法の一つとして、銀河の弱い重力レンズ効果を用いた宇宙論解析に注目する。銀河の弱い重力レンズ効果とは、銀河から放出された光が観測者に届くまでに、その間の物質が作る重力場によって曲げられ、光源となる銀河の像が歪んで観測される現象である。特に、弱い重力レンズ効果と、銀河の密度分布の 3 点統計は、弱い重力レンズ効果の持つ利点を活かしながら、従来の主流であった 2 点統計と独立な宇宙論的情報が得られる新しい手法として期待できる。この統計量を実際の観測データを用いた宇宙論解析に応用していくための理論計算や、期待される成果について説明する。

1　Introduction

宇宙の始まりと進化の歴史を追う宇宙論研究は、宇宙の標準モデルの確立により多くの観測事実を説明できるようになった。しかし、この標準モデルの予言に従うと、宇宙はダークマターやダークエネルギーなど、構成成分の大部分が未知の物質であるという重大な謎が現れる。また、そもそも標準モデルの前提条件である原始ゆらぎのガウス性や、一般相対論は正しいのか、という疑問もいまだ払拭されていない。これらの問題は宇宙論研究のみならず、基礎物理学全体の大問題といえる。

宇宙の大規模構造には、初期宇宙の物理や、宇宙の構成成分できまるパターンが含まれており、このパターンに含まれる豊かな情報を読み取れば、上記の問題に迫る手がかりとなる。現在世界中で、高精度の大規模構造の統計データを得るために広視野サーベイが立案・稼働しており、国内でもすばる望遠鏡を用いた SuMIRe（Subaru Measurement of Image and Redshifts）プロジェクトが進行中で、将来的に質・量ともに優れた観測データが得られると期待されている。この優れたデータを最大限に活用するために、精密理論計算を用いた新しい宇宙論解析の手法を確立する必要がある。ここでは、そのような宇宙論解析の一つとして、弱い重力レンズ効果と銀河の密度分布の 3 点統計を用いた手法を紹介する。

2　Methods

観測される銀河の像は、観測者との間の天体が作る重力ポテンシャルの重力レンズ効果によって、実際の形から歪められている。弱い重力レンズ効果を考える場合には、一つ一つの銀河の歪みは小さく、元々の銀河固有の形と区別ができない。しかし、統計的に異なる銀河の像を重ね合わせることで重力レンズ効果による歪みの効果を抽出する事ができる。このようにして抽出される重力レンズ効果を特徴づける観測量として、convergence:κ と shear:γ_1, γ_2 がある。κ は像の拡大、縮小をあらわし、γ_1, γ_2 は像の変形の効果を表している。これらは測地線方程式を解く事で求める事ができ、観測者と光源となる銀河の間の物質密度ゆらぎを $\delta_m(\chi, \boldsymbol{\theta}, z)$ とすると次のようになる。ただし、$\chi, \boldsymbol{\theta}, z$ はそれぞれ、comuving distance、天球面上の 2 次元角度座標、赤方偏移であり、平坦な時空を仮定する。

$$\kappa(\boldsymbol{\theta}) = 4\pi G \int_0^{\chi_s} d\chi \frac{(\chi_s - \chi)\chi}{\chi_s} \times a^2(z(\chi))\bar{\rho}(z(\chi))\delta_m(\chi, \boldsymbol{\theta}, z(\chi)) \tag{1}$$

shear は convergence をフーリエ変換した $\kappa(\boldsymbol{l})$ を用いて次のように書くことができる。

$$\kappa(\boldsymbol{l}) = \int d\Omega\kappa(\boldsymbol{\theta})e^{-i\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{\theta}} \tag{2}$$

$$\gamma_1(\theta) = \int \frac{d^2\boldsymbol{l}}{(2\pi)^2}\kappa(\boldsymbol{l})\cos(2\varphi)e^{i\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{\theta}} \tag{3}$$

$$\gamma_1(\theta) = \int \frac{d^2\boldsymbol{l}}{(2\pi)^2}\kappa(\boldsymbol{l})\sin(2\varphi)e^{i\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{\theta}} \tag{4}$$

この重力レンズ効果と、銀河密度ゆらぎ $\delta_g(\chi,\boldsymbol{\theta})$ の三点相関を考えたい。これは、次のように定義されるバイスペクトルによって表される。

$$< \delta_g(\boldsymbol{l}_1)\kappa(\boldsymbol{l}_2)\kappa(\boldsymbol{l}_3) > \equiv (2\pi)^2 B_{\kappa\kappa g}(l_1,l_2,l_3)\delta_{2D}(\boldsymbol{l}_1+\boldsymbol{l}_2+\boldsymbol{l}_3) \tag{5}$$

$$< \delta_g(\boldsymbol{l}_1)\delta_g(\boldsymbol{l}_2)\kappa(\boldsymbol{l}_3) > \equiv (2\pi)^2 B_{\kappa gg}(l_1,l_2,l_3)\delta_{2D}(\boldsymbol{l}_1+\boldsymbol{l}_2+\boldsymbol{l}_3) \tag{6}$$

ここで、$<\ >$ は統計平均を意味する。shear も convergence で表す事ができるので、簡単のためここからは重力レンズ効果は convergence で代表して表すことにする。この、天球面上での２次元のバイスペクトル $B_{\kappa\kappa g}, B_{\kappa gg}$ は、３次元の物質密度ゆらぎ δ_m と銀河密度ゆらぎ δ_g で定義される３次元のバイスペクトル

$$(2\pi)^3 B_{mhh}\delta_{3D}\left(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{k}''\right) \equiv \langle\delta_m\left(\boldsymbol{k},z\right)\delta_h\left(\boldsymbol{k}',z'\right)\delta_h\left(\boldsymbol{k}'',z''\right)\rangle \tag{7}$$

$$(2\pi)^3 B_{mmh}\delta_{3D}\left(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{k}''\right) \equiv \langle\delta_m\left(\boldsymbol{k},z\right)\delta_m\left(\boldsymbol{k}',z'\right)\delta_h\left(\boldsymbol{k}'',z''\right)\rangle \tag{8}$$

を用いて次のように表される。

$$B_{\kappa hh}(\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{l}_2,\boldsymbol{l}_3) = W_\kappa\left(z\right)\left(\frac{H(z)}{\chi^2\left(z\right)}\right)^2 \times B_{mhh}\left(\frac{\boldsymbol{l}_1}{\chi\left(z\right)},\frac{\boldsymbol{l}_2}{\chi\left(z\right)},\frac{\boldsymbol{l}_3}{\chi\left(z\right)},z\right) \tag{9}$$

$$B_{\kappa\kappa h}(\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{l}_2,\boldsymbol{l}_3) = \left(\frac{W_\kappa\left(z\right)H(z)}{\chi^2\left(z\right)}\right)^2 \times B_{mmh}\left(\frac{\boldsymbol{l}_1}{\chi\left(z\right)},\frac{\boldsymbol{l}_2}{\chi\left(z\right)},\frac{\boldsymbol{l}_3}{\chi\left(z\right)},z\right) \tag{10}$$

導出の際に、リンバー近似を用いた。

B_{mhh}, B_{mmh} を精密に計算するために、integrated Perturbation Theory(iPT) という手法を用いる。これは、バイスペクトルなどの統計量を、線形理論で記述できる初期物質密度ゆらぎを用いて系統的に計算する手法であり、高次の自己相互作用を自動的に取り入れる事ができる。以下でその手法を簡単に説明する。κ や δ_g を、線形密度ゆらぎ δ_L の関数だと考え、次のようにテイラー展開を行う。

$$\begin{aligned}\delta_X\left(\boldsymbol{x}\right) = & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int d^3x_1d^3x_2\cdots d^3x_n \\ & \times K_n\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n\right) \\ & \times\delta_L\left(\boldsymbol{x}_1\right)\delta_L\left(\boldsymbol{x}_2\right)\cdots\delta_L\left(\boldsymbol{x}_n\right)\end{aligned} \tag{11}$$

ここで δ_X は、κ や δ_g など、任意の物質密度ゆらぎのバイアスされた関数であるとする。この表式にフーリエ変換を施すと、

$$\begin{aligned}\delta_X\left(\boldsymbol{k}\right) = & \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\frac{d^3k_1}{\left(2\pi\right)^3}\frac{d^3k_2}{\left(2\pi\right)^3}\cdots\frac{d^3k_n}{\left(2\pi\right)^3} \\ & \times\left(2\pi\right)^3\delta_{3D}\left(\boldsymbol{k}_{12\cdots n}-\boldsymbol{k}\right)K_n\left(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\cdots,\boldsymbol{k}_n\right) \\ & \times\delta_L\left(\boldsymbol{k}_1\right)\delta_L\left(\boldsymbol{k}_2\right)\cdots\delta_L\left(\boldsymbol{k}_n\right)\end{aligned} \tag{12}$$

となる。ただし、$\boldsymbol{k}_{12\cdots n}\equiv\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2+\cdots+\boldsymbol{k}_n$ である。この表式を用いて、バイスペクトルなどの多点相関を計算する場合には、次のような形で自己相互作用が現れる。

$$\begin{aligned}<\delta_X(\boldsymbol{k})\delta_Y(\boldsymbol{p})\cdots> = & \cdots\cdots \\ & + \frac{1}{n!}\int\frac{d^3k_1}{\left(2\pi\right)^3}\frac{d^3k_2}{\left(2\pi\right)^3}\cdots\frac{d^3k_n}{\left(2\pi\right)^3}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\int\frac{d^3k'_1}{\left(2\pi\right)^3}\frac{d^3k'_2}{\left(2\pi\right)^3}\cdots\frac{d^3k'_n}{\left(2\pi\right)^3} \\ & \times\left(2\pi\right)^3\delta_{3D}\left(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_{12\cdots n}-\boldsymbol{k}'_{12\cdots m}\right) \\ & \times K_{n+m}\left(\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n,\boldsymbol{k}'_1,\cdots,\boldsymbol{k}'_m\right)\langle\delta_L\left(\boldsymbol{k}'_1\right)\delta_L\left(\boldsymbol{k}'_2\right)\cdots\delta_L\left(\boldsymbol{k}'_m\right)\rangle \\ & \times\cdots<\delta_L(\boldsymbol{k}_1)\cdots\delta_L(\boldsymbol{k}_n)\delta_L(\boldsymbol{p}_1)\cdots> + \cdots\cdots\end{aligned} \tag{13}$$

$\langle\delta_L\left(\boldsymbol{k}'_1\right)\delta_L\left(\boldsymbol{k}'_2\right)\cdots\delta_L\left(\boldsymbol{k}'_m\right)\rangle$ は m 次の自己相互作用の寄与を表している。iPT においては、この自己相互作用の高次の寄与を正確に取り入れるため、multi-point propagators: $\Gamma_X^{(n)}(\boldsymbol{k}_1\cdots\boldsymbol{k}_n)$ を導入する。

$$\left(2\pi\right)^{3-3n}\delta_{3D}\left(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_{12\cdots n}\right)\Gamma_X^{(n)}\left(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\cdots,\boldsymbol{k}_n\right) = \left\langle\frac{\delta^n\delta_X\left(\boldsymbol{k}\right)}{\delta\delta_L\left(\boldsymbol{k}_1\right)\delta\delta_L\left(\boldsymbol{k}_2\right)\cdots\delta\delta_L\left(\boldsymbol{k}_n\right)}\right\rangle \tag{14}$$

この式の右辺の $\langle\ \rangle$ 内の δ_X を式（12）でテイラー展開し、$\frac{\delta\delta_L(\boldsymbol{k}_j)}{\delta\delta_L(\boldsymbol{k}_i)} = \delta_{3D}(\boldsymbol{k}_j - \boldsymbol{k}_i)$ として計算すると、テイラー展開の各項で n 個の積分が実行できる。よって式（14）は次のように変形される。

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^{3-3n}\,\delta_{3D}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_{12\cdots n})\,\Gamma_X^{(n)}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\cdots,\boldsymbol{k}_n)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3n}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\int\frac{d^3k_1'}{(2\pi)^3}\frac{d^3k_2'}{(2\pi)^3}\cdots\frac{d^3k_n'}{(2\pi)^3}\\
&\times\ (2\pi)^3\,\delta_{3D}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_{12\cdots n}-\boldsymbol{k}'_{12\cdots m})\\
&\times\ K_{n+m}(\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n,\boldsymbol{k}_1',\cdots,\boldsymbol{k}_m')\\
&\times\ \langle\delta_L(\boldsymbol{k}_1')\,\delta_L(\boldsymbol{k}_2')\cdots\delta_L(\boldsymbol{k}_m')\rangle \qquad (15)
\end{aligned}$$

この式を用いると、式 (13) は次のように変形できる。

$$\begin{aligned}
&<\delta_X(\boldsymbol{k})\delta_Y(\boldsymbol{p})\cdots>\\
&= \cdots\cdots + \frac{1}{n!}\int\frac{d^3k_1}{(2\pi)^3}\cdots\frac{d^3k_n}{(2\pi)^3}\\
&\times(2\pi)^3\delta_{3D}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_{12\cdots n})\,\Gamma_X^{(n)}(\boldsymbol{k}_1\cdots\boldsymbol{k}_n)\\
&\times\cdots<\delta_L(\boldsymbol{k}_1)\cdots\delta_L(\boldsymbol{k}_n)\delta_L(\boldsymbol{p}_1)\cdots> + \cdots\cdots \qquad (16)
\end{aligned}$$

よって、各ダイアグラムの自己相互作用の寄与は、$\Gamma_X^{(n)}(\boldsymbol{k}_1\cdots\boldsymbol{k}_n)$ を用いることで取り入れられる。この iPT の手法を用いて、式（9）, (10) を計算し、式 (5) , (6) に代入することでバイスペクトルを求める。

3 Results

密度ゆらぎが完全にガウス分布に従う場合、3 点統計は値を持たない。従って、バイスペクトルは重力による非線形成長により生成される非ガウス性や、インフレーション時に生成される密度ゆらぎがもつ原始非ガウス性によって生成される。原始非ガウス性はいくつかのタイプに分類でき、特に非線形パラメータ:f_{NL}, g_{NL} を用いて原始曲率ゆらぎ $\Phi(\boldsymbol{x})$ が

$$\begin{aligned}
\Phi(\boldsymbol{x}) =&\Phi_G(\boldsymbol{x}) + f_{NL}(\Phi_G^2(\boldsymbol{x}) - <\Phi_G^2(\boldsymbol{x})>)\\
&+ g_{NL}\Phi_G^3(\boldsymbol{x}) \qquad (17)
\end{aligned}$$

という形で書ける時、この原始非ガウス性を local type と呼ぶ著者 C. (2013)。ここで、$\Phi_G(\boldsymbol{x})$ はガウス分布に従う。local type の非ガウス性による線形密度ゆらぎのバイスペクトル、トライスペクトルを計算すると、

$$\begin{aligned}
B_L(k_1,k_2,k_3) =& 2f_{NL}M(k_1)M(k_2)M(k_3)\\
&\times[P_\Phi(k_1)P_\Phi(k_2) + P_\Phi(k_2)P_\Phi(k_3)\\
&+ P_\Phi(k_1)P_\Phi(k_3)] \qquad (18)\\
T_L(k_1,k_2,k_3,k_4) =& M(k_1)M(k_2)M(k_3)M(k_4)\\
&\times\Big\{6g_{NL}[P_\Phi(k_1)P_\Phi(k_2)P_\Phi(k_3) + 3perms]\\
&+\frac{25}{9}\tau_{NL}[P_\Phi(k_1)P_\Phi(k_2)P_\Phi(|\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_3|)\\
&+ 11perms]\Big\} \qquad (19)
\end{aligned}$$

となる。ここで一般に、$\tau_{NL} \geq 36f_{NL}^2/25$ であり、P_Φ は原始曲率ゆらぎのパワースペクトルで、線形密度ゆらぎのパワースペクトル P_L と次のような関係で結ばれる。

$$\begin{aligned}
\delta_L(k) &= M(k)\,\Phi(k) \qquad (20)\\
M(k) &= \frac{2}{3}\frac{D(z)}{D(z_*)(1+z_*)}\frac{k^2T(k)}{H_0^2\Omega_{m0}} \qquad (21)\\
P_L(k) &= M(k)^2\,P_\Phi(k) \qquad (22)
\end{aligned}$$

local type の non-gausianity の下で、iPT の手法を用いて式（5）, (6) を計算すると、次のような結果が得られる。

$$\begin{aligned}
&B_{XYZ}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)\\
&= B_{grab}^{tree} + B_{bis}^{tree} + B_{tris} + B_{grab}^{loop,1} + B_{grab}^{loop,2}\\
&+ B_{bis}^{loop,1} + B_{bis}^{loop,2} + B_{bis}^{loop,3} + \cdots \qquad (23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{grav}^{tree} =&\Gamma_X^{(1)}(\boldsymbol{k}_1)\,\Gamma_Y^{(1)}(\boldsymbol{k}_2)\,\Gamma_Z^{(2)}(-\boldsymbol{k}_1,-\boldsymbol{k}_2)\\
&\times P_L(k_1)\,P_L(k_2) + 2perms \qquad (24)\\
B_{bis}^{tree} =&\Gamma_X^{(1)}(\boldsymbol{k}_1)\,\Gamma_Y^{(1)}(\boldsymbol{k}_2)\,\Gamma_Z^{(1)}(\boldsymbol{k}_3)\,B_L(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3) \qquad (25)\\
B_{tris} =&\frac{1}{2}\Gamma_X^{(1)}(\boldsymbol{k}_1)\,\Gamma_Y^{(1)}(\boldsymbol{k}_2)\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\Gamma_Z^{(2)}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}_3-\boldsymbol{p})\\
&\times T_L(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}_3-\boldsymbol{p}) + 2perms \qquad (26)
\end{aligned}$$

$B_{grab}^{loop,1}$ 以降の計算結果は省くが、これらも iPT により求める事ができる。図 1 は、$X = Y = Z = g$

としてこれらの式を計算したものである。この図から、non-linearity parameter が十分大きければ、large scale で B_{tris}, B_{bis}^{loop} などの高次の項が大きな寄与を持ち、これらを正確に取り入れる必要がある事がわかる。

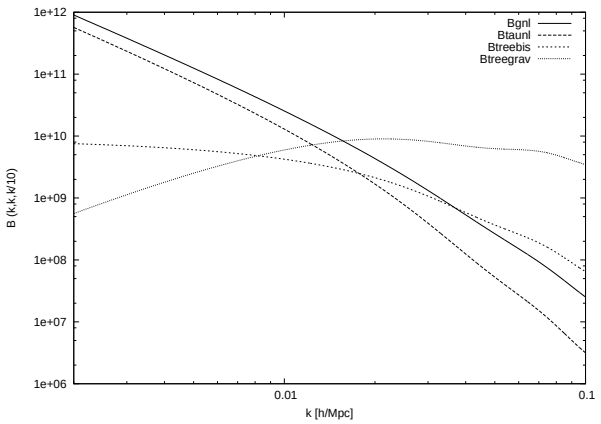


図 1: $B_{tris} = B_{gnl} + B_{\tau nl}, B_{bis}^{tree}, B_{grav}^{tree}$ の波数依存性

4 Discussion

弱い重力レンズ効果の 3 点統計を宇宙論解析に応用するためには、式 (23) が求めたい宇宙論的情報にどのような依存性を持つか調べる必要がある。特に、原始非ガウス性については、式 (23) に、B_bis, B_tris などの項が現れる事から、このような原始非ガウス性を表す項を持たない既存の 2 点統計による方法よりも高い感度が期待できる。また、弱い重力レンズ効果は次の三つの特徴を持つ。

1. ダークマター等も含めた全質量に対して感度を持つ事

弱い重力レンズ効果は、すべての重力相互作用する物質により引き起こされるので、対象となる銀河と観測者の間のダークマター等も含めた全質量から寄与を受ける。したがって、観測できる銀河の分布と全質量の分布を関係づける銀河バイアスの不定性を、他の観測量と相関をとることで正確に評価し、銀河バイアスに含まれる宇宙論的情報を読み取る事ができる。

2. 宇宙膨張に対して感度を持つ事

弱い重力レンズ効果によって、光は時空の幾何学的構造を反映した軌跡を通る。宇宙膨張は時空そのものを引き延ばすので、この幾何学的構造を変化させ、弱い重力レンズ効果に影響を及ぼす。したがって、弱い重力レンズ効果を検出することで宇宙膨張に対する情報が得られ、ダークエネルギーの性質や重力理論の修正について調べることができる。

3 . トモグラフィーにより制度を向上できる事

弱い重力レンズ効果においては、同じレンズ天体の影響を受けていれば、異なる赤方偏移にある銀河の歪みでも相関を持つ。したがって、複数の赤方偏移で行った観測を組み合わせて統計データを稼ぎ、精度を向上させるトモグラフィーという手法を用いる事ができる。

したがって、弱い重力レンズ効果の 3 点統計は、非ガウス性以外の宇宙論的情報に関しても、既存の方法と独立な高精度の解析が期待できる。

Reference

Yokoyama et all, 2014, Physical Review D, Volume 89, Issue 4, id.043524, (arXiv:1310.4925)

Ligouri et all, Advances in Astronomy, 2010, article id. 980523, (arXiv:1001.4707)

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

Wormhole solutions in KGB framework

Rotondo Marcello（名古屋大学大学院　理学研究科）

Abstract

In this work we will look for wormhole solutions to the Einstein field equations in the contest of the Kinetic Gravity Braiding model. This model allows the introduction of interactions up to the second derivative order for the scalar field that do not lead to higher orders in the equation of motion, opening to a wide range of new dynamical features. We will consider a particular subclass of KGB models, i.e. the conformal galileon, giving one example of its capability to violate the null energy condition as required for wormholes. We will numerically solve Einstein field equations in this framework and show some preliminary results.

1 Introduction

Wormholes represent a class of solutions to Einstein field equations (EFE) that refer to a topological feature of the space-time in which distant regions of the same universe (or different universes) are connected. The metric for a wormhole in its static, spherically symmetric form can be expressed as

$$ds^2 = -e^{-2\Phi(r)}dt^2 + dr^2 + R(r)^2 d\Omega^2 \qquad (1)$$

with $\Phi(r)$ and $R(r)$ generic functions of the radius r referred to as "redshift function" and "shape function", respectively.

It can be shown that the wormhole solution requires a stable violation of the *null energy condition* (NEC)

$$T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0 \qquad (2)$$

where k^μ and k^ν are any two future-oriented timelike vectors.

Usually the stable violation of NEC brings to ghost degrees of freedom, gradient instabilities (imaginary speed of sound), etc. There is nevertheless a class of theories that allow this violation. In this work, we consider one of its simplest and yet large subclasses, a minimally coupled set of models that doesn't require any direct coupling with the Riemann tensor: the Kinetic Gravity Braiding (KGB) models.

2 Kinetic Gravity Braiding

The kinetic braiding constitutes a large class of scalar-tensor models with interactions containing second derivatives of the scalar field but not leading to additional degrees of freedom in the equation of motion. For the sake of simplicity, from now on we will consider a radial scalar field $\phi(r)$ and the Lagrangian in the form

$$L = K(\phi, X) + G(\phi, X)\nabla^\mu\nabla_\mu\phi \qquad (3)$$

where $X = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$ and $K(\phi, X)$, $G(\phi, X)$ are generic functions.

The term kinetic braiding comes from the presence in the Lagrangian of the term $G(\phi, X)\nabla^\mu\nabla_\mu\phi$ where, due to the presence of the Cristoffel symbol in the covariant d'Alembertian operator, there is a coupling between the derivative of the metric and the derivative of the field.

An other form for the Lagrangian is obtained through integration by parts of the scalar field contribution to the action and leads to

$$P = K - \left[\left(\nabla^\lambda \phi\right) \nabla_\lambda\right] G = K - 2X * G_\phi - G_X \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda X \tag{4}$$

where the presence of the $G_X \neq 0$ term is the reason why this model deviates from the k-essence model and displays peculiar features. From the physical point of view, this is reflected in a deviation from the perfect fluid behavior.

The equation of motion for the scalar field is

$$P_\phi - \nabla_\mu \left(\left(L_X - G_\phi\right) \nabla^\mu \phi - \nabla^\mu G\right) = 0 \tag{5}$$

The energy momentum tensor for the scalar field is

$$T_{\mu\nu} = L_X \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} P - \nabla_\mu G \nabla_\nu \phi - \nabla_\nu G \nabla_\mu \phi \tag{6}$$

We observe that both the equation of motion and the EMT contain second derivatives of the field and the metric, so that the system is not diagonal in the second order. This kinetic braiding is therefore essential and cannot be diagonalized through a conformal transformation.

2.1 Conformal galileon NEC violation

An example of NEC violation allowed by the kinetic mixing between the scalar field and the metric tensor in the KGB framework is given by the bouncing model for a spatially flat Friedmann universe. The study of this kind of model may be useful in order to understand the current accelerated expansion of the universe as well as the inflation mechanism. One of these models is the *conformal galileon*, which is a KGB model with the arbitrary functions $G(\phi, X)$ and $K(\phi, X)$ set to

$$K(\phi, X) = -2f^2 e^{2\phi} X + \frac{2f^3}{\Lambda^3} X^2 \tag{7}$$

$$G(\phi, X) = \frac{2f^3}{\Lambda^3} X \nabla^\mu \nabla_\mu \phi \tag{8}$$

where Λ and f are constants with mass dimension one. It can be shown [3] that all the evolution trajectories for this model that have bounced in the past, passing from a phase of contraction to a phase of expansion, will also eventually approach and cross the boundary where the speed of sound vanishes $c^2 = 0$ and becomes imaginary, leading to NEC violation.

There is the possibility that this bouncing solution may in future studies be related with wormhole dynamics as well. The Schwarzschild solution to EFE is the first and simplest wormhole solution [4]. It represents a non-traversable wormhole, since the size of its throat is not stable: as time passes it expands from zero throat circumference to a maximum circumference radius where it bounces and contracts again to zero circumference. There is the possibility that an inverted G-Bounce solution may be applied to this kind of dynamics.

3 Results

Einstein field equations for a static and spherically symmetric wormhole solution with a metric of the form (1) in the case of a scalar field obeying to the galileon KGB lagrangian introduced above constitute a system of three second order differential equations in three variables ($R(r), \Phi(r)$ and $\phi(r)$), to which the equation of motion is to be added. It is possible to show that the differentiation of the pure radial Einstein field equation is automatically satisfied by the other equations, so it can be taken as a constraint equation. Furthermore, the redshift function $\Phi(r)$ appears only on the first and second order of derivation. With the substitution $\Phi'(r) \to u(r)$, the system reduces to two second order differential equations in $R(r)$ and $\phi(r)$, one in the first order of $u(r)$ and one constraint equation.

Referring to the two regions connected by the wormhole as '-' and '+', the boundary conditions

at r=0 are simply given by:

$$R_{\pm}(0) = R_0 \tag{9}$$

$$R'_{\pm}(0) = 0 \tag{10}$$

$$u_{\pm}(0) = 0 \tag{11}$$

$$\phi_{\pm}(0) = \phi_0 \tag{12}$$

$$\phi'_{\pm}(0) = \pm\phi'_0 \tag{13}$$

where the value ϕ'_0 is fixed solving the constraint equation at r=0. Preliminary results are represented in the attached graphs.

4 Discussion

The metric is Minkovski at infinity, as it is expected to be. The shape function $R(r)$ doesn't vanish as the origin of the wormhole is approached, leading to a finite-size throat and therefore possibly to a traversable wormhole. The solution for the $\Phi(r)$ function is asymmetric, showing that the features of wormholes (in particular the "flow of time" which the redshift function accounts for) may actually be different [4] depending on which region the observer is placed in. Last, the scalar field vanishes at infinity and is non-vanishing inside the wormhole. It doesn't show symmetry for inversion of the radial coordinate, leading to different energy distributions on the two external regions.

5 Conclusion

The results obtained, though preliminary, are coherent with a wormhole solution. Our future work will be directed to the quest for more general solutions for the KGB model with looser restrictions on the form of the Lagrangian than those assumed in this work. Furthermore, the possible application of the G-bounce model to non-traversable wormholes shall be investigated.

6 Figures

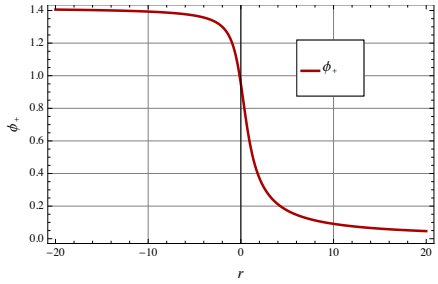


図 1: $\phi(r)$

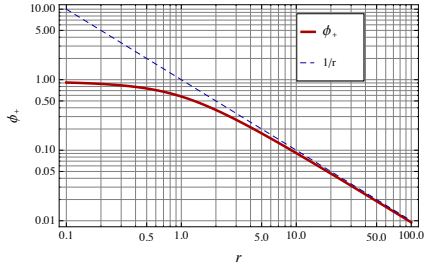


図 2: $\phi_+(r)$

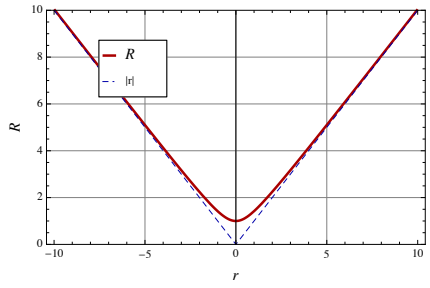


図 3: $u_+(r)$

Acknowledgement

I wish to thank Dr.Yoo Chulmoon (Nagoya Univ.) and Prof.Tsutomu Kobayashi (Tokyo Univ.) for

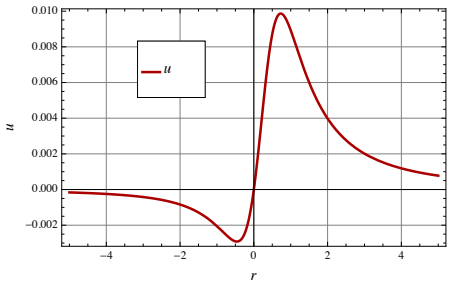


図 4: $u(r)$

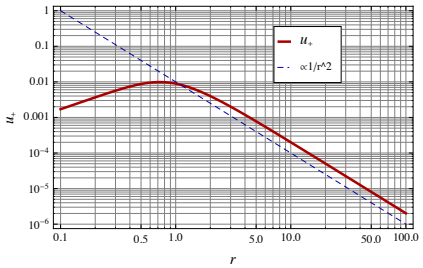


図 5: $u_+(r)$

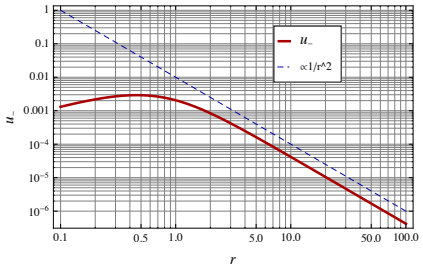


図 6: $u_-(r)$

their guidance and collaboration.

Reference

C.Deffayet, O.Pujolas, I.Sawicki 2010. JCAP 1010:026

M.S.Morris, K.S.Thorne 1988. Am.J.Phys 56(5)

D.A.Easson,I.Sawicki and A.Vikman 2011. JCAP11(2011)021

M.Visser 1996. AIP Press, American Institute of Physics

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

Cylindrical Thin Shell Wormhole の安定性に関する考察

矢久間 司 (大阪市立大学大学院 理学研究科)

Abstract

ワームホールとはある時空と別の時空が繋がれた構造を指し、そのような構造が考えられた頃から通過可能性、すなわちエネルギーが正の物質が通過した際に構造が消滅しないのかという議論が行われてきたが、研究の前提となるワームホールの構造は、計算の容易さから球対称なものが選ばれがちで、円筒対称なワームホールを研究した例は少ない。
本講演では二つの時空が円筒対称 Shell で繋がれたワームホールを紹介した後、Shell にエネルギーと圧力を与えた場合ワームホールの安定・不安定が決まるという事を、Shell のエネルギーと圧力を時空の計量から求める段階から確認し、最後にエネルギー密度が正で十分通過可能な計量を紹介する。

1 Setup

時空は静的かつ円筒対称とするから計量は対称軸や円周、時間には依らない。ここで $\pm$ は領域を区別するための符号である。

$$\begin{aligned} ds^2 = &-e^{2\gamma_\pm(r_\pm)}dt_\pm^2 + e^{2\alpha_\pm(r_\pm)}dr_\pm^2 \\ &+e^{2\xi_\pm(r_\pm)}dz_\pm^2 + e^{2\beta_\pm(r_\pm)}d\phi_\pm^2 \end{aligned} \tag{1}$$

timelike な ShellΣ は r 座標一定面に分布し、Shell の固有時 τ で測ると r 座標値は変動する。

$$r = a(\tau) \tag{2}$$

一方で Shell 上の計量 ds_Σ^2 は (3) 式のようになる。

$$ds_\Sigma^2 = -d\tau^2 + e^{2\xi(a)}dz^2 + e^{2\beta(a)}d\phi^2 \tag{3}$$

(1) 式に (2) 式を代入したものとの比較で τ と t の関係も分かる。

2 Extrinsic Curvature

外的曲率を考えるために法線ベクトルを定義するその為に (4) のような関数を考える。

$$H = r - a(\tau) \tag{4}$$

H の値が変化すれば Shell の位置が変わり、Shell の跡は層状になる。Shell 上の各点は層から層へと移動したのだが、その方向は層に対し垂直である。よって法線ベクトル n_a は (5) 式となる。

$$n_a^{(\pm)} = \left(\pm \left| g^{bc} \frac{\partial H}{\partial x^b} \frac{\partial H}{\partial x^c} \right|^{\frac{1}{2}} \frac{\partial H}{\partial x^a} \right)_\Sigma \tag{5}$$

次に法線ベクトルの方向に座標軸を 1 つ取り、残りの Shell 上の方向に適当に座標を張ることを考える。計量は射影子 $h_{\mu\nu}$ を用いて次のように表すことができる。ちなみに射影子とは法線方向の成分を 0 にするような作用素で、$h_{ab} = g_{ab} - \epsilon n_a n_b$ である。

$$ds^2 = dY^2 + h_{\mu\nu}dX^\mu dX^\nu \tag{6}$$

法線ベクトルが spacelike なので $\epsilon = 1$ とした。Y は Shell から突き抜けた座標軸で、$\{X^\mu\}$ 系は Shell の上に張られた座標系つまり、$\{\tau, z, \phi\}$ 系なのである。Y も含めて $\{X^\mu\}$ 系と呼ぶことにすれば、初めに時空の円筒対称性に従って設定した $\{t, r, z, \phi\}$ 系との間に座標変換の規則が成り立つ。以降 $\{t, r, z, \phi\}$ 系を $\{x^\mu\}$ 系と略す。
外的曲率は法線ベクトルを Shell に沿って移動させた時、どれくらい Shell に平行な成分が変化したのかを見た量であるから添字は Shell 上の変数の添字で、法線ベクトルの間の変換則すなわち座標変換則が分かれば数式による定義は (7) 式で与えられる。

$$K_{\mu\nu}^{(\pm)} = -n_\rho^{(\pm)} \left(\frac{\partial^2 x_\pm^\rho}{\partial X_\pm^\mu \partial X_\pm^\nu} + \Gamma^\rho_{\pm\alpha\beta} \frac{\partial x_\pm^\alpha}{\partial X_\pm^\mu} \frac{\partial x_\pm^\beta}{\partial X_\pm^\nu} \right)_\Sigma \tag{7}$$

3 Einstein Equation

考えている時空のリーマンテンソルとリッチテンソルは、埋め込んでいる Shell 上のそれらと、Shell の外的曲率とを用いて次のように書ける。これをガウス・コダッチ方程式と呼ぶ。
ここで D_a は Shell の中で行う共変微分を表し、上付きの括弧の中に (D) や $(D-1)$ と書いたのは、時空の量か Shell 上の量かの区別である。

$$R^{(D-1)}_{abcd} = h^i_a h^j_b h^k_c h^l_d R^{(D)}_{ijkl} + \epsilon \left(K_{ac}K_{bd} - K_{bc}K_{ad}\right) \tag{8}$$

$$h^b_a n^{c(D)} R_{bc} = D_b K^b_a - D_a K \tag{9}$$

リッチテンソルとリッチスカラーから求められるアインシュタインテンソルは、$\{X^\mu\}$ 系で成分ごとに見ると 3 種類に分けることができる。

$$\begin{aligned} G_{ab}n^a n^b &= \kappa^2 T_{ab} n^a n^b \\ G_{ab}h^a_c n^b &= \kappa^2 T_{ab} h^a_c n^b \\ G_{ab}h^a_c h^b_d &= \kappa^2 T_{ab} h^a_c h^b_d \end{aligned} \tag{10}$$

上二つにガウス・コダッチ方程式を適用したものは次のようになる。

$$\begin{aligned} 2G^{(D)}_{ab} n^a n^b &= -\epsilon^{(D-1)} R + K^2 - K_{ab}K^{ab} \\ &= 2\kappa^2 T_{ab} n^a n^b \end{aligned} \tag{11}$$

$$D_b K^b_a - D_a K = R^{(D)}_{bc} h^c_a n^b = \kappa^2 T_{bc} h^c_a n^b \tag{12}$$

しかしこれは保存則で運動を表すには不充分である。そこで（8）の三つ目について考察し、法線ベクトルの方向に沿った Y に関するリッチテンソルの二階微分方程式、すなわち発展方程式を導く。
まず Shell 近傍の層から層へと移る状況を設定する。まず計量を (8) 式のように表す。

$$ds^2 = \epsilon N^2 dY^2 + h_{\mu\nu}\left(dX^\mu + N^\mu dY\right)\left(dX^\nu + N^\nu dY\right) \tag{13}$$

さらにリー微分の定義を用いて、外的曲率を射影子で表す。

$$\mathcal{L}_U V^\mu = U^\nu \nabla_\nu V^\mu - V^\nu \nabla_\nu U^\mu \tag{14}$$

$$K_{ab} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_n h_{ab} \tag{15}$$

(11) 式両辺に h^{bd} を掛ける。

$$\begin{aligned} R^{(D-1)}_{ac} &= h^i_a h^{jl} h^k_c R^{(D)}_{ijkl} + \epsilon\left(K_{ac}K - K_{bc}K^b_a\right) \\ &= \nabla_a\left(h^i_a h^k_c R^{(D)}_{ik} - h^i_a h^k_c \epsilon n^j n^l R^{(D)}_{ijkl}\right) \\ &\quad + \epsilon\left(K_{ac}K - K_{bc}K^b_a\right) \end{aligned} \tag{16}$$

ここで右辺の最後から二つ目の項は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} h^i_a h^k_c n^j n^l R^{(D)}_{ijkl} &= R^{(D)}_{abcd} n^b n^d \\ &= n^b\left(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a\right) n_c \\ &= \nabla_a\left(n^b \nabla_b n_c\right) - \left(\nabla_a n^b\right)\left(\nabla_b n_c\right) \\ &\quad - n^b \nabla_b \nabla_a n_c \end{aligned} \tag{17}$$

ここで (18) 式を用いると、(17) 式はリー微分を用いた (19) 式の形に書ける。

$$\nabla_a n_b = K_{ab} - n_a D_b \ln N \tag{18}$$

$$\begin{aligned} &h^i_a h^k_c n^j n^l R^{(D)}_{ijkl} \\ &= -\epsilon N^{-1} D_a D_c N - \mathcal{L}_n K_{ac} + K^b_a K_{bc} \end{aligned} \tag{19}$$

この (19) 式を (16) 式に代入し移項すると (20) 式となる。アインシュタイン方程式を用いてエネルギー・運動量テンソルで書くと (21) 式になる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n K_{ac} =& 2K_{ab}K^b_c - KK_{ac} - \epsilon N^{-1} D_a D_c N \\ &+ \epsilon R^{(D-1)}_{ac} - \epsilon h^b_a h^d_c R^{(D)}_{bd} \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n K_{ac} &= 2K_{ab}K^b_c - KK_{ac} - \epsilon N^{-1} D_a D_c N \\ &\quad + \epsilon R^{(D-1)}_{ac} - \epsilon\kappa^2\left(h^c_a h^d_b T_{cd} - \frac{1}{D-2} h_{ab} T\right) \end{aligned} \tag{21}$$

当初のアインシュタイン方程式 (10) は、(11) 式、(12) 式そして (21) 式へと分解された。ここで考えている状況を思い出すと、Shell に垂直に spacelike な方向に立つ方向を n に選んで座標を張るのだから、$\epsilon = 1$ で、$N = 1, N_i = 0$ の場合に相当する。具体的にその状況で、今関心のある (21) 式を書くと (22) 式になる。

$$R^{(D)}_{\mu\nu} = -\partial_Y K_{\mu\nu} - KK_{\mu\nu} + 2K^\alpha_\mu K_{\nu\alpha} + R^{(D-1)}_{\mu\nu} \tag{22}$$

4 Israel's Junction Condition

Shell は − で表した領域にも + にもあり、それぞれを Σ_-、Σ_+ と区別する。2 つの領域を張り合わせ、ワームホールの構造を持たせると、− と + で表したそれぞれの領域が timelike な Shell で隔てられる。Shell に垂直に立ち − 領域から + 領域へ向かう座標が Y であると考えられるから、Σ の位置を $Y = 0$ としたとき次の式で表される量が Shell のエネルギーや圧力である。

$$S_{\mu\nu} = \int_{-\delta}^{\delta} T_{\mu\nu} dY \tag{23}$$

前のセクションで紹介した法線方向の発展方程式を、$Y = 0$ 近傍で積分すると、左辺と右辺第一項のみが残り次の式が書ける。

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{-\delta}^{\delta} R^{(D)}_{\mu\nu} dY = -\lim_{\delta\to 0}\int_{-\delta}^{\delta} \partial_Y K_{\mu\nu} dY \tag{24}$$

右辺はただ差を取るだけである。エネルギー・運動量テンソルで書けば (25) 式となる。

$$\lim_{\delta\to 0}\left[K_{\mu\nu}\right]^{\delta}_{-\delta} = -\kappa^2 \lim_{\delta\to 0}\int_{-\delta}^{\delta}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{D-2}h_{\mu\nu}T\right)dY \tag{25}$$

よってイスラエルの接続条件が導かれる。
ここで (25) 式の左辺は $[K_{\mu\nu}]^-$ と略した。

$$[K_{\mu\nu}]^- = -\kappa^2\left(S_{\mu\nu} - \frac{1}{D-2}h_{\mu\nu}S\right) \tag{26}$$

(26) 式に $h^{\mu\nu}$ をかけると (27) 式を得る。

$$[K]^- = \frac{\kappa^2}{D-2}S \tag{27}$$

これを用いて、接続条件は次のようにも書く。

$$[K_{\mu\nu} - h_{\mu\nu}K]^- = -\kappa^2 S_{\mu\nu} \tag{28}$$

Shell の円筒対称性から $S^{\mu}_{\nu} = \kappa^2 diag(\sigma, P_z, P_\phi)$ と直ちに Shell のエネルギー密度と圧力に対応する。
具体的に初めに与えていたような時空の計量を入れて計算を進めると次のようになる。ドットは τ 微分である。

$$\sigma = -\left[\left(\xi'_+ + \beta'_+\right)\sqrt{\Delta_+} + \left(\xi'_- + \beta'_-\right)\sqrt{\Delta_-}\right] \tag{29}$$

$$\begin{aligned} P_z = &\frac{\left(\ddot{a} + \left(\alpha'_+ + \gamma'_+\right)\dot{a}^2 + e^{-2\alpha_+}\gamma'_+\right)}{\sqrt{\Delta_+}} \\ &+ \frac{\left(\ddot{a} + \left(\alpha'_- + \gamma'_-\right)\dot{a}^2 + e^{-2\alpha_+}\gamma'_-\right)}{\sqrt{\Delta_-}} \\ &+ \beta'_+\sqrt{\Delta_+} + \beta'_-\sqrt{\Delta_-} \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} P_\phi = &\frac{\left(\ddot{a} + \left(\alpha'_+ + \gamma'_+\right)\dot{a}^2 + e^{-2\alpha_+}\gamma'_+\right)}{\sqrt{\Delta_+}} \\ &+ \frac{\left(\ddot{a} + \left(\alpha'_- + \gamma'_-\right)\dot{a}^2 + e^{-2\alpha_+}\gamma'_-\right)}{\sqrt{\Delta_-}} \\ &+ \xi'_+\sqrt{\Delta_+} + \xi'_-\sqrt{\Delta_-} \end{aligned} \tag{31}$$

計量は Shell で連続だから ± の符号は取り去っていい。

$$\sigma = -2\left(\xi' + \beta'\right)\sqrt{\Delta}] \tag{32}$$

$$\begin{aligned} P_z = &\frac{2\left(\ddot{a} + \left(\alpha' + \gamma'\right)\dot{a}^2 + e^{-2\alpha}\gamma'\right)}{\sqrt{\Delta}} \\ &+ 2\beta'\sqrt{\Delta} \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} P_z = &\frac{2\left(\ddot{a} + \left(\alpha' + \gamma'\right)\dot{a}^2 + e^{-2\alpha}\gamma'\right)}{\sqrt{\Delta}} \\ &+ 2\xi'\sqrt{\Delta} \end{aligned} \tag{34}$$

ここで $\Delta_\pm = e^{-2\alpha_\pm} + \dot{a}^2$ である。

5 Potential

ポテンシャル問題は考えるにおいて、P_z と P_ϕ は σ の関数で与えられているものとする。これらの式より、圧力をエネルギー密度の関数で与えたとき、$\dot{a} = 0, \ddot{a} = 0$ となる平衡点 $a = a_0$ での議論をあたかも一粒子のポテンシャル問題のように扱うことができる。(32) 式の変形により $\dot{a}^2 + V(a) = 0$ の形に書くことができるし、(33) 式と (34) 式に圧力を表す関数が対応することで、エネルギー密度が完全に a の関数であることが分かる。ちなみに平衡点でのポテンシャルは次のように書ける。

6 参考文献

Stability of generic cylindrical thin shell wormholes(S. Habib Mazharimousavi, M. Halilsoy, Z. Amirabi)

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

高赤方偏移クェーサーが 21cm 線パワースペクトルに与える影響

前田 康太郎 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙はビッグバンから現在までの間に再結合と再イオン化という 2 回の相転移を経験してきたことが観測的事実として知られている．再結合期の物理に関しては宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) などの観測により理解が進んでいるが，再イオン化期の物理については観測的に確かめられるに至っておらず，多くの観測計画によって今後明らかになることが期待されている．

再イオン化期の情報を得る手段として，21cm 線 [1] の観測がある．21cm 線とは，再イオン化期以前の宇宙に大量に存在した中性水素原子が持つ超微細構造のエネルギー準位間の遷移に伴って放出される光である．その 21cm 線観測の手法は主にふたつあり，ひとつは，中性水素ガスから放射される 21cm 線と CMB の強度差である輝度温度の観測，もうひとつは，クェーサーなどの電波で明るい高赤方偏移天体からの放射光が中性水素ガスを通る際に現れる吸収線 (21cm forest) の観測である．

21cm forest の観測は高赤方偏移にある強い電波源の分布に大きく依存している．理論的には，赤方偏移 z∼10 以前で $900\,\mathrm{deg}^2$ に数百個程度存在することが示唆されているが，これらの電波源の検出には次世代観測機器でも 1 年もの期間を要すると推定されており，先行研究 [2] では電波源分布に関して赤方偏移 z∼4 以下までしか観測的制限が得られていないのが現状である．そのため，高赤方偏移の電波源を効率よく観測するためには，より多くの高赤方偏移の電波源が存在するであろう領域を特定することが望まれる．

今回の発表では，高赤方偏移天体分布が輝度温度のパワースペクトルに与える影響を準解析的・数値的に考察し，直近の観測計画によって高赤方偏移天体分布を探った論文 [3] をレビューする．

1 Theoretical Background

1.1 Notation

ここでは，レビュー論文で用いられている表記について述べる．フーリエ変換の表式を次で与える．

$$\widetilde{f}(\mathbf{k}) = \int d^3x\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \tag{1}$$

また円柱座標を用いて，視線方向，すなわち赤方偏移方向の成分を $k_\parallel \equiv |k_\mathrm{z}|$ とし，これに垂直な成分を $k_\perp \equiv \sqrt{k_\mathrm{x}^2 + k_\mathrm{y}^2}$ とする．物理量 A の共動体積 V におけるパワースペクトルは

$$P_\mathrm{A} = \frac{1}{V}\langle|\widetilde{\Delta A}|^2\rangle \tag{2}$$

と定義する．また共動体積 V における物理量 A と B に関する相互パワースペクトルは

$$P_\mathrm{A,B} = \frac{1}{V}\langle\widetilde{\Delta A}\widetilde{\Delta B}^*\rangle \tag{3}$$

と定義する．ここで

$$\Delta A = A - \langle A\rangle \tag{4}$$

である．また，視線方向に沿った共動長さ L の円柱における物理量 A のパワースペクトルは

$$P_\mathrm{A}^\mathrm{LoS}(k_\mathrm{z}) = \frac{1}{L}\int dz dz' \Delta A(z)\Delta A(z') e^{ik_z(z-z')} \tag{5}$$

と定義する．無次元量のパワースペクトルは

$$\Delta^2(k) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2}P(k) \tag{6}$$

と定義する．

1.2 The Forest's Modification

ここでは，背景天体が 21cm 線のパワースペクトルに与える影響について考察する．ある赤方偏移 z

における天空の温度は，スピン温度 $T_{\rm s}$，CMB の温度 $T_{\rm CMB}$，前景放射の温度 $T_{\rm fg}$ を用いて

$$T_{\rm sky} = \frac{T_{\rm s}}{1+z}(1-e^{-\tau_{21}}) + \frac{T_{\rm CMB}}{1+z}e^{-\tau_{21}} + T_{\rm fg} \quad (7)$$

と表される．τ_{21} は高赤方偏移中性水素雲の光学的厚さであり，

$$\tau_{21} \approx 0.0092(1+\delta)(1+z)^{3/2}\frac{x_{\rm HI}}{T_{\rm S}}\left[\frac{H(z)/(1+z)}{dv_{||}/dr_{||}}\right] \quad (8)$$

と表される．

スピン温度 $T_{\rm s}$ は，中性水素の基底状態における超微細構造間のスピン遷移が起きる温度で，以下のように定義される．

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{g_1}{g_0}\exp\left(-\frac{h\nu_{21}}{k_{\rm B}T_{\rm s}}\right) \quad (9)$$

ここで 0 は陽子と電子のスピンが反平行状態，1 は陽子と電子のスピンが平行状態を表していて，n が各状態の状態数，g が各状態の縮退数を表している．

実際に我々が観測する温度は $T_{\rm sky}$ と $T_{\rm CMB}$ の差であり，これを“Differential Brightness Temperature”$\delta T_{\rm b}$ と呼ぶ．なお，前景放射に関してはその影響を無視できる領域のみを考えるとすると，$\delta T_{\rm b}$ には含まずに

$$\delta T_{\rm b} = \frac{T_{\rm s}-T_{\rm CMB}}{(1+z)}(1-e^{-\tau_{21}}) \approx \frac{T_{\rm s}-T_{\rm CMB}}{1+z}\tau_{21} \quad (10)$$

とできる．

背景天体の温度を $T_{\rm RL}$ としてその存在も考慮すると，ある赤方偏移 z における $T_{\rm sky}$ の表式は以下のように変化する．

$$T'_{\rm sky} = \frac{T_{\rm s}}{1+z}(1-e^{-\tau_{21}}) + \frac{T_{\rm CMB}}{1+z}e^{-\tau_{21}} + T_{\rm RL}e^{-\tau_{21}} + T_{\rm fg} \quad (11)$$

$T_{\rm RL}$ はその表式中に赤方偏移依存性を含ませている．これを用いて $\delta T_{\rm b}$ を表すと，近似的に

$$\delta T_{\rm b} \to \delta T'_{\rm b} \approx \delta T_{\rm b} - T_{\rm f} \quad (12)$$

となる．ここで，$T_{\rm f} = T_{\rm RL}\tau_{21}$ を“Forest Temperature”と呼ぶ．ここから，背景天体の存在によってパワースペクトルがどのように変化するかを見ることができる．

$$P_{\rm b} \to P'_{\rm b} = P_{\rm b} + P_{\rm f} - 2{\rm Re}(P_{\rm f,b}) \quad (13)$$

ここで，$P_{\rm b} \equiv P_{\delta T_{\rm b}}$，$P'_{\rm b} \equiv P_{\delta T'_{\rm b}}$，$P_{\rm f} \equiv P_{T_{\rm f}}$，$P_{\rm f,b} \equiv P_{{\rm f},\delta T_{\rm b}}$ である．

1.3 Forest Power Spectrum

ここで，$P_{\rm f}$ が $P'_{\rm b}$ へ与える影響を考えるために，$P_{\rm f}$ を各々の背景天体による自己パワースペクトル $P_{\rm j}$ と相互パワースペクトル $P_{\rm j,k}$ とに分解する．

$$P_{\rm f} = \frac{1}{V} < |\widetilde{T_{\rm RL}\tau_{21}}|^2 > = \sum_j P_{\rm j} + 2{\rm Re}\left(\sum_{j<k} P_{\rm j,k}\right) \quad (14)$$

ここで，背景天体がクラスタリングしていないと仮定すると，$P_{\rm j,k}$ は $P_{\rm f}$ に対して最大でも 10%の寄与しかないことが解析的に求まっているため，相互パワースペクトル $P_{\rm j,k}$ の寄与は無視する．また，全ての背景天体を分解できないと仮定すると，$P_{\rm f}$ を $k_{\parallel}$ の関数として表すことができる．

$$P_{\rm f} \approx \frac{cD_{\rm M}^2\lambda^4}{4k_{\rm B}^2}P_{\tau_{21}}^{\rm LoS}(k_{||}) \times \int_z^\infty \int_0^\infty s'^2\rho(z,z',s')\frac{D_{\rm M}^2(z')}{H(z)}dz'ds' \quad (15)$$

ここで，c は光速度，$D_{\rm M}$ は観測する背景天体までの共動距離，$\lambda = \lambda_{21}(1+z)$ は背景天体の中心で放射された 21cm 線を観測するときの波長，$k_{\rm B}$ はボルツマン定数，$P_{\tau_{21}}^{\rm LoS}(k_{||})$ は視線方向・赤方偏移方向に沿った τ_{21} の 1 次元パワースペクトル，s' は $\nu = \nu_{21}/(1+z)$ におけるフラックス，$\rho(z,z',s') \equiv \frac{dN}{ds'dV_{\rm c}}$ はある赤方偏移 z' における単位共動体積あたり，単位フラックスあたりの高赤方偏移電波源の数密度，$H(z)$ はハッブルパラメータである．$P_{\rm f}$ と $P_{\rm b}$ の比を図 1 に，また $P_{\rm f} - 2{\rm Re}(P_{\rm f,b})$ の大きさを図 2 に示す．

相互パワースペクトル $P_{\rm f,b}$ は解析的に表式を求めることが難しいため，$T_{\rm f}$ と $T_{\rm b}$ の物理的現象を考えることでその振る舞いを求める．$P_{\rm f,b}$ は以下の 2 つの物理量の相互パワースペクトルである．

$$\delta T_{\rm b} \approx 9x_{\rm HI}(1+\delta)(1+z)^{1/2} \times \left[1-\frac{T_{\rm CMB}}{T_{\rm s}}\right]\left[\frac{H(z)}{dv_{||}/dr_{||}}\right] \ {\rm mK} \quad (16)$$

$$T_{\rm f} \approx 0.009 x_{\rm HI}(1+\delta)(1+z)^{1/2}\frac{T_{\rm RL}}{T_{\rm s}}\left[\frac{H(z)}{dv_{||}/dr_{||}}\right] \ {\rm mK} \tag{17}$$

再イオン化期以前においては，$x_{\rm HI}$ がほぼ 1 に等しいために $\delta T_{\rm b}$ と $T_{\rm f}$ は $T_{\rm s}$ に支配される．大きな $T_{\rm s}$ に対しては大きな $\delta T_{\rm b}$・小さな $T_{\rm f}$，反対に小さな $T_{\rm s}$ に対しては小さな $\delta T_{\rm b}$・大きな $T_{\rm f}$ といったように，$\delta T_{\rm b}$ と $T_{\rm f}$ は負の相関関係にあるため，${\rm Re}(P_{\rm f,b})$ は負になる．よって再イオン化期以前においては，負の係数を考慮すると，理論的推測では ${\rm Re}(P_{\rm f,b})$ は 21cm 線パワースペクトルの振幅を上昇させるように働くことが期待される．一方再イオン化期においては，$T_{\rm s} \gg T_{\rm CMB}$ であるため，$\delta T_{\rm b}$ が $T_{\rm s}$ に依存しなくなる．よって，$\delta T_{\rm b}$ も $T_{\rm f}$ も $x_{\rm HI}$ について正の相関関係にあるため，${\rm Re}(P_{\rm f,b})$ は正になる．すなわち再イオン化期においては，負の係数を考慮すると，理論的推測では ${\rm Re}(P_{\rm f,b})$ は 21cm 線パワースペクトルの振幅を減少させるように働くと期待される。

2 Simulations

シミュレーションでは 21cmFAST[4] を用いて，WMAP[5] のデータに合うように再イオン化の歴史を設定し，スピン温度 $T_{\rm s}$ の発展を追った．銀河が放射する X 線の放射量は [6] で言及されている 3 つのモデルを用いた．fiducial モデルでは 1 個のバリオンに対し 0.2 個の光子，hot モデルでは 1 個のバリオンに対し 1 個の光子，cool モデルでは 1 個のバリオンに対し 0.04 個の光子が存在する．高赤方偏移電波源の分布については W08 モデル [7] を用い，CDM シミュレーションによってバイアスされた電波光度関数モデル C[8] を併用した．全天の中から合計で 900 deg^2 になるように 36 個の領域を選択し，CDM シミュレーションの結果得られるダークマターハローと共に高赤方偏移電波源を置いた．また，各ピクセルのフラックスを $S_{\rm pic}$，ピクセルを見込む角度を $\Omega_{\rm pic}$ とすると，あるピクセルの温度 $T_{\rm pic}$ は次で与えられる．

$$T_{\rm pic} = \frac{\lambda^2 S_{\rm pic}}{2k_{\rm B}\Omega_{\rm pic}} \tag{18}$$

これを用いて，近似的に $T_{\rm f} \approx T_{\rm pic}\tau_{21}$ と表すことができる．

3 Results

図 1 は $P_{\rm f}$ と $P_{\rm b}$ の比を表した図である．対角線は wedge[9][10] と呼ばれていて，wedge よりも右側の領域は前景放射が無視できなくなる領域である．$k_{||} \leq 0.1$ では $P_{\rm b}$ が支配的であり，$P_{\rm f}$ は $k_{||} \geq 0.5$ 程度の比較的小さなスケールで影響を及ぼしていることが判断できる．また，高赤方偏移・cool model ほど $P_{\rm f}$ が効いていることが分かる．赤方偏移 z が小さくなると $P_{\rm f}$ の効き方は減少していくが，これは吸収材である中性水素が電離されてしまうためである．

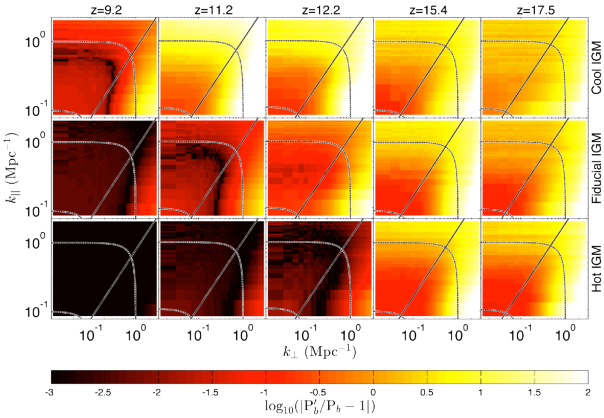


図 1: 21cm Power Spectrum に対する 21cm Forest の効き方．白色・黄色は 21cm Forest が効いている領域，黒色・赤色は 21cm Forest が効いていない領域を表している．[3] より引用．

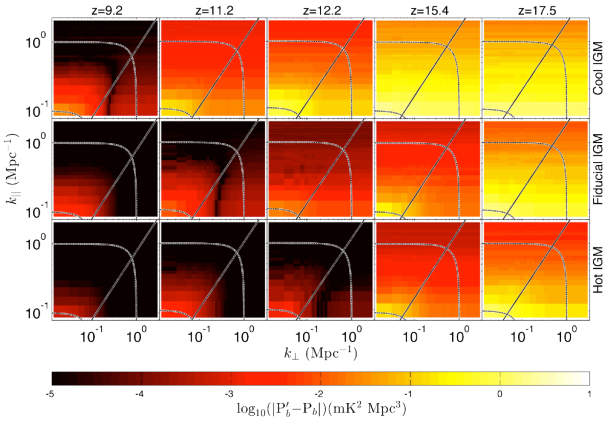


図 2: 21cm Power Spectrum に対する 21cm Forest Power Spectrum の大きさ．[3] より引用．

図 2 は $P_{\rm f} - 2{\rm Re}(P_{\rm f,b})$ の大きさを表した図である．高赤方偏移・cool model では一様な構造が見えるが，低赤方偏移・hot model では $k_\perp$ 方向の構造が見える．式 (15) の近似により $P_{\rm f}$ は $k_\parallel$ 方向の成分しか持たないため，$k_\perp$ 方向の構造は全て $P_{\rm f,b}$ の影響によるものである．つまり低赤方偏移・hot model では，$P_{\rm f,b}$ が 21cm 線パワースペクトルを支配している．$P_{\rm f}$ の影響が小さいスケールから大きなスケールへ伝播していく様子が図 1・2 から見ることができる．これは $P_{\rm f,b}$ の符号を表した図 3 で見られる，再イオン化が最初小さなスケールで起き，次第に大きなスケールに伝播していく様子と同様である．また，図 3 から，$P_{\rm f,b}$ に関する理論的推測は概ね正しかったことが判断できる。図 4 は $P'_{\rm b}$ の無次元パワースペクトルを計算した結果であり，21cm 線パワースペクトルに対する $P_{\rm f}$ の影響は $k \geq 0.5$ である小さいスケールで顕著になることが判断できる．

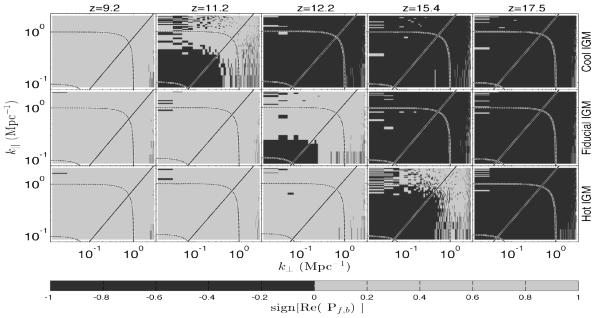


図 3: Cross Power Specrtum $P_{\rm f,b}$ の符号．灰色の領域が正を，黒色の領域が負を表している．再イオン化が始まると，$\delta T_{\rm b}$ と $T_{\rm f}$ の相関が負から正に変化していく様子が見える．また，再イオン化が始まるスケールが小さいことも判断できる．[3] より引用．

4 Conclusion

現行観測機器ではシグナル・ノイズ比が十分ではないために，図 1・図 2 などの円柱パワースペクトルは観測することはできない．しかし図 4 などの空間平均したパワースペクトルは観測することができるので，この空間平均したパワースペクトルの $k \geq 0.5$ 部分の立ち上がりを見ることができれば，その空間に背景天体が存在するかどうか確認できると考えられる．

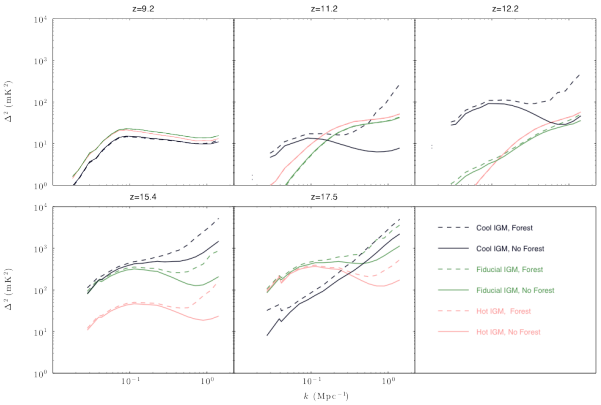


図 4: $P'_{\rm b}$ Dimensionless Power Specrtum．21cm Forest により小さいスケールにおいて特徴的な構造が作られることが判断できる．[3] より引用．

Acknowledgement

Special thanks to S.A, M.K, H.H, M.Y, J.O, Y.M, especially K.K.

Reference

[1] J. Pritchard and A. Loeb. 2012, arXiv:1109.6012

[2] De Zotti et al. 2010, arXiv:0908.1896

[3] A. Ewall-Wice et al. 2013, arXiv:1310.7936

[4] A. Mesinger et al. 2010, arXiv:1003.3878

[5] E. Komatsu et al. 2010, arXiv:1001.4538

[6] A. Mesinger et al. 2014, arXiv:1310.0465

[7] R. Wilman et al. 2008, arXiv:0805.3413

[8] C. Willott et al. 2000, arXiv:0010419

[9] H. Vedantham et al. 2013, arXiv:1306.2172

[10] M. Morales et al. 2012, arXiv:1202.3830

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

宇宙再電離と 21cm 線

吉浦　伸太郎 (熊本大学大学院 自然科学研究科)

Abstract

宇宙晴れ上がりののち、宇宙は天体が全く存在しない暗黒時代を迎えた。やがて初期の天体が形成され始め、周囲の水素を電離していった。この時代を宇宙再電離期 (EoR) という。再電離期は十分な観測がされておらず、この時代の物理はよくわかっていない。再電離期観測の手段として、中性水素の 21cm 線が考えられている。観測される輝度温度には、宇宙論的な情報と天体物理的な成分が入っている。電波干渉計による観測で、私たちは輝度温度のパワースペクトルを得る事ができる。21cmFAST では、再電離期の輝度温度を近似を用いて計算する準数値シミュレーションである。今回、この 21cmFAST を用いて 21cm power spectrum を計算し、さらに、power spectrum を成分ごとに分解して各成分の寄与を調べた。

1　Introduction

宇宙晴れ上がりののち、宇宙には天体は存在せず、わずかな揺らぎを持った水素が一面に広がっていた。この時代を暗黒時代という。やがて、重力による構造形成が進み、初期の天体が形成される。形成されたばかりの頃は、天体からの放射によって天体の周囲の中性水素だけがイオン化される。時間が経つにつれ、銀河等の大規模な宇宙の構造が作られていく。また、イオン化される領域は徐々に広がって、最後には宇宙全体がイオン化される。この時代を宇宙再電離と呼ぶ。

宇宙再電離期は未だ観測が十分になされていない。再電離期の終わり ($z \approx 7$) に関しては、これまでの観測で制限がなされてきた。しかし、それより High-z の時代を高い解像度で観測するには、観測周波数帯と基線長の大きな望遠鏡が必要である。再電離期観測では電波干渉計が用いられるが、現在、SKA という大型電波望遠鏡による High-z 観測計画が進んでいる。

再電離期観測には中性水素の 21cm 線が用いられる。直接観測されるのは CMB との差から定義する輝度温度であり、電波干渉計による観測で私たちは輝度温度の power spectrum を得る。

2　EoR physics

中性水素の陽子と電子のもつスピンの向きが平行であるか反平行であるかによって、エネルギー準位が異なる。これを中性水素の超微細構造といい、エネルギー準位の高い方 (スピン平行 数密度 n_1) から低い方 (反平行 数密度 n_0) へ遷移が起きる時、21cm 線が放射される。この 2 つの準位の数密度の比から、スピン温度 (T_S) が次のように定義される。

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{g_1}{g_0} exp(-\frac{h\nu_{21}}{kT_S}) \tag{1}$$

ここで g_i は自由度、k はボルツマン定数、h はプランク定数、ν_{21} は 21cm 線の周波数である。さらに、このスピン温度と CMB 温度の差から、輝度温度が次のように定義される。

$$\begin{aligned} \delta T_b(\nu) &= \frac{T_s - T_{CMB}}{1+z}(1 - e^{-\tau_{\nu_0}}) \\ &\approx 27 x_{HI}(1+\delta_{nl})(\frac{H}{dv_r/dr + H})(1 - \frac{T_\gamma}{T_s}) \\ &\quad \times (\frac{1+z}{10}\frac{0.15}{\Omega_M h^2})^{\frac{1}{2}}(\frac{\Omega_b h^2}{0.023}) mK \end{aligned} \tag{2}$$

ここで、T_{CMB} は CMB 温度、τ_{ν_0} は 21cm 線の optical depth である。式 (2) の中性度 x_{HI} と T_s は天体物理の寄与を反映する。また、水素の密度ゆらぎ δ_{nl} と dv_r/dr は宇宙論的に決まる。この 4 つの物理量が、21cm 線の power spectrum を決める重要な項である。

21cmFAST は、再電離期の宇宙を多くの近似を用いて計算する準数値シミュレーションである。近似を用いて流体シミュレーションに比べて計算コストを減らしている。21cmFAST では (2) 式をもとに輝度温度を計算する。考えたい領域をグリッドで区切り、区切られた各セルで計算する。いろいろな z で密度場、イオン化率、スピン温度、速度勾配についてそれぞれマップを計算する。そこから輝度温度の値を計算し、同様にマップを作る。

密度場については、Zel'Dovich 近似をもちいて計算し、セルごとに密度揺らぎの値を持たせる。この密度ゆらぎが、イオン化や T_S の計算に用いられる。

イオン化の計算は次のように行う。あるセルを中心にイオン化光子の mean free path 程度の半径の球を考える。その球の中で密度の大きいセルには天体があるとみなし、球全体の質量に対して、天体の質量が十分にあれば考えているセルはイオン化していると見なす。この操作を全セルについて行う。

スピン温度の計算は次の式を用いる。

$$T_S^{-1} = \frac{T_{CMB} + x_\alpha T_\alpha^{-1} + x_c T_K^{-1}}{1 + x_c + x_\alpha} \tag{3}$$

ガスの温度 T_K の計算は X-ray による加熱の効果を考え、時間発展の式を計算する。色温度 T_α はガス温度で近似する。x_c は衝突係数、x_α は Ly-α との結合定数である。

以上の計算をまとめて、輝度温度のマップを計算する。得られた輝度温度のマップから、21cm power spectram を以下の定義で計算する。

$$\Delta_{21}^2(k,z) = \frac{k^3}{2\pi V}\delta\bar{T}_b(z)^2\langle|\delta_{21}(k,z)|^2\rangle_k \tag{4}$$

ただし輝度温度のゆらぎを次のように定義する。

$$\delta_{21}(\mathbf{x},z) \equiv \frac{\delta T_b(\mathbf{x},z)}{\delta\bar{T}_b(z)} - 1 \tag{5}$$

さらに今回、私たちは power spectrum を各成分の揺らぎで分解し、成分ごとの寄与を調べた。まず、輝度温度を次のように分解する。

$$\begin{aligned}\delta_b(\mathbf{x},z) &= \delta\bar{T}_b(1+\delta_{xH}(\mathbf{x},z)) \\ &\quad\times(1+\delta_{nl}(\mathbf{x},z))(1+\delta_A(\mathbf{x},z))\end{aligned} \tag{6}$$

ここで、δ_i は各成分のゆらぎである。添字の b は輝度温度、xH は中性率、nl は密度ゆらぎ、A は $1-T_{CMB}/T_S$ である。これを用いて power spectrum は以下のように分解できる。

$$\begin{aligned}P_{21} &= (\delta\bar{T}_b)^2[P_{\delta_{nl}\delta_{nl}} + P_{\delta_{xH}\delta_{xH}} + P_{\delta_A\delta_A} \\ &\quad +2(P_{\delta_{nl}\delta_{xH}} + P_{\delta_{nl}\delta_A} + P_{\delta_{xH}\delta_A}) \\ &\quad +higher-order]\end{aligned} \tag{7}$$

21cmFAST で生成される各成分のマップを用いて、各項を計算した。

3 Results and Discussion

図 4 は輝度温度、密度、中性率、スピン温度についての z=10 でのマップである。縦と横の数値は距離で、単位は Mpc である。図 1 の赤い部分が密度の大きいところであり、そこで主に天体が形成されている。図 3 を見ると、密度の大きかったところでスピン温度も大きくなっている事が分かる。さらに、図 2 を見れば、密度の大きかったところを中心にその周囲がイオン化されていて、バブルが形成されている事が分かる。これらのマップから形成されるのが図 4 の輝度温度のマップである。

図 5 は 21cmFAST を用いて計算した z=10 の power spectrum である。$k = 0.1(Mpc^{-1})$ 付近で盛り上がりがあるのは、典型的なイオン化バブルのサイズに対応している。full は 21cmFAST で計算した power spectrum であり、xH と delta は中性度、密度ゆらぎについての自己相関からなる power spectrum、delta,xH は相互相関、total は式 (7) の higher-order を除いたものである。

図 5 を見ると、power spectrum はイオン化率の振る舞いが元になっているように見える。これはイオン化がある程度進んでいるためである。
ただし、total と full にはズレがある。total のグラフは線形の項しか計算していない。そのため、full の power spectrum との違いは非線形項の寄与であると考えられる。また、この時代ではスピン温度の揺らぎの寄与はかなり小さく、無視できる。

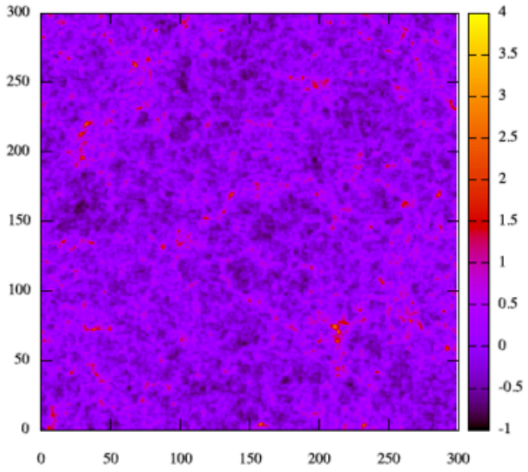


図 1: density fluctuation (z=10)

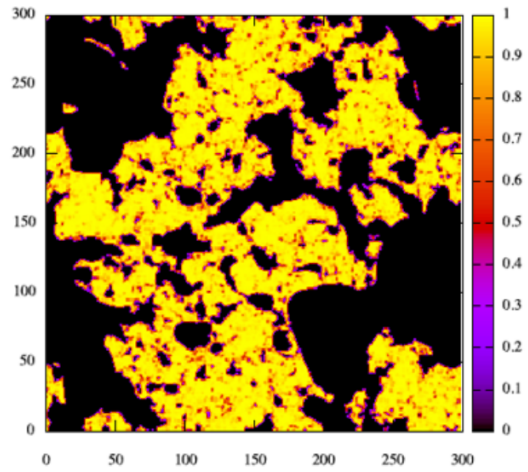


図 2: neutral fraction (z=10)

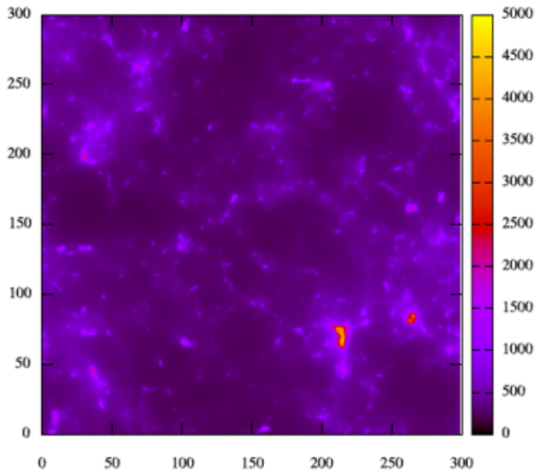


図 3: spin temperature[K] (z=10)

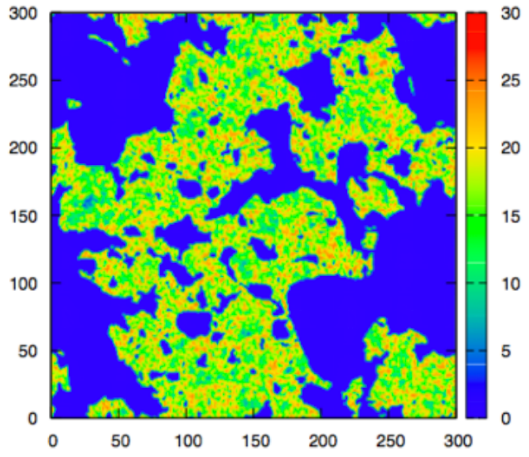


図 4: brightness temperature[mK] (z=10)

4 Conclusion

21cmFAST は以上のように再電離期の宇宙のマップや power spectrum を計算できる。21cmFAST ではさらに、天体から放射されるイオン化光子の量のような天体物理的パラメータを変化させ、様々なモデルで計算する事もできる。ただし、本来考慮するべき recombination や feedback の効果などが考えられていない。今後の課題として、より正確でより速い準数値シミュレーションを開発していく必要がある。

イオン化が進んだ時代の power spectrum はイオン化率についての非線形な効果が効いている。より高次の項の寄与がどのようになっているのか調べる必要がある。

Reference

Mesinger, A., Furlanetto, S., & Cen, R. 2011, MNRAS, 411, 955

Pritchard, J. R., & Loeb, A. 2012, Reports on Progress in Physics, 75, 086901

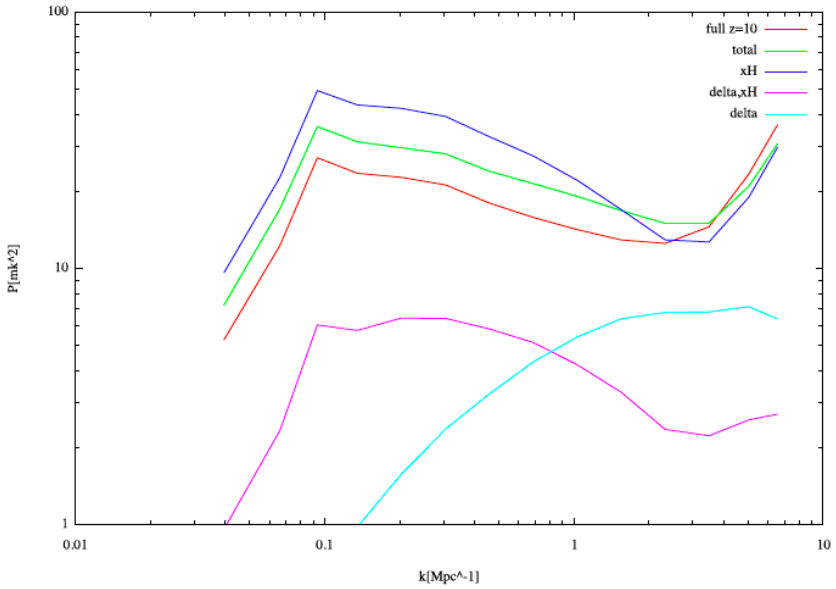


図 5: 21cm power spectrum (z=10)

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

真空の量子揺らぎと相互作用する粒子のランダム運動における熱的性質

大下 翔誉 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

Minkowski 真空中を加速度運動している観測者は Unruh 温度 $\frac{a}{2\pi}$ に対応する黒体スペクトルを持つ粒子を観測する (温度 $\frac{a}{2\pi}$ の熱浴に浸される) と考えられている。これは Unruh 効果 [W.G. Unruh. (1976)] と呼ばれ、これが検証されれば BH の熱的性質、宇宙の大規模構造の種となるインフレーションの議論で用いられる曲がった時空における場の量子論の正当性が示される。この効果を検証するために量子場と相互作用した荷電粒子を用いる検証法が Chen, Tajima によって示された [P.Chen and T. Tajima. (1999)]。しかし、この検証法が本当に有効なものかどうかは理論的に自明でない。なぜなら Unruh 効果によって生じる熱浴で、荷電粒子がどのように熱化されるかは明らかにされていない問題だったからである [S. Iso, Y. Yamamoto and S. Zhang. (2011)]。本研究 [N. Oshita, K. Yamamoto. and S. Zhang. (2014)] では真空の量子揺らぎと相互作用する荷電粒子のブラウン運動を先行研究よりも厳密に計算し、その結果として荷電粒子の量子揺らぎ中での熱化問題を解決することができた。

1 Introduction

Minkowski 真空中を加速度運動している観測者は Unruh 温度 $\frac{a}{2\pi}$ に対応する黒体スペクトルをもつ粒子を観測すると考えられている。これは Unruh 効果と言われているが、この効果を検証する方法として量子場と couple した荷電粒子を用いるのが適切であると考えられている。加速した荷電粒子に生じる Unruh 効果由来の熱的揺らぎから生じる放射 (Unruh 放射) を観測できたならば、それは Unruh 効果の実証、延いては曲がった時空の場の量子論のアプローチが正しいことの証明となる。しかし、どのような Unruh 放射が現れるかを計算するには、荷電粒子がどのように熱的に揺らぐか (真空の熱的な量子揺らぎと相互作用する荷電粒子が熱化するかどうかは自明ではない) という問題を調べる必要がある。

この問題に取り組んだ先行研究 [S. Iso, Y. Yamamoto and S. Zhang. (2011)] では、荷電粒子の進行方向に対して transverse な方向 (以後「荷電粒子の進行方向に対して」を略し「transverse 成分」とする) の熱的揺らぎが生じることを、量子場を white noise として近似的に扱う計算で明らかにした。しかし、longitudinal 成分に対する計算ではこの近似は荒すぎることが示され、荷電粒子の熱化の問題は完全に明らかにされなかった。本研究では量子場 noise に近似を施すことなく厳密に計算を行うことで、Unruh 効果による荷電粒子のゆらぎを完全に記述することに成功した。ここでは荷電粒子の熱的な揺らぎを厳密に評価した結果を示す。本研究で行った計算でも荷電粒子は transverse 成分に熱的に揺らぐことが示され、先行研究を再現できることがわかった。一方、問題であった longitudinal 成分の計算に厳密な計算を適用した結果、Unruh 効果による熱的揺らぎがこの成分に関しては生じていないことが明らかとなった。したがって厳密な量子場 noise の取り扱いによる計算方法によって、加速された荷電粒子は longitudinal 成分には Unruh 効果による熱浴からのエネルギーが等分配されず、transverse 成分のみに分配されるという描像が浮かび上がってきたのである。

2 Methods

荷電粒子の質量を m、電荷を e、時空の計量を $g_{\mu\nu}$、Ricci テンソルを $R_{\mu\nu}$、荷電粒子の軌道を z^{μ} としたとき一般の時空における荷電粒子の運動方程式は以下で与えられる。

$$m\frac{D\dot{z^\mu}}{D\tau} = \frac{e^2}{12\pi}\Big(\frac{D^2\dot{z^\mu}}{D\tau^2} + \dot{z^\mu}\Big(\frac{D\dot{z}}{D\tau}\Big)^2\Big) + \frac{e^2}{24\pi}(g^{\mu\nu} - \dot{z^\mu}\dot{z^\nu})R_{\nu\alpha}\dot{z}^\alpha + F_q^\mu + F_a^\mu \quad (1)$$

ただし、右辺 3 項目、4 項目は荷電粒子に働く外力を表しており、それぞれ量子場の真空揺らぎによる noiseF_q^μ、荷電粒子を加速度運動させるための外力 F_a^μ である。また、$\frac{D}{D\tau} = \dot{z}^\mu\nabla_\mu$ は固有時に関する共変微分を表す。

Eq.(1) を用いて Rindler 時空において静止している (等加速度運動している) 荷電粒子のブラウン運動を記述する方程式を導出する。荷電粒子の軌道 z^μ は

$$z^\mu = z_{cl}^\mu + \delta z^\mu = (\bar{x}^0,\ \delta\bar{x}^1,\ \delta\bar{x}^2,\ \delta\bar{x}^3).$$

ここで荷電粒子の揺らぎの longitudinal 成分および transverse 成分を

$$\delta z_L = (0,0,0,\delta\bar{x}^3),\ \delta z_R = (0,\delta\bar{x}^1,\delta\bar{x}^2,0)$$

とすると $z_{cl}^\mu = (\bar{x}^0,0,0,0)$ として $z^\mu = z_{cl}^\mu + \delta z_L + \delta z_R$ と表される。

Rindler 時空の計量は、一様加速度を $a(\ll m)$ として

$$ds^2 = e^{2a\delta\bar{x}^3}(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - e^{2a\delta\bar{x}^3}(dx^3)^2 \quad (2)$$

荷電粒子に働く外力 F_q^μ は

$$F_q^\mu = e\Big(\frac{D\dot{z^\mu}}{D\tau}\phi_h + \dot{z^\mu}\dot{z^\alpha}\frac{\partial\phi_h}{\partial x^\alpha} - g^{\mu\alpha}\frac{\partial\phi_h}{\partial x^\alpha}\Big)\Big|_{x=z(\tau)} \quad (3)$$

荷電粒子に働く外力 F_a^μ は

$$F_a^\mu = ma(\sinh a\tau,\ \cosh a\tau,\ 0,\ 0). \quad (4)$$

これらを Eq.(1) に代入し、一次のオーダーまでとることで、荷電粒子の longitudinal 成分の揺らぎ、transverse 成分の揺らぎを決める Langevin 方程式はそれぞれ以下で表される。

$$m(\delta\ddot{\bar{x}}^3 - a^2\delta\bar{x}^3) = \frac{e^2}{12\pi}\Big(\delta\dddot{\bar{x}}^3 - a^2\delta\dot{\bar{x}}^3\Big) + e\vartheta\phi_h\big|_{x=z(\tau)} \quad (5)$$

$$m\delta\ddot{\bar{x}}^i = \frac{e^2}{12\pi}\Big(\delta\dddot{\bar{x}}^i - a^2\delta\dot{\bar{x}}^i\Big) + e\frac{\partial\phi_h}{\partial x^i}\Big|_{x=z(\tau)} \quad (i=1,2) \quad (6)$$

ここで Eq.(5) では $\vartheta \equiv (a + \partial/\partial\bar{x}^3)$ とした。

次に、荷電粒子の速度分散 $\langle\delta\dot{x}\delta\dot{x}\rangle$ を計算する。まず longitudinal 成分の速度分散の計算から行う。Forier 変換を $\delta\bar{x}^3$ および $\vartheta\phi_h|_{x=z(\tau)}$ に対して用いることで $\langle\delta\dot{\bar{x}}^3(\tau)\delta\dot{\bar{x}}^3(\tau')\rangle$ は以下で与えられる。

$$\langle\delta\dot{\bar{x}}^3(\tau)\delta\dot{\bar{x}}^3(\tau')\rangle = \frac{6}{e^2}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\frac{\omega^3}{a^2+\omega^2}\frac{e^{i\omega\delta\tau}}{(12\pi m/e^2)^2+\omega^2}\coth(\pi\omega/a) \quad (7)$$

一方、速度分散の transverse 成分は同様の計算で、以下の積分で与えられる。

$$\langle\delta\dot{\bar{x}}^i(\tau)\delta\dot{\bar{x}}^j(\tau')\rangle = \frac{e^2}{6}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\frac{\delta_{ij}\omega(\omega^2+a^2)e^{i\omega\delta\tau}}{(e^2(\omega^2+a^2))^2+(12\pi m\omega)^2}\coth(\pi\omega/a) \quad (8)$$

ここで $\delta\tau \equiv \tau - \tau'$ である。速度分散は Eq.(7)、Eq.(8) で $\delta\tau \to 0$ を取ることで得られる。

3 Results/Discussion

Eq.(7)、Eq.(8) の積分を実行することで以下の結果を得た。

$$\langle\delta\dot{\bar{x}}^3(\tau)\delta\dot{\bar{x}}^3(\tau')\rangle = -\frac{12}{e^2}\left(\ln\frac{12\pi m\delta\tau}{e^2} + \gamma\right) + O\left((a/m)^2\right) \quad (9)$$

$$\langle\delta\dot{\bar{x}}^i(\tau)\delta\dot{\bar{x}}^j(\tau')\rangle = \delta_{ij}\left[\frac{a}{2\pi m} - \frac{12}{e^2}\left(\ln\frac{12\pi m\delta\tau}{e^2} + \gamma\right) + O\left((a/m)^2\right)\right] \quad (i=1,2) \quad (10)$$

ここで Eq.(10) では $a/2\pi m$ の項と第二項目に $\delta\tau \to 0$ で発散する項が現れている。この第 2 項目は繰り込みの処方箋で取り込んでよいものとして見なせる。したがって Eq.(10) で物理的に意味のある項は $a/2\pi m$ であり、これから以下の計算で、粒子が温度 $a/2\pi$ の熱浴からエネルギーが分配されていることを示せる。

$$\frac{1}{2}T_U = \frac{1}{2}m\langle\delta\dot{\bar{x}}^i(\tau)\delta\dot{\bar{x}}^i(\tau)\rangle \quad (i=1,2)$$
$$T_U = \frac{a}{2\pi} \quad (11)$$

この結果は先行研究での計算とも consistent なものとなっている。ところが、Eq.(9) では Eq.(10) で発散

項として見なした項しか現れてこない。このことは粒子が熱浴に浸されていたとしても longitudinal 方向には熱化しないことを示している。
この物理的な解釈は Eq.(5)、Eq.(6) に求めることができる。これらの Langevin 方程式の違いは Eq.(5) の左辺第 2 項の有無だけである。この項 $-a^2\delta\bar{x}^3$ は荷電粒子に対して不安定な作用を及ぼす。これが荷電粒子の熱化を妨げていると考えられる。この不安定性は Rindler 時空に固有の性質であり、先行研究 [S. Iso, Y. Yamamoto and S. Zhang. (2011)] でも指摘されている。

4 Conclusion

本研究では Minkowski 時空を一様加速度で運動している荷電粒子と真空の量子揺らぎとの相互作用を取り扱い、荷電粒子がどのように熱化されるのかについて考察した。私はこの問題に、荷電粒子の加速度運動によって古典的に現れる放射の反作用を運動方程式に取り入れ、量子場の揺らぎによる noise を厳密に取り扱った計算で取り組んだ。その結果、既に先行研究で知られていた結果と consistent な計算結果を得ることができ、さらに今まで明らかにされていなかった荷電粒子の速度分散の longitudinal 成分を計算することにも成功した。この計算から加速度運動している荷電粒子が熱的に励起した量子場と相互作用すると、transverse な方向には熱化されるが、longitudinal な方向には熱化されないことを明らかにできた。
このようにして荷電粒子の熱化の問題を明らかにできたので今後はこのような熱的な速度分散をもった荷電粒子からどのような量子的な放射が現れるのかについて計算を行っていき、Unruh 効果の検証を Chen、Tajima によって提案された方法で検証できるかどうかを調べていきたい。

Acknowledgement

本研究は広島大学大学院理学研究科の山本一博准教授と岡山量子光学研究所の張 森さんとの共同研究です。特に山本先生には丁寧な指導をして頂きました。山本先生との綿密かつ活発な議論は非常に有益なものでした。この場を借りて感謝申し上げます。

Reference

N. Oshita, K. yamamoto and S. Zhang, Phys. Rev. D **89**, 124028 (2014).

S.W. Hawking, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975); **46**206(E) (1976).

W.G. Unruh, Phys. Rev. D **14**, 870 (1976).

S. Iso, Y. Yamamoto, and S. Zhang, Phys. Rev. D **84**, 025005 (2011).

B. S. De Witt and R. W. Brehme, Ann. Phys. (N. Y.) **9**, 220 (1960).

J. M. Hobbs, Ann. Phys. (N.Y.) **47**, 166 (1968)

S-Y. Lin and B. L. Hu, PRD **73**, 124018 (2006)

C. R. Galley, B. L. Hu, PRD **72**, 084023 (2005)

P.Chen and T. Tajima, Phys. Rev. Lett. **83**, 256 (1999).

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

Unruh de Witt detector を用いた量子場の解析

久木田　真吾 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

Hawking を端緒とする重力理論と熱力学、また量子論との関連についての研究は今多様な形で花開いている。その中でもとりわけ、量子情報の分野からの重力に対するアプローチが現在、だんだんとはやってきてた。本研究では、直感的な立場から量子情報の分野と重力をつなぐ足がかりとして、簡単な量子系（典型的には 2 level system）を時空上の量子場などと相互作用させることで解析を行う Unruh de Witt detector の手法を用いてアプローチを行った。このような 2 level system を用いるモデルに対して従来から知られている計算手法は通常の摂動計算、およびマスター方程式 によるものがあるが、その関係性についてはあまり議論されておらず、明白でない。これに対し、最近提案された時間粗視化近似の上でのマスター方程式がある種の特異摂動計算であることを示し、通常の摂動計算との対応を明らかにした。また、その近似によって得られる長時間のダイナミクスは従来の計算手法の元での近似からは素朴には予想できない形をしていたので、その結果について報告する。

1　Introduction

時空の熱力学的な性質 [Hawking] を見る一つの方法として、Unruh De Witt detector を用いる手法は古くから調べられてきた。そもそもは、Unruh 効果を慣性形の観測者がどのように感じるのかという問いに対して、実際に detector と呼ばれる外部の温度を測ることができるようなものを加速させることで物理的な効果として抽出する、というのがもともとの目的であった。更に最近では、量子情報的な観点からもこの detector の解析は注目を集めており、エンタングルメントの評価などの研究も多くの先行研究がある。この解析については素朴な摂動計算を用いた手法がオリジナルであるが、これは永年項と呼ばれる発散を含むため、ある程度技巧的な処理をしなければ時間発展の情報を引き出すことはできない。また、そうして引き出された情報が実際の時間発展に対応しているのかどうかということについては疑問が残る。最近になってこれとは別な解析方法としてマスター方程式の方法論を当てはめた手法が登場した [Benatti]。この方法は永年項が無く時間発展を記述しているといえる手法だが、これはしばしば回転波近似と呼ばれる計算とともに用いられ、通常の摂動計算の手法と同じ時間領域で違う計算結果を出す。そのため、その関係性はよく分かっていなかった。特に我々が興味を持っている 2 体エンタングルメントについては、回転波近似というの意味する、量子的な遷移の禁止がダイレクトに効いてくると予想される。近年、回転波近似をより一般化した coarse graining approximation という手法が導入された [Schaller] が、依然摂動計算との関連は議論されいない。最終的には曲がった時空の上で、量子論固有の、エンタングルメントのような量がどのように発展するのかを知りたいのであるが、手法同士の関係性が分かっていないような状態ではこれはままならない。そこで、本研究では主としてこの関係性に重きをおいて解析を行った。

2　2 particle entanglement

量子情報の観点からもっとも興味のある量はエンタングルメントと呼ばれる量である。我々は、このエンタングルメントがどのように時間発展するのかを知りたい。一般的な 2 つの系のエンタングルメントを評価するのは容易ではない。しかし、2 つの系が 2 準位である場合にはこの評価は容易であり、以下ではそのような状況を考える。

エンタングルメントを評価する指標としてもっとも有名なのはエンタングルメントエントロピーだが、

今はこれは使えない。なぜならば、系が一般に混同状態をとりうるからである。混合状態においては、コンカレンスやネガティビティなどがエンタングルの指標として用いられ、2 体 2 準位の場合にはすべての指標が投下であることが分かっている。そのため、我々は一般性を失うことなくネガティビティをエンタングルメントの指標として採用可能である。

ネガティビティとは、2 体系の密度行列に対して、片方の系に対応する自由度を転置（部分転置）したときの、負になっている固有値の和であらわされる。2 体 2 準位系の場合には密度行列は pauli 行列のテンソル積で表されるが、片方の自由度の Pauli 行列をすべて転置すればよい。こうして得られた部分転置行列の固有値を $\{\lambda_i\}_i$ とすると、ネガティビティは

$$\mathcal{N} := \sum \frac{1}{2}[|\lambda_i| - \lambda_i] \tag{1}$$

と定義される。

3 CGA master equation

本研究では、近年提案された coarse graining approximation(以下 CGA) 型の近似を用いた Master 方程式を用いて解析を行った。以下でそのマスター方程式の一般論を展開する。

相互作用している二つの系からなる孤立系を考え、片方の系のみのダイナミクスを見る状況を考える。これは量子開放系を議論するときによく用いられる手法である。見たいほうの系を対象系、もう片方を環境系と呼称する。孤立系のユニタリ発展は Liouville-von-Neumann 方程式、

$$\frac{\partial \rho_{tot}}{\partial t} = -iL_{H_{tot}}[\rho] := -i[H_{tot}, \rho] \tag{2}$$

によって記述される。ここで

$$H_{tot} = H_s + H_B + \lambda H_{int} \tag{3}$$

である。前から、対象系、環境系、相互作用のハミルトニアンである。今対象系すなわち $\rho_S(t) := \mathrm{Tr}_B(\rho)$ のダイナミクスを見たいとする。相互作用表示

$$\tilde{\rho}_{tot}(t) = e^{i(H_S+H_B)(t-t_0)}\rho_{tot}(t)e^{-i(H_S+H_B)(t-t_0)}. \tag{4}$$

を導入し、Markov 性（直感的にいえば環境系が対象系に対して十分大きいことに対応）などを仮定して結合定数に対する摂動計算を進めることで. 対象系の密度行列に対して以下の方程式を得る。

$$\dot{\tilde{\rho}}_S(t) = -\frac{\lambda^2}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\int_{t_0}^{t'} \mathrm{Tr}_B[\tilde{H}_{int}(t'), [\tilde{H}_{int}(t''), \tilde{\rho}_{tot}(t)]]. \tag{5}$$

これが CGA マスター方程式であり、Δt なるフリーパラメータを持っている。この近似は回転波近似を $\Delta t \to \infty$ の極限で含む。ハイゼンベルクの不確定性 $\Delta E \Delta t \sim \hbar$ と同じことを主張している。この方程式をもう少し変形してやると、

$$]\dot{\rho_S} = -i[H_{eff}, \rho_S] + \mathcal{L}[\rho] \tag{6}$$

という式が得られる。これは、環境系の影響がハミルトニアンに補正を加えた H_{eff} の部分と、そういう形にかけない、俗に散逸項といわれる $\mathcal{L}[\rho]$ の部分からなる。特徴的な効果は、散逸項によってユニタリ性が保証されなくなっていることであり、これが開放系たるゆえんである。

4 Results

上記の method を 2 つの Unruh detector 系に適応し、そのエンタングルメントを見る。これは対象系を 2 自由度を持つ系、環境系を無質量スカラー場 $\phi(x)$（これは簡単のためであり、無質量スカラー場である必要は無い。）と置き換えればよい。

すなわち、対象系のハミルトニアンを

$$H_S = \frac{1}{2}\sigma_3^{(1)} + \frac{1}{2}\sigma_3^{(2)} \tag{7}$$

とおき、相互作用を

$$H_{int} = \lambda(\sigma_1^{(1)}\phi(x_1) + \sigma_1^{(2)}\phi(x_2)) \tag{8}$$

として計算する。ここでそれぞれ x_1、x_2 は detector の位置であり、σ は Pauli 行列である。

また、以下で簡単のため行列の形を x 型に固定することにする。この部分を初期条件とするダイナミクスはこの部分のみで閉じるため、計算が簡単になる。

以上の方程式が与えられると、この方程式に従って時間発展を追うことで Unruh DeWitt detector の永年項を含まない長時間発展を追うことができる。しかし、この方程式は線形ではあるものの固有値方程式として 6 次の連立方程式を持つので、これを解析的に解くことはできない。

そこで、まずはこの方程式を短時間のダイナミクスを見たいとして展開することを考える。つまり、

$$\rho(t) = \rho(t_0) - i(t-t_0)\frac{\lambda^2}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\int_{t_0}^{t'} \mathrm{Tr}_B[\tilde{H}_{int}(t'),[\tilde{H}_{int}(t''),\tilde{\rho}_{tot}(t)]] \quad (9)$$

という計算をするわけだが、これは naive な意味での摂動計算と一致していることが見て取れる。ただし、摂動計算の時には Δt は通常の時間パラメータ t である。これは CGA マスター方程式が、短時間では、摂動計算を再現していることを意味している（回転波近似では $\Delta t \to \infty$）。であるので、この一致性が見られないことが明らかになる。同時にこれはマスター方程式の手法がある意味での特異摂動（繰り込み群）であることも示唆する。また、この方程式は一つの 0 固有値（定常解）を含み、その状態に振動しながら漸近していく。この状態は摂動計算では見えないものである。つまり、「摂動計算に対応した」長時間解を見ることができる、と解釈することもできる。

このようにして得られた定常解に対して背景の環境系（無質量スカラー場）の情報を入れ、上記のエンタングルメントの評価を行うことができる。この結果が、以下のようなグラフである。背景場として、Minkowski vacuum と Minkowski thermal state を採用した。

ここで、横軸は 2 つの detector の距離であり、縦軸は free parameter Δt である。エンタングルしている領域は黒い部分。両方の場合に、Δt が小さい領域でエンタングルが切れている部分がある。これは、Δt がハイゼンベルクの不確定性から量子揺らぎに対応しており、エンタングルメントが量子的な効果と関連しているとすると、あまり予想できない妙な効果であり、量子ゼノン効果のようなものが働いているのではないかと考えられる。それ以外の部分は基本的に摂動計算とコンシステントな結果になっている。

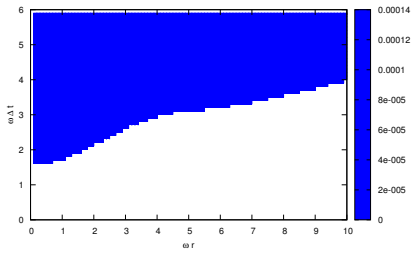


図 1: Minkowski vacuum

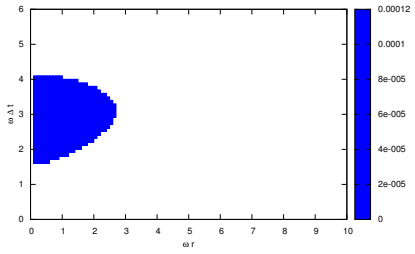


図 2: Minkowski thermal state

5 Conclusion

従来の摂動計算では追うことのできない長時間発展を追うことができる手法で、detector の時間発展を調べた。長時間の発展に対して最も興味のある定常状態を具体的に計算し、そのエンタングルメントの振る舞いを評価した。この状態は通常の摂動計算からは予期されない、量子ゼノン効果的な振る舞いを持つ。これはおそらく背景に設定した場の状態に依存しない、普遍的な効果である。

更にその過程で、今まで明らかにされていなかった摂動計算の手法とマスター方程式を用いた手法の具体的な関係を理解することができた。この手法を用いて、情報損失問題や初期宇宙エンタングルメントへのアプローチをすることが今後の課題として考えられる。

Reference

[Hawking] S. W. Hawking, “Gravitational radiation from colliding black holes,” Phys. Rev. Lett. **26**, 1344 (1971).

[Benatti] F. Benatti and R. Floreanini, “Entanglement generation in the Unruh effect,” quant-ph/0403157.

[Schaller] Gernot Schaller, Tobias Brandes ”Preservation of Positivity by Dynamical Coarse-Graining” Physical Review A 78, 022106, (2008)

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

ミリメートルスケールでの重力の逆二乗則検証

桑原 祐也 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

現代物理学における階層問題として，重力だけが極端に弱いという相互作用の階層問題や，ダークエネルギー密度が量子力学的な真空のエネルギーよりも極端に小さいという宇宙項問題が知られている。この階層問題を説明するモデルの 1 つとして，前者には巨大な余剰次元モデル，後者には”Fat graviton”モデルが提案されており，どちらもミリメートルスケールでの重力の逆二乗則を検証することで確かめることができる。実験にはねじれ振り子を用いる。ねじれ振り子に変調重力場を加え，その応答を測定することにより逆二乗則が破れているかを検証する。今回私たちはヌル測定が可能となる変調重力源を考案し，先行研究よりも 2 桁以上の高精度での逆二乗則検証を目指す。

1 Introduction

重力のエネルギースケールはプランク質量で記述され 10^{16} TeV である一方，電弱力のエネルギースケールは 1 TeV であり，16 桁もの乖離がある。これは相互作用の階層問題として知られている。そしてこの重力の弱さの起源が，余剰次元へ重力が逃げているとして説明できることが指摘されており，高次元での真のプランク質量が 1 TeV 程度まで下がる可能性がある。中には余剰次元の大きさが mm スケールにあると予想する理論もあり，この場合 mm スケールにおいて重力の逆二乗則が破れることとなる。

また別の階層問題として，観測されたダークエネルギー密度が量子力学的計算される真空のエネルギーよりも 60 桁以上小さいという宇宙項問題がある。こちらでは”Fat graviton”モデルが提唱されており，重力子が有限の大きさを持つために 0.1 mm 以下では重力が見えなくなるとする。すなわち 0.1 mm 以下において重力が弱められ，逆二乗則からのズレとして検出される。

このように mm スケール以下における重力の逆二乗則検証により，現代物理学における 2 つの重大な階層問題が解決される可能性があり，これまでにいくつかのグループによって検証が行われてきた。マクロには逆二乗則が正しいことから，ある距離スケール λ 以下において大きさ α で破れる効果を湯川ポテンシャル型にとり入れ，重力ポテンシャル

$$V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}\left[1 + \alpha \exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right)\right]$$

のパラメータ α，λ への制限が先行研究により図 1 のように付けられてきた。

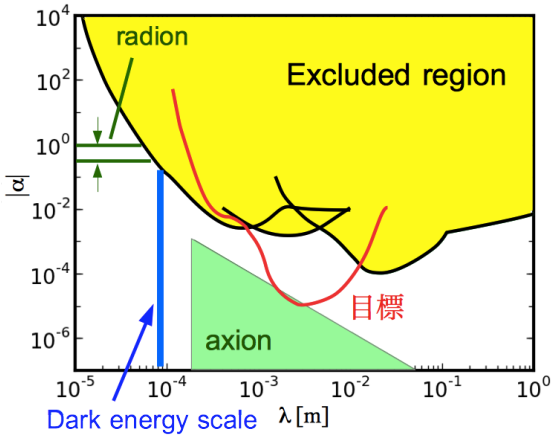


図 1: 信頼度 95%で排除された α，λ 領域

今回私たちは mm スケールにおいて先行研究よりも 2 桁の感度向上を目指し，特に相互作用の階層問題から示唆される巨大余剰次元の探査を行う。

2 Method

実験にはねじれ振り子を用いる。図 2 のようにねじれ振り子の下に配置した重力源を回転させること

で変調重力場を生み，この変調重力場をねじれ振り子が感じることで回転が励起される。このねじれ振り子の回転を逆二乗則（ニュートンポテンシャル）と比較することによって，湯川ポテンシャルのパラメータに制限をつけることができる。先行研究ではこのように測定が行われたが，ニュートンポテンシャルからの寄与を除去する際に系統誤差の入る余地がある。

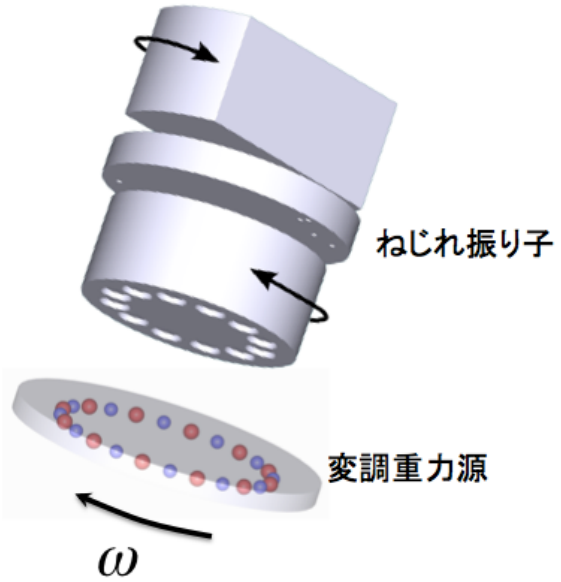


図 2: 実験装置

そこで私たちは原理的にニュートンポテンシャルがゼロとなり逆二乗則からの破れのみに感度を持つヌル測定が可能となる構成を考案した。図２のように重力源として同質量で半径の異なる球を用いることがポイントで，この場合２種類の球は同一のニュートンポテンシャルを作る一方，ニュートンポテンシャル以外のポテンシャル（湯川ポテンシャル）は半径に依存するために異なる。従って２種類の球を 12 個ずつ交互に配置して回転させた場合，ニュートンポテンシャルは 24 倍成分が出るのに対して湯川ポテンシャルは 12 倍成分として出るため，この 12 倍成分を測定すればニュートンポテンシャルからのズレのみの測定が可能となる。ニュートンポテンシャルからの寄与を除去する工程なしに湯川ポテンシャルからの信号のみを測定するヌル測定を実現したことで，系統誤差が抑えられて先行研究よりも２桁高い感度での測定が期待できる。

3 Conclusion

相互作用の階層問題や宇宙項問題から mm スケールでの逆二乗則の破れを示唆する理論があり，これまでには主にねじれ振り子を用いて逆二乗則の検証が行われてきた。今回私たちはねじれ振り子の振動を励起する重力源を工夫し，系統誤差の効きにくいヌル測定が可能となる構成を考案した。そして逆二乗則の破れに対して先行研究と比べて２桁以上の厳しい制限をつけることを目指す。

Reference

E. G. Adelberger, et al, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 53, 77 (2003)

D.J. Kapner, et al, Phys.Rev.Lett.98,021101 (2007)

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

反ドジッター時空における非線形ダイナミクスと AdS/CFT 対応

星野　悠一郎 (早稲田大学大学院 先進理工学研究科)

Abstract

本研究では、5 次元の Schwarzschild AdS Black Hole 時空における Cohomogeneity-one string を考え、その可積分性を Poincaré 断面や Lyapunov 指数を求め判定した。

1 Introduction

超弦理論の研究に端を発する AdS/CFT 対応は現在では、様々な分野に拡張され非摂動的現象や強結合領域の解析に幅広く応用されている。この AdS/CFT 対応とは、1997 年に Maldacena が 4 次元の $\mathcal{N} = 4$ $SU(N_c)$Super Yang-Mills 理論と $AdS_5 \times S^5$ 上の Type ⅡB 超重力理論が等価であることを主張したものである (J. M. Maldacena. (1998))。数学的に厳密な証明は与えられてないが、それを支持する多くの結果が知られている。この対応関係を用いれば、$N_c \to \infty$ の下で CFT(conformal field theory) 側での強結合領域の物理を重力側で反ドジッターに漸近する時空での古典論で解析することが可能となる。その応用範囲は物性物理、流体力学、非平衡系に至るまで様々であるが、非線形物理学において重要な概念の一つであるカオスを伴う系についての解析はあまりされていない。そこで、反ドジッター時空 (または漸近的反ドジッター時空) におけるカオス系の研究が必要である。

曲がった時空におけるテスト粒子のカオス的振舞いの研究としては、4 次元ブラックホール時空におけるスピンを持つテスト粒子のダイナミクスが (K. Maeda et al. (1997, 2004)) で詳しく調べられている。また、閉弦のカオス的な運動について議論しているものとしては (L. A. Pando Zayas et al. (2014)) や (Da-Zhu Ma et al. (2014)) があるが、十分な解析が行われているとは言えない。AdS/CFT 対応の観点から考えると、5 次元 AdS ブラックホール時空において閉弦がどのように振舞うかを理解することは非常に興味深い問題である。

一方、5 次元の Kerr AdS ブラックホールにおいて、この時空の対称性を用いて閉弦の埋め込みを考えると、系はある軌道空間上の測地線方程式に帰着され、あるパラメータを特別に選ぶと可積分となる場合が存在することが知られている (T. igata and H. Ishihara. (2010))。本研究では、別のパラメータを選んだ際の可積分性を調べるために Poincaré 断面や Lyapunov 指数を求め、この系の特徴を調べる。

2 Cohomogeneity-one string

D 次元時空多様体 $(\mathcal{M}, g_{MN})$ における world sheet Σ の埋め込みについて考える。$\mathcal{M}$ の座標 X^M に対し, Σ の埋め込みは

$$X^M = X^M(\zeta^a), \quad (\zeta^0 = \tau, \zeta^1 = \sigma) \tag{1}$$

と表現できる。ここで ζ^a は Σ 上の座標である。

いま, 時空 $(\mathcal{M}, g_{MN})$ 上にあるキリングベクトル場 ξ が存在するものとすれば, ξ による積分曲線が存在し, これによって $(\mathcal{M}, g_{MN})$ 上に作用する 1 次元等長変換群 K= $\{\phi_\sigma\}_{\sigma\in\mathbf{R}}$ が考えられる。そこで, world sheet Σ としてこのキリングベクトルに接したものを考えることで, 軌道空間 $\mathcal{O} = \mathcal{M}/K$ 上の曲線として捉えることが可能になる。このような world sheet Σ で記述される string をキリングベクトル場 ξ に関する cohomogeneity-one(C1) string と呼ぶ。これにより、南部・後藤作用

$$S_{\mathrm{NG}} = -T_0 \int d\tau d\sigma \, \sqrt{-\gamma}, \quad (\gamma = \det[\gamma_{ab}]) \tag{2}$$

は以下のように書き直せる。

$$S_{C1} = -T_0 \int_{\mathcal{C}} d\tau \sqrt{-F h_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} \tag{3}$$

ここで T_0 は弦の張力であり、F は ξ のノルム, $h_{\mu\nu}$ は $\mathcal{O}$ への射影テンソルである。

3 C1 string in Kerr AdS BH

5 次元の Kerr AdS Black Hole の計量は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{\Delta_\theta \Xi_r dt^2}{\Xi_a \Xi_b} + \frac{2M}{\Sigma}\left(\frac{\Delta_\theta dt}{\Xi_a \Xi_b} - \nu\right)^2 \\ &+ \frac{\Sigma dr^2}{\Delta_r} + \frac{\Sigma d\theta^2}{\Delta_\theta} + \frac{r^2+a^2}{\Xi_a}\sin^2\theta d\Phi^2 \\ &+ \frac{r^2+b^2}{\Xi_b}\cos^2\theta d\Psi^2 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\Xi_a = 1 - a^2\lambda^2,\ \Xi_b = 1 - b^2\lambda^2,\ \Xi_r = 1 + \lambda^2 r^2, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \Delta_r &= \frac{(r^2+a^2)(r^2+b^2)(1+\lambda^2 r^2)}{r^2} - 2M, \\ \Delta_\theta &= 1 - a^2\lambda^2\cos^2\theta - b^2\lambda^2\sin^2\theta\ , \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \nu &= a\sin^2\theta\frac{d\Phi}{\Xi_a} + b\cos^2\theta\frac{d\Psi}{\Xi_b}, \\ \Sigma &= r^2 + a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta, \end{aligned} \tag{7}$$

ただし, M は質量パラメータ, a と b は二つの独立な回転パラメータである。また λ は宇宙項 Λ と $\lambda^2 = -\Lambda/6$ の関係にある。計量の形から時空は 3 つの交換するキリングベクトル $\partial_t, \partial_\Phi, \partial_\Psi$ を持っていることが分かる。

ここで, 以下のようなキリングベクトルに接している world sheet を考える。

$$\xi = \partial_\Phi + \alpha\partial_\Psi \tag{8}$$

ただし, α は定数であり, Φ と Ψ 方向の巻きつき数の比である。したがって, $\alpha \in \mathbf{Q}$ であれば閉弦の world sheet を記述する。ここで、

$$\phi = \Phi, \qquad \psi = \Psi - \alpha\Phi, \tag{9}$$

のような座標変換の後により、ξ に関する C1 string を考えることができるので測地線系における Hamilton-Jacobi の方程式

$$\frac{\partial S}{\partial\tau} + \frac{N}{2}\frac{h^{\mu\nu}}{F}\frac{\partial S}{\partial x^\mu}\frac{\partial S}{\partial x^\nu} = 0, \tag{10}$$

が得られる。ここで, N は Lagrangian multiplier で S は Hamilton の主関数である。今、S に対して変数分離を仮定し計算すると

$$\begin{aligned} &2F\Sigma \times \left[\frac{\partial S}{\partial\tau} + \frac{N}{2}\frac{h^{\mu\nu}}{F}\frac{\partial S}{\partial x^\mu}\frac{\partial S}{\partial x^\nu}\right] \\ &\qquad = R(r) + \Theta(\theta) + T_0^2 F\Sigma = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

と書けて

$$\begin{aligned} T_0^2 F\Sigma &= 2MT_0^2\left(\frac{\alpha b\cos^2\theta}{\Xi_b} + \frac{a\sin^2\theta}{\Xi_a}\right)^2 \\ &+ T_0^2(r^2 + a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta) \\ &\times \left[\frac{(r^2+b^2)\alpha^2\cos^2\theta}{\Xi_b} + \frac{(r^2+a^2)\sin^2\theta}{\Xi_a}\right] \end{aligned}$$

より、$\alpha = 1$ かつ $a = b, \lambda \neq 1$ の時に変数分離可能であることが言える。これより、この系における閉弦は可積分であることが分かる。

4 Schwarzschild AdS Black Hole 時空における解析

前節において、C1 string は特別な場合において変数分離可能であり、可積分であることがわかった。つまり、$\alpha \neq 1$ の時はいかなる場合もこの座標系では変数分離は不可能である。しかしながら、一般に変数分離不可能であるからといって、可積分でないとは言えない。そこで、$a = b = 0$ である場合、つまり Schwarzschild AdS Black Hole 時空において $\alpha \neq 1$ の場合について数値的な解析を行った。

5 次元の Schwarzschild AdS Black Hole は以下の計量で与えられる。

$$\begin{aligned} ds^2 &= -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} \\ &+ r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\Phi^2 + \cos^2\theta d\Psi^2\right) \end{aligned} \tag{12}$$

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{b^2} - \frac{\omega_4 m}{r^2} \tag{13}$$

ここで、b を改めて AdS 半径とし、m は質量、ω_4 は適当な定数である。前節と同様に測地線系に帰着さ

せ、その Hamiltonian を考える。適当なパラメータの再定義を行えば、以下の正準方程式が得られる。

$$
\begin{aligned}
2H &= f p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2 + \frac{L^2(\sin^2\theta + \alpha^2\cos^2\theta)}{r^2\cos^2\theta\sin^2\theta} \\
&- \frac{E^2}{f} + r^2(\sin^2\theta + \alpha^2\cos^2\theta) = 0, \\
\dot{r} &= f p_r, \\
\dot{p_r} &= -\frac{f'}{2f^2}E^2 - \frac{1}{2}f' p_r^2 + \frac{1}{r^3}p_\theta^2 \\
&+ \frac{L^2(\sin^2\theta + \alpha^2\cos^2\theta)}{r^3\sin^2\theta\cos^2\theta} - r(\sin^2\theta + \alpha^2\cos^2\theta), \\
\dot{\theta} &= \frac{1}{r^2}p_\theta, \\
\dot{p_\theta} &= -\frac{L^2}{r^2}\left(\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta} - \frac{\alpha^2\cos\theta}{\sin^3\theta}\right) \\
&- r^2\sin\theta\cos\theta(1-\alpha^2)
\end{aligned}
$$

ただし,

$$
f(r) = 1 + r^2 - \frac{M}{r^2}, \quad f'(r) = 2r + \frac{2M}{r^3} \tag{14}
$$

系を特徴づけるパラメータは E, L, M であり、それぞれエネルギー、角運動量、質量に対応するものである。

適当なパラメータを選び、Poincaré 断面と Lyapunov 指数の解析結果を以下に示す。

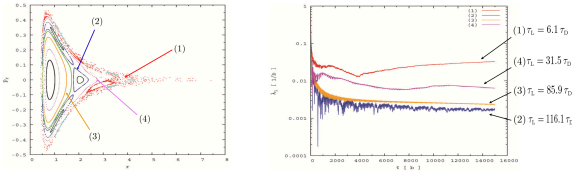


図 1: $\alpha = 0$ における $E = 1$、$L = 0.4$、$M = 0.01$ での Poincaré 断面と 4 つの異なる初期条件に対する最大 Lyapunov 指数 (τ_D は系のダイナミカルな時間スケール)

解析の結果、$\alpha = 0$、$\alpha = 1.5$ の場合ともカオス的な振る舞いを見せることがわかった。特に図 2 の断面の振る舞いは、近可積分系として有名な Hénon-Heiles 系のものと良く似ている (M. Hénon and C. Heiles (1964))。以上の結果より、これらのパラメータにおける可積分性は存在しないと考えられる。

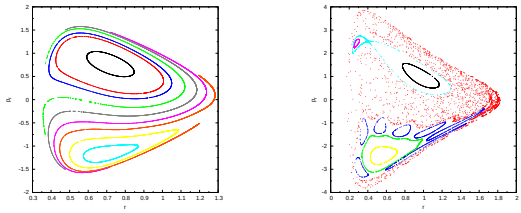


図 2: $\alpha = 1.5$、$L = 0.4$、$M = 0.01$ における $E = 3$(左), $E = 5$(右) での Poincaré 断面

5 Conclusion

一般に系のカオス性を解析する方法は複数あり, 本研究では Poincaré 断面と Lyapunov 指数のみを用いて解析を行った。パワースペクトルやフラクタル次元を求めるといった方法についても議論する必要がある。また, 先に述べた AdS/CFT 対応の観点から見ると, 重力側で閉弦がカオス的な振舞いをするという結果, またはそれを特徴づける Lyapunov 指数などの量を対応する場の理論側においてどのように解釈できるかということも非常に興味深い問題である。今後はこのような観点からも研究を行いたい。このような議論は未だに理解が十分でない量子カオスの研究への 1 つのアプローチとなるかもしれない。

Reference

J. M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. 2, 1998.

S. Suzuki and K. Maeda, Phys. Rev. D 55 4848, 1997. K. Kiuchi and K. Maeda, Phys. Rev. D 70 064036, 2004.

L. A. Pando Zayas and C. A. Terrero-Escalante, JHEP 1009, 2010.

Da-Zhu Ma, Jian-Pin Wu and Jifang Zhang, Phys. Rev. D 89, 086011 2014.

T. igata and H. Ishihara, Phys. Rev. D 81 044024, 2010.

M. Hénon and C. Heiles, Astron. J. 69, 73-79, 1964.

Chern-Simons 重力理論における相対論的 Sagnac 効果

菊池　大貴 (弘前大学大学院 理工学研究科)

Abstract

Chern-Simons(CS) 修正重力理論は, 低エネルギー極限でパリティ対称性の破れを示唆する理論としても注目されており, Okawara らによって, CS 重力における量子干渉効果から理論パラメターに制限を与えられる可能性が示唆されている (Okawara et al. 2012) . 本研究の目的は彼らの研究を発展させ, CS 理論についてより詳しく調べることである.

本研究では, 従来の理論モデルより一般化された Smith らの理論モデル (Smith et al. 2008) を用いて, 光の干渉効果を考え, 干渉計を置く位置やその向きに対する依存性を調べた. その結果, 上記の依存性に関して様々な条件で実験することができれば, 理論パラメターに制限を与えられる可能性があることがわかった.

1 Introduction

これまで重力理論は, 数々の実験による検証とともに発展してきた. 現在では Einstein の一般相対性理論 (以下 GR) が最も有効な重力理論であり, 様々な実験や観測によってその正当性が裏付けられている. この重力理論の発展の歴史の中には, 干渉効果を用いた地上実験による理論検証の例が多々存在する.

Newton 重力のポテンシャルよる干渉効果は, 1974 年に予言され, その翌年に中性子干渉計を用いた実験によって実際に測定された (Colella et al. 1975). この実験は 3 人の頭文字をとって COW 実験と呼ばれている. そして 1979 年の Werner らによる干渉実験では, 地球の自転による効果が確認された (Werner et al. 1979). 地上に干渉計を固定すると, 地球の自転に伴い干渉計そのものも回転する. この干渉効果は, 回転座標系で生じる見かけの力であるコリオリ力によって引き起こされるものである. 当時, この地球の自転による効果は「非慣性系における量子力学」として複数の研究者によって議論された (Anandan 1977; Sakurai 1980).

さて, 回転天体に関する一般相対論的効果の一つとして, Lense-Thirring 効果 (以下 LT 効果) がある. この効果は地球のような弱い重力場を及ぼす天体が, ゆっくり自転している場合に, その周りの時空が回転方向に沿って引きずられるという現象である. この効果は 1918 年に, Lense と Thirring により, 線形近似を用いた研究の結果として初めて予言され, 後に, Papini によって一般相対性理論における弱い重力場の効果として指摘された (Papini 1967). これによると, この時空の周囲の経路を一周する粒子は, 角運動量が等しくても, 回転方向の違いで要する時間に差が生じることになる. 従ってこの非 Newton 力学的な LT 効果の影響も, 上記の干渉実験においては, 同様に位相差のずれとして現れるはずである. このことから, 時空の状態に起因するこの干渉効果を相対論的 Sagnac 効果とも呼んでいる. ただし, 地球の自転による LT 効果の大きさは非常に小さいため, 地上実験では未だ検出されていない.

一方で宇宙空間においては, 2004 年に打ち上げられた NASA の重力観測衛星, Gravity probe B による観測結果が既に発表されており, LT 効果の大きさが誤差の範囲内で理論値と一致するということがわかっている (Everitt et al. 2011). このような衛星実験の継続で, より高精度な検証結果が得られると期待されるが, 多額の費用と時間がかかるという点が課題である.

近年の宇宙観測技術の発達に伴い, 渦巻き銀河の回転運動や宇宙ジェットのような, GR では説明できない現象がいくつか見つかっている. このような問題を受け, 既存の GR を修正することでその溝を埋めようとする立場から修正理論の導入が議論されている. その中の一つとして, Chern-Simons(以下 CS) 修正重力理論がある. 現在の素粒子物理学では, 基本粒子を小さな「ひも」とみなす超弦理論というアイデ

アが注目されており, CS 理論はその研究において低エネルギー極限で示唆されるものである. この理論は GR では予言できない現象やパリティ対称性の破れを示唆するという点で注目されている. 最近では 2012 年, Okawara らによって, 中性子干渉計を用いた量子干渉効果を用いて理論に制限が与えられる可能性が指摘された (Okawara et al. 2012).

本研究の目的は, 彼らの研究を発展させ, CS 理論の性質をより詳しく調べることである. 1 つ目の改良点は, Smith らによって提案された理論モデル (以下 SECK モデル) を用いたことである (Smith et al. 2008). 従来のモデルは重力源を質点とみなしているが, このモデルでは重力源を質点ではなく広がりを持ったものと考え, 天体の内部と外部の重力場の両方が考慮している. また 2 つ目の改良点として, 光を用いた Sagnac 干渉計を考えた. 原子炉を必要とする中性子干渉計と比較して様々な観測地に設置できることに加え, 観測精度のさらなる向上が期待されるという点で, 光干渉計の利用には大きなメリットがある. 本研究では, LT 効果による干渉効果とそれに対する CS 重力によるずれを調べ, 特に干渉計の方向依存性 (緯度, 方位角) と高度依存性について具体的に議論する.

2 Relativistic Sagnac effect

静止座標系における線素を, 時間成分と空間成分とに区別して書くと, $i,j=1\cdots3$ として,

$$ds^2 = g_{00}c^2dt^2 + 2g_{0i}cdtdx^i + g_{ij}dx^idx^j. \quad (1)$$

光の座標はヌル測地線に従うため, $ds^2=0$ を dt について解くと,

$$cdt = -\frac{g_{0i}}{g_{00}}dx^i + \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}dl. \quad (2)$$

ここでは, $g_{00}<0$ と仮定し, 空間距離要素 dl と空間の計量 γ_{ij} を,

$$dl^2 \equiv -\gamma_{ij}dx^idx^j, \quad \gamma_{ij}\equiv\left(g_{ij}-\frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}}\right), \quad (3)$$

とした. また, (2) 式右辺第 2 項の符号は, 距離の増加 ($dl>0$) に従い, 時間も増加 ($dt>0$) するように＋を採用した.

光がある閉じた経路 C を一周するのに要する座標時間 t_C は,

$$ct_C = c\oint_C dt = -\oint_C \frac{g_{0i}}{g_{00}}dx^i + \oint_C \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}dl. \quad (4)$$

これより, C と進行方向が逆の経路 $\bar{C}$ を一周する 2 つの光の光路差 $c\Delta t$ は,

$$c\Delta t \equiv ct_{\bar{C}} - ct_C = 2\oint_C \frac{g_{0i}}{g_{00}}dx^i. \quad (5)$$

ここでは, C と $\bar{C}$ は同じ経路と仮定し, dl 積分は向きに依らないため同符号, また dx^i 積分は逆向きの経路では逆符号になることを用いた. (5) 式を一般相対論的 Sagnac 公式と呼ぶ.

回転天体の作る重力場を記述する計量は, (a) 一つの天体の周り (b) 弱場 (c) 自転速度 $\ll$ 光速度 という仮定の下で以下のように書ける.

$$g_{00} = \eta_{00} + h_{00} + O(h^2) \fallingdotseq -1, \quad (6)$$

$$g_{0i} = \eta_{0i} + h_{0i} + O(h^2) = h_{0i} + O(h^2). \quad (7)$$

ここでは平坦時空からのずれを $h_{\mu\nu}$ とし, 以降の計算では, $h_{\mu\nu}$ の 2 次以降は無視する. (6),(7) 式を (5) 式に代入すると,

$$c\Delta t \fallingdotseq 2\oint_C h_{0i}dx^i = -2\int_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{h}\right)\cdot\vec{N}_I dS. \quad (8)$$

ここでは, stokes の定理で面積分に変形し, 干渉計の面 S の単位法線ベクトルを $\vec{N}_I$, また $\vec{h}\equiv h_{0i}$ と定めた. この式に LT 効果の計量 $\vec{h}_{LT}\equiv h_{0i}^{LT}$ と, CS 重力による補正項 $\vec{h}_{CS}\equiv h_{0i}^{CS}$ をそれぞれ代入することで, 時空の様子を干渉効果として算出することができる.

3 Chern-Simons gravity

本研究で用いる SECK モデルにおける作用は,

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\Big[-\frac{1}{2\kappa^2}R + \frac{\ell}{12}\vartheta\boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{R}} - \frac{1}{2}(\partial\vartheta)^2 - V(\vartheta) + \mathcal{L}_{mat}\Big], \quad (9)$$

ただし, $g\equiv\det(g_{\mu\nu})$ であり, また

$$\boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{R}} \equiv R^{\beta}{}_{\alpha}{}^{\gamma\delta}\tilde{R}^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}, \quad \kappa^2 = \frac{8\pi G}{c^4}, \quad (10)$$

である． ここで, $\boldsymbol{R\tilde{R}}$ は Riemann テンソルと双対 Riemann テンソルの積, R は Ricci スカラー, ϑ はダイナミカルなスカラー場, ℓ は長さの次元を持つパラメター, $\mathcal{L}_{mat}$ は物質場に対するラグランジアン密度, G は重力定数, c は光速度である．

SECK モデルでは,

$$(\vec{\nabla}\times\vec{h}_{CS}) = -\frac{12GM}{c^3R}\Big[D_1(r)\vec{\omega} + D_2(r)\vec{n}\times\vec{\omega} + D_3(r)\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{\omega})\Big],$$

ただし,

$$\begin{cases} D_1(r) &= \frac{2R}{r}j_2(m_{CS}R)y_1(m_{CS}r), \\ D_2(r) &= m_{CS}Rj_2(m_{CS}R)y_1(m_{CS}r), \qquad r \geq R. \\ D_3(r) &= m_{CS}Rj_2(m_{CS}R)y_2(m_{CS}r), \end{cases} \tag{11}$$

である．ここで, M, R, r はそれぞれ地球質量, 地球半径, 地球中心からの動径距離であり, また, 干渉計を置く緯度に関する単位位置ベクトルを $\vec{n}(\equiv\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|})$, 地球の自転の角速度ベクトルを $\vec{\omega}$ とした．なお, (11) 式に現れる関数 $j_l(x)$, $y_l(x)$ はそれぞれ, 第 1 種, 第 2 種球 Bessel 関数である．

m_{CS} は [長さ $^{-1}$] の次元を持つ理論パラメターであり， $m_{CS}\equiv-\frac{3}{\ell\kappa^2\dot{\vartheta}}$, のように定義される．この議論では, ϑ は時間のみに依存し, (a) $\dot{\vartheta}\neq 0$ (b) $\ddot{\vartheta}\sim 0$, (c) ϑ は空間的に一様, と仮定することで, 有効的に “non-dynamical” として扱うことができる．一方, LT 効果については,

$$(\vec{\nabla}\times\vec{h}_{LT}) = -\frac{4GMR^2}{5c^3r^3}\left[3\left(\vec{\omega}\cdot\vec{n}\right)\vec{n}-\vec{\omega}\right] \tag{12}$$

であることが既に知られている．

(11),(12) 式をそれぞれ (8) 式に代入し, 時空の様子を干渉効果として算出する．$r\gg\sqrt{S}$ と仮定し, 積分を行うと LT 効果による光路差と, CS 重力によるずれはそれぞれ,

$$(c\Delta t)_{LT} = \frac{8GMS|\vec{\omega}|}{5c^3R}\Delta_{LT},$$
$$\Delta_{LT} \equiv \frac{R^3}{r^3}\left[3\vec{n}\left(\vec{n}\cdot\vec{N}_I\right)-\vec{N}_I\right]\cdot\frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}. \tag{13}$$

$$(c\Delta t)_{CS} = \frac{24GMS|\vec{\omega}|}{c^3R}\Delta_{CS},$$
$$\Delta_{CS} \equiv \Big[\left(D_1(r)-D_3(r)\right)\vec{N}_I + D_2(r)\left(\vec{N}_I\times\vec{n}\right) + D_3(r)\vec{n}\left(\vec{n}\cdot\vec{N}_I\right)\Big]\cdot\frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}. \tag{14}$$

Δ_{LT} と Δ_{CS} は, $\vec{\omega},\vec{n},\vec{N}_I$ の 3 つのベクトルの組み合わせと m_{CS} の値に依存する, 無次元の方向依存成分である．本研究では, 干渉効果における方向依存性に着目し, $\vec{\omega}$ に対する $\vec{n}$ と $\vec{N}_I$ の方向によって, Δ_{LT} と Δ_{CS} がそれぞれどう変わるかを具体的に調べる．

4 The altitudinal, latitudinal and directional dependence

図 1 の上図は緯度 ϕ と方位角 α に対する Δ_{LT} のグラフである．これより LT 効果による干渉効果は, 赤道上（$\phi=0°$）かつ, 北, または南向き（$\alpha=0°,180°$）の場合に大きくなり, 逆に東, または西向き（$\alpha=90°,270°$）の場合は, 干渉効果がゼロになることが見て取れる．

図 1 の下図は緯度と方位角に対する Δ_{CS} のグラフである．これを見ると CS 重力に依る干渉効果が大きくなるのは, 赤道上かつ南東, または北西向きに近い方向（$\alpha\sim 130°,310°$）の場合であり, これは LT 効果の場合と明らかに異なっている．また, このグラフでは理論パラメターを $m_{CS}=0.01$ としているが, m_{CS} の値によって $|\Delta_{CS}|$ を大きくする方位角の条件も変化する．

図 2 は m_{CS} に対する光路差の比,

$$\frac{(c\Delta t)_{CS}}{(c\Delta t)_{LT}} = 15\frac{\Delta_{CS}}{\Delta_{LT}}, \tag{15}$$

であり, 上図は干渉計を赤道に置いた場合（地上）で, 3 通りの方位角 ($\alpha=0°,30°,60°$) について比較したもの, また下図は, 赤道かつ北向きの場合で 2 通りの高度 ($h=0,400$[km], $h\equiv r+R$) について比較したものである．これらを見ると, m_{CS} の値によって干渉効果の大きさは敏感に影響を受け, その効果は振動的に現れることが見て取れる．しかし, 緯度や方位角, さらには高度にも依存する性質を用いて, 様々な

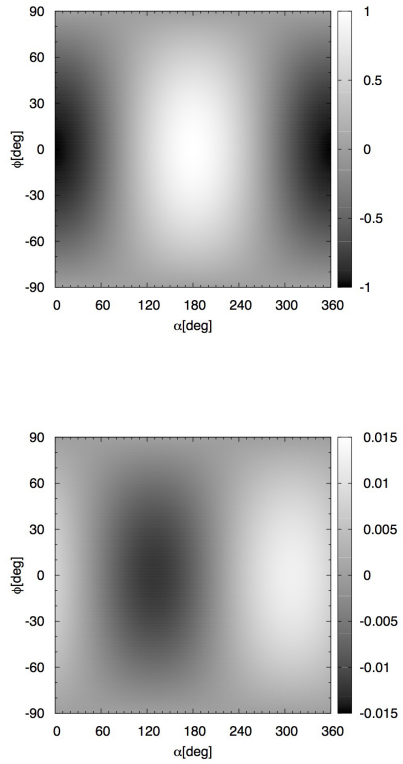


図 1: 上図は $\Delta_{LT}(\alpha, \phi)$ の射影図. 下図は $m_{CS} = 0.01$ とした場合の $\Delta_{CS}(\alpha, \phi)$ の射影図.

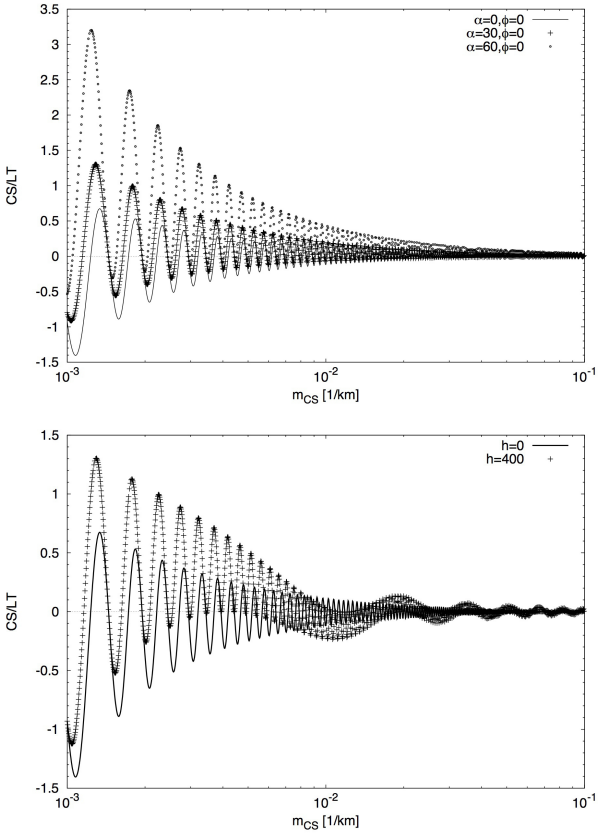


図 2: m_{CS} に対する光路差の比. 上図は地上かつ, $\phi = 0°$ で, α は $0°, 30°, 60°$ の 3 通り. 下図は $\phi = 0°$, $\alpha = 0°$ で, 高度 h は $0[\mathrm{km}], 400[\mathrm{km}]$ の 2 通り.

条件で実験を行い, 結果を組み合わせることで, m_{CS} に対して制限を与えられる可能性がある.

5 Conclusion

本研究では CS 重力の影響を調べるべく, Okawara らの先行研究を発展させ, より一般化された理論モデルを用いた光干渉効果を考えた. 特に干渉効果における方向依存性, 高度依存性に着目し, LT 効果によって生じる光路差と, それに対する CS 重力によるずれとを比較した. 結果として, 干渉計を置く緯度と方向, 高度について様々な条件下で実験を行い, 総合的に分析することで, 理論パラメターに制限を与えられる可能性があることがわかった.

Reference

H. Okawara et al. Phys. Rev. Lett. **109**, 231101 (2012).

H. Okawara et al. Phys. Rev. D **87**, 084038 (2012).

T. L. Smith et al. Phys. Rev. D **77**, 024015 (2008).

R. Colella et al. Phys. Rev. Lett. **34**, 1472 (1975).

S. A. Werner et al. Phys. Rev. Lett. **42**, 1103 (1979).

L. A. Page, Phys. Rev. Lett. **35**, 543 (1975).

J. J. Sakurai, Phys. Rev. D **21**, 2993 (1980).

J.Anandan, Phys. Rev. D **15**, 1448 (1977).

G. Papini, Phys. Rev. Lett. **24**, 32 (1967).

C.W.F.Everitt et al. Phys. Rev. Lett. **106**, 221101 (2011).

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

非最小結合するアインシュタイン・マックスウェル理論の安定性解析

森　友紀 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

現在の宇宙は加速膨張しているということが、近年の観測から示されている。アインシュタイン重力では加速膨張を説明できなかったが、新たにダークエネルギーを導入することで説明した。一方で、重力理論そのものを書き換えることで加速膨張を説明する修正重力理論も提唱されている。現在では様々な修正重力のモデルが存在している。これらの修正重力理論が物理的に可能であるためには、タキオンやゴースト場が存在してはならない。その有無を判断するためには、場の摂動に対して安定性解析を行う必要がある。
[1] の論文では、高次元の重力理論から導かれる Horndeski vector-tensor 理論において、de Sitter 時空や Schwarzschild 時空などを背景として、ベクトル場のゴースト不安定性等を議論している。この理論の特徴は、ベクトル場と重力が結合しているという点である。この結合があるため、ゴースト場等が存在する不安定なパラメーター領域がある。本収録では、まず 1 章で [1] の論文をレビューし、さらに [1] の拡張として、2 章でより一般のベクトルー重力結合を考えこの理論の安定性解析を行い、3 章でこの結果について議論する。

1 Horndeski vector-tensor theory

1.1 Action

修正重力理論のモデルの 1 つとして、Horndeski vector-tensor 理論が提唱された。この理論の作用は、

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\Big[-\frac{1}{2}M_{\rm p}^2R - \frac{1}{4}F^2 + \frac{1}{2M^2}\left(RF^2 - 4R_{\mu\nu}F^{\mu\sigma}F^{\nu}{}_{\sigma} + R_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\right)\Big] \tag{1}$$

である。ただし、$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ である。作用には重力とベクトル場がカップリングパラメーター M^2 で結合する項が含まれ、ベクトル場 A について時間の 2 階微分の運動方程式になるように、かつ F の最低次の項まで考慮されている。これは 5 次元時空上の Gauss-Bonnet 項を 4 次元にコンパクト化することによっても導かれる。

1.2 Instability analysis

Horndeski vector-tensor 理論の安定性について解析する。まず、等方・非等方に関する安定性解析を行う。backgroung を固定して、一般に z 方向に一様なベクトル場が存在すると、非等方な膨張は

$$ds^2 = dt^2 - a_\perp^2(t)(dx^2 + dy^2) - a_\parallel^2(t)dz^2 \tag{2}$$

と表される。z 方向に垂直・平行な膨張率はそれぞれ、

$$H_\perp = \frac{\dot{a}_\perp}{a_\perp} = H(1-R), \tag{3}$$

$$H_\perp = \frac{\dot{a}_\parallel}{a_\parallel} = H(1+2R) \tag{4}$$

である。ここで R は非等方パラメーターであり、$R = 0$ のとき一様等方、$R \neq 0$ のとき非等方を表す。R に対するベクトル場の発展を見ると、カップリングパラメーターに依らず $R = 0$ で安定点、$R = 1$ で不安定点となる。このことより、等方な膨張の方が安定であることが分かったので、これ以降は一様等方な backgroung について考えることとする。次に、運動項が負である Ghost 場は不安定なので、Ghost 場が出ない条件を考える。さらに、波動方程式の伝搬速度 C_s^2 が $C_s^2 > 0$ となるような条件を課す。これは $C_s^2 < 0$ であると、指数関数的に成長する解があり不安定になる為であり、このことを Laplacian 不安定と呼ぶ。代表的な一様等方時空の例として、background を FLRW 時空にして考える。FLRW 時空のメトリックは

$$ds^2 = a(\eta)^2(d\eta^2 - d\vec{x}^2) \tag{5}$$

であり η は conformal time である。このとき、作用は、

$$S = \frac{1}{2}\int d^3x d\eta \Big[\left(1+\frac{4\mathcal{H}^2}{a^2M^2}\right)(\vec{A}_\perp')^2 - \left(1-\frac{4q\mathcal{H}^2}{a^2M^2}\right)(\vec{\nabla}\times\vec{A}_\perp)^2\Big] \tag{6}$$

である。ここで $\mathcal{H} = a'/a = aH$ は conformal Hubble、$q = -\mathcal{H}'/\mathcal{H}^2$ は減速パラメーター、ベクトルポテンシャルは $A_\mu = \left(0, \vec{A}_\perp\right)$ である。したがって、Ghost 場が出ない条件より、

$$1+\frac{4\mathcal{H}^2}{a^2M^2} > 0 \tag{7}$$

である。さらに、Laplacian 不安定でない条件より、

$$C_s^2 = \frac{1+\frac{4\mathcal{H}^2}{a^2M^2}}{1-\frac{4q\mathcal{H}^2}{a^2M^2}} > 0 \tag{8}$$

なので、式 (7)(8) より、安定領域は図 1 のようになる。

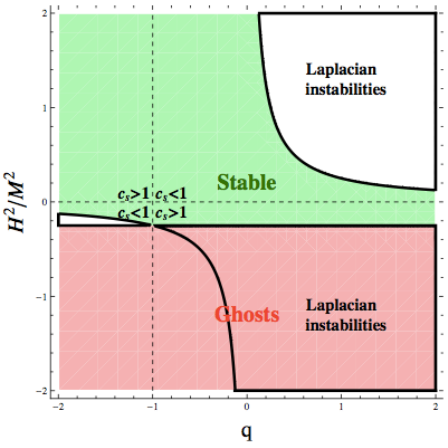


図 1: background を FLRW 時空にしたときの安定領域が緑で示されている。赤の領域が Ghost 不安定性によって棄却され、黒の太線で囲まれた領域が Laplacian 不安定性によって棄却される。([1] より引用)

2 Non-minimally coupled Einstein-Maxwell theory

2.1 action

Horndeski vector-tensor 理論の重力とベクトル場が結合する項をより一般化した作用

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\Big[-\frac{1}{2}M_{\rm p}^2R - \frac{1}{4}F^2 + \alpha RF^2 + \beta R_{\mu\nu}F^{\mu\sigma}F^{\nu}{}_{\sigma} + \gamma R_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\Big] \tag{9}$$

について考える。ここで α, β, γ は新たに導入したカップリングパラメーターである。この理論の安定性を解析的に議論する。background が FLRW 時空のとき、作用は、

$$S = \frac{1}{2}\int d^3x d\eta \left[(1-(Uq-V)H^2)\left(\vec{A}_\perp'\right)^2 - (1-(Vq-U)H^2)\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}_\perp\right)^2\right] \tag{10}$$

となる。ここで、$U \equiv 8(3\alpha+\beta+\gamma), V \equiv 4(6\alpha+\beta)$ としてカップリングパラメーターを再定義した。

2.2 Instability analysis

1.2 章と同様にして、Ghost 場が出ない条件より、

$$\frac{H_{\rm inf}^2}{H^2} > (Uq-V)H_{\rm inf}^2 \tag{11}$$

と分かる。また、Laplacian 不安定でない条件は、

$$\frac{H_{\rm inf}^2}{H^2} > (Vq-U)H_{\rm inf}^2 \tag{12}$$

と分かる。ただし、それぞれ inflation 中のハッブルパラメーター $H_{\rm inf}$ で規格化した。式 (11)(12) より安定領域は図 2 のようになる。この安定領域の $|U-V|$ の幅は、reheating 終了時のハッブルパラメーター $H_{\rm reh}$ によって、$|U-V|H_{\rm reh}^2 < 1$ と制限される。さらに、初期条件から制限を加える。宇宙が一様等方に膨張する場合、ベクトル場は subdominant である。また、エネルギー密度が正であるので、

$$0 < \frac{\rho_A}{\rho} \ll 1 \tag{13}$$

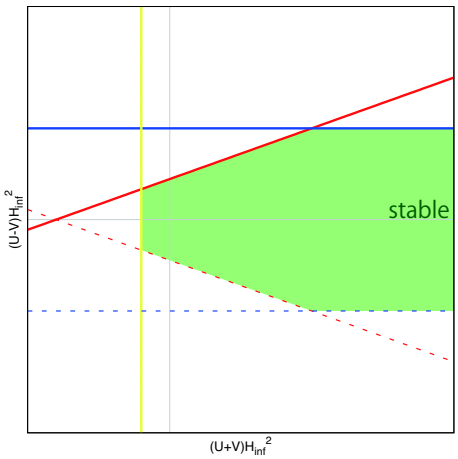


図 2: background を FLRW 時空にしたときの安定領域が緑で示されている。黄色が inflation、赤が reheating、青が radiation を表す。また、実線が Ghost 場が出ない条件、破線が Laplacian 不安定でない条件である。

である。また、ベクトル場の密度は、

$$\rho_A = \frac{1}{2a^4}\Big(1+(-2Uq+2U+3V)H^2 + \frac{4U(Uq^2+(U-V)q-V)H^4}{1+(-Uq+V)H^2}\Big) \times \frac{|\vec{A}_p|^2}{(1+(-Uq+V)H^2)^2}, \tag{14}$$

$$\vec{A}' = \vec{A}_p \frac{1}{1+(-Uq+V)H^2} \tag{15}$$

である。宇宙全体の密度に対するベクトル場の密度 ρ_A/ρ の発展を見ると、inflation の始めでベクトル場が subdominant であれば、それ以後は subdominant になるということが分かる。したがって、inflation 中の密度 $\rho_{\rm inf}$ とすると、$0 < \rho_A/\rho_{\rm inf} \ll 1$ であればよい。ここで inflation の始めのスケールファクター $a_{\rm inf}$ を 1 として、$|\vec{A}_p|^2/\rho_{\rm inf}$ を仮定すると制限がつく。$|\vec{A}_p|^2/\rho_{\rm inf} \sim 1$ とすると、式 (13) は、

$$(U-V)H_{\rm inf}^2 > -7(U+V)H_{\rm inf}^2 - 2, \tag{16}$$

$$(U-V)H_{\rm inf}^2 \gg \frac{1}{2}(U+V)H_{\rm inf}^2(2(U+V)H_{\rm inf}^2 - 3) \tag{17}$$

と書き換えられる。したがって、安定領域は図 3 のようになる。初期条件による制限からは安定領域に上限をつけることができなかった。

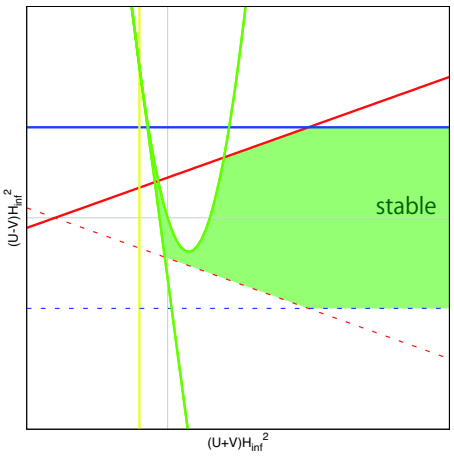


図 3: 図 2 に式 (16)(17) の条件を加えたもの。

3 Summary & Conclusion

1 章では [1] をレビューし、Horndeski vector-tensor 理論は、background によっては不安定な領域が存在することを紹介した。さらに、2 章で Horndeski vector-tensor 理論の重力とベクトル場が結合する項をより一般化したモデルで安定な領域を求めた。その領域は reheating の温度によって決まり、$|U-V|H_{\rm reh}^2 < 1$ という制限がついた。さらに、初期条件による制限を求めたが、$(U+V)H^2$ に上限をつけることができなかった。今後の目標は、reheating 後の熱浴と熱平衡なベクトル場の安定性を調べることで、このモデルにより厳しい制限をつけることである。

Reference

[1] JCAP **1310**, 064 (2013) [arXiv:1308.1867 [hep-th]].

Astrophysical black holes in screened modified gravity

小川 潤 (立教大学大学院 理学研究科 M1)

Abstract

近年の観測により, 宇宙は加速膨張していることがわかっている. その源の正体はダークエネルギーであることが分かっているが, ダークエネルギーそのものについては未解明である. 現在, 宇宙論的スケールで, 一般相対論を修正し, 加速膨張を記述する修正重力理論が盛んに研究されている. スカラー場と物質が結合する理論では, 第 5 の力が結合によって生じる. この力が宇宙論的スケールではダークエネルギーのように振る舞い, 局所スケールではその力が抑制される. このような機構を screened modified gravity という. 今回は, ブラックホール近傍でのスカラー場の振る舞いをカメレオン機構を使って調べる. ブラックホール近傍に非一様な密度分布があるとき, 非一様なスカラー分布が得られることがわかった.

1 Introduction

近年の観測により, 現在の宇宙は加速膨張していることが強く示唆されている. その源は, ダークエネルギーと呼ばれているが, このエネルギーの起源については未解明である. 例えば, 観測との整合性が良い ΛCDM 模型では, 宇宙項 Λ の源を真空のエネルギーとしているが, 観測値と理論値とでは 120 桁もの不一致が生じる. 一方では, 重力理論を修正することにより, 宇宙の加速膨張を記述する研究が進められている. その中で, 宇宙論的スケールで Einstein-Hilbert 作用を書き換え, かつ観測との整合性を保つ理論を, 修正重力理論と呼ぶ. ダークエネルギーの起源がスカラー場とする模型では, スカラー場が物質と結合するため第 5 の力が発生する. 第 5 の力を局所的なスケールでは抑制され, 宇宙論的なスケールではダークエネルギーのように振る舞うというのが, この模型の特徴である.

この模型において, スカラー場が周囲の物質の密度に依存して有効質量を得る, screend modified gravity という機構を適応する. 今回は, カメレオン機構を例に挙げ, スカラー場の有効質量の違いにより第 5 の力が抑制されるのを見る. また, ブラックホール近傍に非一様な密度分布があると, 非自明なスカラー分布が得られることを見る. この帰結によると, ブラックホール近傍に取り巻く物質に第 5 の力が働き, その影響を観測によって発見できる可能性がある.

2 物質とスカラー場が結合する模型

物質とスカラー場が結合する模型の作用は次のようになる (Khoury, J., Weltman, A. (2004)):

$$S_{\rm c}=\int d^4x\sqrt{-g}\left[\left(\frac{M_p^2R}{2}\right)-\frac{1}{2}(\partial\phi)^2+V(\phi)\right]+\int d^4x\mathscr{L}_m(\Psi_i,g^{(i)}_{\mu\nu}). \tag{2.1}$$

ただし, $M_{\rm p}=1/\sqrt{8\pi G}$ はプランク質量, R はスカラー曲率, Ψ_i は物質場, i は物質の種類を意味するラベルである. このとき, ジョルダン系における計量 $g^{(i)}_{\mu\nu}$ と, アインシュタイン系における計量 $g_{\mu\nu}$ には

$$g^{(i)}_{\mu\nu}=e^{2\beta_i\phi/M_{\rm P}}g_{\mu\nu} \tag{2.2}$$

という関係がある. ただし, β_i は結合定数と呼ばれ, 物質とスカラー場の結合の強さを表す.

スカラーテンソル理論のジョルダン系での作用を考えたとき, $\beta=-1/\sqrt{6}$ としたとき $F(R)$ 理論に帰着する. このように, カメレオン機構はいくつかのスカラーテンソル理論に適応できることがわかっている.

第 5 の力は, (2.2) 式を用いてアインシュタイン系の非相対論的物質の測地線方程式:

$$\ddot{x}^\mu+\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta+\frac{\beta}{M_{\rm p}}(2\phi_{,\alpha}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\mu+g^{\mu\lambda}\phi_{,\lambda})=0 \tag{2.3}$$

を見ると分かりやすい.(2.3) 式の右辺二項は重力による加速度, 右辺第三項の部分がスカラー場の寄与による加速度となり, 第 5 の力と呼ばれる. この第 5 の力を局所的に抑える機構がカメレオン機構である.

3 カメレオン機構

以下では, 見通しをよくするためカメレオン機構をアインシュタイン系で取り扱う. まず, スカラー場の運動方程式は, (2.1) 式において, ϕ について変分を取り

$$\Box\phi=V_{,\phi}+\sum_i\frac{\beta_i}{M_{\rm p}}e^{4\beta_i\phi/M_{\rm p}}g^{\mu\nu}_{(i)}T^{\mu\nu}_{(i)} \tag{3.1}$$

となる.□ はダランベルシアンである. また, ジョルダン系における i 番目の物質によるエネルギー運動量テンソル $T^{(i)}_{\mu\nu}=(2/\sqrt{-g})\delta\mathscr{L}_m/\delta g^{\mu\nu}_{(i)}$ を用いた. 非相対論的物質かつ, 完全流体であるとすると, エネルギー密度は

$$T_{\mu\nu}g^{\mu\nu}_{(i)}=-\tilde{\rho}_i \tag{3.2}$$

と表すことができる. このエネルギー密度 $\tilde{\rho}_i$ はジョルダン系における量であるので, この代わりにアインシュタイン系において保存される量 $\rho_i = \tilde{\rho}_i e^{3\beta\phi}$ を使う. すると, (3.1) 式は

$$\Box\phi = V_{,\phi} + \sum_i \frac{\beta_i}{M_{\rm p}} \rho e^{\beta_i \phi/M_{\rm p}} := V_{\rm eff}(\phi)_{,\phi} \qquad (3.3)$$

となる. 有効ポテンシャル $V_{\rm eff}$ は物質密度とポテンシャルによって決まる量である. ここで, $V(\phi)$ を単調減少関数とおき, その例として

$$V(\phi) = M^{4+n}\phi^{-n} = V_0\phi^{-n} \qquad (3.4)$$

とおく. ただし, $n > 1$ で, $V_0 = M^{4+n}$ と便宜的に置いた. 有効ポテンシャルの形は図 3.1 のようになる.

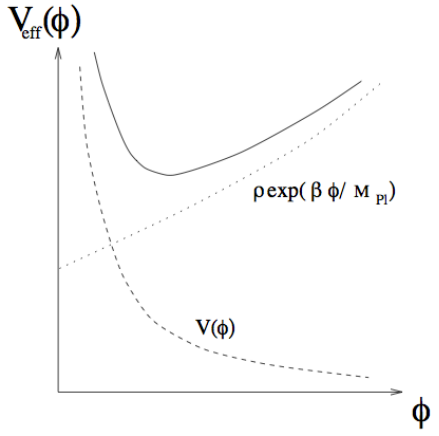


図 3.1: 高密度スケールにおける有効ポテンシャルの図

今は簡単にスカラー場が取り巻く物質を一様とする ($\beta_i \to \beta, \rho_i \to \rho$ となり, 各成分が各物質成分に対して等価). これにより, 有効ポテンシャルは, $\phi < M_{\rm p}$ とし低エネルギースケールで考えると

$$V_{\rm eff}(\phi, \rho) \approx \frac{V_0}{\phi^n} + \frac{\rho\beta\phi}{M_{\rm p}} \qquad (3.5)$$

となる. さらに, 有効ポテンシャルを最小値にするスカラー場の値 $\phi_{\rm min}$ は

$$\phi_{\rm min}^{n+1} = \frac{nV_0M_{\rm p}}{\rho\beta} \qquad (3.6)$$

で与えられる. よって, 有効ポテンシャルを最小にするスカラー場の質量は, クラインゴルドン方程式におけるスカラー場の質量項からの類似から,

$$m^2(\rho) = V_{\rm eff}(\phi, \rho)_{,\phi\phi}|_{\phi_{\rm min}} \approx \frac{\rho\beta}{M_{\rm p}} \left[(n+1) \left(\frac{\rho\beta}{nV_0M_{\rm p}} \right)^{\frac{1}{n+1}} + \frac{\beta}{M_{\rm p}} \right] \qquad (3.7)$$

となる.

以上の議論から, 高密度スケールではスカラー場の質量が大きくなることが分かる. スカラー場の寄与は, 高密度スケールでは湯川型のポテンシャルに比例するため, 典型的な寄与のスケールが高密度スケールでは短くなる. これがカメレオン機構である.

4 局所的スケールにおけるカメレオンの振る舞い

例として, 太陽や地球などの物体でのスカラー場 ϕ の解析を行う. 物体は静的で球対称, 半径 R_c, 一様密度 ρ_c, 全質量 $M_{\rm c} = 4\pi R_c^3\rho_c/3$ とする. また, 物体は孤立した系に存在し, 周囲の影響は受けず, 一様な背景密度 ρ_∞ の中にあるとする. ただし, 背景密度は物質の密度に対して十分小さいとする ($\rho_c \gg \rho_\infty$).

このとき, スカラー場の方程式 (3.3) 式を球座標で書き直すと次のようになる:

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\phi}{dr} = V_{,\phi} + \frac{\beta}{M_{\rm p}}\rho(r)e^{\beta\phi/M_{\rm p}} (= V_{{\rm eff},\phi}). \qquad (4.1)$$

ここで, $\rho(r)$ は, 物体の物質密度と背景密度の関係を満たす:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_{\rm c} & (r < R_c) \\ \rho_\infty & (r > R_c) \end{cases} \qquad (4.2)$$

また, それぞれの密度領域において ϕ_c と ϕ_∞ は $V_{\rm eff}$ を最小にするものとする:

$$\phi_c := \phi_{\rm min}|_{\rho=\rho_c}, \qquad m_c := m(\phi_c) \qquad (4.3)$$

$$\phi_\infty := \phi_\infty|_{\rho=\rho_\infty}, \qquad m_\infty := m(\phi_\infty) \qquad (4.4)$$

さらに, 大きい物体の外部の解は $m_\infty R_c \ll 1$ という近似が行える. 一方, 物体の十分内側では $\phi \simeq \phi_c$ であるとし, スカラー場の質量は $m_c \gg m_\infty$ とする.

スカラー場の振る舞いを解析すると, 物体の外部では有効ポテンシャル $V_{\rm eff}$ は減衰振動のように近似ができるので, $r \to \infty$ のとき $\phi \to \phi_\infty$ となる次のような解を得る:

$$\phi(r) \simeq -\left(\frac{\beta}{4\pi M_{\rm p}}\right)\left(\frac{3\Delta R_c}{R_c}\right)\frac{M_c e^{-m_\infty r}}{r} + \phi_\infty. \qquad (4.5)$$

ただし, $\Delta R_c/R_c$ は殻の薄さを表す因子で, thin-shell 因子と呼ぶ. ニュートンポテンシャル $\Phi_c = M_c/8\pi M_{\rm p}^2 R_c$ を用いて, $\Delta R_c/R_c = (\phi_\infty - \phi_c)/6\beta M_{\rm p}\Phi_c$ と表記できる.

この結果から, 物体内部のスカラー場の質量は大きいので, スカラー場の寄与は指数関数的に減少する. このスカラー場の寄与の抑制が物体の内部のほとんどで成立するが, 物体の殻 (ΔR_c) の部分では抑制されずに外に染み出す.

スカラー場による第 5 の力は, スカラー場の勾配によって発生する. すなわち, $\Delta R_c/R_c \ll 1$ であれば, 外部の解

(4.5) 式より, スカラー場による第 5 の力が抑制される. つまり, スカラー場がカメレオンのように物体内部に隠れてしまうのである. これを表したのが図 4.1 である.

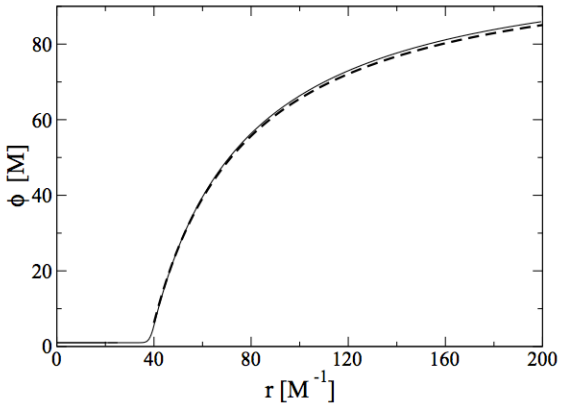


図 4.1: 縦軸がスカラー場 ϕ, 横軸が天体の半径 r とした, 高密度天体におけるスカラー場の分布. 半径が $R_c = 40M^{-1}$, $\phi_c/M = 1, \phi_\infty/M = 100$, $\Delta R_c/R_c \approx 0.0625$ という条件の元でプロットした. 天体表面に近づくまでスカラー場は隠されているということが分かる.

5 ブラックホール (BH) 近傍でのスカラー場の振る舞い

BH から取り出せる観測量は, no-hair 定理より「質量」「電荷」「角運動量」のみであるとされている.BH 近傍での非一様な物質密度を考え, カメレオン機構が働くと, この観測量に「スカラー場の分布」を加える事ができる. もし, 非自明なスカラー場の分布を得られたら, BH の種類を区別することが可能となる (Davis, A. -C., Gregory, R. Jha, R., Muir, J. (2014)).

5.1 BH の条件

今回扱う BH について条件を与える. 天体物理的には BH は回転をしているが, 今はブラックホール近傍でスカラー分布が非自明な分布をするかということに興味があるので, 簡単にシュバルツシルト BH で話しを進める. さらに, BH において, 事象の地平面 R_s と最内円安定軌道 (ISCO)$R_0 = 3R_s$ で領域を分ける.R_s より内側からは情報を得ることができない. また, ISCO の内側では, 粒子はすぐに地平面に落ち込んでしまう. 一方, ISCO の外側では一様密度 $\rho_\star$ で, BH を取り巻いていると仮定する. すると, 密度分布は

$$\rho(r) := \begin{cases} 0 & R_s < r < R_0 (\text{Region I}) \\ \rho_\star & r > R_0 (\text{Region II}) \end{cases} \tag{5.1}$$

と 2 つの領域に分けることができる.

5.2 スカラー場の分布 (解析解)

今, ISCO 付近でのスカラー場の振る舞いを簡単に記述するために,

$$\hat{\phi} = \frac{\phi}{\phi_\star}, x = \frac{r}{R_s}, \hat{m}^2 = m_\star^2 R_s^2 = (n+1)\frac{\rho_\star \beta R_s^2}{M_{\rm p}\phi_\star} \tag{5.2}$$

と無次元化を行い, (3.3) 式を

$$\hat{\phi}'' + \frac{2x-1}{x(x-1)}\hat{\phi}' = \frac{x}{x-1}\frac{\hat{m}^2}{(n+1)}\left[\Theta[x-x_0] - \frac{1}{\hat{\phi}^{n+1}}\right] \tag{5.3}$$

と書き換える. さらに, Region II の外側では, スカラー場の値は一定値 $\phi_\star$ となるように置く.$\phi_\star$ のように, $\star$ 表記は, ISCO の外側の有効ポテンシャルを最小にする ϕ_{min} を表す. 一方で, ISCO 付近では, Region I と Region II の境界条件を考慮する必要がある. そこで, Region I のスカラー場の振る舞いについて, 次のようになると期待する.

まず, Region II でのスカラー場の質量が大きいとき, Reigion I でのスカラー場の値が大きくなり, ISCO に近づくにつれて, スカラー場が急激に転がる. これは, Region I に密度がなく, 場を最小にする $\phi_{\rm min}$ の値が大きくなるというスカラー場の有効ポテンシャルから理解できる.

また一方で, Region II でのスカラー場の質量が小さいとき, Region I でのスカラー場の値が小さくなり, ISCO に近づくとき, ゆっくりと $\phi_\star$ へとなるようなスカラー場の振る舞いになる.

どちらの場合においても, Region II でのスカラー場の値は ISCO 付近で急激に減衰する形とおき, $\hat{\phi} \simeq 1 + \delta\hat{\phi}$ となると期待する. ただし,

$$\delta\hat{\phi} \simeq C\frac{e^{-\hat{m}(x-x_0)}}{x^{1+\hat{m}/2}} \tag{5.4}$$

とおき, C は定数である.

•$\hat{m}x_0 \ll 1$ のとき

このときは, 長距離スカラー場となる.$\hat{\phi}$ の値は, ほとんど変化しない. そのため, Region I でのスカラー場の運動方程式 (5.3) 式は

$$[x(x-1)\hat{\phi}']' = -\frac{\hat{m}^2 x^2}{(n+1)\hat{\phi}_h^{n+1}}(1 + \mathcal{O}(\delta\hat{\phi}/\hat{\phi}_h)) \tag{5.5}$$

となり, 解は

$$\hat{\phi} = \hat{\phi}_h - \frac{\hat{m}^2}{6(n+1)\hat{\phi}_h^{n+1}}[x^2 + 2x + 2\ln x - 3] \tag{5.6}$$

となる. 外部の解との接続条件から,

$$\hat{\phi}_h = 1 + \frac{\hat{m}^2}{6(n+1)\hat{\phi}_h^{n+1}}\left[x_0^2 + 2x_0 + 2\ln x_0 - 3 + \frac{4x_0^2 + 4x_0 + 4}{2\hat{m}x_0 + 2 + \hat{m}}\right] \tag{5.7}$$

$$C = \frac{\hat{m}^2}{3(n+1)\hat{\phi}_h^{n+1}}\frac{x_0^{1+\hat{m}/2}(x_0^2 + x_0 + 1)}{\hat{m}x_0 + 1 + \hat{m}/2} \tag{5.8}$$

となる.ISCO の内側と外側の解は次のようになる:

$$\hat{\phi} \simeq 1+\begin{cases} \frac{\hat{m}^2}{6(n+1)}[3x_0^2-x^2+4x_0-2x+2+2\ln\frac{x_0}{x}] & x<x_0 \\ \frac{\hat{m}^2}{3(n+1)}(x_0^2+x_0+1)\frac{x_0}{x}e^{-\hat{m}(x-x_0)}] & x>x_0 \end{cases} \tag{5.9}$$

地平面での値 $\hat{\phi}_h$ は (5.6) 式の $x<x_0$ における $\hat{m}x_0$ の最低次を見ればよく

$$\hat{\phi}_h \approx 1+\frac{\hat{m}^2x_0^2}{2(n+1)}, \qquad \delta\phi_h \approx \frac{\rho_\star \beta R_0^2}{2M_{\rm p}} \tag{5.10}$$

となる.$\delta\phi_h$ は結合定数 β, ISCO 外側の密度 $\rho_\star$, スカラー場が転がることができる距離 R_0 に比例していることが分かる.

•$\hat{m}x_0 \gg 1$ のとき

この場合は, 短距離スカラー場となる. ここでは, 上でやった通りの近似を使うが, $\hat{\phi}_h$ についてを調べるよりも, ISCO 付近でのスカラー場の急激な転がりを計算するほうが今は重要である. $\hat{\phi}$ の変化はポテンシャルが支配的になるので, スカラー場の運動方程式は

$$\hat{\phi}'' \simeq -\frac{\hat{m}^2}{(n+1)}\frac{1}{\hat{\phi}^{n+1}} \tag{5.11}$$

となる. これを解き, 外部との解との接続を考えると,

$$\hat{\phi} \simeq 1+\begin{cases} \left[\frac{\hat{m}^2(n+2)^2}{2n(n+1)}\right]^{\frac{1}{n+2}}\left(x_0-x+\frac{2}{(n+2)\hat{m}}\right)^{\frac{2}{n+2}} & x<x_0 \\ \left[\frac{2}{n(n+1)}\right]^{\frac{1}{n+2}}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{1+\hat{m}/2}e^{-\hat{m}(x-x_0)} & x>x_0 \end{cases} \tag{5.12}$$

となる. この解をみると, スカラー場の ISCO 付近での急激な変化を見ることが出来る.ϕ_h については (5.12) 式の $x<x_0$ での x_0 と $\hat{m}$ についての最低次の項を見てみると, (5.10) 式と同様な表式を得る:

$$\hat{\phi}_h \simeq \hat{\phi}_c\left(\frac{\hat{m}^2x_0^2}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.13}$$

ただし, $\hat{\phi}_c^{n+2}=(n+2)^2/2n$ である. 無次元化を直して ϕ_h を書き直すと

$$\phi_h \propto ((n+2)^2V_0R_0^2)^{\frac{1}{n+2}} \tag{5.14}$$

となり, ϕ_h は V_0 と R_0 に比例するということが見て取れる (先と同様に, 外側のエネルギー密度に依存するとも言える).

5.3 スカラー場の分布 (数値解)

x_0 付近での解を数値的に求める.$n=4, R_0=3R_s$ と置き, スカラー場の分布を数値的に解いたものが図 5.1 である. 図 4.1 と見比べると, 類推が可能である. 天体の場合, 高密度 → 低密度スケールへとスケールが変わり, それに対応してスカラー場が増える. 一方, BH の場合, 低密度スケール → 高密度スケールとなる. BH にも thin-shell のような振る舞いが見られるということが分かった.

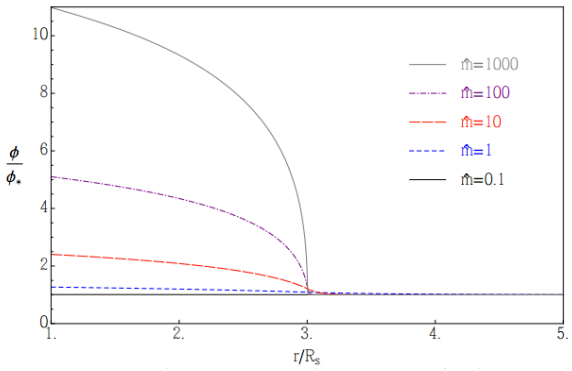


図 5.1: 数値解で求めたスカラー場の分布.$\hat{m}=m_\star R_s$ は, カメレオンの質量を表す.$\hat{m}$ の大小で, スカラー場の振る舞いが大きく変わっている.

この結果より, ISCO の外側の物質分布を変えることでスカラー場の分布が大きく変わるということがわかった. BH 近傍での非自明なスカラー分布を知ることができれば, BH の区別ができるようになる. この区別は, 降着円盤や重力波による観測によっていつか行えるだろう.

6 終わりに

BH 近傍で非一様な密度分布を考えると, 非自明なスカラー場の分布が現れるということがわかり, no-hair 定理にさらに毛を 1 つ生やすことができた. この毛を使って、BH に区別をつけることが可能となる.

今後の課題としては, BH 近傍での密度分布を滑らかに接続し, 今回のようなスカラー場の分布が現れるかを確認したい. 今回のような密度分布をした結果, 非自明なスカラー分布が得られた可能性があるためである. また, BH の ISCO 付近で第 5 の力が生じるので, 降着円盤上への影響を調べたい. これにより, カメレオン機構の新たな制限を提案したい.

Reference

Khoury, J., Weltman, A. “Chameleon Cosmology,” *Phys. Rev. D*, **69**, 044026,(2004)

Davis, A. -C., Gregory, R. Jha, R., Muir, J. ”Astrophysical black holes in screened modified gravity,”arxiv:1402:4737(2014)

Khoury, J., Weltman, A. “Chameleon Fields: Awaiting Surprises for Tests of Gravity in Space,” *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 171104,(2004)

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

最も一般的なスカラーテンソル理論における宇宙論的密度揺らぎの赤方偏移空間でのパワースペクトル

宅嶌　祐一郎 (広島大学大学院 理学研究科)

Abstract

最も一般的なスカラーテンソル理論における宇宙論的密度揺らぎの密度-密度パワースペクトル、密度-速度パワースペクトル、速度-速度パワースペクトルを計算し、いくつのパラメータにどのように依存しているのかを調べた。また具体的な模型として、KGB 模型を用いて定量的な評価を行った。本収録ではその導出方法について紹介する。

1 Introduction

観測から示唆されている宇宙の加速膨張を説明する理論として、一般相対論に宇宙項を加えた宇宙項模型が標準理論として考えられている。その一方で、重力理論を修正して加速膨張を説明しようとする試みもあり、盛んに研究されている。本研究で扱う修正重力理論である最も一般的なスカラーテンソル理論はスカラー場を一つ加えることで重力の効果を修正した理論である。これは場の運動方程式が 2 階の微分方程式になるという条件の下で最も一般的な理論であり、様々な修正重力理論を包括した理論になっている。また Vainshtein 機構によって、太陽系スケールの重力のテストをパスできる可能性がある。

重力理論には様々なモデルが存在するため、その検証が課題になっている。修正重力理論の制限の 1 つとして、宇宙の大規模構造の進化の進化を調べる方法がある。本研究では宇宙の大規模構造を特徴付ける物理量の一つである宇宙論的密度揺らぎが修正重力理論の場合にどのような特徴を持つのかを調べるために、標準摂動理論を用いて 3 次まで計算を行った。またその計算結果を用いて、赤方偏移空間パワースペクトルの一般的な表式を得た。

本収録では 2 章で宇宙論的密度揺らぎの 3 次まで計算し、3 章で赤方偏移空間パワースペクトルを簡単に紹介し、4 章では具体的な修正重力理論の模型を用いて定量的な評価を行う。

2 Cosmological density perturbations

最も一般的なスカラーテンソル理論の作用は以下で与えられる。

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\mathcal{L}_2+\mathcal{L}_3+\mathcal{L}_4+\mathcal{L}_5+\mathcal{L}_{\rm m}\right), \quad (1)$$

$$\mathcal{L}_2 = K(\phi, X), \quad (2)$$

$$\mathcal{L}_3 = -G_3(\phi, X)\Box\phi, \quad (3)$$

$$\mathcal{L}_4 = G_4(\phi, X)R + G_{4X}\left[(\Box\phi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2\right], \quad (4)$$

$$\mathcal{L}_5 = G_5(\phi, X)G_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu\phi - \frac{1}{6}G_{5X}\left[(\Box\phi)^3 - 3\Box\phi(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2 + 2(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^3\right]. \quad (5)$$

K, G_3, G_4, G_5 はスカラー場 ϕ とその運動項 $X(=-(\partial\phi)^2/2)$ の任意関数であり、G_{iX} は $\partial G_i/\partial X$ を表している。4 つの任意関数 K, G_3, G_4, G_5 の選び方によって、様々な修正重力理論を再現する。計量はニュートンゲージにとる。

$$ds^2 = -(1+2\Phi)dt^2 + a^2(1-2\Psi)d\mathbf{x}^2. \quad (6)$$

スカラー場の摂動は

$$\phi \to \phi(t) + \delta\phi(t, \mathbf{x}), \quad (7)$$

とし、物理量 Q を以下で定義する。

$$Q \equiv H\frac{\delta\phi}{\dot{\phi}}. \quad (8)$$

また宇宙論的密度揺らぎを $\delta(t, \mathbf{x})$、速度場を $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ とする。5 つの量 $\delta, \mathbf{u}[\theta], \phi, \psi, Q$ を 5 つの方程式

- 連続の方程式
- オイラー方程式
- 重力場の方程式 (2 つ)
- スカラー場の方程式

を用いて解いていく。このうち重力場の方程式とスカラー場の方程式についてはサブホライズン近似を用いて [3] で計算されているので、これらを使って計算する。また 2 次の計算までは [5] にまとめている。

まず 5 つの量をフーリエ変換する。

$$\delta(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\delta(t,\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \tag{9}$$

$$u^j(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\frac{-ik^j}{k^2}aH\theta(t,\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \tag{10}$$

Φ,Ψ,Q に関しては δ と同じように行う。θ は速度場のスカラー関数を表す。5 つの物理量を以下のように展開して標準摂動理論を用いて、方程式を解くことにする。

$$Y(t,\mathbf{k}) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(t,\mathbf{k}). \tag{11}$$

Y は $\delta,\theta,\Phi,\Psi,Q$ を表す。

まず $n=1$、すなわち線形理論の場合を考える。5 つの方程式を連立させると、密度揺らぎの時間に関する 2 階の微分方程式を得る。

$$\frac{\partial^2\delta_1(t,\mathbf{k})}{\partial t^2} + 2H\frac{\partial\delta_1(t,\mathbf{k})}{\partial t} + L\delta_1(t,\mathbf{k}) = 0. \tag{12}$$

ここで H はハッブルパラメータを表し、L は 4 つの任意関数 K,G_3,G_4,G_5 やハッブルパラメータなどの関数で時間に依存している。この微分方程式は 2 つの独立解（成長解 $D_+(t)$ と減衰解 $D_-(t)$）を持つが、減衰解は急激に減衰するので、構造形成には寄与しない。よって成長解のみを残して、1 次の密度揺らぎは以下のように表される。

$$\delta_1(t,\mathbf{k}) = D_+(t)\delta_{\rm L}(\mathbf{k}). \tag{13}$$

ここで $\delta_{\rm L}(\mathbf{p})$ は初期の線形な密度揺らぎを表し、ガウス分布に従うと仮定する。また連続の方程式にこの解を代入することで、速度場の 1 次の解を得る。

$$\theta_1(t,\mathbf{k}) = -fD_+(t)\delta_{\rm L}(\mathbf{k}). \tag{14}$$

ここで $f(=d\ln D_+/d\ln a)$ は線形成長率を表す。紙面の都合上、Φ_1,Ψ_1,Q_1 は省略する。

次に 2 次の解を求める。1 次の場合と同様に方程式を連立させることで、2 次の微分方程式を得る。

$$\frac{\partial^2\delta_2(t,\mathbf{k})}{\partial t^2} + 2H\frac{\partial\delta_2(t,\mathbf{k})}{\partial t} + L\delta_2(t,\mathbf{k}) = S_{\delta 2}(t,\mathbf{k}). \tag{15}$$

2 次の微分方程式には非同次項が現れる。これは 1 次では異なるスケールの波数は独立に進化するが、2 次以上になると互いに影響し合うことを表している。この異なるモードの結合を表す関数をモードカップリングの関数と呼ぶ。2 次では 3 つのモードカップリングの関数が現れる。

$$\alpha^{(s)}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) = 1 + \frac{(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_2)(k_1^2+k_2^2)}{2k_1^2k_2^2}, \tag{16}$$

$$\beta(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) = \frac{(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_2)|\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2|^2}{k_1^2k_2^2}, \tag{17}$$

$$\gamma(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) = 1 - \frac{(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_2)^2}{k_1^2k_2^2}. \tag{18}$$

α は連続の式、β はオイラー方程式、γ は重力場の方程式とスカラー場の方程式に現れるモードカップリングの関数である。しかしこの 3 つは独立ではなく関係式が存在する。

$$\beta(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) = \alpha^{(s)}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) - \gamma(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2). \tag{19}$$

すなわち、独立なものは 2 つである。これらを用いて、密度揺らぎの 2 次の解は以下のように表される。

$$\delta_2(t,\mathbf{k}) = D_+^2(t)\delta_{2K}(t,\mathbf{k}), \tag{20}$$

$$\delta_{2K}(t,\mathbf{k}) \equiv \int d\mathbf{k}_1d\mathbf{k}_2\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2) \times F_2(t,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\delta_{\rm L}(\mathbf{k}_1)\delta_{\rm L}(\mathbf{k}_2), \tag{21}$$

$$F_2(t,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) = \alpha^{(s)}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) - \frac{2}{7}\lambda(t)\gamma(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2). \tag{22}$$

同様に速度場の 2 次の解は

$$\theta_2(t,\mathbf{k}) = -fD_+^2(t)\theta_{2K}(t,\mathbf{k}), \tag{23}$$

$$\theta_{2K}(t,\mathbf{k}) \equiv \int d\mathbf{k}_1d\mathbf{k}_2\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2) \times G_2(t,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\delta_{\rm L}(\mathbf{k}_1)\delta_{\rm L}(\mathbf{k}_2), \tag{24}$$

$$G_2(t,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) = \alpha^{(s)}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) - \frac{4}{7}\lambda_\theta(t)\gamma(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2). \tag{25}$$

となる。パラメータはそれぞれ 1 つずつ現れる（密度揺らぎに λ、速度場に λ_θ）。これら 2 つのパラメータは作用に現れる任意関数の関数になっているので、修正重力理論を特徴づけるパラメータになっている。またこれらは時間に依存することに留意しよう。物質優勢期の初期では 1 になるが、時間が経過するとともに重力を修正した効果によって、1 からずれていく。λ と λ_θ には関係式

$$\lambda_\theta(t) = \lambda(t) + \frac{\dot{\lambda}(t)}{2fH}, \tag{26}$$

があるので、関数としては独立とは言えないが、観測ではある赤方偏移の 1 点の値を調べるので、パラメータとしては独立であると考えられる。

次に 3 次の解を考える。3 次では、方程式のモードカップリングの関数と 2 次の解のモードカップリングの関数が結合することで新たにモードカップリングの関数は 8 つと、3 次の方程式独自のモードカップリングの関数 1 つの合計 9 つ現れる。しかしこれらの間にも 2 次の場合と同様に関係式があり、全てが独立という訳ではない。整理すると、3 次の微分方程式に現れる 1 次独立なモードカップリングの関数は 5 つになる。この結果密度揺らぎは

$$\delta_3(t,\mathbf{k}) = D_+^3(t)\delta_{3K}(t,\mathbf{k}), \tag{27}$$

$$\delta_{3K}(t,\mathbf{k}) \equiv \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 \delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3) \times F_3(t,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3)\delta_{\rm L}(\mathbf{k}_1)\delta_{\rm L}(\mathbf{k}_2)\delta_{\rm L}(\mathbf{k}_3), \tag{28}$$

$$F_3(t,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3) = \alpha\alpha - \frac{2}{7}\lambda\alpha\gamma_R - \frac{2}{7}\lambda\alpha\gamma_L - \frac{2}{21}\mu\gamma\gamma + \frac{1}{9}\nu\xi, \tag{29}$$

と表され、速度場は

$$\theta_3(t,\mathbf{k}) = -fD_+^3(t)\theta_{3K}(t,\mathbf{k}), \tag{30}$$

$$\theta_{3K}(t,\mathbf{k}) \equiv \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 \delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3) \times G_3(t,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3)\delta_{\rm L}(\mathbf{k}_1)\delta_{\rm L}(\mathbf{k}_2)\delta_{\rm L}(\mathbf{k}_3), \tag{31}$$

$$G_3(t,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3) = \alpha\alpha - \frac{4}{7}\lambda_\theta\alpha\gamma_R - \frac{2}{7}\lambda\alpha\gamma_L - \frac{2}{7}\mu_\theta\gamma\gamma + \frac{1}{3}\nu_\theta\xi, \tag{32}$$

となる。パラメータとモードカップリングの関数の変数と、Φ_3, Ψ_3, Q_3 は省略した。また $\alpha\alpha$ などの定義も省略する。カーネル F_3, G_3 に現れる $\alpha\alpha$, $\alpha\gamma_R$, $\alpha\gamma_L$, $\gamma\gamma$, ξ の 5 つが 3 次の独立なモードカップリングの関数であり、$\lambda, \mu, \nu, \lambda_\theta, \mu_\theta, \nu_\theta$ がパラメータである。λ と λ_θ は 2 次で現れたパラメータであるから、3 次で現れる新しいパラメータは $\mu, \nu, \mu_\theta, \nu_\theta$ の 4 つである。また μ と μ_θ、ν と ν_θ の間にも係数は異なるが (26) と同様な関係がある。

3 Power spectrum

バイアスや減衰の効果を無視した場合、赤方偏移空間パワースペクトルは以下のように書ける。

$$P^s(t,k,\mu) = P_{\delta\delta}(t,k) - 2\mu^2 f P_{\delta\theta}(t,k) + \mu^4 f^2 P_{\theta\theta}(t,k). \tag{33}$$

上式の μ は先ほどのパラメータではなく、波数と観測者の視線方向の余弦を表す。$P_{\delta\delta}$, $P_{\delta\theta}$, $P_{\theta\theta}$ はそれぞれ

$$\langle\delta(t,\mathbf{k})\delta(t,\mathbf{k}')\rangle \equiv (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{k}+\mathbf{k}')P_{\delta\delta}(t,k), \tag{34}$$

$$\langle\delta(t,\mathbf{k})\theta(t,\mathbf{k}')\rangle \equiv (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{k}+\mathbf{k}')(-f)P_{\delta\theta}(t,k), \tag{35}$$

$$\langle\theta(t,\mathbf{k})\theta(t,\mathbf{k}')\rangle \equiv (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{k}+\mathbf{k}')f^2P_{\theta\theta}(t,k), \tag{36}$$

と定義した。それぞれのパワースペクトルは以下のようにガウス分布に従う線形パワースペクトル $P_{\rm L}$ と非線形パワースペクトルに分けることが出来る

$$P_{\delta\delta}(t,k) = D_+^2(t)P_{\rm L}(k) + D_+^4(t)\left(P_{\delta\delta}^{(22)}(t,k) + 2P_{\delta\delta}^{(13)}(t,k)\right), \tag{37}$$

$$P_{\delta\theta}(t,k) = D_+^2(t)P_{\rm L}(k) + D_+^4(t)\left(P_{\delta\theta}^{(22)}(t,k) + 2P_{\delta\theta}^{(13)}(t,k)\right), \tag{38}$$

$$P_{\theta\theta}(t,k) = D_+^2(t)P_{\rm L}(k) + D_+^4(t)\left(P_{\theta\theta}^{(22)}(t,k) + 2P_{\theta\theta}^{(13)}(t,k)\right). \tag{39}$$

$P_{\rm L}$ は修正重力理論と一般相対論では変わらない。これは 1 次の解を求める際に、$\delta_{\rm L}$ を初期の線形な密度

揺らぎとしたことに対応している。修正の効果を受けるのは $P^{(22)}_{\delta\delta}, P^{(13)}_{\delta\delta}, P^{(22)}_{\delta\theta}, P^{(13)}_{\delta\theta}, P^{(22)}_{\theta\theta}, P^{(13)}_{\theta\theta}$ であり、それぞれ

$$
\begin{aligned}
&P^{(22)}_{\delta\delta} \supset \lambda, && P^{(13)}_{\delta\delta} \supset \lambda, \mu,\\
&P^{(22)}_{\delta\theta} \supset \lambda, \lambda_\theta, && P^{(13)}_{\delta\theta} \supset \lambda, \mu, \lambda_\theta, \mu_\theta,\\
&P^{(22)}_{\theta\theta} \supset \lambda_\theta, && P^{(13)}_{\theta\theta} \supset \lambda, \mu_\theta,
\end{aligned}
$$

に依存したパワースペクトルである。3 次までに現れたパラメータ 6 つ全てに依存するわけではなく、2 つのパラメータ ν と ν_θ はパワースペクトルには影響しないことを強調しておく。

4 KGB model

ここまでは一般的な場合にどのような特徴を持つのかを議論したので、この章では具体的な模型を用いて、定量的な評価を行う。今回用いるモデルは KGB 模型である。その中でも作用の 4 つの任意関数を以下のように選んだ模型について考える。

$$
K = -X, \qquad G_3 = M_{\rm pl}\left(\frac{r_c^2}{M_{\rm pl}^2}X\right)^n,
$$

$$
G_4 = \frac{M_{\rm pl}}{2}, \qquad G_5 = 0.
$$

n は理論的なパラメータである。アトラクター解を

$$
3\dot{\phi}HG_{3X} = 1 \tag{40}
$$

と選ぶことでゴーストがなく、加速膨張する解であることが確認されている [4]。ΛCDM 模型の場合と KGB 模型の場合の 2 次と 3 次の解のパラメータの現在の値は表 1 の通りである。表から添字 θ がつくパラメータの方が大きくずれていることが分かる。これは (26) の関係式から分かるように λ_θ は λ の時間微分が影響するが、λ は加速膨張期に入ると急激に変化するためである。μ_θ, ν_θ も同様の理由による。

表 1: パラメータの値 ($z = 0$)

	ΛCDM	KGB(n=1)	KGB(n=2)	KGB(n=5)
λ	0.994	1.003	1.011	1.019
μ	0.996	0.991	0.995	1.001
ν	0.991	1.014	1.034	1.049
λ_θ	0.982	1.043	1.073	1.095
μ_θ	0.991	1.025	1.074	1.116
ν_θ	0.980	1.089	1.136	1.169

それぞれのパワースペクトルのグラフは省略するが、少しだけ考察しておく。$k \ll 1$ のときには高次の効果は弱いため、

$$
\frac{P_{\rm KGB}}{P_{\Lambda{\rm CDM}}} \approx \frac{D^2_{+{\rm KBG}}P_{\rm L}}{D^2_{+\Lambda{\rm CDM}}P_{\rm L}} \approx \frac{D^2_{+{\rm KGB}}}{D^2_{+\Lambda{\rm CDM}}}, \tag{41}
$$

となることから、波数が小さい部分では成長率 D_+ の修正の効果が分かり、波数 k が 1 に近い部分ではパラメータの違いも含めた重力の修正の効果が分かる。

5 Conclusion

最も一般的なスカラーテンソル理論における宇宙論的密度揺らぎを計算し、それを用いて赤方偏移空間パワースペクトルの一般的な表式を得た。その結果、密度揺らぎと速度場の 3 次までの解は 6 つのパラメータで特徴づけられるが、パワースペクトルに影響するのはそのうち 4 つのパラメータであることが分かった。

6 参考文献

[1]G.W.Horndeski Int. J. Theor. Phys. 10 (1974) 363-384

[2]T.Kobayashi et al. Prog. Theor. Phys. 126 (2011), 511-529

[3]R.Kimura et al. Phys. Rev. D85. 024023 (2012)

[4]R.Kimura, K. Yamamoto, JCAP 04 (2011) 025

[5]Y.Takushima et al. Phys. Rev. D89. 104007 (2014)

7 Acknowledgement

本研究は広島大学の山本一博准教授、照喜名歩さんとの共同研究に基づいています。

銀河団の多波長観測を用いた一般化されたガリレオン重力模型の制限

照喜名 歩 (広島大学大学院 理学研究科)

Abstract

現在の宇宙の加速膨張を解明するため、一般相対論を宇宙論的な長距離スケールで修正する修正重力理論がよく研究されている。一般に重力理論の修正は新たな自由度（スカラー場）を生み出し、それにより重力ポテンシャルは変更を受けて一般相対論とのズレが生じる。ガリレオン重力模型は太陽系のような局所スケールでヴァインシュタイン機構によりスカラー場が隠され、一般相対論が回復する模型である。この重力模型は銀河団スケールでヴァインシュタイン機構が十分に働かず、一般相対論が回復しない可能性がある。このとき、銀河団中のガス分布は重力ポテンシャルの修正により変更され、さらに、重力場中の光の軌道も修正されるために重力レンズシアー分布も変更を受ける。ここではガリレオン重力模型を一般化したモデルについて、ガス分布・シアー分布がどのように変更されるのか、実際の観測から重力模型に対してどのような制限が得られるかについて考察した。その結果、観測と比較する際、ガス分布とシアー分布両者を同時に比較することで、重力模型のパラメータに対して有用な制限を得ることを示した。

1 Introduction

宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) や Ia 型超新星の観測から、現在の宇宙が加速膨張期にあることが明らかになった。この加速膨張の起源として宇宙項模型やダークエネルギーなど未知のエネルギー成分の導入が考えられているが、その証拠は明らかになっていない。一方、このようなエネルギー成分を導入しない修正重力理論の研究も盛んである。これは、アインシュタインの一般相対性理論を宇宙論的長距離スケールで修正することにより加速膨張を説明する模型である。一般に、重力理論を修正すると新たにスカラー的な自由度が生まれる。これにより、重力ポテンシャルは変更され一般相対論とのズレが生じてしまう。修正重力理論の一つである一般化されたガリレオン模型は、太陽系のような局所スケールでヴァインシュタイン機構によりスカラー場が隠され、一般相対論が回復する模型である。一方、この模型では銀河団外縁部でヴァインシュタイン機構が十分には働かず、一般相対論が回復しない可能性がある。この時、重力ポテンシャルの修正により、銀河団中のガス分布、重力場中の光の軌道が変更を受けることになる。前者の効果は銀河団ガスに起因する X 線表面輝度、X 線温度、スニヤエフ・ゼルドヴィッチ効果の観測に影響を与え、後者の効果は弱い重力レンズ効果によるシアー分布の観測に影響を与える。先行研究 A. Terukina and K. Yamamoto. (2012); A. Terukina et al. (2014); T. Narikawa and K. Yamamoto. (2012) ではガス分布、シアー分布それぞれの観測が重力模型に対して有用な制限を与えることが示されている。本研究では両者の観測を組み合わせることで得られる重力模型の制限について議論する。

ここでは、まず、一般化されたガリレオン重力模型におけるガス分布・シアー分布を導出手続きを述べ、最後にかみのけ座銀河団の観測と比較することで得られる重力模型に対する制限の preliminary な結果を示す。

2 Generalized Galileon model

ここでは、次の一般化されたガリレオン模型について考える (R. Kimura et al. (2012))。

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\Big[G_4(\phi)R + K(\phi, X) - G_3(\phi, X)\Box\phi + \mathcal{L}_{\rm m}\Big], \qquad (1)$$

ここで、 $K(\phi, X)$, $G_3(\phi, X)$, $G_4(\phi)$ はスカラー場 ϕ と $X \equiv -(\partial\phi)^2/2$ の任意関数、$\mathcal{L}_{\rm m}$ は物質のラグランジアンである。このモデルはガリレオン模型、Dvali-Gabadaze-Porrati (DGP) 模型を含んでいる。

この模型の摂動を考える。計量としてニュートンゲージ

$$ds^2 = -(1+2\Psi)dt^2 + a(t)^2(1+2\Phi)d\mathbf{x}^2 \qquad (2)$$

をとり、スカラー場の摂動 $Q(\mathbf{x})$ を次のように定義する。

$$\phi(t,\mathbf{x}) = \phi(t)(1+Q(\mathbf{x})) \qquad (3)$$

準静的近似における球対称解は、重力場の方程式、スカラー場の方程式から

$$\frac{d\Psi}{dr} = \frac{GM(<r)}{r^2} - (\alpha+\xi)\frac{dQ}{dr}, \qquad (4)$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{GM(<r)}{r^2} - \xi\frac{dQ}{dr}, \qquad (5)$$

$$\frac{dQ}{dr} = \frac{r}{4\lambda^2}\left(1-\sqrt{1+\frac{8G\lambda^2\zeta M(<r)}{r^3}}\right), \qquad (6)$$

と得られる。ここで、$M(<r) \equiv 4\pi\int_0^r dr' r'^2\rho(r')$ は半径 r 内のハローの質量である。また、α, ξ, ζ,λ^2 は K, G_3, G_4 の関数であり、重力模型を特徴付けるパラメータである。

ここで、スカラー場 Q はヴァインシュタイン半径

$$r_V \equiv \left[8G\lambda^2\zeta M(<r_V)\right]^{1/3} \qquad (7)$$

によってその振る舞いが特徴付けられる。ヴァインシュタイン半径より十分内側 $r \ll r_V$ では (6) 式より、$|dQ/dr| \sim \sqrt{G\zeta M(<r)/2\lambda^2 r} \ll GM(<r)/r^2$ であるから、重力ポテンシャルの勾配は

$$\frac{d\Psi}{dr} \sim \frac{GM(<r)}{r^2} \qquad (8)$$

となり、ニュートン重力が回復する（ヴァインシュタイン機構)。一方、ヴァインシュタイン半径より十分外側 $r \gg r_V$ では $dQ/dr \sim G\zeta M(<r)/r^2$ となり、重力ポテンシャルの勾配は

$$\frac{d\Psi}{dr} \sim \frac{(1+(\alpha+\zeta)\zeta)GM(<r)}{r^2} \qquad (9)$$

となり、重力定数が有効的に変更されることになる。このヴァインシュタイン半径が銀河団スケールとなる場合、スカラー場が銀河団のガス分布や重力レンズ効果にどのように影響を及ぼすかを以下で議論する。

3 Gas Distributin Profiles

ガスについて、次の静水圧平衡を仮定する。

$$\frac{1}{\rho_{\rm gas}}\frac{dP_{\rm gas}}{dr} = -\frac{d\Psi}{dr} \qquad (10)$$

ここで、$\rho_{\rm gas}$, $P_{\rm gas}$ はそれぞれガスの密度、圧力であり、$kT_{\rm gas} = P_{\rm gas}/n_{\rm gas}$ はガスの温度である。(10) 式を積分し、(4), (6) 式を用いると、

$$P_{\rm gas} = P_0 + \mu m_{\rm p}\int_0^r n_{\rm e}(r)\left[-\frac{GM(<r)}{r^2} + \frac{\mu_1}{4\epsilon^2}H_0^2 r\left(1-\sqrt{1+12\epsilon^2\frac{\rho_{\rm s}}{\rho_{\rm c0}}\frac{r_{\rm s}^3}{r^3}m(r)}\right)\right], \qquad (11)$$

ここで、 $\mu_1 \equiv (\alpha+\xi)\zeta$, $\epsilon \equiv \sqrt{H_0^2\lambda^2\zeta}$ とおいた。また、完全電離ガスと電子の状態の間の関係 $n_{\rm e} = (2+\mu)n_{\rm gas}/5$, $P_{\rm e} = n_{\rm e}kT_{\rm gas}$, を用いた $\mu = 0.59$ は平均分子量、$m_{\rm p}$ は陽子質量である。電子の数密度として、 β モデル

$$n_{\rm e} = n_0\left[1+\left(\frac{r}{r_{\rm c}}\right)^2\right]^b \qquad (12)$$

を用いることで、ガスの密度、圧力、温度の三次元プロファイルを得る。ここで、n_0, $r_{\rm c}$, b はパラメータである。

A. Terukina and K. Yamamoto. (2012); A. Terukina et al. (2014) で議論されているように、スカラー場が重力と同様引力として働く場合、ガスのプロファイルは外側で急勾配を持つため、その分布はコンパクトになる。ここでは μ_1 が正の場合、スカラー場は引力として働き、ガスのプロファイルはニュートン重力に比べてコンパクトになる。一方 μ_1 は負になることも可能であり、スカラー場は斥力として寄与する。この場合、ガスのプロファイルは勾配が緩やかになり、その分布はニュートン重力に比べて広がりを持つことになる。

得られたガスの三次元分布から、観測量である X 線温度 ($T_{\rm X}$)、 X 線表面強度 ($S_{\rm X}$) SZ 効果 ($\Delta T_{\rm SZ}$ or

y-parameter) を求めることができる。

$$T_{\rm X}(r_\perp) = \frac{\int n_{\rm e}^2 T_{\rm gas}^{1/2}(r) T_{\rm gas}(r) dz}{\int n_{\rm e}^2 T_{\rm gas}^{1/2}(r) dz}, \quad (13)$$

$$S_{\rm X}(r_\perp) = \int n_{\rm e}^2(r) \Lambda_{\rm c}(T_{\rm gas}) dz, \quad (14)$$

$$y(r_\perp) = -\frac{\Delta T_{\rm SZ}}{2T_{\rm CMB}} = \frac{\sigma_{\rm T}}{m_{\rm e}} \int P_{\rm e}(r) dz, \quad (15)$$

ここで、$\Lambda_{\rm c}$ は冷却関数、$T_{\rm CMB} = 2.725$ K は CMB 温度、$\sigma_{\rm T}$ はトムソン散乱断面積、$m_{\rm e}$ は電子質量、$r_\perp$ は視線方向に対して垂直な動径座標、$r = \sqrt{r_\perp^2 + z^2}$ である。

4 Weak Shear Profile

遠方銀河から発せられる光は伝播途中にある銀河団などの重力源によりその軌道が変更され、重力レンズ効果として観測される。この効果はレンズポテンシャル $(\Phi - \Psi)/2$ によって特徴付けられる。例えば、背景銀河の像の大きさの変化を表す convergence $\kappa(\chi)$ は次のように表される。

$$\kappa \simeq -\frac{1}{2} \int_0^\chi d\chi' \frac{(\chi - \chi')\chi'}{\chi} \triangle^{(2{\rm D})}(\Phi - \Psi), \quad (16)$$

ここで、χ は共動角経距離 $\triangle^{(2{\rm D})}$ は comoving な 2 次元ラプラシアンである。薄いレンズ近似を用いると、(16), (4), (5) 式から

$$\kappa \simeq \frac{(\chi_{\rm S} - \chi_{\rm L})\chi_{\rm L}}{\chi_{\rm S}} \times \int_0^{\chi_{\rm S}} d\chi \left[4\pi G \rho(r') - \frac{\alpha + 2\xi}{2} \frac{\nabla^2}{a_{\rm L}^2} Q \right] a_{\rm L}^2, \quad (17)$$

を得る。ここで、添字 L と S は観測者からレンズ天体、観測者から光源天体を示す量をそれぞれ表す。銀河団中心を中心とする座標系を取ると、convergence は

$$\kappa(r_\perp) \simeq \frac{2}{\Sigma_{\rm c}} \int_0^\infty dz \Bigg[\rho(r) - \frac{\mu_2 \rho_{\rm c0}}{2\epsilon^2} \left(1 - \sqrt{1 + 12\epsilon^2 \frac{\rho_{\rm s}}{\rho_{\rm c0}} \frac{r_{\rm s}^3}{r^3} m(r)} \right) + \frac{\rho(r) - 3\rho_{\rm s} r_{\rm s}^3 m(r)/r^3}{\sqrt{1 + 12\epsilon^2 \rho_{\rm s} r_{\rm s}^3 m(r)/\rho_{\rm c0} r^3}} \mu_2 \Bigg], \quad (18)$$

と表される。ここで、$\mu_2 \equiv (\alpha + 2\xi)\zeta/2$ と置き、

$$\Sigma_{\rm c} = \frac{1}{4\pi G} \frac{\chi_{\rm S}}{(\chi_{\rm S} - \chi_{\rm L})\chi_{\rm L} a_{\rm L}} \quad (19)$$

である。

弱い重力レンズ効果の統計的観測量である、reduced shear は

$$g_+(r_\perp) \equiv \frac{\gamma_+(r_\perp)}{1 - \kappa(r_\perp)}, \quad (20)$$

と定義される。ここで、$\gamma_+(r_\perp)$ は tangential shear で convergence と次の関係がある。

$$\gamma_+(r_\perp) = \bar{\kappa}(< r_\perp) - \kappa(r_\perp), \quad (21)$$

$$\bar{\kappa}(< r_\perp) \equiv \frac{2}{r_\perp^2} \int_0^{r_\perp} dr'_\perp r'_\perp \kappa(r'_\perp). \quad (22)$$

重力模型のパラメータとしてガス分布プロファイルには μ_1、シアープロファイルには μ_2 と異なるパラメータ依存性が現れる。したがって、これらの観測を組み合わせることで、重力レンズのみを比較した場合とは違った制限が得られると期待される。

5 Analysis

ここでは、かみのけ座銀河団の多波長観測とこれまでに述べた理論模型を比較する。かみのけ座銀河団は $z \simeq 0.0236$ にある比較的近傍の銀河団であり、X 線温度、X 線表面輝度、SZ 効果、弱い重力レンズ効果の観測がなされている。また、静水圧平衡の妥当性も議論されている (A. Terukina et al. (2014))。

ここで、銀河団中の密度分布として NFW プロファイル

$$\rho = \frac{\rho_s}{r/r_s(1 + r/r_s)^2} \quad (23)$$

を仮定し、$M_{\rm vir} \equiv M(< r_{\rm vir}) = 4\pi \int_0^{r_{\rm vir}} dr r^2 \rho(r)$, $c \equiv r_s/r_{\rm vir}$ をパラメータとする。$r_{\rm vir}$ は銀河団のビリアル半径である。

かみのけ座銀河団と比較するため、χ^2 を

$$\chi^2(M_{\rm vir}, c, T_0, n_0, b_1, r_1, \mu_1, \mu_2, \epsilon) = \chi^2_{\rm SB} + \chi^2_{\rm XT} + \chi^2_{\rm SZ} + \chi^2_{\rm WL} \quad (24)$$

と定義する。ここで、X 線温度、X 線表面輝度、SZ 効果、重力レンズシアーそれぞれに対する χ^2 を

$$\chi^2_{\rm XT} = \sum_i \frac{(T_{\rm X}(r_{\perp,i}) - T^{\rm obs.}_{{\rm X},i})^2}{(\Delta T^{\rm obs.}_{{\rm X},i})^2}, \tag{25}$$

$$\chi^2_{\rm SB} = \sum_i \frac{(S_{\rm X}(r_{\perp,i}) - S^{\rm obs.}_{{\rm X},i})^2}{(\Delta S^{\rm obs.}_{{\rm X},i})^2}, \tag{26}$$

$$\chi^2_{\rm SZ} = \sum_i \frac{(y(r_{\perp,i}) - y^{\rm obs.}_{i})^2}{(\Delta y^{\rm obs.}_{,i})^2}, \tag{27}$$

$$\chi^2_{\rm WL} = \sum_i \frac{(g_+(r_{\perp,i}) - g^{\rm obs.}_{+,i})^2}{(\Delta g^{\rm obs.}_{+,i})^2} \tag{28}$$

と定義した。

CosmoMC code を用いて観測データと比較し、重力模型のパラメータに対して得られた制限が 図 1 である。ここで、

$$\mu'_1 = \frac{\mu_1}{1+|\mu_1|}, \tag{29}$$

$$\mu'_2 = \frac{\mu_2}{1+|\mu_2|}, \tag{30}$$

$$\epsilon' = 1 - \exp(-\epsilon). \tag{31}$$

とおいた。破線、実線はそれぞれ 1σ、2σ の等高線である。先行研究 T. Narikawa and K. Yamamoto. (2012) では μ_2 に対してのみ制限を得ることができていたが、本研究のようにガス分布の観測も組み合わせることで、μ_1 というパラメータに対しても制限を得ることが出来た。また、$\times$ 印は original Galileon 模型である ($\mu'_1 = \mu'_2 = 0.48, \epsilon' = 0.73$)。本解析ではこの模型に対する制限は得られなかったが、将来観測で観測誤差が小さくなれば 1σ レベルでの検証が可能になると考えている。

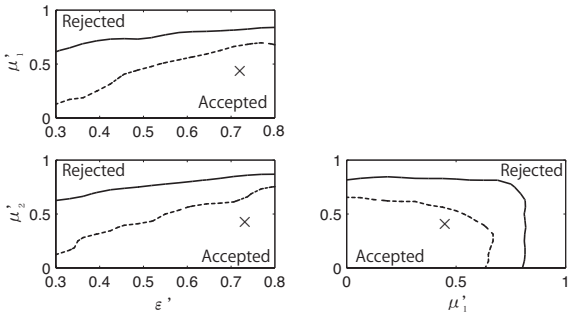


図 1: Preliminary result. 破線は 1σ、実線は 2σ の等高線。$\times$ 印は original Galileon 模型。

6 Summary and Conclusion

我々は一般化されたガリレオン模型における銀河団の X 線温度、X 線表面輝度、SZ 効果、弱い重力レンズ効果の理論模型について考察した。銀河団ガスの観測は重力レンズポテンシャル Ψ の影響を受け弱い重力レンズはレンズポテンシャル $\Phi - \Psi$ の影響を受ける。このため、一般化されたガリレオン模型において、それぞれのプロファイルは異なるパラメータ依存性を見せる。

我々は、先行研究 A. Terukina et al. (2014); T. Narikawa and K. Yamamoto. (2012) と同様の手法でかみのけ座銀河団の X 線温度、X 線表面輝度、SZ 効果、弱い重力レンズ効果観測と比較し、そこから得られる制限について議論し、 Preliminary な結果を得た。これによると、ガス分布とシアー分布双方を組み合わせることで、重力模型のパラメータに対して先行研究では得られないような制限を得ることが可能であることがわかった。さらに、将来観測で観測誤差が小さくなると original Galileon 模型を検証する可能性がある。

ただし、今回の結果は全パラメータ領域に対して解析を行っていない。今後はパラメータ領域を拡張し上記の結論が妥当であるかを調べる必要がある。

Reference

A. Terukina and K. Yamamoto, Phys. Rev. D **86**, 103503 (2012)

A. Terukina, L. Lombriser, K. Yamamoto, D. Bacon, K. Koyama and R.C. Nichol, JCAP **04**(2014)013

T. Narikawa and K. Yamamoto, JCAP **05**(2013)016

R. Kimura, T. Kobayashi and K. Yamamoto, Phys. Rev. D **85**, 024023 (2012)

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

Gravitational Baryogenesis によるバリオン数生成問題への取り組み

福島 光博 (早稲田大学大学院 先進理工学研究科)

Abstract

本講演では H.Davoudiasl et al. によって提案された重力的効果によるバリオン数生成機構のアイディアを紹介し, 観測量との比較やグラビティーノ問題からの制限等を通じてこのモデルの可能性について発表する。バリオン数生成問題は初期宇宙の未解決問題の一つであり, 様々なモデルの検証が行われている現状である。一般的なバリオン数生成機構は Sakharov が指摘したように熱平衡状態からの離脱を必要とするが、宇宙膨張のダイナミカルな効果による実効的な CPT 対称性の破れを考慮することで熱平衡中でのバリオン数生成の可能性が示されている。この中でも超重力理論を背景とした相互作用 (バリオン数カレント J^μ と Ricci スカラー曲率の微分 $\partial_\mu R$ 間の相互作用) を考慮したモデルから予想されるバリオン数非対称の大きさを議論する。本モデルでは熱平衡中におけるバリオン数破れの反応を必要とするが, この反応の脱結合時刻における温度 T 及び曲率の時間微分 $\dot{R}$ の値によって生成されるバリオン/エントロピー比が決定される。宇宙の支配的物質によって各時期を分類し上記のバリオン数破れの反応の脱結合時刻と比較することで, 得られるバリオン非対称性の大きさを議論する。

1 Introduction

宇宙線の観測や加速器実験等から反物質という存在が広く認知されることになったが、反物質は特殊な環境下にしか存在できず、宇宙全体でみても物質優勢であることが知られている。ビッグバン宇宙論を基礎にした軽元素合成における原始軽元素量の観測や宇宙マイクロ波背景輻射の観測によると、物質量を記述する baryon 数密度とエントロピー密度の比として

$$Y_B \equiv \frac{n_B}{s} = \begin{cases} (7.2\text{-}9.2) \times 10^{-11} & \text{(BBN)} \\ (8.36\text{-}9.08) \times 10^{-11} & \text{(CMB)} \end{cases}$$

程度の物質-反物質の非対称性があることがわかっている。このような baryon 非対称宇宙の実現のためには初期宇宙のある段階 (一般にインフレーション後からビッグバン軽元素合成の間の時期) において baryon が anti-baryon よりも超過する機構を考えなければならない。その判断基準として以下の 3 つの “Sakharov criteria” がある (A.D.Sakharov. 1967)。

1. Baryon 数の破れの反応
2. C 対称性及び CP 対称性の破れの反応
3. 熱平衡状態からの離脱

一方, Spontaneous Baryogenesis に代表されるように Sakharov の第 3 条件を必要としない baryogenesis モデルも提唱されている (Cohen.and Kaplan. 1988)。このモデルでは宇宙膨張のダイナミクスによる実効的な CPT 対称性の破れを考慮することで熱平衡中での baryon 数生成を可能にしているが, 今回紹介する Gravitational Baryogenesis (GBG) も同様に熱平衡中での解析を行っている。

2 Gravitational Baryogenesis

このモデルの鍵となる CP 対称性の破れの相互作用 (H.Davoudiasl et al. 2004) である

$$\mathcal{S} = \frac{1}{M_*^2} \int d^4x \sqrt{-g} (\partial_\mu R) J^\mu \qquad (1)$$

が超重力理論を背景として示唆されている。ここで R は Ricci スカラー曲率であり J^μ は baryon カレント, M_* はカットオフスケールである。またこの相互作用は宇宙膨張のダイナミクスを考慮することで実効的な CPT 破れの相互作用にもなっており, 逆反応の抑制のために必要であった熱平衡中からの離脱という条件は問題ではなくなる。すなわち熱平衡下での baryon 数生成が可能となる。

上記の相互作用において CP 変換の下で奇であるということは, 粒子と反粒子を記述する状態の期待値に反対符号のエネルギーシフトが生じることになる。このような状況下においては初期 baryon 数がゼロの状態から発展したとしても, 宇宙が熱平衡状態となった際に baryon 数保存を破るような反応が頻繁に生じていれば, baryon 数に付随する化学ポテンシャルがゼロであるにもかかわらず baryon と anti-baryon のエネルギー差から正味の baryon 数生成が行われる。また生成後から現在まで残る baryon 数密度の大きさは, baryon 数保存を破る反応が脱結合する時期に依存することになる。baryon 数保存を破る反応が効率よく起こらなくなれば生成された baryon 数はそのまま生き残り, その後の数密度は単純に a^{-3} に比例して減少する。

このことを踏まえ, baryon 数密度の熱平衡分布の表式を用いて計算すると

$$n_B \simeq -\left.\frac{g_b \dot{R}(t)}{6M_*^2} T^2(t)\right|_{t=t_D} \tag{2}$$

が得られる。ただし t_D は上で述べたように baryon 数破れの反応が脱結合する時刻であり, この値によって生成される正味の baryon 量が決まる。観測との比較のためエントロピー密度との比を記述しておくと

$$Y_B \simeq -\left.\frac{15 g_b}{4\pi^2 g_*} \frac{\dot{R}}{M_*^2 T}\right|_{t=t_D} \tag{3}$$

となる。

一方 Y_B を評価するに当たり脱結合時刻での $\dot{R}$ を考えなければならないが, この値はその時刻の宇宙における支配的物質に依存している。すなわち状態方程式 $p = w\rho$ における圧力とエネルギー密度との比 w の値によって場合分けすることができる。具体的には Friedman 方程式等を用いることにより

$$\dot{R} = \sqrt{3}(1+w)(1-3w)\frac{\rho^{3/2}}{M_p^3} \tag{4}$$

となることがすぐにわかる。ただし $M_p = (8\pi G)^{1/2}$ は換算 Planck 質量である。

以下では w の値として 3 種類の物質を取り上げて, その時期に baryon 数破れの反応が脱結合したと考え生成される baryon 数を評価する。

2.1 Radiation-dominated ($w \approx 1/3$)

インフレーション後の宇宙は inflaton の崩壊によって生じた大量の軽い粒子によって支配される輻射優勢宇宙である。w が正確に 1/3 である場合は上式から $\dot{R} = 0$ となってしまい, baryon 数生成に影響を与えないことが予想される。しかし trace anomaly を考慮することにより, 典型的な gauge 群および物質を用いた場合, 高エネルギー領域で $1 - 3w \sim 10^{-2}$-10^{-1} を期待することができる。

輻射のエネルギー密度は勿論 $\rho_R \sim T^4$ と記述されるので, この場合に得られる生成 baryon 量は

$$Y_B \approx (1-3w)\frac{T_D^5}{M_*^2 M_p^3} \tag{5}$$

と評価される。

2.2 Reheating phase ($w = 0$)

典型的なインフレーションモデルの場合, inflaton 場の振動すなわち宇宙の再加熱状態は物質優勢期として振る舞うことがわかっている。この時期に baryon 数破れの反応の脱結合が生じた場合を考える。inflaton 場のエネルギー密度は $\rho_I \propto a^{-3}$ と変化し, 物質優勢期であることから $a \propto t^{2/3}$ となることは自明である。ここで再加熱期において inflaton のエネルギーは崩壊によって徐々に輻射へと変化することを考慮すると, この時期の輻射のエネルギー密度は $\rho_R \propto a^{-3/2}$ と進化することがわかる。輻射優勢期へと移り変わる時期の温度を T_{RD} と表すと [1], inflaton 及び輻射のエネルギー密度はそれぞれ

$$\rho_I \simeq T_{RD}^4 \left(\frac{a_{RD}}{a}\right)^3 \tag{6}$$

$$\rho_R \simeq T_{RD}^4 \left(\frac{a_{RD}}{a}\right)^{3/2} \tag{7}$$

と記述される。ここで輻射のエネルギー密度が $\rho_R \sim T^4$ と記述されることを思い出すと, 温度は

$$T \simeq T_{RD} \left(\frac{a_{RD}}{a}\right)^{3/8} \tag{8}$$

と表せる。したがってこの温度を用いると, 再加熱中における inflaton 場のエネルギー密度は

$$\rho_I \sim \left(\frac{T^2}{T_{RD}}\right)^8 \tag{9}$$

[1] 再加熱が十分早く起こる場合, これは再加熱温度に対応する。

と与えられる。以上より生成される baryon 量は

$$Y_B \approx \frac{T_D^{11}}{M_*^2 M_p^3 T_{RD}^6} \tag{10}$$

と評価される。一方 inflaton の崩壊は baryon 数破れの反応の脱結合後も継続して起こるため, エントロピー生成も継続して生じ Y_B の dilution が発生する。この dilution factor は $(T_{RD}/T_D)^5$ で与えられる (H.Davoudiasl et al. 2004) ため, dilution の効果も含めた正味の Y_B は

$$Y_B \approx \frac{T_D^6}{M_*^2 M_p^3 T_{RD}} \tag{11}$$

となる。ここで式 (2) を求める際に, 生成される baryon 数は大きすぎないという仮定の下に線形近似を用いたことに注意する。したがって, 初期の dilution 前の生成 baryon 数を与える式 (10) は $O(1)$ 以下でなければならない。よって $T_{RD} \gtrsim 10^{-2} T_D$ 程度の条件が課されることが自然であり, この下では生成 baryon 数に上限を与えることになり式 (12) から

$$Y_B \gtrsim 10^2 \frac{T_D^5}{M_*^2 M_p^3} \tag{12}$$

が得られる。これは式 (5) で評価された輻射優勢の場合よりも 3-4 のオーダーだけ大きいことがわかる。

2.3 Non-thermal component ($w > 1/3$)

最後の例は $w > 1/3$ となる物質である。これは宇宙の進化で輻射よりも早く減少するため, 上記の再加熱の場合のような dilution の効果は考慮しなくてよい。このような場の例としてはインフレーション終了期での運動項優勢の inflaton 等が挙げられる (P.J.E.Peebles.and A.Vilenkin. 1999)。ここでは $w > 1/3$ となるような場を ϕ と表して一般的に議論を進める。

ϕ 優勢宇宙は $a \propto t^{2/[3(1+w)]}$ と進化し, また ϕ 及び輻射のエネルギー密度は $\rho_\phi \propto a^{-3(1+w)}$, $\rho_R \propto a^{-4}$ となる。よって物質優勢期と同様の議論を行うと

$$\rho_\phi \simeq T_{RD} \left(\frac{a_{RD}}{a}\right)^{3(1+w)} \tag{13}$$

$$\rho_R \simeq T_{RD}^4 \left(\frac{a_{RD}}{a}\right)^4 \tag{14}$$

と表せ, 温度も同様に

$$T(t) \simeq T_{RD} \frac{a_{RD}}{a(t)} = T_{RD} \left(\frac{t_{RD}}{t}\right)^{2/[3(1+w)]} \tag{15}$$

とわかる。したがって ϕ のエネルギー密度は

$$\rho_\phi \simeq T_{\rm RD}^4 \left(\frac{T}{T_{\rm RD}}\right)^{3(1+w)} \tag{16}$$

が得られ, 生成 baryon 量は

$$Y_B \approx \frac{T_D^8}{M_*^2 M_p^3 T_{\rm RD}^3} \left(\frac{T_{\rm RD}}{T_D}\right)^{9(1-w)/2} \tag{17}$$

と評価される。このモデルでは $T_D \gg T_{RD}$ の状況を考えており更に $w > 1/3$ であることに注意すると, 式 (17) の結果は式 (5) の輻射優勢の場合に比べて $(T_D/T_{RD})^{3(3w-1)/2}$ だけ増大していることがわかる。

3 Discussion

上記の 3 つのうちの $w > 1/3$ の場合について, 観測量との比較を考える。今までの議論では baryon 数破れの反応について具体的な形式を与えていなかったが, ここでその相互作用演算子 $\mathcal{O}_B$ が質量次元 $D = 4 + n$ を持つ場合を考える。この相互作用の反応率は $\Gamma_B = T^{2n+1}/M_B^{2n}$ と書き下すことができる。ただし M_B は baryon 数破れの演算子 $\mathcal{O}_B$ の具体形に依存した質量次元の変数である。baryon 数破れの反応が脱結合するとは, 温度 $T \sim T_D$ においてこの反応率 Γ_B が Hubble パラメータ $H(t)$ を下回ることを指している。Friedman 方程式を書き下すと

$$H \sim \frac{T^2}{M_p} \tag{18}$$

となり, 更に $H \propto t^{-1}$ に注意して式 (15) を用いると

$$H(T) \sim \frac{T_{\rm RD}^2}{M_p} \left(\frac{T}{T_{\rm RD}}\right)^{3(1+w)/2} \tag{19}$$

と表せることに注意すると, 脱結合温度は

$$T_D \sim T_{\rm RD} \left(\frac{M_B^{2n}}{M_p T_{\rm RD}^{2n-1}}\right)^{2/(4n-3w-1)} \tag{20}$$

と求められる。以上に注意すると, 生成される baryon 量は

$$Y_B \sim \frac{T_{\rm RD}^5}{M_*^2 M_p^3} \left(\frac{M_B^{2n}}{M_p T_{\rm RD}^{2n-1}}\right)^{(9w+7)/(4n-3w-1)} \tag{21}$$

と評価される。

観測からは $Y_B \sim 10^{-10}$ が得られており, この値を得られるようなパラメータ領域を図示すると図 1 のようになる。ただし baryon 数破れの反応として $n = 1$ の dim-5 演算子を考えており, また $M_* \simeq M_p$ を仮定して描いてある。各 w の値についての (M_B, T_{RD}) 関係が示されている。

一方, 超重力理論を考えるに当たり gravitino 問題に注意しなければならない。一般に知られているように初期宇宙において gravitino が過剰に作られてしまうと (i) ビッグバン軽元素合成に影響を及ぼしたり (ii)gravitino 崩壊によって作られる LSP のエネルギー密度が臨界密度を超えてしまったりという問題が生じる。このため gravitino 生成量には強い制限が課せられ, すなわち再加熱温度への上限を与えることになる。

生成される gravitino 量は Boltzmann 方程式

$$\frac{dn_{3/2}}{dt} + 3Hn_{3/2} = \sigma_{\rm eff} n_R^2 \sim \frac{T^6}{M_p^2} \qquad (22)$$

を解くことによって

$$Y_{3/2} \equiv \frac{n_{3/2}}{s} \sim 10^{-4} \frac{T_{RD}}{M_p} \left(\frac{T_{\rm max}}{T_{RD}} \right)^{3(1-w)/2} \qquad (23)$$

と評価される。ここで超対処性の破れが anomaly によって伝えられるようなモデルに代表されるように $m_{3/2} \gtrsim 100$ TeV の gravitino を考える場合は, BBN よりも十分早く崩壊するため前述の (ii) の問題のみ考慮すればよい。したがって $Y_{3/2} < 4 \times 10^{-12} (100{\rm GeV}/m_{\rm LSP})$ という上限値が課されることになる。この範囲内に入り gravitino 問題を回避するパラメータ領域は図 1 の濃いグレーの部分に対応する。したがって今の状況下の場合, baryon 数破れの典型的なスケールとして $M_B \sim 10^{14}$GeV が予想される。これは同じく baryon 数破れと関係のある [2]Majorana ニュートリノの seesaw 機構のエネルギースケールと一致している。

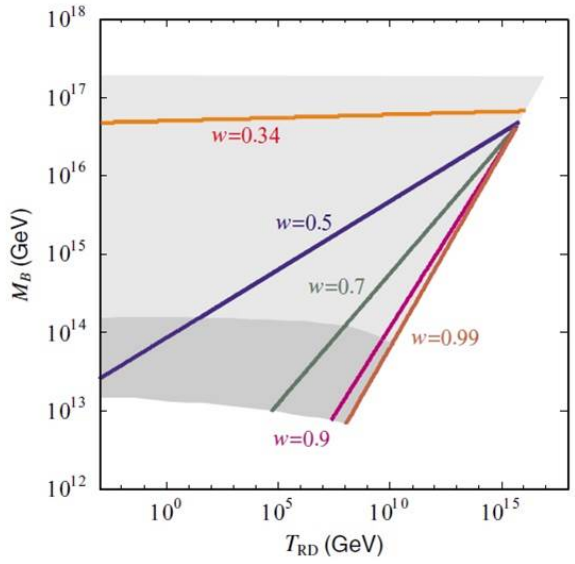


図 1: (M_B, T_{RD}) 図 (H.Davoudiasl et al. 2004)

4 Conclusion

Gravitational Baryogenesis は Ricci スカラー曲率の微分項と baryon カレントとの相互作用を考慮し重力的に baryogenesis を起こす機構である。Sakharov の条件の一つである熱平衡からの離脱を用いず, 熱平衡下での議論が行える点が大きな特徴の一つとなっている。最終的に残る baryon 量は baryon 数破れの反応の脱結合温度に依存する形となるが, 各時期における宇宙の主要な成分によって場合分けを行ってその違いを議論した。$w > 1/3$ の非熱的物質を主に取り扱って議論したが, 超対称性が現れる宇宙モデルの主要な問題の一つである gravitino 問題を回避しつつ観測で知られている baryon 量を実現できるようなパラメータ領域が存在することが確認された。

Reference

H.Davoudiasl. and R.Ki t ano. and G.D.Kribs. and H.Murayama. and P.J.Steinhardt. 2004. Phys. Rev. Lett. **93**, 201301

A.D.Sakharov. 1967. JETP Lett. **5** 24

A.G.Cohen. and D.B.Kaplan. 1988. Nucl. Phys. **B 308** 913

P.J.E.Peebles.and A.Vilenkin. 1999. Phys. Rev. **D 59** 063505

[2]Leptogenesis は Majorana ニュートリノの崩壊で初期 lepton 数を作り, その後 electroweak anomaly 効果である sphaleron 過程を通して baryon 数に遷移する。

超弦理論に基づくインフレーションとゲージ場

渡邉 健人 （早稲田大学大学院先進理工学研究科）

Abstract

現代の宇宙論において、インフレーション理論は宇宙の一様等方性を整合的に記述する上で標準的な理論として確立され数多くのモデルが存在し、観測からはそれらのモデルに対して制限が与えられつつある。また、素粒子基礎理論の候補として提唱されている超弦理論の場の有効理論である超重力理論において、ある仮定の下で宇宙の加速膨張が実現できないという禁止定理が存在する。これを回避する方法として内部空間にブレインを導入するモデルなどが考えられている。そのブレインインフレーションモデルの中でも、KKLMMT モデルは比較的うまくいくモデルとして注目されている。しかし、KKLMMT モデルもパラメータやインフラトンの値の初期値に微調整が必要となっている。また、素粒子基礎理論にはスカラー場とゲージ場が含まれ、それらが結合した項によってスカラー場の運動に影響が出ることが分かっている。ポテンシャルの傾きが急であっても、それを平坦にするような項を加えることができればインフレーションを起こりやすくできる。本研究では、KKLMMT モデルにスカラー場と U(1) ゲージ場が結合した項が付加された場合にインフラトンの運動がどう変わるかについて議論する。その結果、インフレーションが起こりやすくなり、KKLMMT モデルの微調整問題を部分的に解決できるようになる。今後の課題としては、Yang-Mills 場など、今回とは異なる対称性を持つゲージ場の場合にどうなるか、またどのゲージ場が最も自然なモデルが得られるのか議論の余地がある。

1 導入

宇宙が一様･等方で、物理法則がどこでも同じであるとする自然な仮定をもとにした Big Bang 宇宙論は、Hubble の宇宙膨張則、宇宙マイクロ波背景輻射（CMB）、宇宙初期の軽元素合成といった観測事実をよく説明する。しかし、CMB の温度ゆらぎが 10^{-5} と極めて小さく、すなわち CMB の光子が放出された時点で宇宙の温度分布が極めて等方的であることから、過去に因果的に独立であった $10^{4.5}$ 個の領域がそれぞれほとんど同じ温度であったことになる。これを地平線問題という。また、観測された宇宙の曲率が Big Bang 宇宙論が予言する曲率より極めて小さいという平坦性問題も存在する。これらの理論的困難は Big Bang 宇宙論において宇宙が常に減速膨張していることに起因するものであり、これらの困難を解決する理論としてインフレーション理論が提唱されている。宇宙初期にインフレーションと呼ばれる加速膨張していた時期が存在していれば、因果的相互作用があった領域が地平線スケールよりも大きくなるため地平線問題が解決でき、Friedmann 方程式

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \tag{1}$$

の曲率項がすぐに無視できるようになるため地平線問題も解決できる。このような加速膨張を起こす標準的なモデルとして、インフラトンと呼ばれる平坦なポテンシャルを持ったスカラー場が考えられている。インフラトンがそのポテンシャルの坂をゆっくり転がることで、地平線問題や平坦性問題が解決できるほど十分長く加速膨張を実現しようというのがスローロールインフレーションのアイデアである。地平線問題や平坦性問題を解決するためには、宇宙はインフレーション前後で e^{60} 倍ほど膨張していなければならないとされ、この指数を e-foldings という。また、インフレーション後は Big Bang 宇宙論の初期状態に接続するために、インフラトンのエネルギーを輻射のエネルギーに変換する宇宙の再加熱が必要になる。これを華麗なる退場の問題という。スローロールによって宇宙の加速膨張を起こしつつ、自然に再加熱も実現できるモデルは数多く提唱されているが、近年の観測からそれらのモデルに制限が与え

られつつある現状である。

一方で、自然界に存在する 4 つの相互作用を記述する最も基本的な理論の候補として超弦理論や、超弦理論のモデルをまとめた M 理論が提唱されている。これらの理論が重力の量子論を与えるならば、その理論の枠組みでインフレーションも自然に実現されることが望まれるが、超弦理論の場の理論の低エネルギー極限である超重力理論において、内部空間の大きさは時間に依存せず、内部空間はその境界以外では特異点を持たず、重力作用が高階微分項を含まず、内部空間の計量は Minkowski または de Sitter であるなどの条件の下では宇宙の加速膨張が実現できないとする禁止定理が Gibbons により示された。この禁止定理を回避するためには、S ブレインのような内部空間の大きさが時間に依存する解や、D ブレインのような特異点に相当する余分な自由度を内部空間に導入したり、重力作用に曲率高次項を入れたりする手段がある。内部空間に D ブレインを導入するブレインインフレーションモデルは Dvali, Tye によって提唱された。内部空間内の 2 つのブレイン間の距離を外部空間ではインフラトンとして扱うものである。内部空間にブレインを導入して加速膨張を起こす具体的なモデルとして KKLT モデルや KKLMMT モデルが存在する。KKLT モデルは反 D3 ブレインを導入することで現在の小さな宇宙定数を実現しようとするものであり、KKLMMT モデルは D3 ブレインと反 D3 ブレインを導入することでインフレーションを実現しようとするものである。KKLT は正の小さな宇宙定数を得るために導入する反 D3 ブレインの枚数に微調整が必要であり、KKLMMT モデルは CMB でみられる小さな密度ゆらぎも説明できるが、パラメータやインフラトンの初期値に微調整が必要である。

また、超弦理論にはスカラー場とゲージ場が含まれ、スカラー場とゲージ場が結合した項がそのスカラー場の運動に影響を与えることも分かっている。それによってインフラトンがスローロールできないようなポテンシャルを持っていた場合でも、それを平坦にするような項を導入できればインフレーションを実現しやすくなるというモデルも存在する。超弦理論はその前提として時空が 10 次元以上である必要があるが、我々が認識できる次元は 4 次元までであり、余分な 6 次元分はコンパクト化する必要がある。スカラー場とゲージ場が結合した項はそのようなコンパクト化の際に重力作用に自然に出てくる項である。

本研究では、KKLMMT モデルの作用にインフラトンと 3 つの U(1) ゲージ場が結合した項を付加し、それがインフラトンの運動にどのような影響を及ぼすのかを KKLMMT モデルとの比較で議論する。

2 基礎方程式

KKLMMT モデルにおいて内部空間の AdS 時空に導入される D3 ブレインの枚数を N、D3 ブレインと反 D3 ブレインの距離 r をブレインの張力 T で規格化したインフラトンを $\phi = \sqrt{T}r$ とすると、有効作用は

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{\mathcal{R}}{16\pi G} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)\right) \tag{2}$$

$$V(\phi) = \frac{4\pi^2\phi_0^4}{N}\left(1 - \frac{1}{N}\frac{\phi_0^4}{\phi^4}\right) \tag{3}$$

となる。ここで $g_{\mu\nu}$ は 4 次元外部空間の計量、$\sqrt{-g}$ はその行列因子、$\mathcal{R}$ は Ricci スカラーである。この作用に、宇宙の 3 次元空間が一様、等方であるという仮定を性を維持しながらゲージ場を導入するため、この論文では 3 つの U(1) ゲージ場

$$F^{(n)}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^{(n)}_\nu - \partial_\nu A^{(n)}_\mu \tag{4}$$

を導入する。これによって作用は

$$S_{new} = S + \int d^4x\sqrt{-g}\left(-\frac{1}{4g_s^2}\phi^\lambda\sum_{n=1}^{3}F^{(n)}_{\mu\nu}F^{(n)\mu\nu}\right) \tag{5}$$

となる。g_s は結合定数、λ は定数である。作用 (5) を A_μ で変分をとると、Maxwell 方程式

$$\partial_\mu(\phi^\lambda F^{(n)\mu\nu}) = 0 \tag{6}$$

が求められる。平坦な FLRW 計量

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)dx^2 \tag{7}$$

と、時空の一様等方性から、

$$F^{(n)0i} = C^{(n)}a^{-3}\phi^{-\lambda}\delta^{(n)i} \tag{8}$$

と求められる。ここで $C^{(n)}$ は積分定数で $F_{\mu\nu}^{(n)}$ の場の強さに対応する。時空の一様等方性から $C^{(n)}$ は n によらないので、以降は C と表す。$\delta^{(n)i}$ は Kronecker のデルタである。作用 (5) から、Euler-Lagrange 方程式は

$$\Box\phi - V'(\phi) - \frac{\lambda}{4g_s^2}\phi^\lambda \sum_{n=1}^{3} F_{\mu\nu}^{(n)} F^{(n)\mu\nu} = 0 \qquad (9)$$

となる。これに式 (8) を代入して有効ポテンシャルを求めると、

$$V_{eff}(\phi) = V(\phi) + \frac{3C^2}{4g_s^2 a^4}\frac{1}{\phi^\lambda} \qquad (10)$$

となる。式 (9)、(10) より、スカラー場の運動方程式は

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'_{eff}(\phi) = 0 \qquad (11)$$

となる。また、作用 (5) を $g^{\mu\nu}$ で変分をとり、Friedmann 方程式を求めると

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) + \frac{3C^2}{4g_s^2 a^4}\frac{1}{\phi^\lambda}\right) \qquad (12)$$

となる。ϕ を $\phi_0\phi/N^{1/4}$、t を $\sqrt{N}t/\sqrt{32\pi^3 G}\phi_0^2$ で規格化し、α を

$$\alpha = \frac{3C^2 N^{\frac{\lambda}{4}+1}}{16\pi^2 g_s^2 \phi_0^{\lambda+4}} \qquad (13)$$

と定義すると、式 (11)、(12) は

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + \frac{4}{\phi^5} - \frac{\alpha}{a^4}\frac{\lambda}{\phi^{\lambda+1}} = 0 \qquad (14)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{6}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\phi}^4 + \frac{\alpha}{a^4}\frac{1}{\phi^\lambda}\right) \qquad (15)$$

となる。α はゲージ場のエネルギーとインフラトンのエネルギーの比に対応する。式 (14)、(15) を連立させて解くことで、ϕ や a の時間発展の様子を調べる。また、KKLMMT モデルに関しては $\alpha = 0$ として計算を行う。

3　結果、考察

KKLMMT モデルと、ゲージ場を付加したポテンシャルにおいて、ϕ がどのように運動するかを見る。

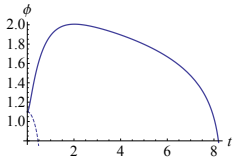


図 1: ϕ の運動（$\phi(0) = 1.1, \alpha = 10$）

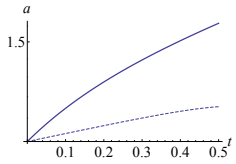


図 2: a の時間発展（$\phi(0) = 1.1, \alpha = 10$）

図 1 は $\phi(0) = 1.1$、$\alpha = 10$ の時の ϕ の運動の様子を描いたグラフである。点線が KKLMMT モデル、実線がゲージ場の寄与を考えたものである。ゲージ場を付加した場合はまず ϕ が大きくなり、スローロールを始めているのが分かる。次に、a がどのように増加するかを見る。図 2 は $\phi(0) = 1.1$、$\alpha = 10$ のときの a の時間発展を描いたグラフである。地平線問題や平坦性問題を解決するには、スケール因子はインフレーションの前後で $e^{60} \sim 10^{26}$ 倍程度に膨張している必要がある。KKLMMT モデルにおいて、それだけの間インフレーションが続くためにはインフラトンの初期値は 3.5 程度以上が必要である。表 1 はインフラトンの初期値と十分な e-foldings を得るために必要な α の関係を表した表である。ϕ の初期値として 0.1 のオーダーでも自然にインフレーションが実現できることが分かる。しかし、α の値として 100 のオーダーは大きすぎるので、ϕ の初期値として 1〜3.0 が与えられた場合については微調整問題は解決できていないことになる。

4　まとめと展望

スカラー場とゲージ場が結合した項を付加することによって、KKLMMT モデルの初期値の微調整問題を部分的に解決することができたが、依然として十分な e-foldings が自然には得られない初期値が存在する。したがって、異なる対称性を持つゲージ場、例えば Yang-Mills 場を導入した場合など議論する必

表 1: ϕ の初期値と十分な e-foldings を得るために必要な α

ϕ の初期値	α
0.1	1.2
0.5	25
1.1	200
2.0	500
2.5	400
3.0	200
3.5	0

要がある。その上で、どのゲージ場を導入すれば最も自然にインフレーションを実現させることができるのかを比較、検討することができるだろう。また、近年発展している観測との整合性についても議論する必要がある。特に α の値について観測から制限が与えられる可能性がある。

Reference

佐藤勝彦・二間瀬敏史編. 宇宙論 I -宇宙のはじまり [第 2 版]. 2012. 日本評論社

S. Weinberg. Cosmology. 2008. Oxford University Press

太田信義. 超弦理論・ブレイン・M 理論. 2012. 丸善出版

谷井義彰. 超重力理論　超弦理論における役割. 2011. サイエンス社

G. W. Gibbons. Thoughts on Tachyon Cosmology. hep-th/0301117

J. Maldacena and C. Nuñez. Supergravity description of field theories on curved manifolds and a no go theorem. hep-th/0007018

G. Dvali and S. H. Tye. Brane Inflation. hep-th/9812483

G. Dvali, Q. Shafi and S. Solganik. D-brane Inflation. hep-th/0105203

S. Kachru, R. Kallosh, A. Linde and S. P. Trivedi. de Sitter Vacua in String Theory. hep-th/0301240

S. Kachru, R. Kallosh, A. Linde, J. Maldacena, L. McAllister and S. P. Trivedi. Towards Inflation in String Theory. hep-th/0308055

K. Maeda and K. Yamamoto. Inflationary dynamics with a non-Abelian gauge field. Phys. Rev. D 87, 023528 (2013)

早田次郎. 現代物理のための解析力学. 2006. サイエンス社

E. Poisson. A Relativist's Toolkit. 2004. Cambridge University Press

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

SUSY によるハイブリッドインフレーションモデルを用いた BICEP2 の観測結果の解析

打田　晴輝 (京都大学基礎物理学研究所　宇宙グループ)

Abstract

本発表では論文 [1] のレビューを行う。BICEP2 の観測結果が今年 3 月に発表され、初期宇宙の揺らぎの統計量が求められたことでインフレーションの理論に制限がかかった。しかし従来の単スカラー場によるモデルでは e-fold Number N $\sim$ 50 の元でこの結果を再現することはかなり困難であり、現在そのことが問題視されている。今回は SUSY から予言される複スカラー場によるハイブリッドインフレーションモデルを考え、また 2 回インフレーションが発生したとするダブルインフレーションシナリオを採用することでこの問題の解決を試みる。結果として 1 回目のインフレーションが N=6 の時に観測結果と整合する結果が得られた。

1　イントロダクション

今年の三月に CMB の偏光を観測する電波望遠鏡 BICEP2 の観測結果が発表され、種々のゆらぎの統計量が求められた。今回はそのうち以下の 3 つに注目する。揺らぎの相関をフーリエ変換した量であるパワースペクトルを $P(k)$ と表すと、今から考える 3 つの統計量はパワースペクトルのベキ依存性であるスペクトル指数

$$n_s - 1 = \frac{d\mathrm{lnP_s(k)}}{d\ln k} \tag{1}$$

そのスケール依存性であるランニング、

$$\alpha_s = \frac{dn_s}{d\ln k} \tag{2}$$

そしてテンソル揺らぎのパワースペクトルをスカラー揺らぎのパワースペクトルで割ったテンソル・スカラー比

$$r_T = \frac{P_t(k)}{P_s(k)} \tag{3}$$

である。ここで添字 s はスカラー揺らぎ（密度揺らぎ）、t はテンソル揺らぎ（重力波）を表す。この３つの統計量について観測結果と理論による予言が整合しないことが現在問題となっている。そこで今回はこの問題を解決することを考えたい。以下では $c = \hbar = 1$ の単位系を採用する。尚、本発表は論文 [1] のレビューである。

2　解析

2.1　スローロールインフレーション

現在最もよく信じられているインフレーションモデルは単スカラー場によるスローロールインフレーションモデルである。このモデルでは初期宇宙は一つのスカラー場φ（インフラトンと呼ばれる）に支配されていると考える。場の作用は

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}(-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V[\phi]) \tag{4}$$

と書かれる。このときフリードマン方程式および場の運動方程式を一様等方平坦時空のもとで書き下すと

$$\ddot{\phi} + 3\mathrm{H}\dot{\phi} + V'[\phi] = 0 \tag{5}$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V[\phi] \tag{6}$$

となる。ここでは $M_{Pl}/\sqrt{8\pi} = 1/\sqrt{8\pi G} = 2.4 \times 10^{18}[GeV] = 1$ とする単位系を採用する。ここで M_{Pl} はプランクエネルギーである。スローロールインフレーションではここで場が平坦なポテンシャルをゆっくり転がる条件を加える。それはポテンシャルについての条件として書くと

$$\epsilon \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{V'[\phi]}{V[\phi]}\right)^2 \ll 1, \quad \eta \equiv \frac{V"[\phi]}{V[\phi]} \ll 1 \tag{7}$$

で表される。ここで ϵ、η をスローロールパラメータと呼ぶ。このとき場の方程式は

$$3H\dot{\phi} + V'[\phi] = 0 \tag{8}$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{V[\phi]}{3} \tag{9}$$

と近似される。これらをスローロール近似された方程式と呼ぶ。この近似中では式 (9) 右辺はほぼ定数となるので、スケール因子について準指数関数的な加速膨張が実現される。

ここでインフレーションの長さを決める e-fold number N を定義する。これは

$$N \equiv \ln\frac{a_f}{a_i} \tag{10}$$

$$\sim \int_{\phi_e}^{\phi} \frac{V}{V'} d\phi \tag{11}$$

と表される。ここで二行目には式 (8)(9) を用いた。ここで ϕ_e はスローロール近似が敗れる場の値、つまり ϵ 、η のどちらかが 1 となるときの ϕ の値とする。古典ビッグバン理論における地平線問題、平坦性問題などを解決するためには N は $50-60$ 以上でなくてはならないことがわかっている。以上のインフレーションモデルでは場の揺らぎを量子場と考えてインフレーション中について解くことで揺らぎの統計量が

$$n_s = 1 + 2\eta - 6\epsilon \tag{12}$$

$$\alpha_s = 16\epsilon\eta - 24\epsilon^2 - 2\xi \qquad \xi \equiv \frac{V'V'''}{V^2} \tag{13}$$

$$r_T = 16\epsilon \tag{14}$$

と求められることがわかっている。つまりポテンシャルや N の値が分かれば揺らぎの統計量が分かる。典型的なスローロールインフレーションモデルでは $N = 50$ で

$$n_s \sim 0.96 \tag{15}$$

$$\alpha_s \sim -0.002 \tag{16}$$

$$r_T \sim 0.15 \tag{17}$$

を予言することが分かっている。

2.2 観測との不整合と解決法

BICEP2 の観測結果は ($k = 0.002[\mathrm{Mpc}^{-1}]$) で

$$n_s \sim 0.959 \pm 0.007 \tag{18}$$

$$\alpha_s \sim -0.028 \pm 0.009 \tag{19}$$

$$r_T \sim 0.20^{+0.07}_{-0.05} \tag{20}$$

であり、上記の典型的な予言値と一致しない。これが現在問題となっている。この問題に対する解決法はいくつか挙げられているが、今回は超対称性理論から予言される 2 スカラー場のスローロールインフレーションモデルを考え、さらにダブルインフレーションシナリオを採用することで解決を試みる。ダブルインフレーションシナリオはインフレーションが 2 回発生したと考えるシナリオである。さらにここでは追加の仮定として BICEP2 で観測したスケールは 1 回目のインフレーション時に発生したものとする。この仮定を入れることで今回の議論では 1 回目のインフレーションのみ考えれば良くなる。また、1 回目のインフレーションの N は自由にとり、2 回目のインフレーションの N と合計で $50-60$ 以上になるようにする。

2.3 超対称性理論から予言されるポテンシャル

超対称性理論とは、標準模型における各素粒子にフェルミオンならボソン、ボソンならフェルミオンの同質量の超対称粒子と呼ばれる粒子を追加する理論である。この理論の利点として標準模型におけるパラメータ微調整の問題を解決できることがある。この理論から予言される最も簡単なスカラーポテンシャルでは宇宙ひもの問題が発生し、BICEP2 とは違う別の観測結果と整合しないので少し手を加えたポテンシャルを考える。そのポテンシャルは

$$V = \left(\kappa(\phi^2 - \mu^2) - \frac{\phi^4}{M^2}\right)^2 + 2\phi^2|S|^2\left(\kappa - 2\frac{\phi^2}{M^2}\right)^2 \tag{21}$$

である。

ここで ϕ,S がインフラトン、κ はポテンシャルのエネルギースケールを決めるパラメータ、μ ,M はうまくインフレーションを起こすために人工的に加えた補正項である。(最終結果には寄与しない) このポテンシャルは

$$|S|^2 = |S_c|^2 \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\kappa M^2}{4} - \mu^2\right) \tag{22}$$

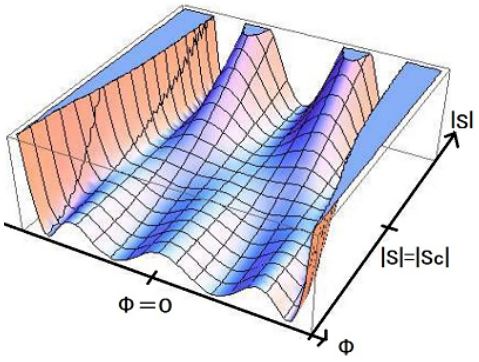


図 1: SUSY から予言されるスカラーポテンシャル (論文 [1] より引用)

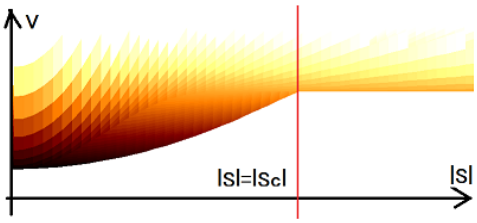


図 2: ポテンシャルを真横から見た図。谷底の形を表している

を境に谷の数が変動する。また $|S| > |S_c|$ では谷底の ϕ の値は S によらず一定値

$$\phi = -\sqrt{\frac{\kappa M^2}{2}},\quad 0,\quad +\sqrt{\frac{\kappa M^2}{2}} \tag{23}$$

をとる。また、ポテンシャルの谷底の形を見ると図 2 となっており、$|S| > |S_c|$ では谷底は完全に平坦、$|S| < |S_c|$ では急激に落ち込む。

スローロールインフレーションの機構として、最初スカラー場は $\phi = +\sqrt{\frac{\kappa M^2}{2}}$ 、$|S| > |S_c|$ の谷にいて、そこから ϕ 一定のまま S—の減少方向に転がるとする。このとき $|S| > |S_c|$ ではポテンシャルは一定値

$$V(\sigma) = \kappa^2\sigma_c^4 \qquad \sigma_c \equiv \sqrt{2}|S_c| \tag{24}$$

を取るため完全に平坦なポテンシャル中を転がることになり、スローロール条件を達成しインフレーションとなる。$|S| < |S_c|$ となると谷が分裂し場はどちらかの谷へ急激に転がり落ちるためスローロール条件が破れインフレーションが終了する。このように谷の分裂によってインフレーションが終了するモデルをハイブリッドインフレーションモデルと呼ぶ。

2.4 超対称性の崩壊と補正項

インフレーション開始時に ϕ は $\phi = +\sqrt{\frac{\kappa M^2}{2}}$ で安定している。つまり ϕ は真空期待値を持つことになる。実は超対称性理論では場が真空期待値を持つ場合超対称性が壊れ、ポテンシャルに補正項が加わることが分かっている。補正項が加わったポテンシャルは

$$V(\sigma) = \kappa^2\sigma_c^4\left[1 + \frac{\kappa^2}{8\pi^2}\ln\frac{\sigma}{\Lambda} + \frac{1}{2}m^2\sigma^2 + (\text{higherorder})\right] \tag{25}$$

$$\sigma \equiv \sqrt{2}|S| \tag{26}$$

となる。ここで第 3 項は超重力の効果を考えた際の補正項であり、m はそのエネルギースケールを決めるパラメータである。故に今回のモデルでは結局このポテンシャルを転がる単スカラー場 σ のスローロールインフレーションに帰着する。このポテンシャル下では ϵ ,η,ξ は

$$\epsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{\kappa^2}{8\pi^2\sigma} + m^2\sigma\right)^2 \tag{27}$$

$$\eta = -\frac{\kappa^2}{8\pi^2\sigma^2} + m^2 \tag{28}$$

$$\xi = \left(\frac{\kappa^2}{8\pi^2\sigma} + m^2\sigma\right)\left(\frac{2\kappa^2}{8\pi^2\sigma^3}\right) \tag{29}$$

となり、σ 、κ、m だけで表される。これから揺らぎの統計量は式 (12)(13)(14) を用いて計算できる。また、N は式 (11) を用い、インフレーション終了時の場の値を $\eta = 1$ で定めることにする。よって N ,σ ,κ ,m を決めれば揺らぎの統計量が分かる。

3 結果

$N = 50$ と $N = 6$ の結果をグラフに載せている。ここで赤が n_s、緑が α_s、青が r_T、黒が σ である。$N = 50$ は典型的なインフレーション理論で用いられる N の値であり、$m \sim 0.3,\ \kappa \sim 2.5,\ \sigma \sim 10$ で

$$n_s \sim 0.96 \tag{30}$$

$$r_T \sim 0.2 \tag{31}$$

$$\alpha \sim -0.002 \tag{32}$$

となる。これは典型的予言値として示した値とよく似ており、α が全く観測値とあってない。
なので観測結果と整合させるために N をどんどんと下げていくことにする。一般に N を下げると α が下がり r_T があがる性質があり、特に $N = 6$ では図から $m \sim 0.25,\ \kappa \sim 2.5,\ \sigma \sim 1$ で

$$n_s \sim 0.96 \tag{33}$$
$$r_T \sim 0.2 \tag{34}$$
$$\alpha \sim -0.02 \tag{35}$$

となり、観測値 (18)(19)(20) とよく整合する。

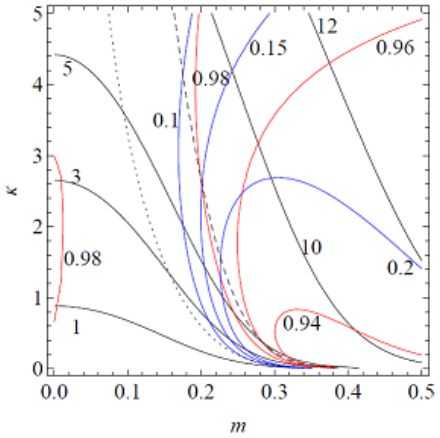


図 3: N=50 のときのグラフ α は非常に小さいためプロットしていない（論文 [1] より引用）

4 まとめと考察

今回超対称性から予言されるポテンシャルを考え、またダブルインフレーションシナリオとすることでパラメータを適切に設定することで観測値を説明できることが分かった。また、N = 6 としたので 2 回目のインフレーションでは N=50 程度のインフレーションが発生したことになる。

もしこの理論が正しいなら 1 回目と 2 回目のインフレーション時に発生した揺らぎはそれぞれ異なった機構によるインフレーションで発生したので揺らぎの統計量のスケール依存性が小スケールと大スケールで大きく異なることが予想される。もし将来のより小スケールのゆらぎの観測でそのような振る舞いが確認されればこの理論の正当性が大きく強まると思われる。

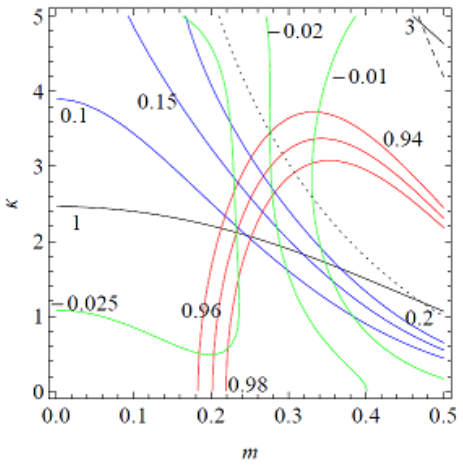


図 4: N=6 のときのグラフ（論文 [1] より引用）

参考文献

[1]Tatsuo,K & Osamu,S “ Beginning of Universe through large field hybrid inflation ”arXiv:1404.3102 [hep-ph]
[2]P.A.R.Ade et al.[BICEP2 Collaboration], arXiv:1403.3985[astro-ph.CO]
[3] 佐藤勝彦、ニ間瀬敏史 (2008)『宇宙論 1-宇宙の始まり』(シリーズ現代の天文学 2) 日本評論社
[4]A,D,Linde.(1990). Inflation and quantum cosmology.Academic Press
[5]Andrew,R,L and David,H,L.(2000).Cosmological inflation and large-scale structure.University Press

謝辞

この度は天文若手夏の学校 2014 に参加させていただきありがとうございました。また、夏の学校開催に補助してくださった京都大学基礎物理学研究所 (研究会番号：YITP-W-14-06) にも感謝の意を表します。

Wiggly Whipped Inflation

総合研究大学院大学素粒子原子核専攻　5 年一貫博士課程 1 年 森　太朗

概要

Inflation 理論は標準宇宙論の問題点を解決する非常に有力な理論であると言われている。しかし Inflation のモデルは非常に数多く提唱され、未だ決定的なモデルは完成していない。一方近年の WMAP、Planck などによる宇宙マイクロ波背景放射 (Cosmic Microwave Background:CMB) の観測結果をもとにこれらの Inflation のモデルに制限をかけることが可能となってきている。代表的な観測量の一つが CMB 温度ゆらぎである。各々の Inflation モデルから計算される初期曲率ゆらぎのパワースペクトルと、CMB から観測される温度ゆらぎのスペクトルを比較することでモデルの選別が可能となる。しかし実際に観測された温度ゆらぎと理論からの予測には、特に大きな角度スケールで有意なズレがあることが分かっている。今回の発表では、このズレを補正することを動機として提唱されたモデルである Wiggly Whipped Inflation [1] を紹介する。

1　Inflation とは

Inflation とは宇宙の極めて初期に空間が指数的に膨張したと考える理論である。こう仮定することで地平線問題、平坦性問題などの標準宇宙論の問題が解決される。時空の膨張は、Friedmann—Lemaitre—Robertson—Walker 計量を用いて Einstein 方程式から

$$3M_{pl}H^2 = \rho \tag{1}$$

と与えられる方程式によって記述される。これを Friedmann 方程式と呼ぶ。M_{pl} は reduced Planck 質量であり Newton の万有引力定数 G と $M_{pl}^2 = (8\pi G)^{-1}$ の関係にある。$H = \dot{a}/a$ は Hubble パラメータ、a はスケール因子である。従って宇宙の膨張の仕方、すなわちエネルギー密度 ρ がスケール因子にどのように依存するかによってスケール因子の時間発展の仕方が異なる。今 ρ が一定だとすると、H も一定となるから、

$$\dot{a} = Ha \qquad H : constant \tag{2}$$

であり、a の時間発展は、

$$a \propto e^{Ht} \tag{3}$$

となる。このように、エネルギー密度が時間変化しないという条件の下では空間が指数的に膨張することがわかる。

2　inflaton の導入とゆらぎの Power Spectrum

Inflation のモデルは inflaton 場と呼ばれるスカラー場 ϕ を用いて、

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{M_{pl}^2}{2}R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - V(\phi)\right] \tag{4}$$

という作用で記述される。第一項は Einstein-Hilbert 作用、ϕ は inflaton 場であり、$V(\phi)$ は inflaton 場のポテンシャル項である。

2.1　inflaton 場の方程式

inflaton 場 ϕ に対する Euler-Lagrange 方程式より、

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \tag{5}$$

を得る。これが ϕ の従う運動方程式である。また Friedmann 方程式は ϕ を用いて、

$$3M_{pl}H^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V \tag{6}$$

となる。ϕ の時間変化が十分に小さい ($|\dot{\phi}| \ll 1$) とする Slow-roll 近似の下で、前章の「エネルギー密度が時間変化しない」という条件は満たされ、空間の指数的な膨張が実現する。

2.2 摂動とゆらぎの Power Spectrum

Friedmann—Lemaitre—Robertson—Walker 計量の空間成分に摂動が入った場合を考える。

$$g_{ij} = a^2[(1-2\mathcal{R})\delta_{ij} + h_{ij}] \quad , \quad \partial_i h^{ij} = 0 \quad h^i{}_i = 0 \tag{7}$$

ここで $\mathcal{R}$ は摂動のスカラー成分を表し、この量が曲率ゆらぎと等しくなるようにゲージ固定を行っている。この摂動の入った計量を用いて、Einstein-Hirbelt 作用を計算し摂動の 2 次までとると、

$$S_{(2)} = \frac{1}{2}\int d\tau d^3x \left[(v')^2 + (\partial_i v)^2 + \frac{z''}{z}v^2 \right] \quad v \equiv z\mathcal{R} \quad z \equiv \frac{a^2\dot{\phi}^2}{H^2} \tag{8}$$

となる。ここで τ は comformal time、prime は comformal time での微分である。詳細は省略するが、この v(正確には v を Fourier mode に分解したときの Fourier 係数) を用いて、

$$\langle \mathcal{R}_{\mathbf{k}}\mathcal{R}_{\mathbf{k}'}\rangle = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')|v_{\mathbf{k}}|^{\mathbf{2}} = (\mathbf{2}\pi)^{\mathbf{3}}\delta^{\mathbf{3}}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')P_S(k) \tag{9}$$

$$\Delta_S^2(k) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2}P_S(k) \tag{10}$$

という量を定義する。この $\Delta_S^2(k)$ 或いは $P_S(k)$ を曲率ゆらぎの Power Spectrum(以下 PS と省略する) と呼ぶ。この量は inflaton 場のポテンシャル $V(\phi)$ を用いて、

$$\Delta_S^2 = \frac{1}{24\pi^2}\frac{1}{\epsilon}\frac{V}{M_{pl}^4}, \qquad \epsilon = \frac{M_{pl}^2}{2}\left(\frac{\partial_\phi V}{V}\right)^2 \tag{11}$$

と表される。この式によって、inflaton 場のポテンシャルから PS を計算することができる。したがって、CMB の温度ゆらぎの観測と理論から予言される PS を比較することで Inflation モデルの選別を行うことができる。

2.3 Power-law ansatz と CMB の温度ゆらぎ

最も単純な PS の仮定として、以下で説明する Power-law 型の PS を考えることができる。この場合 PS は、

$$n_s \equiv \frac{dln\Delta_S^2}{dlnk} \tag{12}$$

で定義される spectral index n_s を用いて、

$$\Delta_S^2(k) = A_S\left(\frac{k}{k_*}\right)^{n_s-1} \tag{13}$$

で表されると仮定される (k_* は pivot scale)。これを PS に対する Power-law ansatz と呼ぶ。び、単純な single field inflation モデル（後に触れる Chaotic Inflation 等）ではこの形に近い PS が生成されることが知られている。

図 1 は Planck 衛星の観測から得られた CMB の温度ゆらぎのデータ (点) と Power-law に基づいて PS の理論曲線 (赤線) を描いたものである。l は観測の角度スケールを表し、l が小さいほど大きな角度スケールを見ていることになる。

図 1 より、Power-law に基づく PS は $l > 50$ 程度の角度スケールでは観測に非常によくあっているが、$l < 50$ 程度の大きな角度スケールにおいて観測と有意なズレがあることがわかる。このズレを説明することを動機とした Inflation のモデルもいくつか提唱されている。

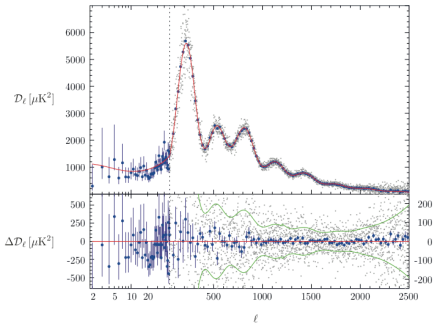


図 1　Planck による CMB 温度ゆらぎの観測結果 (点)

3　Wiggly Whipped Inflation

3.1　Whipped Inflation

以降ではポテンシャルの形を具体的に与えて議論を進めていく。まず始めに今回の発表で紹介する Wiggly Whipped Inflation の先行研究である Whipped Inflation[2] について見ていく。

このモデルは $V(\phi) = \gamma\phi^p$(p は整数) と与えられるポテンシャルに、

$$V(\phi) = \gamma\phi^p + \lambda(\phi - \phi_0)^q\Theta(\phi - \phi_0) \tag{14}$$

という、途中で冪が変化するような特徴を持たせたものである ($V(\phi) = \gamma\phi^p$ というポテンシャルをもつ Inflation のモデルは Chaotic Inflation と呼ばれる)。この冪の変化は、Inflation は GUT(Grand Unified Theory) スケールで起こり、GUT の破れに起因してポテンシャルが転移する、という考えに基づいている。

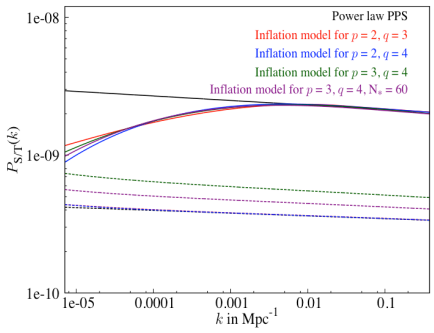


図 2　Whipped Inflation の Power Spectrum

Whipped Inflation のポテンシャルから PS を計算し Power-law と比較したものが図 2 である。この図から、Whipped Inflation ではポテンシャルの転移点付近で鞭のようにしなっているのが分かる。これが Whipped Inflation の名前の由来である。

3.2　Wiggly Whipped Inflation

Whipped Inflation を拡張したモデルとして

$$V(\phi) = \gamma\phi^p + \lambda[(\phi - \phi_0)^q + \phi_{01}]\Theta(\phi - \phi_0) \tag{15}$$

というポテンシャルをもつ Wiggly Whipped Inflation のモデルを考える。これは Whipped Inflation のモデルに転移点のところで定数の項を加え、ステップがあるようなポテンシャルになっている。

このモデルでの PS は図 3 のようになる。このモデルで特徴的なのは、ポテンシャルの転移点付近から PS が波数 (或いは空間スケール) に対して振動することである。これが Wiggly(揺れ動く) Whipped Inflation の名前の由来である。

図 4 のように、Wiggly Whipped Inflation の場合は PS が振動することで（特に $l \sim 20$ 付近で）観測データへの fit が Whipped Inflation よりもさらによくなっている。

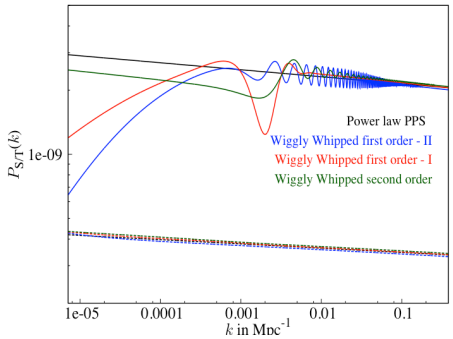


図 3　Wiggly Whipped Inflation の Power Spectrum

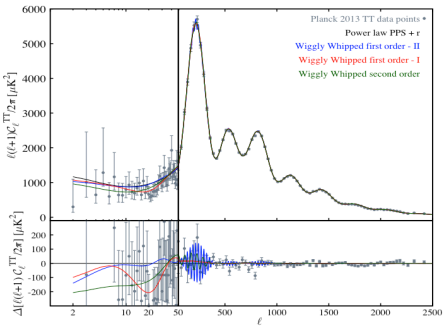


図 4　Wiggly Whipped Inflation の Power Spectrum と Planck による CMB 温度揺らぎの観測結果

このモデルで PS が波数 k に対して振動するのは以下のような理由である。式 (9) より $\Delta_S^2(k) \propto |v_k|^2$ であり、v_k の従う方程式は、

$$v_k + \left(k^2 - \frac{z''}{z}\right) v_k = 0 \tag{16}$$

である。一方 z は ϕ を含み、ϕ の運動方程式は (5) なので z は potential の影響を受ける。式 (16) において $-z''/z$ の項は potential の転移点付近以外では小さく、v_k の式は調和振動子の従う式のようになる。このとき振幅 $|v_k|^2$ は一定である。しかし $-z''/z$ の項は potential の転移点付近で一瞬撃力のような効果を式 (16) に与え、振幅 $|v_k|^2$ が τ に対して振動するようになる。今はある一つのモード k に注目しいてるが、各々の k に対して振動の仕方がことなるため、結果として $\Delta_S^2(k)$ が波数 k に対して振動するようになる。

4　まとめ

Wiggly Whipped Inflation とは $V(\phi) = \gamma\phi^p$ で与えられる inflaton 場のポテンシャルに、GUT 由来の転移による冪の変化と step を導入したモデルである。このような特徴を導入することで、従来の Power-law ansatz から予想される PS と実際の観測データとの間の $l < 50$ 程度の大きな角度スケールでのズレを修正できる可能性がある。

さらに Wiggly Whipped Inflation モデルを用いて Power Spectrum を計算すると、転移点付近から波数 k に依存して振動するような特徴的な Power Spectrum が得られる。この特徴的な振動は、将来的には銀河の大規模観測から得られる Matter Power Spectrum から直接確かめられるのではないかと期待される。

References

1. D.K. Hazra *et al* , arXiv:1404.0360v2 [astro-ph.CO]
2. D.K. Hazra *et al* , arXiv:1405.2012v1 [astro-ph.CO]

Planck と BICEP2 の観測結果による single field inflation モデルへの制限

大石　直矢 (京都大学大学院 基礎物理学研究所)

Abstract

今年 (2014 年 3 月) 南極にある望遠鏡 BICEP2 で宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) を観測してきた研究チームが CMB の偏光を解析した結果、inflation 由来の原始重力波が時空を歪めることにより生じるとされる CMB の B-mode パワースペクトルが発見された。そしてその観測によると、B-mode のパワースペクトルは 1σ のレベルで $r = 0.20^{+0.07}_{-0.05}$ のテンソル・スカラー比を与え、さらに $r = 0$ は 7σ のレベルで棄却されることが分かった。これは原始重力波の存在を強く支持する結果を示している。これらの結果を受けて、今回の発表では、主に［1］の論文を参考にして、chaotic ination、natural ination の 2 つの single field ination モデルについて slow-roll 近似を用いて、テンソルスカラー比とランニングを理論計算し、Planck と BICEP2 の観測結果からそれぞれどのような制限を受けるのかを考察する。

1　Introduction

南極にある望遠鏡 BICEP2 で CMB を観測し解析した結果、CMB の B-mode パワースペクトルが発見された。[図 1] ここで CMB の E-mode とは、温度揺らぎをつくる揺らぎの波数ベクトルに平行あるいは垂直な偏光のことで、これは密度揺らぎや重力波の＋ mode によって現れる。また、B-mode とは、温度揺らぎをつくる揺らぎの波数ベクトルに対し 45 度傾いた偏光のことで、これは重力波の× mode によって現れる。よって B-mode が観測されたということは、背景重力波の存在を間接的に示唆している [3]。この観測結果からパワースペクトルを解析することで、様々な理論の inflation モデルに制限をかけることができる。しかし制限をかけることができると言っても好き勝手なモデルを考えてしまうと、inflation モデル自体が ” inflation ” してしまう。そこでまずは inflation モデルを (ⅰ) 重力理論に補正を加えた inflation モデル (ⅱ)single field inflation モデル (ⅲ) ハイブリッド inflation 等の multi inflation モデルと 3 つに大別した中で、今回は比較的 simple である (ⅱ) の single field inflation モデルを考える。しかし (ⅱ) の中でも更に様々なモデルが考えられるが、まずは最も単純なモデルである Chaotic inflation モデルについて考察し、続いて自然な理由で導入される Natural inflation モデルに焦点を当てる。

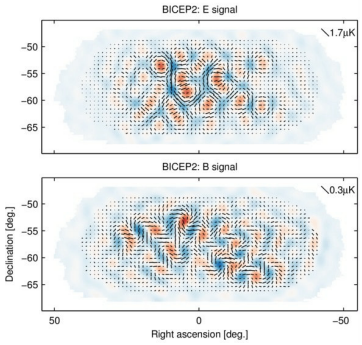


図 1: BICEP2 による CMB の E-mode B-mode 観測データ [2]

2　Single field inflation の一般論

2.1　inflaton 場の方程式

実スカラー場（inflaton 場）を考える。まず作用は、

$$S = S_G + S_M = \int d^4x\sqrt{-g}\,(\mathcal{L}_G + \mathcal{L}_M) \qquad (1)$$

である。ここで、

$$\mathcal{L}_G = a + bR + O(R^2)$$

であり a と b は、R の 1 次までとって Newton 極限から

$$a = -2\lambda b \qquad b = \frac{1}{16\pi}$$

と決まる。ここで λ は宇宙項である。まず (1) を重力場 $g_{\mu\nu}$ で変分をとって、

$$\delta_g S_G = \int d^4x\sqrt{-g}\frac{1}{16\pi}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \lambda g_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}$$

$$\begin{aligned}\delta_g S_M &= \int d^4x \left[\frac{\partial(\mathcal{L}_M\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial(\mathcal{L}_M\sqrt{-g})}{\partial\left(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)}\right] \\ &= -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\end{aligned}$$

$\delta_g S_G = 0$ から真空のアインシュタイン方程式が出てくる。また $T_{\mu\nu}$ はエネルギー・運動量テンソルである。実スカラー場のラグランジアン密度は、ポテンシャルを $V(\phi)$ として

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)$$

であるから、この時エネルギー・運動量テンソルは

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + g_{\mu\nu}\mathcal{L}_M$$

となる。ここで背景時空を平坦な FLRW 時空として一様等方性から空間微分を無視することによって、

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \tag{2}$$

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \tag{3}$$

$\delta_g S = 0$、$\lambda = 0$ からフリードマン方程式

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{M_{pl}}\sqrt{\frac{\rho}{3}} \tag{4}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6M_{pl}^2}(\rho + 3p) \tag{5}$$

ここで、planck 質量と換算プランク質量を（ここだけ単位系を元に戻す。）

$$m_{pl} \equiv \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \sim 10^{19} \quad M_{pl} \equiv \frac{m_{pl}}{\sqrt{8\pi}} \sim 10^{18}[GeV/c^2]$$

とする。続いて (1) の作用を inflaton 場 ϕ で変分をとることで、($\delta_\phi S_M = 0$) 運動方程式

$$\delta_\phi S_M = \int d^4x\left[\sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\dot{\phi}}\right)\right]\delta\phi$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V^{'}(\phi) = 0 \quad H \equiv \frac{\dot{a}}{a} \tag{6}$$

が得られる。

2.2 slow-roll 条件

inflation 条件として、slow-roll 条件①指数関数的膨張条件（膨張時間 $1/H$ の間、H の変化の割合が十分小さい。）② slow-roll 近似（膨張時間 $1/H$ の間、$\dot{\phi}$ の変化の割合が十分小さい。）を課す。

$$\epsilon \equiv \frac{M_{pl}^2}{2}\left|\frac{V^{'}(\phi)}{V(\phi)}\right|^2 << 1 \qquad (①から) \tag{7}$$

$$|\eta| \equiv M_{pl}^2\left|\frac{V^{''}(\phi)}{V(\phi)}\right| << 1 \qquad (①と②から) \tag{8}$$

slow-roll 近似の下では、上の 2 つの条件が成り立っている間、inflation が起こっていると考える。

inflation 中の時刻 t から終了時刻 t_e までの加速膨張の程度を表す量 e-folding 数を

$$N(t) \equiv \ln\frac{a(t_e)}{a(t)} \approx -\frac{1}{M_{pl}^2}\int_\phi^{\phi_e}\frac{V(\phi)}{V^{'}(\phi)}d\phi \tag{9}$$

を定義し、inflation 終了時の ϕ_e は、加速膨張しなくなる $\epsilon(\phi_e) = 1$ で定義する。

2.3 観測量

まずは相関関数のフーリエ変換である、パワースペクトルを理論計算した結果は

・密度揺らぎのパワースペクトル

$$P_R(k) = \left(\frac{H^2}{2\pi\dot{\phi}}\right)^2_{t=t_*} = \frac{1}{12\pi^2M_{pl}^6}\frac{V^3(\phi)}{V^{'2}(\phi)}_{t=t_*}$$

・テンソル揺らぎのパワースペクトル

$$P_T(k) = \frac{8}{M_{pl}^2}\left(\frac{H}{2\pi}\right)^2_{t=t_*}$$

となる [4]。ここで、それぞれの揺らぎは $k < aH$ で一定になるので $k = aH$ となる時の $t = t_*$ の値で考える。（長波長近似）

次に上のパワースペクトルを使った観測量を定義する。

・テンソル・スカラー比

$$r_T \equiv \frac{P_T}{P_R} = 16\epsilon$$

・スペクトル指数（slow-roll パラメータの 1 次）

$$n_s - 1 \equiv \frac{d\ln P_R}{d\ln k} = 2\eta - 6\epsilon$$

$$n_t \equiv \frac{d\ln P_T}{d\ln k} = -2\epsilon$$

・ランニング（slow-roll パラメータの 2 次）

$$n_s^{'} \equiv \frac{d\ln n_s}{d\ln k} = 16\epsilon\eta - 24\epsilon^2 - 2\xi \quad (\xi \equiv M_{pl}^4 \frac{V^{'}V^{'''}}{V^2})$$

ここで便利な関係式

$$\frac{d}{d\ln k} \approx -M_{pl}^2 \frac{V^{'}}{V}\frac{d}{d\phi}$$

を用いた。これらは基準となる波数 k_0 を決めて、そのまわりでパワースペクトルを展開した時の係数となる。

$$\ln P_R(k) = \ln P_R(k_0) + [n_s(k_0) - 1]x + \frac{n_s^{'}(k_0)}{2}x^2 + O(x^3)$$

$$(x \equiv \ln\frac{k}{k_0})$$

ランニングまで考慮に入れるとパワースペクトルは、

$$P_R(k) = P_R(k_0)\left(\frac{k}{k_0}\right)^{n_s - 1 + \frac{n_s^{'}}{2}\ln\frac{k}{k_0}}$$

とかける。これらを観測から求めることで、inflation モデルに制限を与えることができる。

3 Chaotic inflation model

$$V(\phi) = \Lambda^4\left(\frac{\phi}{M_{pl}}\right)^p \quad (p \geq 1)$$

で与えられる Chaotic inflation モデルを考える。(Λ は振幅として観測から求まる。)$p = 2$ は Klein-Gordon-like な inflation モデルである。ポテンシャルが与えられると slow-roll パラメータや e-folding 数を求めることができる。

$$\epsilon = \frac{M_{pl}^2}{2}p^2\phi^{-2} \quad \eta = M_{pl}^2 p(p-1)\phi^{-2}$$

$$\xi = M_{pl}^4 p(p-1)(p-2)\phi^{-4} \quad N = \frac{1}{2pM_{pl}^2}(\phi^2 - \phi_e^2)$$

inflation 終了条件から ϕ_e が求められて、結局

$$\phi_e = \frac{pM_{pl}}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \phi(N) \approx \sqrt{2pN}M_{pl}$$

となって、N の関数として表せる。N は地平線問題、地平線問題を解決するようにとればよい。（50〜60 程度 [3]）

以上より観測量は、

$$r_T = \frac{8p(1-n_s)}{p+2} \quad 、 \quad n_s^{'} = \frac{-2(1-n_s)^2}{p+2} \qquad (10)$$

よって観測と照らし合わせると、

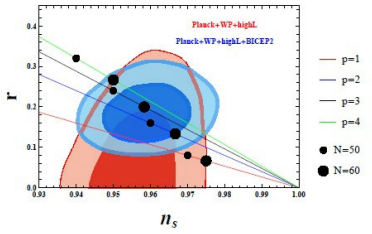


図 2: 縦軸 : テンソル・スカラー比　横軸 : スペクトル指数 赤 : Planck　青 : Planck+BICEP2　濃色:1σ　薄色 : 2σ[2][5]

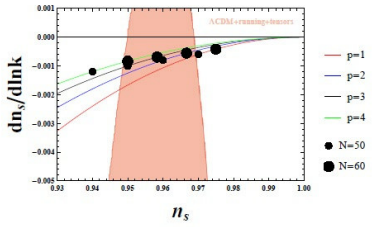


図 3: 縦軸 : ランニング　横軸 : スペクトル指数 赤 : Planck　薄色 : 2σ[5]

となって、$2 \leq p \leq 3$ であれば BICEP2 によるテンソル・スカラー比は 1σ の範囲に入り、Planck によるランニングは 2σ の範囲に入ることが分かる。（注意 : Planck のデータでランニングの 1σ の領域はオーダーが一桁違うところにあるため、どこにも入らない。）

4 Natural inflation model

前節で考えた Chaotic inflation モデルのように他にも多数考えることができる。ではどのようなモデルを考えるとより良いであろうか?まずは当然であるが観測結果と矛盾しないこと。そして次にそのモデルの inflaton 場が自然に現れるのに十分な理由があることである。もし今ある別の理論から導入されたスカラー場であれば、そのモデルを考えるモチベーションとしては十分である。現在素粒子論で提唱されている粒子のうち発見されているスカラー場のものはヒッグス粒子のみである。しかし inflaton をヒッグス粒子と考えると inflation を自然に終わらせることが難しい。よって別の粒子を考える必要がある。

$$V(\phi) = \Lambda^4 \left[1 + \cos\left(\frac{\phi}{f}\right)\right]$$

で与えられる Natural inflation モデルを考える。(Λ は振幅として観測から求まる。) これは、Axion-like な inflation モデルである。Axion とは、QCD の strong CP 問題を解決するために導入された Peccei Quinn 対称性が自発的に破れた時に現れる南部ゴールドストン粒子である。また、Axion はダークマターである条件を満たしており、ダークマターの候補としても注目されている。

先ほどと同様に slow-roll パラメータや e-folding 数を求めると、

$$\epsilon = \frac{M_{pl}^2}{2f^2}\left(\frac{\sin\frac{\phi}{f}}{1+\cos\frac{\phi}{f}}\right)^2 \qquad \eta = -\frac{M_{pl}^2}{f^2}\frac{\cos\frac{\phi}{f}}{1+\cos\frac{\phi}{f}}$$

$$\xi = -\frac{2M_{pl}^4}{f^2}\epsilon \qquad N = \frac{2f^2}{M_{pl}^2}\ln\left[\frac{\sin\frac{\phi_e}{2f}}{\sin\frac{\phi}{2f}}\right]$$

となるので、観測と照らし合わせると、

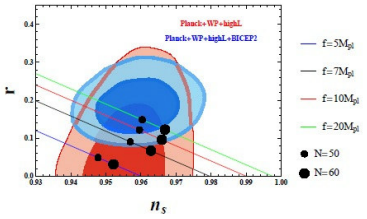


図 4: 図 2 と同様 [2][5]

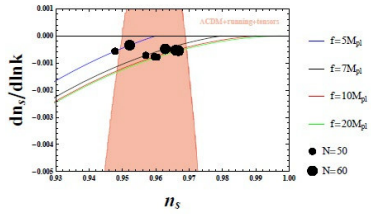


図 5: 図 3 と同様 [5]

となって、$f \geq 10M_{pl}$ であれば BICEP2 によるテンソル・スカラー比も、Planck によるランニングも少なくとも 2σ の範囲に入ることが分かる。

5 Conclusion

今回は 2 つの single field inflation モデルを考えた。① Klein-Gordon-like な Chaotic inflation ② QCD の CP 対称性の破れを説明するために導入され、ダークマターの候補ともなっている Axion-like な Natural inflation である。そして観測結果から① $2 \leq p \leq 3$ ② $f \geq 10M_{pl}$ と制限がつく。しかし特にランニングについては 2 つのモデルとも 1σ のレベルで棄却されるが、2σ のレベルの範囲には入っていることが分かった。このモデルがどうなるかについては今後の観測に期待したい。

Reference

[1] Qing Gao and Yungui Gong (2014) arXiv:1403.5716v2[gr-qc]

[2] P.Ade et al. BICEP2 (2014) arXiv:1403.3985v2

[3] Scott Dodelson (2003) ACADEMIC PRESS MODERN COSMOLOGY

[4] Andrew R.Liddle and David H.Lyth (2000) CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS Cosmological Inflation and Large-Scale Structure

[5] P.Ade et al. Planck (2013) arXiv:1303.5082v2

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

インフレーション宇宙における原始磁場形成

林中 貴宏 (東京大学大学院 理学系研究科研究科 ビッグバン宇宙国際研究センター)

Abstract

初期宇宙における原始磁場形成理論では、電磁場の共形不変性を破るカップリングを考えることで、インフレーション中の電磁場の進化が議論されてきた。このような理論では磁場ではなく、電場のほうが大きくなってしまうことが知られている。そのため、原始磁場形成理論はうまくいかないと考えられてきた。しかし、この電場のエネルギー密度は、インフラトンのエネルギー密度程度まで成長し、質量 m の粒子が Schwinger 効果で生成する典型的な電場のスケール $eE \sim m^2$ を超える可能性があると考えられる。Schwinger 効果による粒子生成が効率的に起これば、インフレーション中の真空の電気伝導度が十分に上がり、電場を消すことができる。したがってこの可能性が妥当なものであるかどうか研究することは重要である。

本研究では、原始磁場形成理論において Schwinger 効果が果たす役割を明らかにすることを目的とし、インフレーション中のスカラー QED の場合について、強い背景電場による粒子生成を議論した。さらに、生成粒子によって生じる電流や、電気伝導度を Adiabatic renormalization に基づいて計算した。

1 イントロ

現在の宇宙には遍く磁場が存在している。そのスケールは天体 (∼km) ほどの大きさから宇宙論的なスケール (∼ 1Mpc) に亘り、強度は、宇宙論的な大規模磁場では $10^{-20} \sim 10^{-15}$G 程度、マグネターのようなコンパクト天体では 10^{15}G に到ると考えられている。宇宙の中での磁場の姿は、電波観測や GeV∼TeV 領域 γ 線の多波長同時観測によって明らかにされつつある。「宇宙磁場の起源と進化」は電波望遠鏡 SKA での科学目標の一つに位置づけられており、将来、より詳細なデータが得られると期待される。

本講演では、宇宙論的なスケールをもつ磁場の起源に焦点を当て、これをインフレーション中の電磁場の量子ゆらぎに求めるアプローチについて既存の研究に対して指摘されてきた問題点を示し、それに対する解決策を提案する。

2 大規模磁場とその起源

ブレーザーと呼ばれる天体からの TeVγ 線と 2 次 GeVγ 線の測定から、銀河間磁場の強度に対して $|\boldsymbol{B}| > 10^{-20}$G という下限が付けられている。(A. Neronov et al. 2010)

この磁場の強さは非常に小さいが、膨張宇宙の中では放射成分のエネルギー密度はスケールファクタ a の 4 乗に反比例して落ちるので、宇宙の初期から銀河間磁場の「種」となる原始磁場が存在していたとすると、その強さは非常に大きかったと考えられる。Ratra は、この種磁場を、宇宙初期に起こったインフレーション中の電磁場の量子ゆらぎによって作るという理論を考えた。(B. Ratra 1992) このような理論は、大きなスケールにわたってコヒーレントな磁場を作り得るという特徴を持っている。

3 原始磁場形成

この章ではまず、インフレーション中に原始磁場を生成する理論について簡単に説明する。続いてそのような理論が抱える困難について説明する。

インフレーション中には、時空は次の計量 $g_{\mu\nu}$ を持つ de Sitter 時空で表される。

$$g_{\mu\nu} = a^2(\eta)\eta_{\mu\nu} \tag{1}$$

ここで、$a(\eta) = 1/(1 - H\eta) = e^{Ht}$ はスケールファクタであり、H はハッブル定数、η は Conformal time(共形時間)、t は Cosmic time、$\eta_{\mu\nu}$ =diag $(-1, 1, 1, 1)$ は Minkowski 計量である。こ

の時空の上での電磁場の作用 Action は、

$$S = \int d^4x \sqrt{-g}\mathcal{L}_{EM} \tag{2}$$

で与えられ、電磁場 A_μ の Lagrangian $\mathcal{L}_{EM}$ は Field Strength $F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$ で、

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \tag{3}$$

と書かれる。しかし、$g^{\mu\nu} = a^{-2}\eta_{\mu\nu}$ と $\sqrt{-g} = a^4$ より (2) 式の Action は

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \right) \tag{4}$$

のように、平坦な時空の Action と同じ形になってしまう。もちろん平坦な時空では、真空から電磁場が勝手に生成したりはしない。このような電磁場の性質は Conformal invariance(共形不変性) と呼ばれる。この不変性のせいで、Conformal 変換 (共形変換 : $g_{\mu\nu}(x)$ を任意関数 $\Omega(x)$ で $\Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x)$ に移す変換) で平坦な時空に移る時空では、電磁場の生成は起こらない。

以上の観察からインフレーション中に真空から電磁場を生成するには、Conformal invariance を何らかの形で破ってやらなければいけないことが分かる。例えば、何らかのスカラー場 φ と電磁場の間に

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} I^2(\varphi) F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \tag{5}$$

のようなカップリングを考えて、$I(\varphi)$ の関数形を決めてやることで、手で Conformal invariance を破り、原始磁場形成を議論することができる。

(3) 式の代わりに (5) 式を用いて作られる Action から電磁場に対する運動方程式を導き、電場や磁場がどのように成長するかを解析することができるが、このような理論は一般的に次のような問題を持つことが知られている。(V. Mukhanov et al. 2009)

- 磁場よりも電場のほうが非常に強くなる
- 電磁場のエネルギー密度が非常に大きくなり、インフレーションが壊れる

波数 k の電場 E と磁場 B の強さの比は、およそ $|E|/|B| \sim a/k$ となる。大きなスケールで十分な強さの磁場を生成しようとすると、電場のエネルギー密度がすぐにインフラトンのエネルギー密度を超えてしまい、放射優勢の宇宙になるためインフレーションは長続きしないのである。逆に、インフレーションが十分長く続くという条件のもとでは、現在の宇宙に生成できる磁場の大きさは、Mukhanov et al. によると、Mpc スケールで 10^{-32}G 以下であり、期待される大規模磁場の強さよりも 10 桁以上小さい。こういった理由で原始磁場形成は困難だと考えられてきた。

しかし、以上の議論では、電場が強くなる場合に真空から粒子が生成する現象は考えられていない。この現象は Schwinger 効果 (J. Schwinger 1951) として知られるもので、これを原始磁場形成理論に取り入れた場合には、電場の成長を抑え、磁場を効率的に生成できる可能性が残されている。

4 Schwinger 効果-Elementary

ここでは、強い電場によって真空から粒子が生成される Schwinger 効果について直感的な説明をする。

真空に z 軸方向の一様な電場 E をかける場合を考えよう。量子論では、真空中においても粒子・反粒子の対生成・対消滅が絶え間なく起こっている。質量 m 電荷 $\pm e$ を持った粒子対の間の「距離」は、Compton 波長で与えられ $d \sim 1/m$ 程度の長さを持つ。一方この粒子対の間の電場によるエネルギーの大きさは eEd である。粒子対を生成するのに必要なエネルギーは静止エネルギー $2m$ であるから、$eEd > 2m$ となると電場のエネルギーから粒子対を生成したほうがエネルギーが低く、真空からの粒子対生成が起こり始める。これが Schwinger 効果の直感的な描像である。したがって、粒子生成の起こり始める典型的な電場のスケールは $eE \sim m^2$ となる。また、単位時間・単位体積あたりの生成粒子数密度は、

$$n \sim \exp\left(-\frac{\pi m^2}{eE} \right) \tag{6}$$

となることが知られている。明らかに、この表式は gauge coupling e の正冪で展開できないから、Schwinger 効果は非摂動的な効果である。

5 Schwinger 効果-Advanced

Minkowski 時空での Schwinger 効果は古くから議論されてきた。インフレーション中の曲がった時空の中で、強い電場が存在するときの Schwinger 効果は以下のように議論することができる。

ここでは、エネルギー密度一定、z 方向の一様電場が de Sitter 時空中に存在する場合の粒子生成を議論する。簡単のため、電場も時空も background として扱う。荷電粒子もスカラーの場合について考える。時空は (1) 式の計量で与えられる。電場は、$A_\mu = (0, 0, 0, A_z)$ として

$$A_z(\eta) = -\frac{E}{H}\left(a(\eta) - 1\right) \tag{7}$$

によって与えられるものを考える。この時、$-\dfrac{\partial_\eta A_z^{dS}}{a^2} = E = const.$ となっている。また、$a(\eta) = \frac{1}{1-H\eta} = e^{Ht}$ より、$H \to 0$ の極限で、$\eta \to t$ なので $A_z \to -Et$ となる。

Lagrangian は scalar QED のもので、(複素) スカラー場を ϕ、共変微分を $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ として ($e > 0$ にとる)

$$\mathcal{L} = g^{\mu\nu}(D_\mu\phi)^\dagger(D_\nu\phi) + m^2\phi^\dagger\phi + \frac{1}{4}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} \tag{8}$$

と与えられる。

Canonical な場を $\chi = a\phi$ で定義し、

$$\begin{aligned}&\chi(\eta, x, y, z)\\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik\cdot x}\left(\chi_k(\eta)a_k + \chi_k^*(\eta)b_{-k}^\dagger\right)\end{aligned} \tag{9}$$

と展開すると、a-particle が positron に対応し、b-particle が electron に対応する。mode function χ_k に対する e.o.m は、Action を変分して

$$\left(\partial_\eta^2 + \omega_k^2(\eta)\right)\chi_k(\eta) = 0 \tag{10}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}\omega_k^2(\eta) &= \alpha a^2(\eta) + \beta a(\eta) + \gamma\\ \alpha &= \tilde{m}^2 + l^2\\ \beta &= 2l(k_z + l)\\ \gamma &= k^2 + 2lk_z + l^2\end{aligned}$$

であり、$\tilde{m}^2 = m^2 - 2H^2, l = \dfrac{eE}{H}$ である。(10) 式によって荷電粒子の振る舞いが記述されるので、これを解析することで粒子数生成が議論できる。

(9) 式で定義される演算子 a_k, b_k によって、真空状態 $|0\rangle$ を、すべての k について $a_k|0\rangle = b_k|0\rangle = 0$ が成り立つ状態として定義できる。

ここで、$\chi_k^-(\eta)$ と $\chi_k^+(\eta) = (\chi_k^-(\eta))^*$ を用いて、

$$\chi_k(\eta) = \alpha_k(\eta)\,\chi_k^-(\eta) + \beta_{-k}(\eta)\,\chi_k^+(\eta) \tag{11}$$

のように表されるとする。これを (9) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}&\chi(\eta, x, y, z)\\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik\cdot x}\left(\chi_k(\eta)a_k + \chi_k^*(\eta)b_{-k}^\dagger\right)\\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik\cdot x}\left(\chi_k^-(\eta)\tilde{a}_k(\eta) + \chi_k^+(\eta)\tilde{b}_{-k}^\dagger(\eta)\right)\end{aligned} \tag{12}$$

となり、新しい生成消滅演算子 $\tilde{a}_k(\eta), \tilde{b}_{-k}(\eta)$ は、

$$\begin{aligned}\tilde{a}_k(\eta) &= \alpha_k(\eta)a_k + \beta_{-k}^*(\eta)b_{-k}^\dagger\\ \tilde{b}_{-k}^\dagger(\eta) &= \beta_{-k}(\eta)a_k + \alpha_k^*(\eta)b_{-k}^\dagger\end{aligned} \tag{13}$$

を満たす。$\tilde{a}_k(\eta), \tilde{b}_{-k}(\eta)$ で表される波数 k の粒子の個数の「真空」期待値は

$$\begin{aligned}N_k &= \langle 0|\,\tilde{a}_k^\dagger\tilde{a}_k\,|0\rangle = \langle 0|\,\tilde{b}_{-k}^\dagger\tilde{b}_{-k}\,|0\rangle\\ &= |\beta_{-k}(\eta)|^2\end{aligned} \tag{14}$$

と計算され、一般には 0 にならない。このことは、時間とともに真空と粒子の定義が変化するせいで、ある時刻に真空であった状態でも、他の時刻では粒子を含む状態になるためと理解される。当然、$\chi_k^\pm$ の選び方の分だけそれぞれ異なる真空状態が存在するので、適切な粒子描像を与える $\chi_k^\pm$ を選んでやらなければならない。一般にはこのような選択を行うための先験的な原理はないのだが、WKB 近似 (断熱近似, Adiabatic approximation) に基づく方法を使うことができる。特に、(11) 式で生成粒子を表現する $\beta(\eta)$ が smooth になるという条件を用いて $\chi_k^\pm$ を定めることができる。(M. V. Berry 1990)

この方法によって、生成粒子数の期待値は

$$|\beta_k(\eta)|^2 = \frac{1}{4}|\mathrm{Erfc}(-\sigma_k(\eta))e^{-F_k^{(0)}}|^2 \tag{15}$$

と表される。ここで $\mathrm{Erfc}(-x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-x^2}$ は誤差関数の一つ、$\sigma_k(\eta) = \dfrac{\Im F_k(\eta)}{\sqrt{2\Re F_k(\eta)}}$ は η の単調増加関数である ($\Re, \Im$ は実部と虚部を表す)。

$F_k(\eta) = 2i \displaystyle\int_{\eta_c}^{\eta} d\eta\, \omega_k(\eta)$ は Singulant と呼ばれる量で η_c は $\omega_k(\eta)$ のゼロ点で η の複素平面の上半面にあるものである。$\Re\eta$ 軸上で $\Im F_k(\eta) = 0$ となる点 $\eta = \eta_0$ が存在し、$F_k^{(0)} = F_k(\eta_0) \in \mathbb{R}$ である。

また、$\chi_k^{\pm}(\eta)$ は WKB 解の形で、

$$\chi_k^{\pm}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\Omega_k(\eta)}} \exp\left(\pm i \int d\eta\, \Omega_k(\eta)\right) \qquad (16)$$

と表されるが、$\Omega_k(\eta)$ は通常の WKB 近似とは異なり、$\Omega_k(\eta) = \omega_k(\eta) \sum_{i=0}^{M} \varphi_k^{(i)}(\eta)$ のように級数解で与えられる。ただし、$M \sim \frac{1}{2}(F_k^{(0)} - 1)$ にとる。

6 原始磁場形成と Schwinger 効果

以上の解析に基づいて、真空から生成された荷電粒子のエネルギーや、荷電粒子の運動がもたらすカレントの真空期待値を計算することができる。例えば、カレントの電場と平行な成分の期待値は

$$\langle j_z \rangle = e \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (k_z - eA_z)\, |\chi_k(\eta)|^2 \qquad (17)$$

と表される。

一般には、これらの量は真空からの寄与のため発散しているので、繰り込みをしなければいけない。この発散の処理は $\chi = \alpha\chi^- + \beta\chi^+$ のうち、真空部分に対応する χ^- の項を落として、$\chi = \beta\chi^+$ とすることで自明に行うことができる (Adiabatic subtraction)。

図 1 は時間 $H\eta$ が進むのに伴って電流の期待値が急激に大きくなる様子を表している。上下の線は与える一様電場の大きさの違いで、電場が大きいほど生じる電流も大きい。

図 2 は同じ時刻 $\eta = 0$ で比べると、電流は電場に対して単調に増加する様子を表している。3 本の線は荷電粒子の質量の違いで、この質量が重いほど生じる電流は小さくなる。

今後は、具体的な原始磁場形成モデルにおいて、どのような場合に荷電粒子の効果が無視できなくなるかを調べ、荷電粒子の効果で前述の困難を解決できるかどうか調べる予定である。

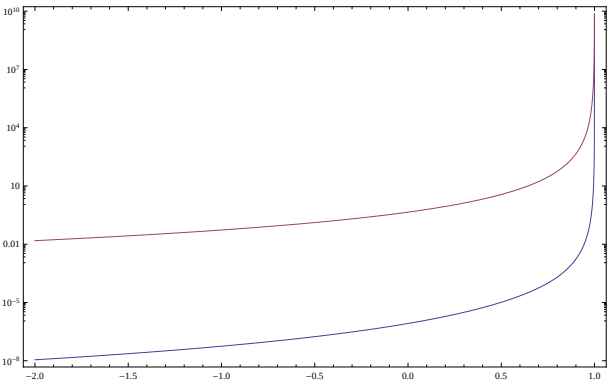


図 1: 電流の時間変化　縦軸：$\langle j_z \rangle$　横軸：$H\eta$

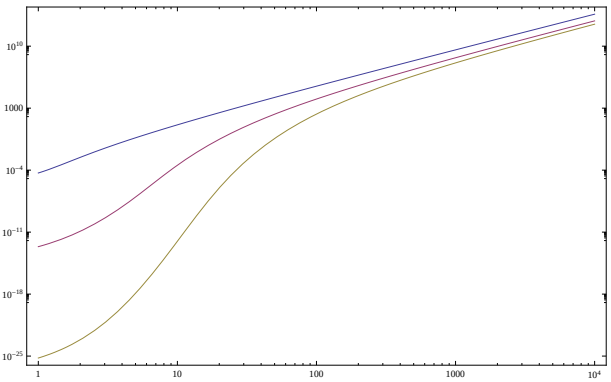


図 2: 電流と与える電場　縦軸：$\langle j_z \rangle$　横軸：eE

Reference

J. Schwinger, Phys. Rev. 82 664 (1951)

M. V. Berry, PRSL A427, 265-280 (1990)

B. Ratra, Astrophys. J. 391 L1 (1992)

J. Martin, J. Yokoyama, JCAP 01, 025 (2008)

V. Demozzi, V. Mukhanov, H. Rubinstein, JCAP 08, 025 (2009)

A. Neronov, I. Vovk, Science, 328, 73 (2010)

M. Frob, J. Garriga, S. Kanno, M. Sasaki, J. Soda, T. Tanaka, A. Vilenkin, JCAP 04 009 (2014)

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

Generalized Galilean Genesis

西 咲音 (立教大学大学院 理学研究科)

Abstract

初期宇宙では一般的にはインフレーションが起きていたと考えられているが、現在様々なインフレーションの代替モデ ルが考えられている。その一つに Galilean Genesis というモデルがあり、このモデルは Horndeski 理論から与えられる ものである。Horndeski 理論は単一スカラー場で記述されるスカラーテンソル理論を一般化したものであるため、今まで モデルにより個別に行われてきた研究を包括的に行うことができるという特徴がある。Genesis モデルのシナリオでは、 ミンコフスキー時空から始まる宇宙膨張が放射優勢期へとつながるため、宇宙のはじまりに特異点が存在しない。この モデルでは、Null Energy Condition を安定のまま破ることが知られている。本研究ではこの Genesis モデルの一般化を 行い、インフレーションで解決される平坦性問題などの諸問題が Genesis モデルにおいても同等に解決されるかどうか を調べた。さらに、この時期に生じる一次ゆらぎについての振る舞いを調べた。

1 Introduction

初期宇宙にはインフレーションが起こったと広く考えられているが，現在では様々なインフレーションの代替モデルも考えられている．本発表は数多くある代替モデルのうちの一つである Galilean Genesis というモデルに注目し，インフレーションで解決される諸問題を Genesis モデルでも同等に解決されるかの検証と，Genesis 期におけるゆらぎの生成の進化を調べることが目的である．Genesis モデルは Horndeski 理論の解として表されるものである．このような研究により，数々の観測結果が本当にインフレーションでしか説明できないのかということを明らかにできる．

2 Horndeski 理論

修正重力理論のうち単一スカラー場を用いたスカラーテンソル理論は様々あるが，これらを一般化しまとめた Horndeski 理論 (1) というものがある．この理論は 1972 年に G.Horndeski により構築されたもので，近年 T.Kobayashi らによりインフレーション宇宙論 (2) の文脈で用いられたことで再び注目されるようになった．ラグランジアンは以下のように表される．

$$S_{\rm Hor} = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left(\mathcal{L}_2+\mathcal{L}_3+\mathcal{L}_4+\mathcal{L}_5\right), \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_2 = G_2(\phi,X), \quad \mathcal{L}_3 = -G_3(\phi,X)\Box\phi,\\
&\mathcal{L}_4 = G_4(\phi,X)R + G_{4X}\left[(\Box\phi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2\right],\\
&\mathcal{L}_5 = G_5(\phi,X)G^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi\\
&-\frac{1}{6}G_{5X}\left[(\Box\phi)^3 - 3\Box\phi(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2 + 2(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^3\right].
\end{aligned} \tag{2}$$

このラグランジアンには G_2, G_3, G_4, G_5 というスカラー場 ϕ とその運動項 $X =: -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2$ の任意関数があり，これらに具体的な形を与えることで一般相対論などに帰着させることができる．また，このラグランジアンには二階微分を持つ項が含まれているが，運動方程式等を導出した際に三階以上の微分を持つ項が現れないという特徴がある．

3 Galilean Genesis

Galilean Genesis モデルは P.Creminelli らにより提唱された初期宇宙のモデルである (3) ．本研究ではこの種のモデル（とそのさらなる一般化）を Horndeski 理論の枠組みで統一的に扱う．この一般化された Genesis モデルは任意関数に以下のものを与える

ことで得られる.

$$G_2 = e^{2(\alpha+1)\lambda\phi} g_2(Y), \quad G_3 = e^{2\alpha\lambda\phi} g_3(Y),$$
$$G_4 = \frac{M_{\rm Pl}^2}{2} + e^{2\alpha\lambda\phi} g_4(Y), \quad G_5 = e^{-2\lambda\phi} g_5(Y), \tag{3}$$

ここで λ と α は定数, $Y := e^{-2\lambda\phi}X$ である. このモデルにおいては, Genesis 期に Null Energy Condition を安定のまま破るという特徴があり, この時期でのスケールファクター a が $-\infty < t < 0$ で

$$a \simeq 1 + \frac{1}{2\alpha}\frac{h_0}{(-t)^{2\alpha}} \tag{4}$$

で与えられる. つまり Genesis モデルのシナリオでは宇宙がミンコフスキー時空から始まる. 宇宙がミンコフスキー時空から始まる場合, 宇宙に特異点が存在しないということになるため, Genesis モデルは大変興味深いモデルであるといえる.

4 Problems

まず、インフレーションが解決した問題のうち平坦性問題が Genesis モデルでも同等に解決されるかを調べた。計量に空間曲率を入れて導出したフリードマン方程式の時間発展を調べると,

$$e^{2(\alpha+1)\lambda\phi}\hat{\rho}(Y_0) + \frac{3K}{a^2}\mathcal{G}_T = 0 \tag{5}$$

であり, 時間を $t \to 0$ とすると曲率を含む項以外の増加が曲率入りの項よりも大きく, 時間発展により曲率が無視できるようになる。従って, 平坦性問題は Genesis モデルにおいても同等に解決されるといえる。

5 Perturbations

この Genesis 期における 1 次ゆらぎを調べた。重力波の波動方程式は

$$\ddot{h}_{ij} + \frac{\dot{\mathcal{G}}_T}{\mathcal{G}_T}\dot{h}_{ij} - \frac{\mathcal{F}_T}{a^2\mathcal{G}_T}\nabla^2 h_{ij} = 0 \tag{6}$$

で与えられる (2)。Genesis モデルの最も簡単な例として

$$g_2 = -Y + Y^2, \quad g_3 = Y, \quad g_4 = g_5 = 0 \tag{7}$$

の場合について重力波の発展を調べパワースペクトルを求め、さらにこの最も簡単な例と

$$g_2 = -Y + Y^2, \quad g_3 = Y, \quad g_4 = 0, \quad g_5 = Y \tag{8}$$

や α を変化させた場合について比較を行った.

6 Conclusion

Horndeski 理論から記述される GalileanGenesis モデルについて。平坦性問題や非等方性の問題を解決できるため、インフレーションモデルの代替理論として問題ないことが示された。さらに 1 次ゆらぎの振る舞いが得られたため、今後の観測結果による比較が期待される。今後は宇宙初期における二次の重力波の振る舞いを調べる予定である。

Acknowledgement

本研究及び夏の学校での発表を行うにあたり、共同研究者であり丁寧な指導をしてくださった小林努准教授、議論をしてくださった棚橋典大氏、立教大小林研・原田研の皆様に心より感謝いたします。

Reference

[1] G. W. Horndeski, Int. J. Theor. Phys. 10 (1974) 363-384.

[2] T. Kobayashi, M. Yamaguchi and J. Yokoyama, Prog. Theor. Phys. **126**, 511 (2011) [arXiv:1105.5723 [hep-th]].

[3] P. Creminelli, A. Nicolis and E. Trincherini, JCAP **1011**, 021 (2010) [arXiv:1007.0027 [hep-th]].

[4] A. Padilla and V. Sivanesan, JHEP **1208**, 122 (2012) [arXiv:1206.1258 [gr-qc]].

[5] K. N. Ananda, C. Clarkson, and D. Wands, Phys. Rev. D **75**, 123518 (2007).

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

ストカスティック-δN 形式による曲率ゆらぎへの非摂動的アプローチ

多田 祐一郎 (東京大学 Kavli IPMU)

Abstract

我々はストカスティック形式と δN 形式を結びつけた、インフレーション中に生成される曲率ゆらぎを計算する新しい手法を提唱した。この手法では、曲率ゆらぎをインフラトン場について摂動展開する必要がなく、非摂動的取り扱いに成功している。また我々はこの手法を実際にカオティックインフレーションとハイブリッドインフレーションに適用し、曲率ゆらぎのパワースペクトルを計算した。特にハイブリッドインフレーションでは、臨界点以降のタキオン不安定性によるピークがパワースペクトルに見られた。

1 Introduction

近年、Planck collaboration(Ade et al. 2013) や BICEP2 collaboration(Ade et al. 2014) の観測により、初期宇宙のインフレーション機構が強く示唆されるようになってきた。インフレーションとは初期宇宙において、時空が指数関数膨張しているとされる時期のことである。標準的なインフレーション理論では、インフレーションを引き起こすインフラトンと呼ばれるスカラー場の量子ゆらぎによって、初期の時空の曲率ゆらぎが生成され、それがのちの宇宙背景放射 (Cosmic Microwave Background; CMB) の温度ゆらぎや大規模構造 (Large Scale Structure; LSS) の種になるとされる。

Planck collaboration の CMB 観測から、CMB スケールでの初期の曲率ゆらぎは $\sim 10^{-5}$ と非常に小さいことがわかっているが、より小さいスケールでは大きくなっている可能性がある。そしてそのような場合、原始ブラックホール (Primordial Black Hole; PBH) (Carr 1975) や超コンパクトミニハロー (UltraCompact MiniHalo; UCMH) (Bringmann et al. 2012) などの非常に興味深い天体の形成が示唆されている。さらに、我々が示したように、ハイブリッドインフレーションという模型では、実際に特定のスケールに大きなピークを持つような曲率ゆらぎを作ることができる。従ってそのような大きな曲率ゆらぎを考えることは非常に興味深い。

インフレーションによって作られる曲率ゆらぎは、一般的にインフラトン場 ϕ について摂動的に求められる。しかしこのような方法は大きな曲率ゆらぎを計算する時にはあまり良くないだろう。なぜならそのような場合、高次摂動項の効果を無視できないからである。実際多重場インフレーションにおいて、インフラトン場のゆらぎはその平均より大きくなり摂動論が破綻することが起きうる。そのような状況で曲率ゆらぎを計算するのに必要なのが、我々が提唱する非摂動的手法である。

我々は、Fujita et al. (2013) でストカスティック形式 (Starobinsky 1986) と δN 形式 (Starobinsky 1985) を結びつけ、新たな曲率ゆらぎの非摂動的計算手法を提唱した。また Fujita et al. (2014) では提唱した手法を実際にカオティックインフレーションとハイブリッドインフレーションに適用し、特にハイブリッドインフレーションでは曲率ゆらぎにピークが出ることを確かめた。本集録ではこれらの結果をまとめる。

本集録の構成は以下のようである。2 章では、標準的な線形摂動論を簡単に復習する。3 章では我々の非摂動的手法、ストカスティック-δN 形式について説明する。4 章ではストカスティック-δN 形式をカオティックインフレーションとハイブリッドインフレーションに適用し、曲率ゆらぎを計算した。5 章は結論に当てた。

2 Linear perturbation theory

まず標準的な線形摂動理論を簡単に復習しよう。インフレーションで最も一般的な物の 1 つであるスローロールインフレーションは、一様なスカラー場がポテンシャルエネルギーを長い間稼いでいると起

こる。実際一様なインフラトンが、運動エネルギーよりポテンシャルエネルギーで主にエネルギーを稼いでいるとき、Friedmann 方程式は $3M_p^2H^2 = V$ となる。ここで M_p は換算 Planck 質量 $(8\pi G)^{-1/2} = 2.453 \times 10^{18}\,\mathrm{GeV}$ であり、$a(t)$ をスケール因子として $H = \dot{a}/a$ は Hubble パラメータである。従って V がほぼ一定の時 H もまたほぼ一定で、時空は $a(t) \propto e^{\int H dt}$ の指数関数膨張をする。この指数部 $N = \int H dt$ は e-folds と呼ばれ、無次元時間変数としてしばしば使われる。

さて、インフラトンはほぼ一様で、空間依存性は摂動としてのみ存在するとしよう。

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \phi_0(t) + \delta\phi(t, \mathbf{x}). \tag{1}$$

FLRW 時空でのスカラーの運動方程式は、

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - a^{-2}\nabla^2\phi + V' = 0, \tag{2}$$

であるが、これを ϕ_0 まわりで展開すれば、$\delta\phi$ に関しての線形方程式を得ることができる。その解は 2 点関数の Fourier モードであるパワースペクトルとして表示するとわかりやすい。

$$\mathcal{P}_\phi(k) = \frac{k^3}{2\pi^2}\int d^3x\, \langle \delta\phi(\mathbf{x}=0)\delta\phi(\mathbf{x})\rangle\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \tag{3}$$

質量が Hubble パラメータに対して無視できる場合、初期条件として真空のモード関数を選べばパワースペクトルは以下のようになる。

$$\mathcal{P}_\phi(k) = \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2, \quad \frac{k}{aH} \to 0. \tag{4}$$

すなわち、物理的波長 a/k がホライズン半径 H^{-1} を十分超えたモードは、相関が定数 $\left(\frac{H}{2\pi}\right)^2$ に漸近するということである。これを**ゆらぎの凍結**と呼ぶ。

ホライズンを超えたゆらぎは凍結し、ϕ の値をわずかにずらすので、インフレーションの持続時間も空間点によってわずかにゆらぐことになる。一方計量の空間成分が $a(t) \propto e^N$ であることから、持続時間 N のゆらぎはまさに時空の曲率ゆらぎそのものである。実際 δN 形式によれば、ゲージ不変な曲率ゆらぎ ζ は線形摂動の範囲で次のように解かれる。

$$\zeta_\mathbf{k} = \delta N_\mathbf{k} = \left.\frac{dN}{d\phi}(\phi_0)\right|_{k=aH}\delta\phi_\mathbf{k}. \tag{5}$$

$N(\phi)$ はインフラトン場の値が ϕ の時、そこからインフレーション終了までにかかる e-folds を表し、$\delta\phi_\mathbf{k}$ のゆらぎはホライズンクロス $k = aH$ のタイミングで凍結するとして、最右辺は $k = aH$ の時刻で評価している。背景場 $\phi_0(t)$ はスローロールしていて運動方程式 (2) 中で $\ddot{\phi}$ を落とせるとすれば、$\phi_0(t)$ の運動方程式は、

$$3H\dot{\phi} = -V' \Leftrightarrow \frac{d\phi}{dN} = \frac{V'}{3H^2}, \tag{6}$$

となる。ここでの N はインフレーション終了を 0 とし、$dN = -Hdt$ であることに気をつけよう。

以上より線形摂動の範囲で、ゲージ不変な曲率ゆらぎの相関は、

$$\mathcal{P}_\zeta(k) = \left.\frac{dN}{d\phi}\right|_{k=aH}\mathcal{P}_\phi(k) = \left.\frac{3H^2}{V'}\left(\frac{H}{2\pi}\right)^2\right|_{k=aH}, \tag{7}$$

と求められる。この処方では $\zeta_\mathbf{k}$ には $\delta\phi_\mathbf{k}$ のゆらぎしか寄与してないことに気をつけよう。実際にはモード $\mathbf{k}$ のゆらぎが凍結した後もインフレーション終了までにより大きい波数のモードが次々と凍結し、$\zeta_\mathbf{k}$ に寄与するはずであるが、線形摂動理論の枠組みでは違う波数のモードの寄与を取り入れることができない。次章からは我々が提唱した、特に摂動展開 (5) 式が破綻しているときにも有効な、より一般的処方を説明する。

3 Stochastic-δN formalism

ストカスティック形式は前章で見た凍結したゆらぎを、背景場の運動方程式に直接取り込むことができる手法である。前章では一様場 $\phi_0(t)$ を背景場とし、そこに摂動 $\delta\phi(t, \mathbf{x})$ を乗せたが、ストカスティック形式ではスーパーホライズンスケールで粗視化した以下のような場を背景と考える。

$$\phi_{\mathrm{IR}} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\theta(\epsilon a(t)H(t) - k)\phi_\mathbf{k}(t)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \tag{8}$$

ϵ は 1 より十分小さい正のパラメータである。階段関数 $\theta(\epsilon aH - k)$ によって IR 場には $k < \epsilon aH$ のスーパーホライズンモードだけが寄与している。ホライズンの中にいる観測者にとってスーパーホライズンスケールのゆらぎと一様場は区別がつかないので、む

しろこの IR 場をその観測者の背景場と考えるほうが正しいのである。

さらに $k > \epsilon aH$ のサブホライズンモードもホライズンスケール aH が指数関数的に増えることから次々とスーパーホライズンモードに変化し、IR 場に寄与するようになってくる。もともと量子的であったサブホライズンモードは ϵaH を超えると凍結すると考えられるが、このとき観測者のまわりで実際にどの値に凍結するかは予測できない。純粋に分散 $\mathcal{P}_\phi$ の Gauss 分布に従う乱数である。実際 IR 場の運動方程式は式 (6) にこの乱数が加わり、

$$\frac{d\phi}{dN} = -\frac{V'}{3H^2} + \mathcal{P}_\phi^{1/2}(N)\xi(N,\mathbf{x}), \tag{9}$$

となる。ただし $\xi(N,\mathbf{x})$ は各ホライズン距離ごとに独立な、平均 0 の Gauss 分布白色雑音である。またここでは時間変数 N を t と同じ方向にとっている。

式 (9) を全空間点で同時に解けば曲率ゆらぎの空間分布も完全にわかる。しかしそれはインフレーション中の宇宙全体の進化を追うことを意味し、もちろん不可能である。逆に 1 点の運動のみを考えるなら、式 (9) はただの確率常微分方程式となり数値計算するのは容易い。そこで最後に 1 点の運動から 2 点相関の情報を抽出する方法を述べてこの章を終わろう。

曲率ゆらぎのパワースペクトルは 2 点相関の Fourier 変換として定義されから、逆に 1 点相関である分散は、パワースペクトルの逆 Fourier 変換の $\mathbf{x} \to 0$ 極限として求められる。

$$\langle \delta N^2 \rangle = \int_{k_i}^{k_f} \frac{dk}{k} \mathcal{P}_{\delta N} \simeq \int_{\ln k_f - \langle N \rangle}^{\ln k_f} \mathcal{P}_{\delta N} dN. \tag{10}$$

ただしゆらぎはインフレーション開始時のホライズンスケール $k_i = \epsilon aH|_i$ から終了時のそれ $k_f = \epsilon aH|_f$ までででしか生成されてないとした。また最後の等式では $k_i \simeq k_f e^{-\langle N \rangle}$ の近似を用いた。この式を両辺 $\langle N \rangle$ で微分すればパワースペクトルを得る。

$$\mathcal{P}_\zeta = \left. \frac{d\langle \delta N^2 \rangle}{d\langle N \rangle} \right|_{\langle N \rangle = \ln(k_f/k)}. \tag{11}$$

インフラトン場を任意の値から開始して式 (9) を解けば、インフレーション終了までにかかる e-folds の平均 $\langle N \rangle$ とその分散 $\langle \delta N^2 \rangle$ を得ることができるから、これを上式に代入すれば求めたかった曲率ゆらぎのパワースペクトルがわかる。

この手法は式 (5) のように曲率ゆらぎをインフラトン場で線形近似しているわけではない、非摂動的なものである。ストカスティック形式によりあらゆるモードのゆらぎは自動的に運動方程式に取り入れられているので、異なったモード間の影響も考慮されている。

4 Chaotic inflation and hybrid inflation

ストカスティック-δN 形式を 2 つのシンプルなインフレーション模型に適用して、曲率ゆらぎのパワースペクトルを計算してみよう。まずカオティックインフレーションを考える。ここでは特に質量項カオティックインフレーションを考えよう。インフラトンポテンシャルは質量項 $V = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ のみで与えられる。この模型ではインフラト場が Planck スケールより大きな値を持ったとき、Hubble パラメータが十分大きくなり式 (2) の $3H\dot{\phi}$ が Hubble 摩擦として強く効き、スローロールインフレーションが実現できる。

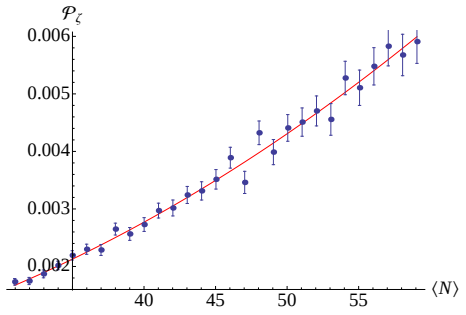


図 1: インフラトン質量 $m = 0.01M_p$ の時のストカスティック-δN 形式による計算 (青ドット) と、線形摂動理論 (7) による計算 (赤線) の比較。カオティックインフレーションのような単一場インフレーションにおいてストカスティック-δN 形式と線形摂動理論は無矛盾であることが確かめられる。

図 1 に曲率ゆらぎパワースペクトルの計算結果をのせた。青ドットはストカスティック-δN 形式による計算であり、赤線は線形摂動理論 (7) による結果である。カオティックインフレーションのようなインフラトンが 1 つしかない単一場インフレーションでは

高次摂動の効果は小さいので、線形摂動理論と非摂動解析の違いは無視できる (Fujita et al. 2013)。実際図 1 から単一場インフレーションにおいてストカスティック-δN 形式と線形摂動理論は無矛盾であることが確かめられる。

次にハイブリッドインフレーションの曲率ゆらぎを計算する。ハイブリッドインフレーションには ϕ と ψ の 2 つのスカラーが存在し、そのポテンシャルは次で与えられる。

$$V(\phi,\psi) = \Lambda^4 + \frac{1}{2}\left(\frac{2\Lambda^4}{\mu^2}\right)\phi^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{4\Lambda^4}{M^2}\left(\frac{\phi^2}{\phi_c^2}-1\right)\right]\psi^2 + \frac{\Lambda^4}{M^4}\psi^4. \tag{12}$$

Λ, μ, M, ϕ_c は模型のパラメータである。ポテンシャルの底上げ Λ^4 があるので H を稼げ Hubble 摩擦を効かすことができる。ダイナミクスは次のようである。まず ψ^4 項により ψ はすぐに 0 になる。その後スローロールインフレーションが起こり、ϕ は質量項によってゆっくり原点に向かう。そして ϕ が ϕ_c より小さくなると ψ の質量項 $\frac{1}{2}\left[\frac{4\Lambda^4}{M^2}\left(\frac{\phi^2}{\phi_c^2}-1\right)\right]$ が負になりタキオン不安定性を生むことで、ψ が急激に成長しスローロールインフレーションが終わる。

ϕ_c を臨界点と呼ぶが、臨界点より十分上では ψ はインフレーションのダイナミクスには寄与しない。一方臨界点付近から ψ もインフレーションのダイナミクスに寄与し始めるが、このあたりでは一様モード $\psi_0(t)$ は 0 である。すなわち ψ についての摂動展開は破綻している。従って臨界点付近に線形摂動理論は適用できない。一方我々のストカスティック-δN 形式なら解析が可能である。

パラメータとして、

$$\frac{\mu}{M_p} = 100, \quad \frac{M}{M_p} = \frac{\phi_c}{M_p} = 0.13, \quad \frac{\Lambda}{M_p} = 1.2\times 10^{-4}, \tag{13}$$

を選んだときのストカスティック-δN の結果を図 2 に示した。このパラメータでは臨界点からインフレーション終了までは $\langle N\rangle \sim 17$ ほどかかるが、図 2 では臨界点以降、すなわち $\langle N\rangle < 17$ のスケールにタキオン不安定性によるパワースペクトルのピークが見えている。

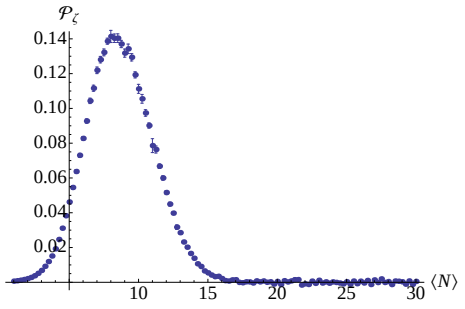


図 2: ハイブリッドインフレーションに対するストカスティック-δN 形式による曲率ゆらぎのパワースペクトルの計算。臨界点 $\langle N\rangle \sim 17$ よりインフレーション終了に近いスケールで、タキオン不安定性によるパワースペクトルのピークが見えている。

5 Conclusion

本集録では Fujita et al. (2013, 2014) をまとめた。我々はストカスティック形式と δN 形式を結びつけることでインフラトン場について非摂動的に曲率ゆらぎを計算できる新たな手法を提唱し、それをカオティックインフレーションとハイブリッドインフレーションに実際に適用し曲率ゆらぎのパワースペクトルを計算した。

Reference

T. Fujita, M. Kawasaki, Y. Tada and T. Takesako, JCAP **1312**, 036 (2013).

T. Fujita, M. Kawasaki and Y. Tada, arXiv:1405.2187.

P. A. R. Ade *et al.* [Planck Collaboration], arXiv:1303.5076.

P. A. R. Ade *et al.* [BICEP2 Collaboration], arXiv:1403.3985.

B. J. Carr, Astrophys. J. **201**, 1 (1975).

T. Bringmann, P. Scott and Y. Akrami, Phys. Rev. D **85**, 125027 (2012).

A. A. Starobinsky, In *De Vega, H.j. (Ed.), Sanchez, N. (Ed.): Field Theory, Quantum Gravity and Strings*, 107-126 (1986).

A. A. Starobinsky, JETP Lett. **42**, 152 (1985) [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **42**, 124 (1985)].

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

原始重力波と B-mode 偏光の生成

大場 淳平 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

ビッグバン宇宙モデルはその予言と観測との数多くの一致により標準宇宙モデルとして広く受け入れられているが、同時にいくつかの宇宙論的問題を持っている。その解決案の 1 つとして、宇宙初期に加速的な膨張が起こったとされるインフレーション理論が提唱されている。インフレーション理論は現在までに様々な観測から示唆されており、強く支持されている。さらなる観測的証拠を得るためにも、インフレーション理論の重要な帰結として生成される原始重力波の検出が強く待ち望まれている。重力波は宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) の B-mode 偏光として痕跡を残すため、世界的に CMB の B-mode 偏光の観測が精力的に進められている。

このような状況の中、2014 年 3 月に BICEP2 により CMB の大スケールの B-mode 偏光が観測されたと発表され、インフレーション理論の強い証拠として注目された。しかし、観測された B-mode が重力波由来であるとすると、その結果から予想される温度揺らぎの値はこれまで行われてきた *Planck* などの観測の結果に矛盾する。

今回の発表では、並進対称性という宇宙原理を見直すことにより重力波が B-mode のみを生成し、温度揺らぎを作り出さないことを示した論文 [1] をレビューする。論文 [1] では並進対称性を破った場合に B-mode のみが生成される機構を導入することで、これまで観測されてきた温度揺らぎの値を変更することなく、今回の BICEP2 の観測結果を説明することについて議論している。この論文は現在の宇宙論の根本原理である宇宙原理を破ることで観測結果を説明する非常に野心的な研究である。

1 Introduction

原始重力波はインフレーション理論の重要な帰結であり、その検出はインフレーションの検証に必要不可欠である。原始重力波は CMB の温度揺らぎだけでなく、E, B-mode 偏光も生成する。特に B-mode 偏光は重力波によって作られる成分であることから、世界的に B-mode 偏光の観測が精力的に進められている。このような状況の中、今年の 3 月に BICEP2 により CMB の B-mode 偏光が観測されたと発表され、インフレーション理論の強い証拠として注目された。しかし、BICEP2 による CMB の偏光観測から示されるテンソル・スカラー比 (r) の値は $r \simeq 0.2$ であり、これまで行われてきた *Planck* のよる CMB の温度揺らぎの観測から予想される制限値 $r \lesssim 0.1$ と矛盾してしまう。

両者の観測結果の間にある矛盾については現在様々な議論がなされており、将来 *Planck* による B-mode 偏光の観測結果が BICEP2 の結果を棄却し矛盾が解消されることが期待されている。しかし、もし *Planck* による将来観測の結果が BICEP2 の結果と同等なものであった場合、CMB の温度揺らぎと B-mode 偏光それぞれの観測から制限される r の値が違うことの物理的な意味は何なのだろうか。これを考察することが今回のモチベーションである。そのために、揺らぎの解析方法として従来のような平面波展開ではなく TAM(total-angular-momentum) wave 展開 [2] を用いた。第 2 章では TAM wave 展開の方法を説明し、第 3 章で結果の考察を行う。

2 Methods

まず、平面波展開の場合に重力波 (transverse-traceless tensor field) は、

$$h_{ab}(\vec{x}) = \sum_{\vec{k},s} h_s(\vec{k}) \hat{\epsilon}^s_{ab}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{1}$$

のように書ける。ここで、a, b は 3 次元空間のテンソル成分、$\vec{k}$ は波数ベクトル、s は偏光のモードで $+$ または $\times$ を表す。$\hat{\epsilon}^s_{ab}(\vec{k})$ は偏光テンソルである。平面波展開では偏光 s という独立なモードによって重力波を分解し、$\hat{\epsilon}^s_{ab}(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ が完全正規直交基底を構成する。よってパワースペクトル $P_h(k)$ は、

$$\left\langle h_s(\vec{k})h^*_{s'}(\vec{k'})\right\rangle = \delta_{ss'}(2\pi)^3\delta^{(3)}_D(\vec{k}-\vec{k'})\frac{P_h(k)}{4} \quad (2)$$

のようになる。ここで、偏光 s はヘリシティーに書き換えることができるということを先の議論のためにここで補足しておく。

一方、TAM wave 展開では、独立なモードとして E-mode(パリティー 偶), B-mode(パリティー 奇) の TAM wave で重力波を分解することができる。実際に重力波の TAM wave 展開を見ていく前に、テンソル場の TAM wave 展開の準備としてスカラー場の TAM wave 展開を見ていく。TAM wave を用いるとスカラー場は、

$$\phi(\vec{x}) = \sum_{lm}\int\frac{k^2dk}{(2\pi)^3}\phi_{lm}(k)4\pi i^l\Psi^k_{(lm)}(\vec{x}) \quad (3)$$

$$\phi_{lm}(k) = \int d^3x\phi(\vec{x})[4\pi i^l\Psi^k_{lm}(\vec{x})]^* \quad (4)$$

ここで、$\Psi^k_{lm}(\vec{x})$ はスカラー TAM wave であり、

$$\Psi^k_{lm}(\vec{x}) \equiv j_l(kr)Y_{lm}(\vec{\hat{n}}) \quad (5)$$

である。$j_l(x)$ は球ベッセル関数、$Y_{lm}(\vec{\hat{n}})$ は球面調和関数である。TAM wave 展開はこのように球面調和関数を用いている。さて、テンソル量である重力波はテンソル TAM wave を用いて、

$$h_{ab}(\vec{x}) = \sum_{lm}\int\frac{k^2dk}{(2\pi)^3}4\pi i^l[h^E_{lm}(k)\Psi^{E,k}_{(lm)ab}(\vec{x}) + h^B_{lm}(k)\Psi^{B,k}_{(lm)ab}(\vec{x})] \quad (6)$$

のように書ける。ここで、$h^{E(\mathrm{or}\,B)}_{lm}(k)$ は TAM wave 展開のもとでのフーリエ成分であり、$\Psi^{E(\mathrm{or}\,B),k}_{(lm)ab}(\vec{x})$ は transverse-traceless なテンソル TAM wave である。テンソル TAM wave はスカラー TAM wave に次のような演算子をかけることで得られる。

$$T^E_{ab} = K_aM_b + M_aK_b + 2D_aK_b \quad (7)$$

$$T^B_{ab} = M_aM_b - K_aK_b + 2D_aM_b \quad (8)$$

ここで、

$$D_a \equiv \frac{i}{k}\nabla_a, \quad K_a \equiv -iL_a, \quad M_a \equiv \epsilon_{abc}D^bK^c \quad (9)$$

である。$\nabla^2 = -k^2$、$L_a = i\epsilon_{abc}x^b\nabla^c$、$\epsilon_{abc}$ は Levi-Civita の完全反対称テンソルである。これらの演算子を用いて transverse-traceless なテンソル TAM wave の具体的な表現は、

$$\Psi^{E,k}_{(lm)ab}(\vec{x}) = -\sqrt{\frac{(l-2)!}{2(l+2)!}}T^E_{ab}\Psi^k_{(lm)}(\vec{x}) \quad (10)$$

$$\Psi^{B,k}_{(lm)ab}(\vec{x}) = -\sqrt{\frac{(l-2)!}{2(l+2)!}}T^B_{ab}\Psi^k_{(lm)}(\vec{x}) \quad (11)$$

のように書ける。

一方で、式 (10), (11) はヘリシティー $s = \pm 2$ を用いて式 (12) のように書ける。

$$h_{ab}(\vec{x}) = \sum_{lm}\sum_{s=\pm2}\int\frac{k^2dk}{(2\pi)^3}4\pi i^l h^s_{lm}(k)\Psi^{s,k}_{(lm)ab}(\vec{x}) \quad (12)$$

ここで、

$$h^{s=\pm2}_{lm}(k) = \left[h^E_{(lm)}(k) \pm ih^B_{(lm)}(k)\right]/\sqrt{2} \quad (13)$$

$$\Psi^{s=\pm2,k}_{(lm)ab}(\vec{x}) = \left[\Psi^{E,k}_{(lm)ab}(\vec{x}) \pm i\Psi^{B,k}_{(lm)ab}(\vec{x})\right]/\sqrt{2} \quad (14)$$

である。TAM wave 展開での E, B-mode のパワースペクトルは次のように表記する。

$$\left\langle h^E_{lm}(k)[h^E_{lm}(k)]^*\right\rangle \propto P_{EE}(k) \quad (15)$$

$$\left\langle h^B_{lm}(k)[h^B_{lm}(k)]^*\right\rangle \propto P_{BB}(k) \quad (16)$$

CMB に関する物理はパリティー不変なので、異なるパリティーのものが混ざることは無い。従って、パリティー 偶, 奇のモードはそれぞれ独立に発展し、TAM wave 展開で式 (15), (16) のように書かれるパワースペクトルはそれぞれ独立である。

3 Discussion

TAM wave で見ると TAM wave 成分の E-mode(パリティー 偶), B-mode(パリティー 奇) のパワースペクトルはそれぞれ独立なので CMB の温度揺らぎ (パ

リティー 偶), B-mode 偏光 (パリティー 奇) の観測から得られるそれぞれの r の値は違っていても良いことが分かった。本章ではそれぞれの r の値が違うということの物理的な意味について考察する。
ここでは宇宙原理の一つである並進対称性について議論をし、並進対称性を課したときに TAM wave 成分のパワースペクトルにどのような要請がされるのかを見ていく。まず、並進対称性を満たすならば (ヘリシティー s で分解した) 平面波展開のもとでのフーリエ成分のパワースペクトルには、

$$\left\langle h_s(\vec{k})h^*_{s'}(\vec{k'})\right\rangle \propto \delta^{(3)}_D(\vec{k}-\vec{k'}) \tag{17}$$

という関係が成り立つ。一方、TAM wave 展開のもとでのフーリエ成分でのパワースペクトルは、

$$\left\langle h^s_{lm}(k)[h^{s'}_{l'm'}(k')]^*\right\rangle = P_{ss'}(k)\delta_{ll'}\delta_{mm'}\frac{(2\pi)^3}{k^2} \times \delta^{(1)}_D(k-k') \tag{18}$$

である。ここで、

$$P_{ss'}(k) = \begin{pmatrix} P_{2,2}(k) & P_{2,-2}(k) \\ P_{-2,2}(k) & P_{-2,-2}(k) \end{pmatrix}$$

であり、それぞれ、

$$P_{2,2}(k) = \frac{1}{2}[P_{EE}(k)+P_{BB}(k)] - \mathrm{Im}P_{EB}(k) \tag{19}$$

$$P_{-2,-2}(k) = \frac{1}{2}[P_{EE}(k)+P_{BB}(k)] + \mathrm{Im}P_{EB}(k) \tag{20}$$

$$P_{2,-2}(k) = [P_{-2,2}(k)]^* = \frac{1}{2}[P_{EE}(k)-P_{BB}(k)] - i\mathrm{Re}P_{EB}(k) \tag{21}$$

である。

次に平面波展開のもとでのフーリエ成分と TAM wave 展開のもとでのフーリエ成分の間の関係

$$h_s(\vec{k}) = \sum_{lm}\left[{}_{-s}Y_{(lm)}(\vec{\hat{k}'})\right]^* h^s_{lm}(k) \tag{22}$$

を用いて平面波展開のもとでのフーリエ成分のパワースペクトルを TAM wave 展開のもとでのフーリエ成分のパワースペクトル $P_{ss'}$ で書き表すと、

$$\left\langle h_s(\vec{k})h^*_{s'}(\vec{k'})\right\rangle = P_{ss'}(k)\frac{(2\pi)^3}{k^2}\delta^{(1)}_D(k-k') \times \sum_{lm}\left[{}_{-s}Y_{(lm)}(\vec{\hat{k}'})\right]^* {}_{-s'}Y_{(lm)}(\vec{\hat{k}}) \tag{23}$$

となる。ここで、${}_sY_{(lm)}(\vec{\hat{k}})$ はスピン球面調和関数である [3]。式 (23) は $s=s'$ のときのみ、

$$\sum_{lm}\left[{}_{-s}Y_{(lm)}(\vec{\hat{k}'})\right]^* {}_{-s}Y_{(lm)}(\vec{\hat{k}}) = \delta^{(2)}_D(\vec{\hat{k}}-\vec{\hat{k}'}) \tag{24}$$

のようになり、

$$\left\langle h_s(\vec{k})h^*_s(\vec{k'})\right\rangle \propto \delta^{(1)}_D(k-k')\delta^{(2)}_D(\vec{\hat{k}}-\vec{\hat{k}'})/k^2 = \delta^{(3)}_D(\vec{k}-\vec{k'}) \tag{25}$$

となる。これは並進対称性を課したときの条件を満たす。また $s\neq s'$ のときは、

$$\sum_m\left[{}_{s_1}Y_{(lm)}(\vec{\hat{k}'})\right]^*\left[{}_{s_2}Y_{(lm)}(\vec{\hat{k}})\right] = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}[{}_{s_2}Y_{(ls_1)}(\beta,\alpha)]e^{-is_2\gamma} \neq \delta^{(2)}_D(\vec{\hat{k}}-\vec{\hat{k}'}) \tag{26}$$

となってしまうので、並進対称であるためには $s\neq s'$ のときのパワースペクトルの値がゼロとなることが必要である。よって、

$$P_{2,-2}(k) = [P_{-2,2}(k)]^* = \frac{1}{2}[P_{EE}(k)-P_{BB}(k)] - i\mathrm{Re}\left[P_{EB}(k)\right] = 0 \tag{27}$$

従って並進対称性を課したときに、TAM wave 展開のもとでのフーリエ成分のパワースペクトルについて次のような条件が得られる。

$$P_{EE}(k) = P_{BB}(k) \tag{28}$$

$$i\mathrm{Re}\left[P_{EB}(k)\right] = 0 \tag{29}$$

以上のことから並進対称性を課すと TAM wave 展開のもとでの E-mode(パリティー 偶), B-mode(パリ

ティー 奇) のフーリエ成分のパワースペクトルは同じになることが分かった。従って、宇宙が並進対称ならばCMB の温度揺らぎ (パリティー 偶), B-mode 偏光 (パリティー 奇) の観測からそれぞれ得られる r の値は同じ値にならなければならない。逆に、両者の値が違うということは並進対称性が破れていることを示唆する。よって、*Planck* による温度揺らぎ (パリティー 偶) の観測と, BICEP2 による B-mode 偏光 (パリティー 奇) の観測からそれぞれ異なる r の値が得られたということの物理的な意味として、宇宙の並進対称性が破れていると解釈することが可能である。

4 Summary

平面波展開では偏光の状態を用いて独立なモードに展開していたが、TAM wave 展開ではパリティーによって展開できるということが重要である。CMB に関する物理はパリティーが不変なので、TAM wave 展開のもとでのフーリエ成分の E-mode(パリティー 偶), B-mode(パリティー 奇) のパワースペクトルはそれぞれ独立である。よって、CMB の温度揺らぎ (パリティー 偶), B-mode 偏光 (パリティー 奇) の観測から得られるそれぞれの r の値は違っていても良いことが分かった。ただし、宇宙に並進対称性を課すとそれぞれの r の値は同じになる。従って、*Planck* による温度揺らぎ (パリティー 偶) の観測と, BICEP2 による B-mode 偏光 (パリティー 奇) の観測から得られる r の値が違うということの物理的意味として、宇宙の並進対称性が破れていると解釈可能である。

Reference

[1]. M.Kamionkowski. and L.Dai. and D.Jeong. 2014. arXiv:1404.3730

[2]. L. Dai. and M. Kamionkowski. and D. Jeong. 2012. arXiv:1209.0761

[3]. E. Newman. and R. Penrose. 1966. J. Math. Phys. **7**, 863

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

重力波検出器が量子重力を明らかにする!?

小森 健太郎 (東京大学大学院理学系研究科)

Abstract

宇宙で最も激しい天体現象を観測しようというモチベーションから生まれた検出器が、ミクロの世界を司る根本的な事象を明らかにするかもしれない。かつて Glashow は宇宙論と素粒子物理がつながっているということをウロボロスの蛇になぞらえて表現したが、本講演でもスケールの異なる一見無関係に思われる 2 つのテーマが、実は強く結びついていることをお伝えする。重力波検出器と量子重力は、巨視的量子現象を介して結ばれているのである。

1 Introduction

重力波とは時空の歪みが伝播する波動である。重力波を観測することでブラックホールの内部情報など電磁波では分からない情報が分かるため、直接検出の意義は大きい。重力波の振幅は非常に小さく、人類が直接観測できるのは中性子星やブラックホールといったコンパクト天体の合体、あるいは超新星爆発など、宇宙で最も激しい天体現象から発生する重力波である。

一方、本講演で扱う量子重力とは、量子の世界で重力の果たす役割のことである。量子論における大きな謎として、なぜ量子性のデコヒーレンスや波束の収縮が起こるのかというものがある。時間に関して線形なシュレディンガー方程式からは考えられない、非線形で不可逆な振る舞いだ。こういったミクロの世界を司るトピックの一つとして、重力デコヒーレンスというものが理論的に示唆されている [1]。これは、時間とエネルギーの不確定性関係

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar$$

をモチーフに、ΔE を重力エネルギー、Δt をデコヒーレンス時間とした予想である [2]。通常量子的にふるまうのは原子や分子といった ΔE が非常に小さい物体であるため Δt が非常に大きくなってしまい、重力デコヒーレンスの効果は他のデコヒーレンス効果に埋もれてしまう。しかし ΔE が大きくなれば、すなわち巨視的な物体の量子状態が実現できれば、これが観測できるのではないか、という発想も生まれる。

重力波検出器と量子重力は、まさにこの巨視的量子現象によって結びつけられる。

2 Methods

重力波検出器は、その感度向上のためあらゆる努力がなされ、地面振動や熱雑音といった古典的な雑音は十分低減できるようになった。例えば日本で建設中の大型低温重力波望遠鏡 KAGRA はあらゆる古典雑音が量子雑音以下にまで低減される予定である [3]。

量子雑音には、散射雑音 (Shot noise) と輻射圧雑音 (Radiation pressure noise) の 2 種類が存在する。前者は光子の統計的な揺らぎによって検出器の出力が揺らぐこと、後者は光子が鏡に与える反作用が揺らぐことに起因しており、その大きさはパワーの大小によるトレードオフの関係にある。トレードオフを決めるのは標準量子限界 (Standard Quantum Limit; SQL) であり、ハイゼンベルグの不確定性関係から決まる原理的な測定限界となっている。

この SQL は、検出器にとっては単なる感度限界でしかないのだが、鏡の変位測定精度での SQL 到達は、量子測定という観点から見れば鏡の量子状態を実現したというベンチマークでもあり、テーブルトップでの到達の意義は大きい。SQL 到達の必要条件として Shot noise と Radiation pressure noise の直接観測が挙げられ、前者はあらゆる実験で観測されているのに対し後者は観測例が数例しかない。中でも、上述の重力デコヒーレンス時間が熱的デコヒーレンス時

間よりも短くなるほどの巨視的な物体での Radiation pressure noise 観測は、つい昨年達成されたばかりである [4]。ここで用いられた技術は SQL 到達にも大いに役立つ。

さて、SQL に到達したとき、例えば重力波検出器の場合 2 枚の鏡がエンタングルする [5]。エンタングルの持続時間、すなわちデコヒーレンス時間を測定することで、重力デコヒーレンスの検証が可能となる。

さらに、SQL を超えた感度での測定や鏡の基底状態の達成など、重力波検出器は巨視的量子現象の格好の実験場にもなりうるのである。

3 Conclusion

重力波検出器と量子重力は巨視的量子現象によって結びつく。重力波検出器を用いることで、これまでにない巨視的量子現象の実現が達成される。また、将来的には SQL を超えた感度での測定も予定されているなど、様々な面白さ、可能性を秘めた実験となっている。

Acknowledgement

本実験は現安東研究室 PD の松本伸之氏のアイデアである。未熟な私の面倒を辛抱強く見て頂いていることへの感謝を、ここに謝辞として記しておく。

参考文献

[1] C Anastopoulos and B L Hu, ”Decoherence in quantum gravity: issues and critiques,” Journal of Physics: Conference Series **67**, 012012 (2007)

[2] R Penrose, ”On Gravity’s Role in Quantum State Reduction,” General Relativity and Gravitation, **28**, 5 (1996)

[3]Y Aso et al. ”Interferometer design of the KAGRA gravitational wave detector,” Physical Review D, **88**, 043007 (2013)

[4]N Matsumoto et al. ”Classical Pendulum Feels Quantum Back-Action,” arXiv: 1312.5031 (2013)

[5]H Ebhardt et al. ”Entanglement of Macroscopic Test Masses and the Standard Quantum Limit in Laser Interferometry,” Physical Review Letters, **100**, 013601 (2008)

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

クラスタリング解析で探る初期銀河形成

播金　優一 (東京大学大学院 理学系研究科、東京大学宇宙線研究所)

Abstract

銀河のダークハロー質量は銀河形成・進化を理解する上で重要であり、クラスタリング解析により求めることができる。銀河の星質量とダークハロー質量の比は stellar-to-halo mass ratio (SHMR) と呼ばれ、SHMR が最大となるダークハロー質量はピボット質量と呼ばれる。赤方偏移 $z < 1.5$ の銀河のピボット質量は求められているが、$z > 1.5$ の銀河についてはサンプル数不足のため求められていない。我々はすばる望遠鏡の Hyper-Sprime-Cam とハッブル宇宙望遠鏡のデータを使い、$z = 5 - 6$ の銀河のクラスタリング解析を行い宇宙初期の銀河形成を調べる。

1　銀河形成と SHMR

現代の天文学の大きな目標の一つは、銀河の形成とその進化を理解することである。銀河はダークマターが集合してできたダークハローの中で形成されると考えられている。ダークマターの構造形成は重力相互作用のみを考慮すれば良いので理論的に計算できるが、銀河の形成にはガスの冷却による星形成や超新星爆発と活動銀河核（active galactic nuclei; AGN）による星形成を抑制するフィードバックの効果など未解明な物理現象が関わっている。これらの物理現象は、赤方偏移やその銀河が属するダークハロー質量などに依存すると考えられている。そのため、様々な時代で銀河のダークハロー質量とその銀河の物理的な性質を観測的に明らかにすることは、銀河の形成・進化を調べる上で重要である。ダークハロー質量に関連する重要な物理量として、stellar-to-halo mass ratio (SHMR) がある。これは銀河の星質量とダークハロー質量の比であり、銀河の中で過去にどれだけ効率良く星形成活動が行われたかどうかを示す。図 1 は赤方偏移 $z = 0.37$ の銀河の SHMR を示しており、ダークハロー質量が 10^{12} $M_{\odot}$ のところで SHMR が最大となることが分かる。この SHMR が最大となるダークハロー質量をピボット質量といい、ピボット質量を持つダークハローの中では星形成が効率よく行われたことを示している。また、ピボット質量よりもダークハロー質量の軽い側、重い側で SHMR が小さくなるのは、それぞれ超新星爆発と AGN による星形成を抑制するフィードバックが効きやすくなるからだと考えられる。直接観測することの出来ないダークハロー質量を測定する方法としては、銀河同士の重力レンズ効果を用いる方法 (Mandelbaum et al. 2006) や、衛星銀河の速度場を用いる方法 (More et al. 2011)、X 線光度からビリアル温度を求める方法 (Lin et al. 2003) がある。ただ、いずれの方法も利用できる天体が多くなく、それらが典型的な銀河であるかも分からない。

2　クラスタリング解析

多くの銀河に適用できる方法として、クラスタリング解析がある。これは観測で得られる銀河のクラスタリング強度を、モデル計算によるクラスタリング強度と比較して、ダークハロー質量を求める方法である。ダークハローのクラスタリング強度は宇宙論パラメータが決まれば、重力相互作用のみでモデル計算することが出来る。さらにダークハローの質量と中の銀河の星質量や個数の関係を仮定すれば、銀河のクラスタリング強度を計算することが出来る。これを観測されるクラスタリング強度と比較すれば、ダークハローの質量を求めることが出来る。実際には、銀河の角度相関関数や銀河バイアスを用いて解析を行う。

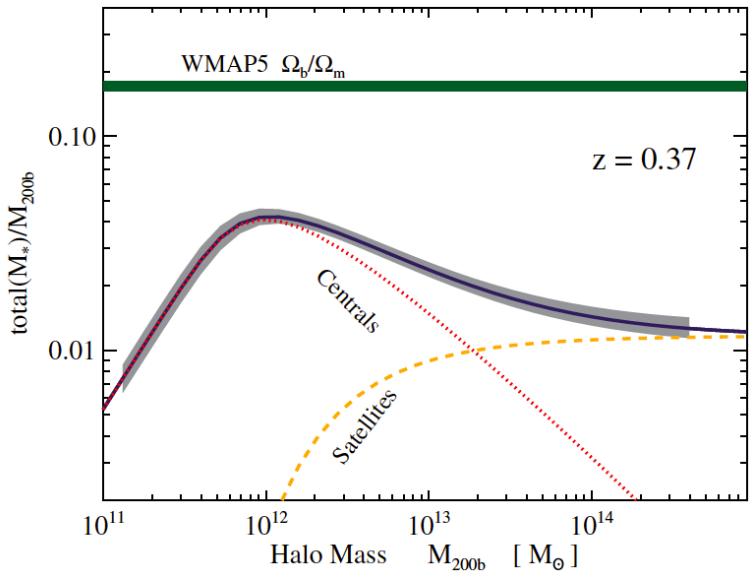


図 1: $z = 0.37$ 銀河の SHMR。横軸はダークハロー質量、縦軸は SHMR である。赤色の点線とオレンジ色の破線はそれぞれ中心銀河と衛星銀河の SHMR に対応している。緑線は WMAP5 によるバリオンダークマター比である (Dunkley et al. 2009)。Leauthaud et al. (2012) より転載。

3 ピボット質量の赤方偏移進化

Martinez-Manso et al. (2012) では *Spitzer* South Pole Telescope Deep-Field Survey により取られた 93.8 deg^2 の撮像データを用いて、$z \sim 1.5$ の銀河のクラスタリング解析を行った。図 2 の赤いダイヤは、Martinez-Manso et al. (2012) により求められた $z \sim 1.5$ の銀河の SHMR である。図 1 と比較すると分かるように、ピボット質量は 10^{12} $M_\odot$ よりも大きくなっている。これはピボット質量が赤方偏移進化していることを示しており、時代とともに星形成に関わる物理過程が変化していったためだと考えられる。図 3 は今までの研究で求められたピボット質量を表しており、赤方偏移が大きくなるに連れてピボット質量も大きくなる傾向があることがわかる。

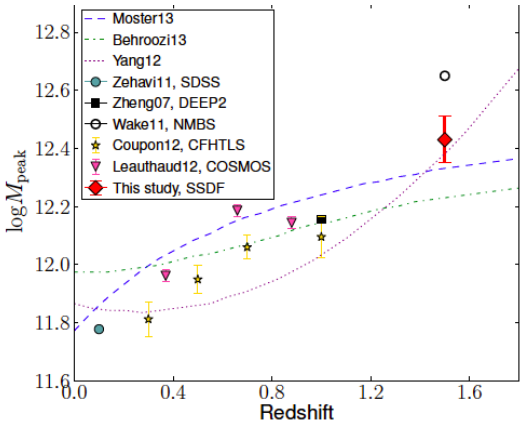


図 3: ピボット質量の赤方偏移進化。横軸は赤方偏移、縦軸はピボット質量である。赤方偏移が大きくなるにつれ、ピボット質量が大きくなることが分かる。Martinez-Manso et al. (2012) より転載。

4 $z = 5 - 6$ の SHMR

Naito (2014) はすばる望遠鏡の広視野撮像データとハッブル宇宙望遠鏡の深撮像データを用いて $z = 5 - 6$ の銀河の SHMR を求めた。求められた SHMR は図 4 に示した。図 4 から分かるように、銀河のサンプル数が足りないために SHMR が精度良く求められていない。また、ピボット質量を至るにも至っていない。このように、$z = 5 - 6$ のピボット質量は初期宇宙の銀河形成を調べるのに重要であるにも関わらず、まだよく調べられていない。また、図 3 で見

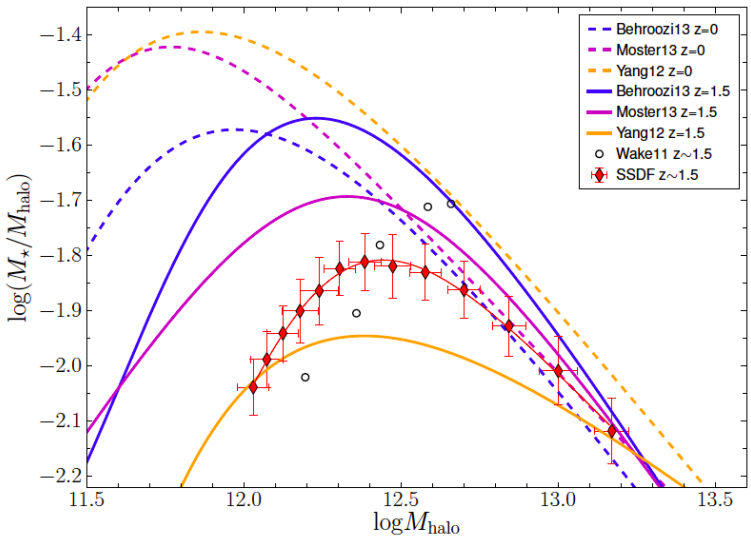


図 2: $z \sim 1.5$ の SHMR。横軸はダークハロー質量、縦軸は SHMR である。エラーバー付きの赤いダイヤが $z \sim 1.5$ の SHMR で、ピボット質量は $\log M_{\rm halo} = 12.44 \pm 0.08$ である。Martinez-Manso et al. (2012) より転載。

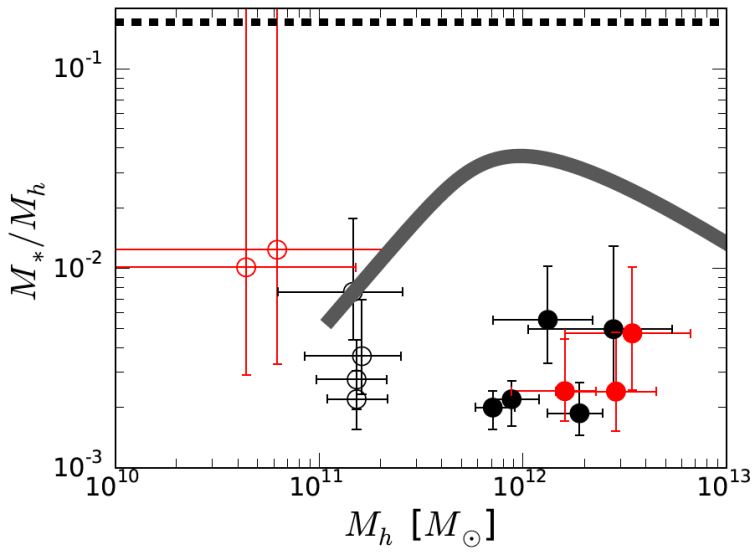


図 4: $z = 5 - 6$ 銀河の SHMR。横軸はダークハロー質量、縦軸は SHMR である。黒丸が $z \sim 5$ 銀河に、赤丸が $z \sim 6$ 銀河に対応している。灰色の曲線は Leauthaud et al. (2012) による $z \sim 0$ 銀河の SHMR で、黒の破線は WMAP5 によるバリオンダークマター比である。Naito (2014) より転載。

られた赤方偏移が大きくなるに連れてピボット質量が大きくなる傾向が、$z = 5 - 6$ でも続いているのかどうかも分からない。

5 研究計画

我々はすばる望遠鏡の Hyper-Sprime-Cam とハッブル宇宙望遠鏡の Advanced Camera for Surveys (ACS) 及び Wide Field Camera 3 (WFC3) による

データを用いて、$z = 5 - 6$ の銀河のクラスタリング解析を行っている。Hyper-Sprime-Cam による探査は今年の 3 月から始まっており、1400 $\deg^2$ という超広視野データをもたらす。この超広視野データを用いることで個数密度の小さい大質量銀河を多数検出でき、大質量側の SHMR を精度良く求めることが出来る。一方ハッブル宇宙望遠鏡の ACS と WFC3 による探査は現在も続けられており、限界等級 29 等級に及ぶ深撮像データをもたらす。この深撮像データを用いることで、個数密度が多いが暗く検出が難しい小質量銀河を多数観測できる。この二つのデータを組み合わせることで、ピボット質量を大質量、小質量の両側から制限することが出来る。予想されるサンプル数も従来の研究の 15-100 倍であり、SHMR を 4-10 倍の精度で求めることができる。この SHMR の精度により、$z = 5 - 6$ でピボット質量の見積もりが初めて可能となると考えている。

Reference

Dunkley, J., Komatsu, E., Nolta, M. R., et al. 2009, ApJS, 180, 306

Leauthaud, A., Tinker, J., Bundy, K., et al. 2012, ApJ, 744, 159

Lin, Y.-T., Mohr, J. J., & Stanford, S. A. 2003, ApJ, 591, 749

Mandelbaum, R., Kauffmann, G., Hirata, C. M., et al. 2006, MNRAS, 368, 715

Martinez-Manso, J., Gonzalez, A. H., Ashby, M. L. N., et al. 2014, ArXiv e-prints, arXiv:1404.2930

More, S., van den Bosch, F. C., Cacciato, M., et al. 2011, MNRAS, 410, 210

Naito, Y. 2014, Master thesis, The University of Tokyo

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

Λ LTB 宇宙における非一様性の観測量への影響

徳竹眞人 (名古屋大学 QG 研 M1)

Abstract

宇宙モデルを考える上では、「宇宙は大域的に一様等方である」とする宇宙原理を仮定し、一様等方な宇宙として Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker（FLRW）モデルを考えるのが一般的であり、実際に FLRW モデルはこれまでに多くの観測事実を説明することに成功している。特に、宇宙マイクロ波背景放射の観測によって、宇宙の等方性については高い精度で確かめられている。しかし、球対称な非一様性についての観測的制限については十分に研究されていない。この制限を与えるためには、球対称で非一様な宇宙モデルを仮定し、実際の観測量と宇宙の非一様性との間にどのような関係があるのか知ることが必要となる。ここでは、宇宙項入りの球対称非一様ダスト宇宙モデルである ΛLTB モデルを考える。観測量としては一様宇宙での距離-赤方偏移関係を与え、その距離-赤方偏移関係を再現するような ΛLTB の非一様性を表すパラメータ $k(z)$,$m(z)$ を得る手法を与える。

1 Introduction

1990 年代中頃までは、宇宙原理を仮定し、重力理論として一般相対性理論を適用することで宇宙の物理を記述できると考えられていた。ところが、様々な観測により、宇宙の膨張速度は加速していることが知られるようになると、加速膨張を説明するための一つの手法として、一般相対性理論にダークエネルギーと呼ばれる斥力項を加えたモデルが考えられるようになった。しかし、宇宙原理の仮定を外し、宇宙に非一様性があることを認めると、一様な宇宙とはダークエネルギーの存在量が異なる。そのため、ここでは球対称非一様なモデルとして知られている Lemaitre-Tolman-Bondi 解に宇宙項 Λ を加えたモデルを考え、非一様性が Λ に及ぼす影響について調べる。

2 ΛLTB モデル

非一様･等方な宇宙を表すモデルとして、Lemaitre-Tolman-Bondi（LTB) 解が知られている。LTB 解の metric は次のように書ける

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{(\partial_r R(t,r))^2}{1-k(r)r^2}dr^2 + R(t,r)^2 d\Omega^2 \quad (1)$$

ここで、$k(r)$ は r の任意関数で曲率を表し、$R(t,r)$ は面積半径を表す。物質はダストを考え、エネルギー運動量テンソルは、

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu \quad (2)$$

となる。LTB 解を Einstein 方程式に代入すると、次式が得られる。

$$(\partial_t R)^2 = -k(r)r^2 + \frac{m(r)r^3}{3R} + \frac{1}{3}\Lambda_{LTB}R^2 \equiv f(r,R) \quad (3)$$

$m(r)$ は積分定数。これを解くと、

$$t - t_B(r) = \int_0^R \frac{1}{\sqrt{f(r,X)}}dX \quad (4)$$

ここで、$t_B(r)$ は big bang time と呼ばれる r の関数である。LTB 解に現れる独立なパラメータは $k(r), m(r), t_B(r)$ の 3 つであり、これらを redshift z で parametrize すると、z についての未知関数は $t(z), r(z), k(z), m(z), t_B(z)$ の 5 つとなる。ただし、ここでは初期宇宙が一様であったと仮定することにより、$t_B = 0$ とする。次節では、残りの 4 つの未知関数を決定するために必要な 4 つの基礎方程式を与える。

3 基礎方程式の導出

3.1 r のゲージ自由度

いま、観測者は宇宙の中心 $r = 0$ にいるとし、$t = t_0, r = 0$ を原点とした past light cone を考える。r のゲージ自由度を固定するために、次の light cone gauge condition

$$t(z) = t_0 - r(z) \tag{5}$$

を適用する。この条件はいま考えている past light cone 上で満たされる。

3.2 Null geodesic equations

LTB 解の null geodesic equations は次のように与えられる。

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{1}{1+z}\frac{\partial_r R}{\partial_t \partial_r R} \tag{6}$$

$$\frac{dr}{dz} = \frac{1}{1+z}\frac{\sqrt{1-kr^2}}{\partial_t \partial_r R} \tag{7}$$

(5),(6),(7) 式より t(z) を消去すると、null condition

$$\partial_r R = \sqrt{1-kr^2} \tag{8}$$

が得られる。

3.3 Distance-redshift relation

angular diameter distance D_A は面積半径を表すので、

$$R = D_A(z) \tag{9}$$

という関係がある。また、R は t と r の関数であるから、z による微分は、

$$\frac{dR}{dz} = \frac{dt}{dz}\partial_t R + \frac{dr}{dz}\partial_r R \tag{10}$$

$$= (-\sqrt{f} + \sqrt{1-kr^2})\frac{dr}{dz} \tag{11}$$

となる。これに (9) 式を用いると、

$$\frac{dr}{dz} = \frac{1}{-\sqrt{f} + \sqrt{1-kr^2}}\frac{dD_A(z)}{dz} \tag{12}$$

が得られる。

3.4 r(z),m(z),k(z) の従う微分方程式

前節で r のゲージ自由度を用いて t(z) を消去したため、残る未知関数は r(z),m(z),k(z) の 3 つである。(6),(8),(12) 式より、これらの未知関数に対する次の微分方程式を得ることができる。

$$\frac{dr}{dz} = \frac{1}{-\sqrt{f} + \sqrt{1-kr^2}}\frac{dD_A(z)}{dz} \tag{13}$$

$$\frac{dm}{dz} = A(r,m,k,\Lambda_{LTB})\frac{dr}{dz} + B(r,m,k,\Lambda_{LTB}) \tag{14}$$

$$\frac{dk}{dz} = \frac{r}{3R}\frac{dm}{dz} + C(r,m,k,\Lambda_{LTB})\frac{dr}{dz} + D(r,m,k,\Lambda_{LTB}) \tag{15, 16}$$

ここで、

$$A = \frac{3R}{r^3 P - r^3 R Q}\left(\sqrt{\frac{1-kr^2}{f}} + r^2 m Q\right) \tag{17}$$

$$- \frac{mr^2 P}{R} + \left(\frac{mr^3}{3R^2} - \frac{2}{3}\Lambda R\right)P\sqrt{1-kr^2} \tag{18}$$

$$B = -\frac{2\sqrt{f(1-kr^2)}}{1+z} \tag{19}$$

$$C = -\frac{2k}{r} + \frac{m}{R} - \left(\frac{mr}{3R^2} - \frac{2\Lambda R}{3r^2}\right)\sqrt{1-kr^2} \tag{20}$$

$$D = -\frac{1}{r^2}\frac{2\sqrt{f(1-kr^2)}}{1+z} \tag{21}$$

であり、

$$P = -\frac{1}{2}\int_0^R \sqrt[3]{f^2(r,X)}\,dX \tag{22}$$

$$Q = -\frac{1}{2}\int_0^R \frac{\sqrt[3]{f^2(r,X)}}{X}\,dX \tag{23}$$

である。

4 中心付近での regularity

方程式 (13)-(15) を数値的に解く際に、$z = 0$ での境界条件が必要となる。ただし、$z = 0$ において、(13)-(15) は方程式の特異点を持つため、z=0 付近で r,m,k を次のように展開し、漸近形を求める必要がある。

$$r = r_1 z + \frac{1}{2}r_2 z^2 + O(z^3) \tag{24}$$

$$m = m_0 + m_1 z + O(z^2) \tag{25}$$

$$k = k_0 + k_1 z + O(z^2) \tag{26}$$

展開形を (13)-(15) 式に代入し、z の -1 次の項の係数が 0 になるように評価すると、次の関係式を得る。

$$r_1 = D_{A1} \quad (27)$$

$$-3k_0 + m_0 + \Lambda_{LTB} = 3 \quad (28)$$

ここで、D_{A1} は D_A の 1 次の係数である。また、現在のハッブル定数を $H_0 = 1$ と規格化してある。この 2 つの方程式によって r_1, k_0 を決定すると、z の 0 次で自由な展開パラメータは m_0 と Λ_{LTB} となる。よって、m_0 と Λ_{LTB} を与えることで k_0 も求まり、より高次の項も同様に評価していくことで 1 次以降の展開パラメータも逐次求めることができる。

5 m(z),k(z) の数値解

angular diameter distance D_A に一様宇宙での Λ をインプットすることで、LTB の Λ とのずれに対応した $m(z), k(z)$ の関数形を求める。まず、一様宇宙での宇宙パラメータの値として、試験的に $\Omega_{m_{FLRW}} = 0.3, \Omega_{k_{FLRW}} = 0, \Omega_{\Lambda_{FLRW}} = 0.7$ を用いる。ここで、$\Omega_{X_{FLRW}}$ は一様宇宙における X の存在する割合を表し、

$$\Omega_{m_{FLRW}} + \Omega_{k_{FLRW}} + \Omega_{\Lambda_{FLRW}} = 1 \quad (29)$$

と規格化されている。非一様宇宙においても同様に、

$$\Omega_{m_{LTB}} + \Omega_{k_{LTB}} + \Omega_{\Lambda_{LTB}} = 1 \quad (30)$$

とする。このとき、$D_A(z)$ は、

$$D_A(z) = \frac{1}{1+z}\int_0^z \frac{dz}{H(z)} \quad (31)$$

$$H(z) = \sqrt{(1+z)^3\Omega_{m_F} + (1+z)^2\Omega_{k_F} + \Omega_{\Lambda_F}} \quad (32)$$

となる。また、(21),(23) 式より、

$$\Omega_{k_{LTB}} = -k_0 \quad (33)$$

$$\Omega_{m_{LTB}} = \frac{m_0}{3} \quad (34)$$

$$\Omega_{\Lambda_{LTB}} = \frac{\Lambda_{LTB}}{3} \quad (35)$$

が成り立つ。これは、例えば $\Lambda_{LTB} = 2.1$ を与えた時には、$\Omega_{\Lambda_{LTB}} = 0.7 = \Omega_{\Lambda_{FLRW}}$ となり、方程式 (13)-(15) は一様宇宙での $m(z), k(z)$ を返すことになる。よって、$\Lambda_{LTB} = 2.1$ を基準として、これと異なる Λ_{LTB} を与えると、その差に対応した非一様性が $m(z), k(z)$ に現れ、図 1、図 2 のように評価できる。(13) 式の右辺の $\frac{dD_A}{dz}$ は、(24) 式から z=1.6 のとき 0 になる。一方 (13) 式の左辺は常に正でなければならないため、z=1.6 以降でも解を得るためには、右辺の係数が z=1.6 のときに ∞ になるように初期条件を上手く調節しなければならない。

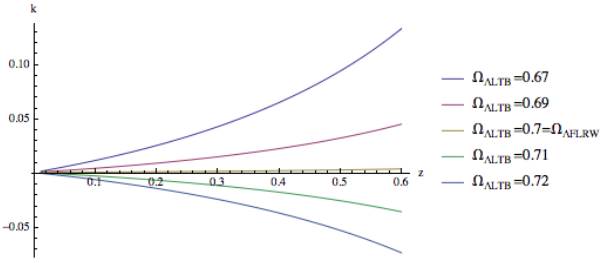


図 1: $k(z)$

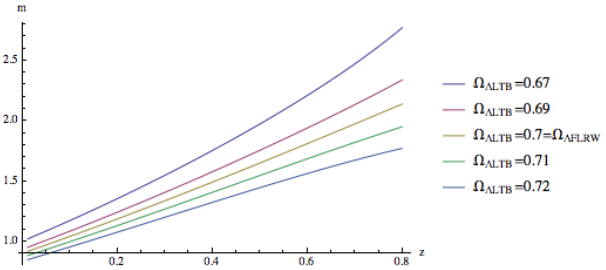


図 2: $m(z)$

6 Summary and Future works

観測量である angular diameter distance に一様宇宙での値を与えることで、Λ_{FLRW} と Λ_{LTB} の差に対応するような $m(z), k(z)$ の関数形を、小さな z に対して求めた。一方、大きな z に対して解くには、前節で述べたようなテクニカル面での課題を解決する必要がある。また、非一様性は時間一定面において、r の関数として評価されるものなので、$k(r), m(r)$ の関数形を求める必要がある。

Reference

Chul-Moon Yoo, "A Note on the Inverse Problem with LTB Universe",Prog. Theor. Phys. 124 (2010), 645-665

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

標準光源観測に対する局所的な非一様性の影響

岩田 健吾 (名古屋大学大学院　理学研究科)

Abstract

標準光源である Type Ia 型の超新星 (SNe) の観測と宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) の温度揺らぎの観測から独立に決定される宇宙論パラメータの値は異なる可能性がある。それは SNe の観測データの解析で局所的な物質分布の非一様性を考慮にいれていない距離と赤方偏移の関係を用いていることが原因であると考えられる。非一様性を考慮に入れた関係を用いれば二つの観測から決まる宇宙論パラメータの値のずれは解消できるはずである。Dyer-Roeder 近似によって、非一様性を考慮にいれた距離と赤方偏移の関係を用いることでずれを解消することができた。このことから SNe と CMB の観測によって決まる宇宙論パラメータの値の違いから局所的な物質分布の非一様性の情報を得ることができる可能性が示された。

1 Introduction

我々の宇宙は一様等方性を仮定した Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) model によって良く記述できる。実際、100Mpc 以上のスケールでは一様等方であるとみなせるが、それ以下のスケールでは銀河、銀河団などに起因する物質分布の非一様性が存在する。10kpc 以下のスケールでの宇宙の構造は理論的にも観測的にも明らかになっていない。ここでは、観測データから間接的に物質分布の局所的な非一様性の情報が得られる可能性を示す。

宇宙論的な観測の代表的なものとして、標準光源である Type Ia 型の超新星 (SNe) 爆発の観測と宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) の温度ゆらぎの観測がある。二つの観測から独立に決定された宇宙論パラメータの値は無矛盾であるとされている。しかし、SNe の物理過程に対する理解はまだ不十分であるのが現状である。理解が進み、観測の精度が上がることで、二つの観測結果に矛盾が生じることは十分にあり得る。その場合の二つの観測から決定された宇宙論パラメータの値のずれは一つの見方として、次のように理解することができる。

SNe の典型的な angular size は 10^{-7} 秒角であるのに対し、Planck 衛星による観測での CMB の温度揺らぎの最も小さなスケールの angular size は 5 分角程度である (P. Fleyry et al.　(2013))。二つの観測が全く異なるスケールの観測であることが分かる。それゆえに観測に対する局所的な非一様性の影響も異なることが予期される。CMB の観測は大局的なスケールの観測なので、局所的な非一様性の影響は十分小さいと考えられる。一方で、SNe の観測はそのような非一様性から影響を受けやすいと考えられる。SNe の観測データから宇宙論パラメータの値を決定する際には距離と赤方偏移の関係が用いられるが、局所的な非一様性を考慮したものではない。このことが SNe と CMB の観測結果の間に生じる矛盾の原因である。

逆に言えば、SNe と CMB の二つの観測から独立に決定される宇宙論パラメータのずれから局所的な非一様性の情報を得ることができる。そのためには局所的な物質分布の非一様性を考慮に入れた距離と赤方偏移の関係が必要である。

ここでは最も簡単な近似法である Dyer-Roeder 近似 (C.C. Dyer and R. C. Roeder.　(1973)) を用いる。この近似法では物質分布の局所的な非一様性を表す現象論的なパラメータ α を導入する。物質分布の非一様性として、全物質のうちの割合 α の物質が一様に分布し、残りの物質は銀河・銀河団などに束縛されている（clumps) 状況を考える。それゆえ、α は smoothness parameter と呼ばれている。二つの観測から決まる宇宙論パラメータのずれから smoothness parameter を決定することにより、局所的な非一様性の情報が得られる。

以下では、幾何単位系 (c=G=1) を用いる。

2 Dyer-Roeder 方程式

Dyer-Roeder(DR) 近似によって、局所的な物質分布の非一様性を考慮に入れた距離は DR distance と呼ばれている。DR distance が従う微分方程式（DR 方程式）を導出する。

局所的な物質分布の非一様性が存在するが、大局的には一様等方的であるとして、宇宙は Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) model によってよく記述できると仮定する。Robertson-Walker metric は

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left\{\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right\} \tag{1}$$

であり、$a(t)$ は scale factor、k は constant curvature である。Einstein 方程式は次式で与えられる。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \tag{2}$$

ここで、$R_{\mu\nu}, \mathcal{R}, g_{\mu\nu}$ はそれぞれ、Ricci tensor,Ricci scalar,metric である。宇宙のエネルギー成分として、非相対論的な物質、ダークエネルギー、曲率を考える。ダークエネルギーに対する状態方程式は $p_{\rm de} = w\rho_{\rm de}$ で与えられる。ただし、$p_{\rm de}, \rho_{\rm de}$ はダークエネルギーの圧力、エネルギー密度である。energy-momentum tensor は一様等方性から完全流体の形のものに制限される。

$$T^{\mu\nu} = \big\{(\rho_m + \rho_{de}) + p_{de}\big\}U^\mu U^\nu - p_{de}g^{\mu\nu} \tag{3}$$

ここで、ρ_m は物質のエネルギー密度、U^μ は共動体積要素の 4 元速度である。Friedmann 方程式から Hubble pameter は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} &H(z) \\ =&H_0\sqrt{\Omega_{\rm m}(1+z)^3 + \Omega_{\rm de}(1+z)^{3(1+w)} + \Omega_{\rm k}(1+z)^2} \\ \equiv&H_0F(z; w, \Omega_{\rm m}, \Omega_{\rm de}, \Omega_k) \end{aligned} \tag{4}$$

ここで、H_0 は Hubble constant、$\Omega_{\rm m}$,$\Omega_{\rm de}$ は物質、ダークエネルギーの密度パラメータであり、Ω_k は次式を満たす。

$$\Omega_{\rm m} + \Omega_{\rm de} + \Omega_k = 1 \tag{5}$$

DR 方程式は Sach optical 方程式：

$$\frac{d^2}{dv^2}\sqrt{A} = -\frac{1}{2}R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu\sqrt{A} \tag{6}$$

に基づいている。ここで、v は無次元 affine parameter、A は光線束の断面積、$R_{\mu\nu}$ は Ricci tensor、$k^\mu = dx^\mu/dv$ は光線の tangent vector である。shear の項については無視した。angular diameter distance $d_{\rm A}$ が $\sqrt{A}$ に比例することと Einstein 方程式 (2)、次の赤方偏移と affne parameter の関係

$$\frac{dz}{dv} = (1+z)^2F(z; w, \Omega_{\rm m}, \Omega_{\rm de}, \Omega_{\rm k}) \tag{7}$$

を用いると、式 (6) は次式のようになる。

$$\begin{aligned} &F(z)\frac{d}{dz}\Big\{(1+z)^2F(z)\frac{d}{dz}D_{\rm A}(z)\Big\} \\ &+\frac{3}{2}\Omega_{\rm m}(1+z)^3D_{\rm A}(z) \\ &+\frac{3}{2}\Omega_{\rm de}(1+w)(1+z)^{3(1+w)}D_{\rm A}(z) = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

ここで、$D_{\rm A} \equiv H_0d_{\rm A}$ は dimensionless angular diameter distance である。

局所的な物質分布の非一様性を考慮に入れるために Dyer-Roeder 近似 (C.C. Dyer and R. C. Roeder. (1973)) を用いる。この近似法では非一様性を特徴づける現象論的なパラメータとして α を導入する。物質は一様に分布するものと銀河や銀河団に束縛されているものに分けられるとし、一様に分布している物質の割合を α とする。それゆえに α は smoothness parameter と呼ばれている。$\alpha = 1$ が完全に一様な場合に対応している。一様に分布する物質の割合が時間変化するとすれば、α を redshift の関数として表すことができる。

宇宙初期での物質分布は一様であったと考えられるので、十分大きな redshift では smoothness parameter は 1 に漸近すると考えられる。このことと smoothness parameter の定義から $\alpha(z)$ は次の条件を満たす必要がある。

$$\begin{cases} 0 \le \alpha(z) \le 1 \\ \alpha(z) \to 1 \ (z \to \infty) \end{cases} \tag{9}$$

光線束が clumps を通らないと仮定すると、光は実効的に一様に分布する物質のみから影響を受ける

ことになる。よって、式 (8) 中の energy-momentum tensor 由来の $\Omega_{\rm m}$ を $\alpha(z)\Omega_{\rm m}$ に置き換えることにより、局所的な物質分布の非一様性を考慮した距離と赤方偏移の関係を得ることができ、次の Dyer-Roeder 方程式を得る。

$$F(z)\frac{d}{dz}\Big\{(1+z)^2F(z)\frac{d}{dz}D_{\rm DR}(z)\Big\} + \frac{3}{2}\alpha(z)\Omega_{\rm m}(1+z)^3D_{\rm DR}(z) + \frac{3}{2}\Omega_{\rm de}(1+w)(1+z)^{3(1+w)}D_{\rm DR}(z)=0 \quad (10)$$

ここで、 $D_{DR}(z)$ は Dyer-Roeder distance であり、宇宙論パラメータと smoothness parameter に依存するので、次の表式を用いる。

$$D_{\rm DR}(z)=D_{\rm DR}(z;w,\Omega_{\rm m},\Omega_{\rm de},\Omega_{\rm k},\alpha(z)) \quad (11)$$

3 $\alpha(z)$ の決定

SNe の観測データから宇宙論パラメータを決定する際に局所的な物質分布の非一様性の影響は考慮されていない。$\alpha(z)=1$ が物質分布が一様な場合に対応しているので、SNe に対する observed distance は次のように与えられる。

$$D^{\rm SNe}(z)=D_{\rm DR}(z;w^{\rm SNe},\Omega_{\rm m}^{\rm SNe},\Omega_{\rm de}^{\rm SNe},\Omega_{\rm k}^{\rm SNe},\alpha(z)=1) \quad (12)$$

ここで、$w^{\rm SNe},\Omega_{\rm m}^{\rm SNe},,\Omega_{\rm de}^{\rm SNe},\Omega_{\rm k}^{\rm SNe}$ は SNe の観測から決定された宇宙論パラメータである。$D^{\rm SNe}(z)$ は初期条件

$$\begin{cases} D|_{z=0}=0, \\ \frac{dD}{dz}\big|_{z=0}=1. \end{cases} \quad (13)$$

のもとで、DR 方程式 (10) を解くことによって得られる。

1 章で議論したように SNe と CMB の観測から決定される宇宙論パラメータの値は異なる可能性がある。宇宙論パラメータのずれから局所的な非一様性の情報を得るために、CMB から決定された宇宙論パラメータの値で $D^{\rm SNe}(z)$ を再現するように smoothness parameter を決定する。つまり、$\alpha(z)$ は次式のように表わされる。

$$\alpha(z)=-\frac{2}{3\Omega_{\rm m}^{\rm CMB}}\Big\{\frac{F^{\rm CMB}(z)}{(1+z)^3D^{\rm SNe}(z)} \times\frac{d}{dz}\Big\{(1+z)^2F^{\rm CMB}(z)\frac{d}{dz}D^{\rm SNe}(z)\Big\} +\Omega_{\rm de}^{\rm CMB}(1+w^{\rm CMB})(1+z)^{3w^{\rm CMB}}\Big\} \quad (14)$$

ここで、$w^{\rm CMB},\Omega_{\rm m}^{\rm CMB},\Omega_{\rm de}^{\rm CMB},\Omega_{\rm k}^{\rm CMB}$ は CMB の観測から決定された宇宙論パラメータであり、$F^{\rm CMB}(z)=F(z;w^{\rm CMB},\Omega_{\rm m}^{\rm CMB},\Omega_{\rm de}^{\rm CMB},\Omega_{\rm k}^{\rm CMB})$ である。

$D^{\rm SNe}(z=0)=0$ なので、$z=0$ で $\alpha(z)$ は特異となる。中心付近での漸近系の解析から、それを避けるためには次の条件式が満たされる必要があることが分かる。

$$3\Omega_{\rm m}^{\rm SNe}+3(1+w^{\rm SNe})\Omega_{\rm de}^{\rm SNe}+2\Omega_{\rm k}^{\rm SNe} =3\Omega_{\rm m}^{\rm CMB}+3(1+w^{\rm CMB})\Omega_{\rm de}^{\rm CMB}+2\Omega_{\rm k}^{\rm CMB} \quad (15)$$

4 結果

CMB の観測から決定される宇宙論パラメータには Planck 衛星による観測結果 (Ade, P. A. R. et al. (2013)) を用いる。

$$\Omega_{\rm m}^{\rm CMB}=0.32,\ \Omega_{\rm de}^{\rm CMB}=0.68,\ \Omega_{\rm k}^{\rm CMB}=0 \quad (16)$$

$w^{\rm CMB}$ と SNe の観測から決定される宇宙論パラメータ $w^{\rm SNe},\Omega_{\rm m}^{\rm SNe},\Omega_{\rm de}^{\rm SNe},\Omega_{\rm k}^{\rm SNe}$ の 5 つのパラメータがあるが、式 (5,15) により自由なパラメータは 3 つとなる。ここでは、表 1 にある 4 つの場合について考える。

表 1: 宇宙論パラメータの値

(1)	$w^{\rm CMB}=-1$	$w^{\rm SNe}=-1$	$\Omega_{\rm m}^{\rm SNe}$
(2)	$w^{\rm CMB}=-1$	$\Omega_{\rm k}^{\rm SNe}=0$	$w^{\rm SNe}$
(3)	$w^{\rm CMB}=-1.13$	$w^{\rm SNe}=-1$	$\Omega_{\rm m}^{\rm SNe}$
(4)	$w^{\rm CMB}=-1.13$	$\Omega_{\rm k}^{\rm SNe}=0$	$w^{\rm SNe}$

それぞれの場合で、$\Omega_{\rm m}^{\rm SNe}$ もしくは $w^{\rm SNe}$ の値を変化させた時の $\alpha(z)$ は図 1〜4 のようになる。

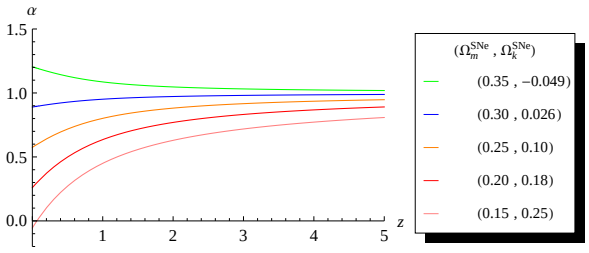


図 1: $(1) w^{\mathrm{CMB}} = -1, w^{\mathrm{SNe}} = -1$ での $\alpha(z)$

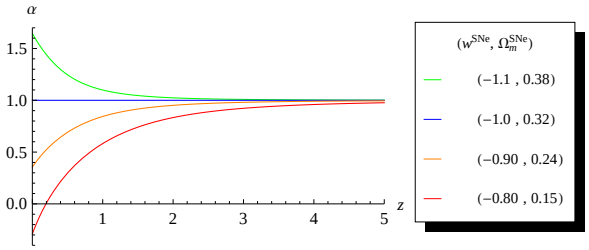


図 2: $(2) w^{\mathrm{CMB}} = -1, \Omega_{\mathrm{k}}^{\mathrm{SNe}} = 0$ での $\alpha(z)$

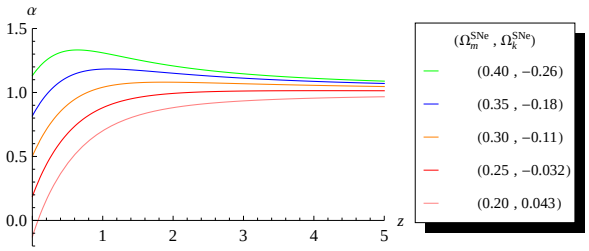


図 3: $(3) w^{\mathrm{CMB}} = -1.13, w^{\mathrm{SNe}} = -1$ での $\alpha(z)$

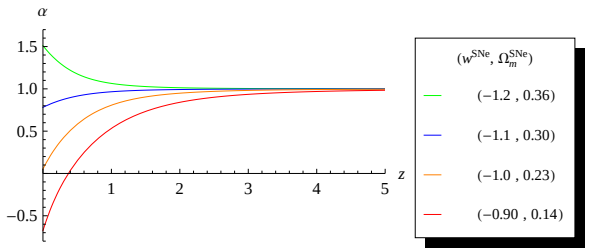


図 4: $(4) w^{\mathrm{CMB}} = -1.13, w^{\mathrm{SNe}} = -1$ での $\alpha(z)$

5　考察とまとめ

4 つのいずれの場合においても smoothness parameter に対する条件 (9) を満たすような宇宙論パラメータの値の場合に限れば、$\alpha(z)$ が単調増加関数（もしくは定数）となっていることが分かる。

ここで考えていた局所的な物質分布の非一様性は銀河や銀河団といった構造に由来するものであった。宇宙年齢の増加に伴い、構造形成が進むので、一様に分布する物質の割合は減少していくはずである。つまり、赤方偏移が大きくなるにつれて、一様に分布する物質の割合が増加する。このことは $\alpha(z)$ の単調増加性に他ならない。

よって、条件 (9) を満足するような $\alpha(z)$ が得られる宇宙論パラメータの値では、SNe と CMB の宇宙論パラメータのずれを局所的な物質分布の非一様性を考慮に入れることにより解消することができる。逆に、得られた $\alpha(z)$ が条件 (9) を満たさない場合は非一様性では 2 つの観測から決まる宇宙論パラメータのずれを説明できないことを示している。

以上から、SNe と CMB の観測から決まる宇宙論パラメータの値に隔たりがあった場合には、そのずれから局所的な物質分布の非一様性の情報が得られる可能性が示された。

Reference

P. Fleury, H. Dupuy and J. -P. Uzan, Phys. Rev. Lett. **111**, 091302 (2013)

C. C. Dyer and R. C. Roeder, 1972, ApJ, **174**, L115

C. C. Dyer and R. C. Roeder, 1973, ApJ, **180**, L31

P. A. R. Ade et al. (Planck Collaboration) 2013, arxiv:1303.5076v2

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

FRB を用いた宇宙論モデルの検証手法

廣島　渚 (東京大学宇宙線研究所)

Abstract

FRB（Fast Radio Burst) は系外に由来するとみられている突発的な電波放出現象である。観測される電波の継続時間がミリ秒オーダーと短く、かつ非常に明るいという特徴を持つ。現在確認されているものは数個と少ないが、今後さらなる観測の報告が期待されている。

プラズマ中での電磁波の伝播速度が周波数の二乗に反比例するという性質を用いると、パルスの多周波観測から dispersion measure（DM) と呼ばれる量が決定できる。DM は視線にそって積分した自由電子柱密度であり、光学観測とは異なった手段で観測者と天体の間にある物質の量を決定する。電波域かつパルス的という FRB の性質は DM を求めるのに適している。

多数の FRB から DM の分布を決定し、宇宙論的なバリオン分布のモデルが予言する計算される DM の分布と比較することでモデルの妥当性を検討できる。本講演では論文 (McQuinn 2014) のレビューを行い、実際に現在得られているシミュレーション結果に対して DM の確率分布を計算すると Gaussian と比べて high DM で確率分布が大きくなることを示す。また、まだなじみの薄い現象である FRB の概説を行い、将来的に FRB が遠方宇宙の探索に寄与する可能性について議論する。

1 Introduction

2007 年に Lorimer らによって Fast Radio Burst (FRB) と呼ばれる突発的な電波放出現象が報告され (Lorimer et al. 2013)、その後 2013 年に Thornton らの論文 (Thornton et al. 2013) でこれが人工的なシグナルではない事が確実視されるようになった。FRB は観測される継続時間 ∼msec の間におよそ 10^{38-40}erg のエネルギーを放出する電波パルスである。このエネルギースケールに対応する既知の天体現象は存在せず、また、電波以外の波長の電磁波が FRB と同時に観測された例もない。発生機構については中性子星連星合体やマグネターからのパルス、中性子星の重力崩壊など様々な説が提案されているがまだ議論の途中である。

FRB の特徴の一つに dispersion measure (DM) の値が $500-1000\mathrm{pc/cm^3}$ 程度と大きいことが挙げられる。DM は「視線上で積分した自由電子柱密度」で定義され、プラズマ中の電磁波の伝播速度が周波数の 2 乗に反比例することを用いると電磁波パルスの多周波観測から決定できる。DM が大きいということは視線上にある自由電子が多いという事なので、FRB は遠方で起こった現象であることが示唆される。すなわち、FRB は $z\sim1$ の遠方における高エネルギー天体現象であると考えられる。FRB のイベントレートを観測から見積もるとおよそ 10^4/day/sky であり、今後さらなる観測が期待されている。FRB を利用すると、光学的に暗いバリオンの分布や He 再結合時期などを特定しうること (Kulkarni,S.R.,et al 2014) が示されている。

宇宙のバリオンがすべて電離しており、かつ一様に分布しているとすると、z に対し DM の値は一意に決まる。しかし、分布が一様でない場合には DM 値が同じ z についても視線の方向によって異なる事がありうる。FRB が多数観測されればこの視線方向の差を DM の確率分布に焼き直すことができる。バリオン分布のモデルを仮定して計算した DM の確率分布と観測結果を比較することによりハローの分布を制限する手法が McQuinn によって提案された。以下では、この計算手法と結果について論じ、将来的な有用性と課題を議論する。

2 Methods&Result

星間空間に存在するプラズマの効果により、天体からの電磁波は群速度

$$v = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \tag{1}$$

で伝播する。ここで $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n_e/m_e}$ はプラズマ周波数である。これより、天体までの距離が d であるとき到来するのにかかる時間は

$$t = \int_0^d \frac{ds}{v_g} \sim \frac{d}{c} + \frac{e^2}{2\pi m_e c}\frac{1}{f^2}\int_0^d n_e ds \tag{2}$$

となる。ここで右辺に現れる視線で積分した自由電子柱密度を dispersion measure (DM) という。すなわち

$$DM = \int_0^d n_e ds \tag{3}$$

である。DM を用いると、周波数 f_1、f_2 の電磁波の到来時刻差は

$$\Delta t(f_1, f_2) = \frac{e^2}{2\pi m_e c}\left(\frac{1}{f_1^2} - \frac{1}{f_2^2}\right) DM \tag{4}$$

とかけるので、電磁波パルスを多周波観測することで視線上の自由電子柱密度が求められる。プラズマ効果による到来電磁波の遅延を実際に観測する際には、宇宙膨張の効果を入れて

$$DM(z_s) = \int_0^{z_s} \frac{n_e(z,\hat{n})}{(1+z)^2}\frac{cdz}{H(z)} \tag{5}$$

と表せる。

宇宙の中のバリオン分布が一様であれば、宇宙論での密度パラメータを仮定することで DM の値は視線の方向によらず z に対し一意に決まる。宇宙論モデルとして平坦な ΛCDM モデルを採用した場合には

$$DM(z_s) = \frac{3cH_0\Omega_b}{8\pi G m_p}\int_0^{z_s} \frac{1+z}{\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}} dz \tag{6}$$

である。これを平均値として図 1 下図の黒い実線で示した。しかし、バリオン分布が非一様である場合、同じ z でも視線方向による DM 値のばらつきが生じうる。FRB の観測個数が増えれば、このばらつきが求められるはずである (将来的には最大で 1event/hour/sky の FRB 観測が見込まれている (Hassall et al. 2013))。各 z で DM の値を決定して DM の値ごとにイベントの個数を数えれば DM の確率分布を決定できる。これを利用して宇宙のバリオン分布を決定することを考える。

バリオン分布のモデルを仮定すると、DM の平均値に対する分散 $\sigma(DM)$ 及び確率分布が決定できる。宇宙空間にダークマターハローが分布しており、それに付随して電離したバリオンが存在している状況を考える。視線がこのようなハローを横切ると DM の値が増加するので、ハローの衝突パラメータと質量をパラメータにして各ハローによる DM の増分を評価する。具体的に Sheth&Tormen の halo mass function (Sheth, &Tormen 2002) 及び Faucher-Giguere et al.(Faucher-Giguere et al. 2011) によるハロー中のバリオン質量比の数値シミュレーション結果を用いて DM の分散と確率分布を計算する。図 1 の上図で視線を横切るハローの平均個数を、下図で DM の分散及び一様なバリオン分布を仮定した時の平均値を赤方偏移の関数として示した：

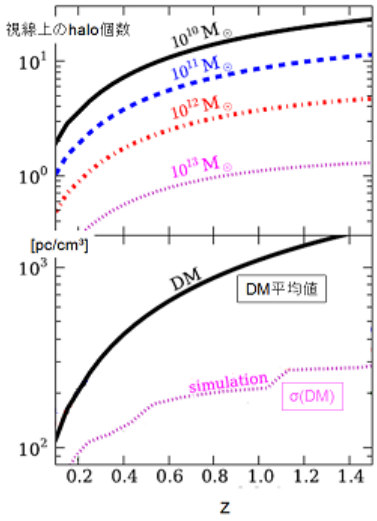


図 1: 上：視線を横切るハローの個数、下：DM の平均値及び分散 (McQuinn(2014),Fig1 より)

分散と各ハローによる DM の増分 $\Delta_{DM}(R, m_h)$ を計算すると、以下の式を用いて具体的に確率分布 $P(DM)$ が計算できる。ここでパラメータ R、m_h はそれぞれハローの衝突パラメータと質量であり、t に

より Δ_{DM} のフーリエ成分を表す。

$$\tilde{P}(t|z_s) = \exp\left(\int_0^{z_s} \frac{cdz}{H(z)}\left[A + B^2\Delta\chi\sigma^2_{\Delta\chi}\right]\right) \quad (7)$$

$$A = \int dm_h d^2R \frac{n(m_h,z)}{a^2} \times \left(\exp\left[-it\Delta_{DM}(R,m_h)\right] - 1\right) \quad (8)$$

$$B = \int dm_h d^2R \frac{n(m_h,z)}{a^2} \times b(m_h,z)\left(\exp\left[-it\Delta_{DM}(R,m_h)\right] - 1\right) \quad (9)$$

$$\sigma^2_{\Delta\chi} = \int \frac{d^2k_\perp dk_\parallel}{(2\pi)^3} P_\delta(k)\mathrm{sinc}^2\left[\frac{\Delta\chi k_\parallel}{2}\right] \quad (10)$$

$$P(DM) = \int dt\tilde{P}(t|z_s)\exp\left[it\Delta_{DM}\right] \quad (11)$$

図 1 で求めた分散を与えるバリオン分布に対する z=1 での確率分布を図 2 で示す：

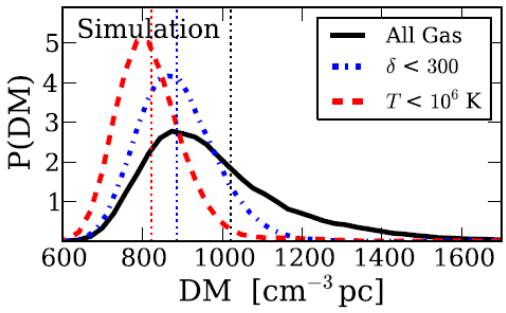


図 2: DM の確率分布 (McQuinn(2014))

図 2 の黒線が全てのバリオン成分を入れた場合であり、赤線と青線はそれぞれ寄与するバリオン成分を温度 T< 10^6K 以下の低温のものと自由電子数密度ゆらぎが 300 以下の低密度のものに限定した場合の確率分布である。これより、低温、あるいは低密度のバリオン成分の寄与のみ考えた時の DM の確率分布が Gaussian 的であるのに対し、実際のバリオン分布が DM の大きい側にテールをひくのが分かる。すなわち、DM の確率分布を観測的に求めたとき、高温あるいは高密度のハローの寄与で非 Gaussian の分布が得られた。この高温成分は図 1 上図の”重い”ハロー ($m_h > 10^{13}M_\odot$ など) に対応するものである。仮に観測される DM の分布が低 DM 側にかたよったとすると、それは比較的小さなハローに付随したバリオンの寄与を意味するので、光学的に得られないバリオン分布の情報が得られたことになる。このように観測で得られた DM の分布をフィッティングすることで、考えているバリオン分布のモデルの精度を上げることができる。

3 Discussion

バリオン分布を仮定して計算した DM の確率分布を観測結果と比較するには、観測で DM と z を独立に決定して分布を求める必要がある。現在 FRB 源の z の値は DM の大きさから見積もられているので、今回紹介した方法を用いてバリオン分布のモデルを検証するには FRB 源の z を何らかの独立な方法で決定しなければならない。さらに、現在の FRB 観測の個数が 6 個程度と少ないことに対し、確率分布を決定するには各 z で少なくとも 20 個程度の FRB を観測する必要があると考えられる。

4 Conclusion

dispersion measure(DM) の確率分布をシミュレーションにより求めたバリオン分布に対し計算すると Gaussian からずれて DM の大きい側にテールをひくことが分かった。これは、個数密度の少ない大きな (重い) ハローや密度の高いハローに付随するバリオンの寄与が無視できないためである。すなわち、DM の分布を求めることで遠方宇宙での大質量ハローの分布が制限できる。Fast Radio Burst(FRB) はこの DM 分布を求めるためのツールになる。FRB の観測例はまだ少ないが、将来的には分布を決定するのに十分な数の FRB 観測が可能であると期待される。

Reference

McQuinn,M.,2014,ApJL,780,L33

Lorimer,D.R.,Baies,M.,McLaughlin,M.A.,Narkevic,D.J.,&Crawford,F.200

Thornton,D.,Stappers,B.,Bailes,M.,et al.,2013,Sci,341,53

Hassall,T.E.,Keane,E.F.,&Fender,R.P.,2013,MNRAS,436,371

Sheth,R.K.,&Tormen,G.2002,MNRAS,329,61

Faucher-Giguere,C.-A.,Keres,D.,&Ma,C.-P.2011,MNRAS,417,2982

Kulkarni,S.R.,et al,2014,arXiv:1402.4766

hang,P.,&Sheth,R.K.2007,ApJ,671,14

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

Bigravity 理論の線形及び非線形解析と宇宙論的応用

青木 勝輝 (早稲田大学大学院 先進理工学研究科)

Abstract

我々は、bigravity 理論に基づき、いくつかの具体的な背景時空からの線形摂動と非線形摂動を考えた。背景時空は宇宙項をもつ一般相対論の解で与えられる。線形摂動領域においては、我々の時空にダークマターを導入しなくても、bigravity 理論は銀河スケールから宇宙論スケールまでの全てのダークマターの起源を説明できる。一方、非線形領域では Vainshtein 機構により bigravity 理論は一般相対論を回復すると信じられている。我々は、球対称静的時空や一様等方時空に対しては、Vainshtein 機構が働くことが示した。さらに、我々は一様等方時空を背景とした非線形摂動を考え、Vainshtein 機構の有無について議論した。

1 Introduction

現在の宇宙の標準理論であるビッグバン理論は一般相対論と宇宙の一様等方性を基礎として構築されており、宇宙背景放射などの様々な観測から支持されている。しかし観測からダークマター、ダークエネルギーといった未知の物質が我々の宇宙に大量に存在していることが判明した。これらの暗黒成分の起源は未だにわかっていない。ダークマター、ダークエネルギーの正体は現代宇宙論に残された最重要課題の 1 つであり、重力理論の修正といった新たな物理を示唆しているかもしれない。

重力理論の修正として 1 つ自然なアプローチは、重力子に質量を持たせることである。一般相対論は素粒子論的立場から見た場合、質量ゼロのスピン 2 粒子 (重力子) の理論と言える。しかし重力子が本当に質量を持たないのかはわかっておらず、理論と観測の両面から質量の有無を調べる必要がある。このような理由から質量を持った重力子を考える理論 (Massive gravity) が 1930 年代から研究されていた (M. Fierz and W. Paui. (1939))。特に近年これまでの理論的困難を解決した非線形 massive gravity 理論が提案され注目を浴びている (de Rham et al. (2011))。Bigravity 理論はこの非線形 massive gravity 理論の拡張の 1 つであり、2 つの計量を導入し、質量項を拡張した相互作用を考える (Hassan and Rosen. (2012))。そして一方の計量を我々の住む時空と解釈することにする。Bigravity 理論に基づくことで、ダークエネルギーを導入せずとも実効的に宇宙項が現れ、加速膨張を実現できることが示されている (K. Aoki and K. Maeda. (2014) など)。

Bigravity 理論は massless graviton と massive graviton をもつ。我々は、massive graviton の Compton 波長が銀河スケール程度の値をもつと、ダークマターの起源を説明できることを示した。一方で、質量をもった理論は質量ゼロ極限で質量ゼロの理論 (一般相対論) を回復することが自然である。しかし、bigravity 理論は線形摂動論においては質量ゼロ極限で一般相対論を回復しない。この不連続性は、摂動の非線形効果により解消されると考えられている (Vainshtein 機構)。一様等方時空や重力の弱い球対称静的時空においては、質量ゼロ極限で線形近似は破綻し、非線形効果により一般相対論を回復することが示される [1]。一方、一様等方時空まわりのスカラー摂動においては、質量ゼロ極限でも線形近似は破綻しないが、不安定である。我々は、質量ゼロ極限で Vainshtein 機構をもつ非線形解を発見した。

2 Hassan-Rosen bigravity

Bigravity 理論は、1 つの多様体に 2 つの計量 $g_{\mu\nu}, f_{\mu\nu}$ を導入する。計量間の相互作用項は、ゴーストを持たない条件から

$$\mathscr{U}(g,f) = \sum_{k=0}^{4} b_k \mathscr{U}_k(g,f)\,, \tag{1}$$

[1] 球対称静的時空に関しては、簡単な場合は次で既に示されている：E. Babichev and M. Crisostomi. (2013)

のように書かれ、5 つの独立な項をもつ（具体的な関数形は次を参照:Hassan and Rosen. (2012)）。ここで 5 つの項に対して、5 つの任意の結合定数をもつ。この相互作用を用いて、作用は次で与えられる。

$$S = \frac{1}{2\kappa_g^2}\int d^4x\sqrt{-g}R(g) + \frac{1}{2\kappa_f^2}\int d^4x\sqrt{-f}\mathcal{R}(f) + S^{[\mathrm{m}]}(g,f,\psi_g,\psi_f) - \frac{m^2}{\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}\mathscr{U}(g,f) \tag{2}$$

ここで $R(g), \mathcal{R}(f)$ はそれぞれの計量のリッチスカラー、$\kappa_g^2 = 8\pi G, \kappa_f^2 = 8\pi\mathcal{G}$ である。なお $g_{\mu\nu}$ を我々の時空と解釈する。また、本集録において、基本的には $g_{\mu\nu}$ の各量は添え字 g を、$f_{\mu\nu}$ の各量は添え字 f を用いて表す。

物質成分は、一般には、2 つの計量に相互作用するような物質も考えられるが、等価原理を仮定すると

$$S^{(\mathrm{m})}(g,f,\psi_g,\psi_f) = S_g^{[\mathrm{m}]}(g,\psi_g) + S_f^{[\mathrm{m}]}(f,\psi_f)\,, \tag{3}$$

のように 2 つに分解される。それぞれの物質はそれぞれの計量とのみ相互作用する。

変分することにより、運動方程式は

$$G^{\mu}{}_{\nu} = \kappa_g^2(T^{[\gamma]\mu}{}_{\nu} + T^{[\mathrm{m}]\mu}{}_{\nu}), \tag{4}$$

$$\mathcal{G}^{\mu}{}_{\nu} = \kappa_f^2(\mathcal{T}^{[\gamma]\mu}{}_{\nu} + \mathcal{T}^{[\mathrm{m}]\mu}{}_{\nu}), \tag{5}$$

と得られる。ここで $T^{[\gamma]\mu}{}_{\nu}, \mathcal{T}^{[\gamma]\mu}{}_{\nu}$ は、相互作用項をそれぞれの計量で変分することにより得られる。また $T^{[\mathrm{m}]\mu}{}_{\nu}, \mathcal{T}^{[\mathrm{m}]\mu}{}_{\nu}$ は、それぞれの物質のエネルギー運動量テンソルである。

物質はそれぞれの時空で保存則を満たす。これと Bianchi 恒等式から次の式も得られる。

$$\overset{(g)}{\nabla}_{\mu} T^{[\gamma]\mu}{}_{\nu} = 0\,,\ \overset{(f)}{\nabla}_{\mu} \mathcal{T}^{[\gamma]\mu}{}_{\nu} = 0\,. \tag{6}$$

特殊解として、2 つの時空が相似である解を考える。すなわち

$$f_{\mu\nu} = K^2\, g_{\mu\nu}\,, \tag{7}$$

を仮定する。ここで K は任意のスカラー関数とする。このとき

$$\kappa_g^2 T^{[\gamma]\mu}{}_{\nu} = -\Lambda_g(K)\delta^{\mu}{}_{\nu}\,,$$
$$\kappa_f^2 \mathcal{T}^{[\gamma]\mu}{}_{\nu} = -\Lambda_f(K)\delta^{\mu}{}_{\nu}\,,$$

と計算される。ここで

$$\Lambda_g(K) = m^2\frac{\kappa_g^2}{\kappa^2}\left(b_0 + 3b_1K + 3b_2K^2 + b_3K^3\right)\,,$$
$$\Lambda_f(K) = m^2\frac{\kappa_f^2}{\kappa^2}\left(b_4 + 3b_3K^{-1} + 3b_2K^{-2} + b_1K^{-3}\right)\,. \tag{8}$$

で定義される。式 (6) より、K は定数であることが導かれる。従って、2 つの計量は比例する。さらにこれより、運動方程式から

$$\Lambda_g(K) = K^2\Lambda_f(K)\,, \tag{9}$$

$$\kappa_f^2\mathcal{T}^{[\mathrm{m}]}{}_{\mu\nu} = \kappa_g^2\, T^{[\mathrm{m}]}{}_{\mu\nu} \tag{10}$$

が得られる。すなわちこの解は物質成分を微調整したときのみ得られる。また (9) より K の値は 4 次方程式の解で与えられる。なお真空では (10) は常に成り立つことに注意しておく。

この解の特徴は、相互作用のエネルギー運動量テンソルが実効的に宇宙項になることである。すなわち、この解は一般相対論の解で与えられる。またこの解を相似解と呼ぶことにする。

3 Linear perturbation theory

相似解の周りで次のような線形摂動を考える。

$$g_{\mu\nu} = \overset{(0)}{g}{}_{\mu\nu} + h^{[g]}_{\mu\nu}, \tag{11}$$

$$f_{\mu\nu} = \overset{(0)}{f}{}_{\mu\nu} + K^2 h^{[f]}_{\mu\nu} = K^2\left(\overset{(0)}{g}{}_{\mu\nu} + h^{[f]}_{\mu\nu}\right) \tag{12}$$

また物質成分は

$$\kappa_g^2 T^{[\mathrm{m}]\mu}{}_{\nu} = \kappa_g^2\left[\overset{(0)}{T}{}^{[\mathrm{m}]\mu}{}_{\nu} + \overset{(1)}{T}{}^{[\mathrm{m}]\mu}{}_{\nu}\right], \tag{13}$$

$$K^2\kappa_f^2\mathcal{T}^{[\mathrm{m}]\mu}{}_{\nu} = K^2\kappa_f^2\left[\overset{(0)}{\mathcal{T}}{}^{[\mathrm{m}]\mu}{}_{\nu} + \overset{(1)}{\mathcal{T}}{}^{[\mathrm{m}]\mu}{}_{\nu}\right] \tag{14}$$

と摂動する。なお背景時空の量は添え字 (0) をつけて表す。

運動方程式等、詳細は K. Aoki and K. Maeda. (2014) の付録に記してある。ここで重要な点は

$$h^{[-]}_{\mu\nu} = h^{[g]}_{\mu\nu} - h^{[f]}_{\mu\nu},$$
$$h^{[+]}_{\mu\nu} = \frac{m_f^2}{m_{\mathrm{eff}}^2}h^{[g]}_{\mu\nu} + \frac{m_g^2}{m_{\mathrm{eff}}^2}h^{[f]}_{\mu\nu} \tag{15}$$

により、質量項に対する固有状態が得られることである。$h^{[+]}_{\mu\nu}$ は massless mode、$h^{[-]}_{\mu\nu}$ は massive mode を表す。Massive mode の有効質量 $m_{\rm eff}$ は

$$m^2_{\rm eff} = m^2_g + m^2_f, \tag{16}$$

$$m^2_g = \frac{m^2\kappa^2_g}{\kappa^2}(b_1K + 2b_2K^2 + b_3K^3), \tag{17}$$

$$m^2_f = \frac{m^2\kappa^2_f}{K^2\kappa^2}(b_1K + 2b_2K^2 + b_3K^3) \tag{18}$$

で与えられる。それぞれの運動方程式は線形化された一般相対論と Fierz-Pauli 理論で与えられている。ただし、これらは質量項に対する固有状態であるため、物質項に対する固有状態でない。すなわち、massless mode, massive mode はどちらの物質成分とも相互作用する。

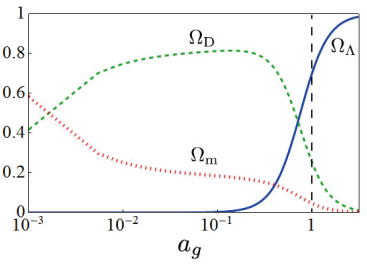


図 1: 一様等方時空における我々の時空における密度パラメータの時間変化。$\Omega_{\rm m}$ は我々の時空の物質、Ω_Λ は実効的な宇宙項の密度パラメータである。$\Omega_{\rm D}$ は、単純にはもう一方の物質が我々の時空に生み出す密度パラメータである。線形領域では $\Omega_{\rm D}$ はダークマターとして振る舞う（図右側）。非線形領域では Vainshtein 機構により、$\Omega_{\rm D}$ は遮蔽される（図左側）。

4 Results

我々の時空の摂動量は

$$h^{[g]}_{\mu\nu} = h^{[+]}_{\mu\nu} + \frac{m^2_g}{m^2_{\rm eff}}h^{[-]}_{\mu\nu} \tag{19}$$

で与えられる。特に massive graviton の Compton 波長の外側では massive mode は減衰するため、我々の時空は massless mode のみによって表される。ここで massless mode は一般相対論と同じ運動方程式であるが、両方の物質と相互作用する。すなわち、もう一方の時空の物質は我々の時空に影響を与え、かつ、それはダークマターとして振る舞う (図 1, 図 2, 図 3 を参照)。

一方、Compton 波長の内側ではもう一方の物質は我々の時空で斥力を生み出し、実効的に重力を弱める (図 2 参照)。また、斥力の影響で構造形成において、小さなスケールのゆらぎの進化は標準モデルと異なる進化を示す (図 3 を参照)。

今後、銀河スケールのダークマターを説明するために、重力子質量は実効的な宇宙項より非常に大きいと仮定する。

一様等方時空に対しては、スケールファクタが増大するにつれ、相似解がアトラクターとして振る舞う。ここで

$$m^2_{\rm eff} \ll |\kappa^2_g\rho_g - K^2\kappa^2_f\rho_f| \sim H^2 \tag{20}$$

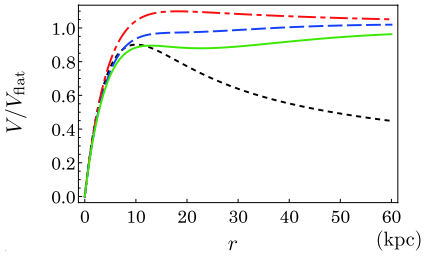
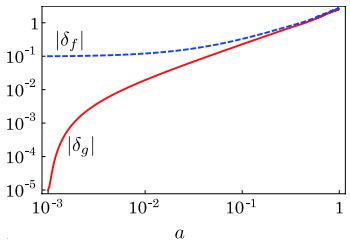


図 2: 我々の時空の回転曲線。ここで $m^{-1}_{\rm eff} = 5$ (赤線), 10 (青線) and 15 kpc (緑線) である。なお物質は $\rho_g(r) = \rho_g(0)\exp[-r/r_{\rm gal}], \rho_f(r) = \rho_f(0)(1 + (r/r_{\rm halo})^2)^{-1}$, と分布すると仮定し、$r_{\rm gal} = r_{\rm halo} = 3$ kpc, $\rho_g(0) = \rho_f(0)$ とした。黒線は、f の物質をゼロとした場合である。またこれらのモデルにおいて、線形近似は $r \gtrsim 1$ kpc で有効である。

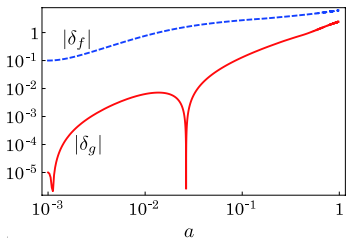
を満たす時期では、相似解からの線形近似が破綻しており、それ以降の時期では相似解からの線形摂動で解を記述できる。非線形領域では宇宙のダイナミクスは一般相対論を回復する (図 1 参照)。

背景時空を相似な Minkowski 時空とみなせると仮定し、Newton 極限を考える。それぞれの時空に 2 つの質点を考え、質量を $M_g, \mathcal{M}_f$ とすると、線形近似は

$$m^2_{\rm eff} \ll \frac{|GM_g - K^2\mathcal{G}\mathcal{M}_f|}{r^3}, \tag{21}$$



(I) $k^{-1} = 10^4\,\mathrm{kpc}$



(II) $k^{-1} = 10^2\,\mathrm{kpc}$

図 3: ダスト優勢宇宙における密度ゆらぎの進化。それぞれ、f の物質によって、g の物質の密度ゆらぎが引きずられて成長する。なお $m_{\rm eff}^{-1} = 1$ kpc とした。常にゆらぎのスケールが Compton 波長より大きい場合は、δ_g の進化は ΛCDM モデルとほぼ同様である。

を満たす領域で破綻する [2]。非線形領域では一般相対論を回復する。

最後に宇宙論的摂動論における重力のスカラーモードについて議論しておく。地平線スケールより非常に小さいスケールでは、massive graviton のスカラーモード ϕ は

$$h_{\mu\nu}^{[-]} \supset \partial_\mu\partial_\nu\phi \tag{22}$$

で現れる。背景時空の物質は非相対論的物質と仮定しすると、線形解周りでの重力のスカラーモードは

$$m_{\rm eff}^2(-\ddot{\phi} + \triangle\phi) + H^2(-\ddot{\phi} - \triangle\phi) = 0 \tag{23}$$

に従う。これより、$m_{\rm eff}^2 \gg H^2$ では通常の波動方程式が得られるが、$m_{\rm eff}^2 \ll H^2$ では、勾配不安定性が現れる [3]。したがって相似解周りの線形なスカラー重力波は質量ゼロ極限で不安定である。

[2] この条件は物質が球対称に分布をもっている場合にも、容易に一般化される。

[3] より正確な議論は次を参照：A. De Felice, A. E. Gümrükçüoğlu and S. Mukohyama. (2014)

線形解は質量ゼロ極限において一般相対論を回復しない。一方、我々は質量ゼロ極限において、Vainshtein 機構を含む非線形解を発見した。この解において、密度ゆらぎなど物理的な変数は一般相対論と同様な時間変化をする。この解周りのスカラーモードの安定性は現在解析中である。

5 Conclusion

我々は、bigravity 理論を用いていくつかの宇宙論的応用を考えた。銀河スケールのコンプトン波長をもつ重力子を考えると、ダークマターの起源を説明できることを示した。特に、結合定数を微調整すれば、bigravity 理論は同時にダークエネルギーの起源も説明できる。

さらに、いくつかの時空において、bigravity 理論は質量ゼロ極限で一般相対論を回復することを示した。これは、ビッグバン元素合成や太陽系近傍の実験と bigravity 理論が矛盾しないことを示す。

したがって、我々の解析は bigravity 理論はさまざまな観測的制限を巧妙に回避可能であり、さらにダークマター、ダークエネルギーの起源を説明可能であることを示唆する。特に重力子が重い質量を持つ場合、将来の重力波観測などで検証される可能性があり、非常に興味深いモデルとなっている (A. De Felice, T. Nakamura and T. Tanaka. (2014))。

Reference

M. Fierz and W. Pauli, Proc. Roy. Soc. Lond. A **173**, 211 (1939).

C. de Rham, G. Gabadadze and A. J. Tolley, Phys. Rev. Lett. **106**, 231101 (2011).

S. F. Hassan and R. A. Rosen, J. High Energy Phys. **02** (2012) 126.

K. Aoki and K. Maeda, Phys. Rev. D **89**, 064051 (2014).

E. Babichev and M. Crisostomi, Phys. Rev. D **88**, 084002 (2013).

A. De Felice, A. E. Gümrükçüoğlu and S. Mukohyama, J. Cosmol. Astropart. Phys. **1406** (2014) 037.

A. De Felice, T. Nakamura and T. Tanaka, Prog. Theor. Exp. Phys. **2014**, 043E01 (2014).

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

21cm Bispectrum を用いた EoR 探査

島袋隼士　(名古屋大学大学院理学研究科)

Abstract

Recombination 後、中性状態を保っていた水素は、z∼15 で初期天体や銀河からの UV 光によって、再び電離すると考えられている。この時期のことを再電離期と呼び、観測によると、z∼7 まで続くと予想されている。 再電離期を探る手段として、中性水素の微細構造由来の 21cm 線があり、その brightness temperature が観測量として期待されている。これまでは、brightness temperature の揺らぎを探る手法として、その power spectrum が一般的に用いられてきた。 しかし、21cm 線の物理にはガウス分布に従う宇宙論的な揺らぎだけではなく、天体物理由来の非ガウス性な揺らぎも関係してくるので、より高次の統計量にも着目する必要がある。そこで我々は、21cm bispectrum に注目して計算を行った。

1 Introduction

インフレーションに始まり、ビッグバン元素合成を経て高温、高密度でプラズマ状態だった宇宙は自由電子が陽子に捉えられ、中性水素が形成された (recombination, z∼ 1100)。これ以降、z∼30 までは天体の存在しない時代が続いていたが、z∼ 30 で初期天体の形成が始まり、階層的構造形成が進み、銀河、銀河団と大規模な構造が形成が進み、現在の宇宙へと至る。 この構造形成の過程の z∼ 15 で、再電離期 (Epoch of Reionization) と呼ばれる時代が始まる。これは、recombination 以後、中性状態で存在していた水素が、星や銀河からの紫外線 (UV) や X 線によって、電離が引き起こされる現象であり、z∼ 6 まで続いたと考えられている。

現在、高赤方偏移のクェーサーやガンマ線バースト（GRB)、Lyman-α forest の観測によって、EoR 終期については観測が届きつつあるが、EoR 開始時期や、その期間については未だ分かっていない。しかし、現在、計画が進行中の Square Kilometer Array (SKA) では、z∼ 27 まで観測する事が可能となり、EoR についての情報量が飛躍的に増えると期待されている。

再電離終盤を探る方法として、Lyman-α forest が使われている一方で、再電離序盤や中盤には、まだ中性水素が存在しているので、中性水素の微細構造による 21cm 線がこの時期の観測手段として期待されている。観測量としては、brightness temperature があるが、これまでは、brightness temperature の揺らぎを探る手法として、その power spectrum が一般的に用いられてきた。 しかし、brightness temperature の揺らぎには、宇宙論から来るガウス統計に従う密度揺らぎの他にも、天体物理学的効果由来の非ガウス性な揺らぎも含まれているので、power spectrum より高次の統計量にも着目する必要がある。そこで我々は、21cm bispectrum に注目して計算を行った。

2 Observable

EoR を探る効果的な方法として、中性水素の微細構造由来の 21cm 線がある。観測量としては、宇宙マイクロ波背景放射（CMB）の温度 $T_{\rm CMB}$ との差で定義される brightness temperature が式（1）で与えら

れる。ここで、brightness temperature は視線方向で計算される量である。

$$\delta T_b(\nu) = \frac{T_{\rm S} - T_{\rm CMB}}{1+z}(1 - e^{-\tau_{\nu_0}}) \\ \sim 27 x_{\rm HI}(1+\delta_{nl})\left(1 - \frac{T_\gamma}{T_s}\right)\left(\frac{H}{dv_r/dr + H}\right)\left(\frac{1+z}{10}\right)^{1/2}\left(\frac{0.15}{\Omega_m h^2}\right)^{1/2}\left(\frac{\Omega_b h^2}{0.023}\right)[\rm mK] \quad (1)$$

τ_{ν_0} は波長 21cm に相当する周波数 ν_0（=1.4GHz）での光学的厚さ、$T_{\rm S}$ は中性水素の spin temperature である。密度揺らぎ δ_{nl}、銀河間ガス（IGM）の速度勾配 dv_r/dr は宇宙論的に決まる物理量であるが、中性水素率 $x_{\rm HI}$、spin temperature $T_{\rm S}$ は天体物理学的に決まる量であり、これらの量が EoR の情報を含んでいる。$\delta T_b > 0$ のとき、CMB に対する輝線として観測され、$\delta T_b < 0$ のときは CMB に対する吸収線として観測される。spin temperature は、ガスの力学的温度 $T_{\rm K}$、Lyman-α 色温度 T_α、それぞれの結合定数 $x_{\rm K}, x_\alpha$ を用いて次のように書き表す事ができる。

$$T_{\rm S}^{-1} = \frac{T_{\rm CMB}^{-1} + x_\alpha T_\alpha^{-1} + x_{\rm K} T_{\rm K}^{-1}}{1 + x_\alpha + x_{\rm K}} \quad (2)$$

すなわち、spin temperature は中性水素ガスと以下の 3 つの相互作用によって決定される。

（1）CMB 光子との相互作用

（2）Lyman-α 光子との相互作用

（3）中性水素同士の衝突による相互作用

（2）、（3）による相互作用が、天体物理学的な効果によるものであり、spin temperature はこれらの影響を反映した物理量となっている。本研究では、Mesinger et al によって開発された semi-analytic コードの 21cmFAST を用いて brightness temperature の map を作成した。(Mesinger et al. (2011))

3 Bispectrum

Brightness temperature の Bispectrum の formalism について考える。CMB の温度揺らぎに対する bispectrum の formalism 同様 (Bartolo et al (2004))、brightness temperature に対する bispectrum は式 (3)

$$\langle \delta T_b(\mathbf{k}_1)\delta T_b(\mathbf{k}_2)\delta T_b(\mathbf{k}_3)\rangle = \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \quad (3)$$

と表す事が出来る。Bispectrum を計算する際、どのような三角形を考える必要があるが、今回は (1)equilateral type(正三角形型) と (2)squeezed type（二等辺三角形）の二つを考えた。squeezed type では、三角形の一辺を固定する。固定する辺を k_c として、$k_c = 0.06, 0.6{\rm Mpc}^{-1}$ の二通りで計算を行った。

4 Results

図 1 に equilateral type での z=10,20,30 における bispectrum を示した。また、図 2 では z=20 での equilateral type の bispectrum と squeezed type の bispectrum を比較した結果を示す。図 1 より、k$\sim 0.1{\rm Mpc}^{-1}$ に特徴的なピークが現れることが見て取れる（この特徴が何由来なのかは現在、議論中)。また、図 2 からは、large scale では equilateral type の bispectrum が dominant である一方で、small scale に行くと長波長側の情報を持つ ($k_c = 0.06{\rm Mpc}^{-1}$) squeezed type の bispectrum からの signal が大きくなる事が分かる。

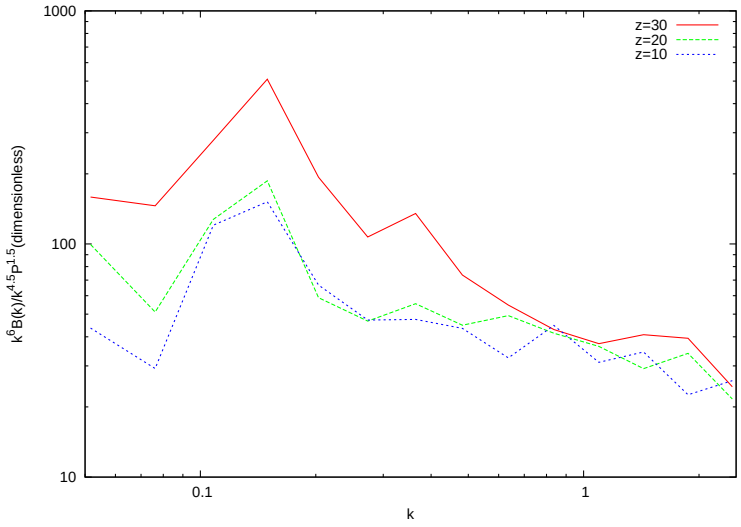


図 1: z=10,20,30 での equilateral type の bispectrum.z=30(red),z=20(green), z=10. 横軸は波数で縦軸は、bispectrum を power spectrum の 1.5 乗で規格化している。

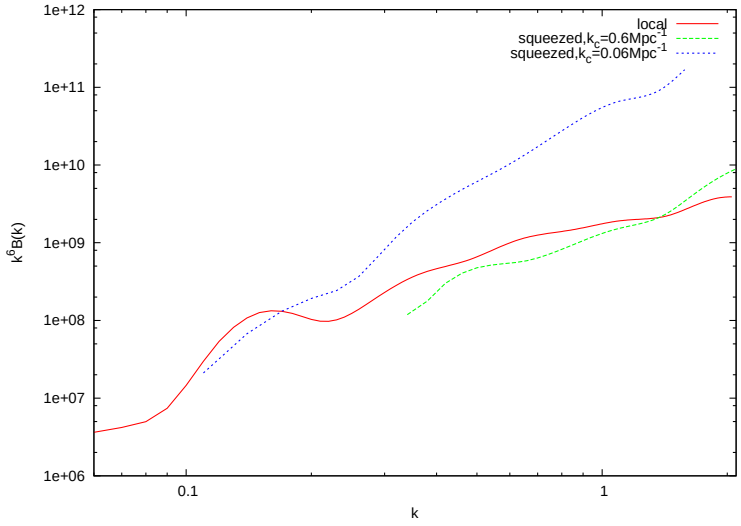


図 2: z=20 での equilateral type と squeezed type の bispectrum。equilateral(red),k_c = 0.6Mpc^{-1}(blue),k_c=0.06Mpc^{-1}(green)

Reference

Mesinger, A., Furlanetto, S., Cen., R,2011, MNRAS, 411, 955

N.Bartolo, E.Komatsu, S.Matarrese and A.Riotto, Phys.Rept. 402, 103 (2004)

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

ヒッグスインフレーションによる原始宇宙磁場生成

小幡 一平 (京都大学大学院 理学研究科 物理学第二教室 天体核研究室)

Abstract

インフラトンをヒッグス粒子とみなすインフレーションモデル「ヒッグスインフレーション」は、素粒子物理学の標準模型の範囲でインフレーションを記述できる魅力的なモデルである。今回我々はヒッグスインフレーションから予言される現象として、その下での電弱ゲージ場の宇宙論的振る舞いを調べた。その結果、インフレーション終了後にゲージ場はヒッグス場との結合を介して共鳴を起こし、振幅が増大することが確かめられた。更に、この過程で生じた磁場は宇宙初期の原始磁場として、現在観測などから示唆されている銀河間磁場の起源になる可能性があることを指摘した。

1 Introduction

インフレーションは初期宇宙を記述する有力な理論である。従来のビッグバン宇宙論が抱えていた地平線問題、平坦性問題、残存粒子問題などの観測的諸問題を解決した他、宇宙初期のスケール不変な密度ゆらぎも予言したことは周知のとおりである。更に、BICEP2 の CMB の B モード偏光の解析結果からインフレーション由来の重力波 (原始重力波) の痕跡を捉えたという報告は衝撃的で、もしも本当ならば、インフレーション理論が実証されたといっても過言ではないように思われる。

しかしながら、インフレーションを引き起こすスカラー場「インフラトン」の正体は未だに特定されていない。これまで超対称性理論やストリング理論、高次元理論などから有効的に現れるスカラー場をそれとみなし、様々なモデルが組み立てられてきた。だがこれらの理論自身の正しさは実験的な検証が難しく、それ故にこれらの理論に基づいたインフレーションのシナリオも幾分非現実的な性格を帯びてしまうことは否定できない。インフラトンを未知の粒子ではなく既知の粒子によって説明できれば、そのような心配は無用である。

その期待に答える可能性のあるモデルとして、ヒッグス粒子をインフラトンとみなす「ヒッグスインフレーション」が近年、提唱された [1]。勿論、ヒッグスをインフラトンとみなすモデルは昔から考案されているが、うまくいかないことがわかっていた。従来のものとの違いは、モデルの中にヒッグスと重力との結合項 $\xi\Phi^\dagger\Phi R$ (ξ : 不定パラメータ) が含まれていることである。この項は曲がった時空上で量子効果を計算する際に現れてくる。求められるスペクトル指数、テンソルスカラー比は $n_s \simeq 0.97$, $r \simeq 0.0033$ と、BICEP2 の結果には反するが、WMAP や PLANCK の結果には好ましい値となっている。具体的な議論については [1] を見て頂きたい。

ヒッグスインフレーションから何か興味深い現象が予言できないかを調べるべく、今回我々はその下での電弱ゲージ場のふるまいに着目した。その理由の背景として、インフレーションによる原始宇宙磁場生成の研究がある [1]。宇宙には天体由来の様々な磁場が存在するが、銀河間という大きなスケールにも 1μG 未満とわずかながら磁場が広がっていることが近年観測などから示唆されている。銀河間には天体はほとんど存在しないことから、銀河間磁場は宇宙初期に生成された原始磁場の名残である可能性がある。インフレーションによる原始磁場について、従来はマクスウェル理論の U(1) ゲージ場をインフラトンと結合させるなどして生成させていた。しかしインフレーションのエネルギースケールではゲージ場は電弱相互作用の形をとっていることが自然である。その為、電弱ゲージ場を扱うことは我々の研究の動機のひとつである。

この収録の構成としては、まずは二章で扱うモデルや場の配位について述べた後、三章でそこから導かれる方程式によるゲージ場の振る舞いについて説明

[1] 原始磁場を生成させるシナリオは他にも候補があるが、ここでは言及しない。

し、それが磁場生成につながることを四章で確認する。最後に五章で結論と今後の展望について述べる。

2 Higgs Inflation with electroweak theory

まずは作用を次のように与える：

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{M_{pl}^2}{2}R + \xi\Phi^\dagger\Phi R - \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{a\mu\nu} - (D_\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi) - \lambda\left(\Phi^\dagger\Phi - \frac{v_0^2}{2}\right)^2\right] . \quad (1)$$

(1) 式の一段目は重力項及びヒッグスとの結合項であり、パラメータ ξ の値としてインフレーションの実現可能な範囲は $1 \ll \sqrt{\xi} \lll 10^{17}$ である [1]。二段目はゲージ場の作用で、$F^a_{\mu\nu}$ を $SU(2)_L$ ゲージ、$G_{\mu\nu}$ を $U(1)_Y$ ゲージの場の強さと定義し、それぞれ $F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu$、$G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ とゲージポテンシャルを使って表される。三段目はヒッグス場の作用で、$D_\mu\Phi$ は

$$D_\mu\Phi = \left(\partial_\mu - i\frac{g}{2}\tau^a A^a_\mu - i\frac{g'}{2}B_\mu\right)\Phi \quad (2)$$

と書かれる。g、g' は各々のゲージの結合定数で、τ^i はパウリ行列ある。

宇宙の計量は次の様な閉じた一様・非等方な計量

$$ds^2 = -N^2dt^2 + a_1(t)^2((\sigma^1)^2 + (\sigma^2)^2) + a_3(t)^2(\sigma^3)^2 \quad (3)$$

を与える。N はラプス関数で $N = 1$ とする。σ^i は Maurer-Cartan 1-形式と呼ばれるもので、ここでは空間のトポロジー S^3 の正規直交基底の役割を成している。また、

$$d\sigma^i = \epsilon^{ijk}\sigma^j \wedge \sigma^k \quad (4)$$

を満たす。ここでスケール因子が非等方な理由は $U(1)_Y$ ゲージポテンシャルの成分を

$$\mathbf{B} = h(t)\sigma^3 \quad (5)$$

と方向づけていることに起因する。なお、ここではゲージ場は空間依存性のない一様なものと仮定する。

ヒッグス場は

$$\Phi = \frac{v}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x^2 + ix^1 \\ x^4 - ix^3 \end{pmatrix} \quad (6)$$

の形から、$SU(2)_L$ ゲージ変換により

$$\Phi \to H^{-1}\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} , \quad (7)$$

の形に変形できる。ここで $H = x^4 + ix^i\tau^i$ $(i = 1, 2, 3)$ は $SU(2)_L$ 群の元であり、座標成分は $(x^i)^2 + (x^4)^2 = 1$ の関係を満たす。この変換で自明な配位の $SU(2)_L$ ゲージ場は

$$-iH^{-1}dH = \sigma^j\tau^j . \quad (8)$$

の形になる。

以上の議論からヒッグス場の配位を

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v(t) \end{pmatrix} . \quad (9)$$

とし、$SU(2)_L$ ゲージポテンシャルは

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2g}[f_1(t)(\sigma^1\tau^1 + \sigma^2\tau^2) + f_3(t)\sigma^3\tau^3] \quad (10)$$

となる配位を考える。係数が異なるのは先ほどの $U(1)_Y$ ゲージ場の非等方な配位に起因する。また、スケール因子を便宜上、等方な部分 $\alpha(t)$ と非等方な部分 $\beta(t)$ に分け、

$$a_1(t) \equiv e^{\alpha(t)+\beta(t)},\ a_3(t) \equiv e^{\alpha(t)-2\beta(t)} \quad (11)$$

と書き換える。これらの条件式を作用に代入し、各々の項を変分することで系の運動方程式が得られるが、ここでは式の羅列は避け、具体的に記すことは割愛する。詳細が気になる方は [2] を参照して頂きたい。

3 Cosmologiccal dynamics of gauge fields

インフレーション中、ゲージ場は振動しながら減衰していくが、インフレーション後にゲージ場の成分についての運動方程式は次のように近似できる:

$$\ddot{f_1} + \frac{g^2}{4}v(t)^2 f_1 \simeq 0 \quad (12)$$

$$(\ddot{f_3} - g'\ddot{h}) + \frac{g^2 + g'^2}{4}v(t)^2(f_3 - g'h) \simeq 0 \quad (13)$$

この時ヒッグス場はポテンシャルの底に落ち込み激しく振動する。したがってゲージ場は式の形からパラメータ共鳴を起こし、振幅が増大する現象が見られる。その様子は図 1 を見て頂きたい。

4 Generation of magnetic fields

電磁場のゲージポテンシャル A_{em} はワインバーグ角 $\theta_W = \tan^{-1}(g'/g)$ を用いて A^3 と B の線形結合

$$A_{em} = A^3 \sin\theta_W + B\cos\theta_W = \frac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}}\left(g'\frac{f_3}{g} + gh\right)\sigma^3 \equiv h_{em}\sigma^3. \quad (14)$$

で与えられる。これより場の強さは

$$F_{em} = dA_{em} = \frac{\dot{h}_{em}}{a_3 N} e^0 \wedge e^3 + \frac{2h_{em}}{a_1^2} e^1 \wedge e^2 \ . \quad (15)$$

と計算でき、磁場成分

$$B_3 = \frac{2h_{em}}{a_1^2}. \quad (16)$$

が現れることがわかる。

観測から示唆されている銀河間磁場の範囲は

$$10^{-15}[\mathrm{G}] \lesssim B_{obs} \lesssim 10^{-9}[\mathrm{G}] \ . \quad (17)$$

である。現在の温度 $T_{obs} \sim 10^{-4}[\mathrm{eV}] = 10^{-13}[\mathrm{GeV}]$ から宇宙の再加熱の時の温度 T_{reh} を $B_{reh}/B_{obs} = (a_{obs}^2/a_{reh})^2 = (T_{reh}/T_{obs})^2$ の比例関係を用いることで見積もることができる。$1[\mathrm{G}] \simeq 10^{-20}[\mathrm{GeV}^2]$ と換算して、

$$10^{11}\left(\frac{T_{reh}}{10^{10}[\mathrm{GeV}]}\right)^2 [\mathrm{GeV}^2] \lesssim B_{reh} \lesssim 10^{17}\left(\frac{T_{reh}}{10^{10}[\mathrm{GeV}]}\right)^2 [\mathrm{GeV}^2] \ . \quad (18)$$

が得られる。再加熱温度の値によっては図 2、図 3 を見るとわかるように、観測から要求される条件を満たす量が生成されることがわかる。

5 Conclusion

今回、我々はヒッグスインフレーションにおける電弱ゲージ場のダイナミクスを解析した。インフレーション終了後、ゲージ場はヒッグス場との結合を介して共鳴を起こすことで振幅が増大し、結果として原始磁場が生成されることがわかった。その量も観測からの制限を条件次第では満たされることを確認した。しかしながら磁場は激しく振動していることからもわかるように、これを直接観測され得る磁場と結びつけることはできない。詳細な磁場の性質を調べるためには、具体的な再加熱の過程や、非一様性の進化も追う必要がある。これらについては今後の課題とする。

6 Reference

[1]F. L. Bezrukov and M. Shaposhnikov, Phys. Lett. B **659**, 703 (2008) [arXiv:0710.3755 [hep-th]].

[2]I. Obata, T. Miura and J. Soda, arXiv:1405.3091 [hep-th] accepted for publication in Phys. Rev. D.

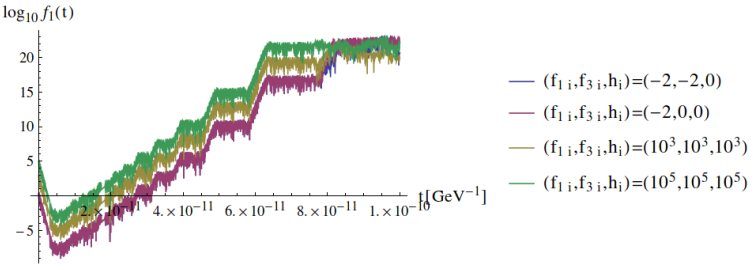


図 1: インフレーション後の $f_1(t)$ の時間発展の様子。ゲージ場の初期値をいくつかのパターンで選んでいる。インフレーション後に振幅が増大していることがわかり、$f_3(t)$、$h(t)$ についても同様の振る舞いが確かめられる [2]。また、スケール因子の初期値は $\alpha_i = -20, \beta_i = 0$ としている。

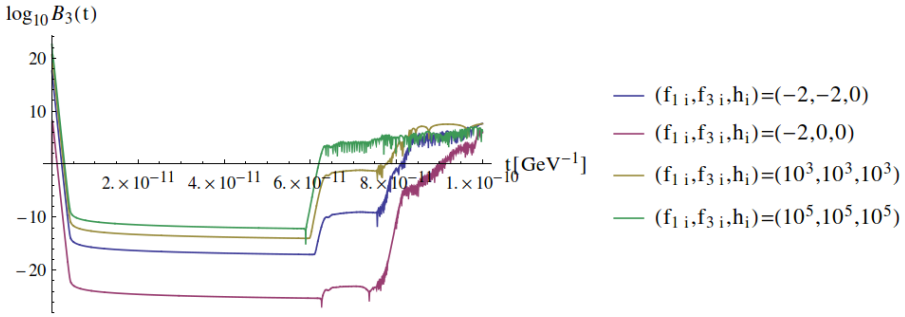


図 2: インフレーション後の $B_3(t)$ の時間発展の様子。ゲージ場の初期値をいくつかのパターンで選んでいる。ゲージ場の初期値に依らず、最終的な値は同じオーダーに近づいていることがわかる。初期値として磁場がゼロの場合 $((f_{1i}, f_{3i}, h_i) = (-2, 0, 0))$ でも生成される。また、スケール因子の初期値は $\alpha_i = -20, \beta_i = 0$ としている。

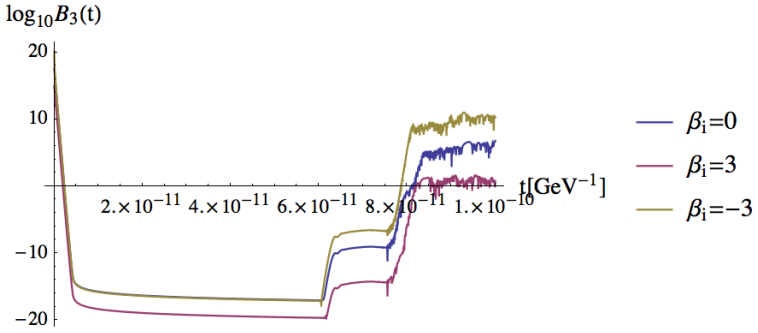


図 3: インフレーション後の $B_3(t)$ の時間発展の様子。ゲージ場の初期値とスケール因子の等方な成分は $f_{1i} = -2, f_{3i} = -2, h_i = 0, \alpha_i = -20$ とし、β の初期値をいくつかの場合で試している。グラフから、宇宙の非等方性が最終的な磁場の量に大きく関わっていることがわかる。これは β がインフレーション中も減衰せず、インフレーション後も残っていることが原因である [2]。

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

宇宙論的位相欠陥による初期磁場生成

堀口 晃一郎 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙初期には大統一理論により GUT スケール ($\sim 10^{-4} - 10^{-3} m_{\rm pl}$) に様々なスカラー場の存在が示唆されている。しかし LHC などの加速器実験ではこれらの兆候は見られていない。これらのスカラー場は加速器実験でなく宇宙論的なスケールに影響を及ぼす。それが、このようなスカラー場が存在するときに、その数に応じてあらわれる宇宙論的位相欠陥である。スカラー場が一つのときはドメインウォール、二つのときは宇宙ひも、四つ以上のときはテクスチャーという位相欠陥が現れる。本研究ではこれらの位相欠陥の中でもテクスチャーに着目する。

テクスチャーは宇宙初期のバリオンと光子に相対速度を与えることで初期宇宙に種磁場を生成する。本研究では数値シミュレーションを用いてテクスチャーが宇宙初期に生成する種磁場を計算した。

1 Introduction

宇宙は現在までに四つの力の分離などの様々な相転移を経験してきたと考えられている。加えて、大統一理論から初期宇宙には様々なスカラー場が存在していたことが示唆されている。これらのスカラー場の大半は相転移を起こしたと考えられている。相転移を起こしたスカラー場にはその数に応じて対称性を回復する領域が現れる。これが宇宙論的位相欠陥である。本研究ではスカラー場が四つ以上存在するときに現れる位相欠陥であるテクスチャーによる初期磁場生成を考察する。

初期磁場は銀河間などの大規模なスケールに存在する種磁場を説明する有力なモデルである。宇宙初期では光子と電子はトムソン散乱により強く結びついており一つの流体として運動している。この電子にクーロン力によって引きずられる形でバリオンも結合して運動している。この状態の光子とバリオンの間に速度差ができると、擬似的に電流が流れ、磁場が生成される。テクスチャーが存在する場合、その渦度によって宇宙初期のバリオンと光子の間に相対速度を与えることで宇宙初期に磁場を生成する。

2 Formalism

テクスチャーの性質を持つスカラー場を表すモデルとして以下のラグラジアンがある。Non-Linear SIgma Model (NLSM) を用いる。NLSM に従うスカラー場は以下の方程式に従う (Fenu et al (2009))。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\nabla_\mu \Phi^\dagger \nabla^\mu \Phi - \frac{\lambda}{4}(\Phi^\dagger \Phi - v^2)^2. \qquad (1)$$

ここで ϕ_a はスカラー場、v はスカラー場の真空期待値 λ は自己相互作用定数、$\Phi^\dagger = (\phi_1, \phi_2, ..., \phi_N)$、$N$ はスカラー場の数である。このスカラー場にテクスチャーの拘束条件 $\Phi^\dagger \Phi = v^2$ を与えて運動方程式を逐次展開すると Non-Linear SIgma Model (NLSM) というモデルを用いて表される。NLSM に従うスカラー場は

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \beta_a + (\nabla_\mu \beta_i) \cdot (\nabla^\mu \beta_i)\, \beta_a = 0 \qquad (2)$$

という運動方程式に即して表される。ここで $\beta_a = \phi_a / v$ で規格化されたスカラー場である。またスカラー場のエネルギー運動量テンソルは以下のように書かれる。

$$T_{\mu\nu} = v^2 \left[\partial_\mu \beta_a \partial_\nu \beta_a - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\lambda \beta_a \partial^\lambda \beta_a \right] \qquad (3)$$

アインシュタイン方程式を摂動展開したベクトルモードにこのエネルギー運動量テンソルを用いて、渦度 σ は以下の方程式に従う。

$$\dot{\sigma} + 2\mathcal{H}\sigma = 8\pi G a^2 \Pi / k, \qquad (4)$$

ここで Π は (3) 式をフーリエ変換しベクトルモードに射影したものである。
宇宙初期においてはボルツマン方程式を強結合近似 $(k/\dot{\tau} \ll 1)$ のもとで解くことで光子とバリオンの相対速度は以下のように書ける。ここで n_e を電子個数密度、σ_T をトムソン散乱断面積、a をスケールファクタとして、$\dot{\tau} = an_e\sigma_T$ は opacity、$\mathcal{H} = Ha$ は conformal Hubble、 $R = 4\rho_\gamma/3\rho_b$ である。

$$
\begin{aligned}
v_\gamma^{(3)} - v_b^{(3)} &= \left(\frac{k}{\dot{\tau}}\right)\frac{\mathcal{H}}{(1+R)k}v_\gamma \\
&- \frac{4}{15}\left(\frac{k}{\dot{\tau}}\right)^2\frac{1}{1+R}(v_\gamma+\sigma) \\
&- \left(\frac{k}{\dot{\tau}}\right)^2\frac{\mathcal{H}v_\gamma}{(1+R)^2k^2}\left(\frac{\mathcal{H}R}{1+R}+\frac{\dot{\mathcal{H}}}{\mathcal{H}}\right. \\
&+ \left.\mathcal{H}+\frac{\dot{v}_\gamma}{v_\gamma}-\frac{\ddot{\tau}}{\dot{\tau}}\right) \\
&+ \frac{4}{15}\left(\frac{k}{\dot{\tau}}\right)^3\frac{\mathcal{H}}{(1+R)^2k}\sigma \\
&- \frac{2}{45k}\left(\frac{k}{\dot{\tau}}\right)^3\frac{1}{(1+R)^2}\left[(23+11R)\frac{\ddot{\tau}}{\dot{\tau}}\sigma\right. \\
&- \left.(17+11R)\dot{\sigma}-\frac{6\sigma\mathcal{H}R}{1+R}\right]. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

ここではテクスチャーによる磁場生成を考えるため、渦度以外の初期揺らぎはないものとする。このとき、すべての揺らぎはボルツマン方程式を通して渦度から生成され、光子とバリオンの間に上記のような相対速度が生まれる。この相対速度によって生成される磁場は以下のように書くことができる (K.Ichiki (2012))。

$$
\frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}(a^2B^i) = \frac{4\sigma_T\rho_\gamma a}{3e}\epsilon^{ijk}\partial_k(v_{\gamma j}-v_{bj}), \qquad (6)
$$

ここで e は素電荷、B は磁束密度、ϵ^{ijk} は完全反対称テンソルである。これをフーリエ変換して解を求める以下のように書ける。

$$
\left\langle B^i(\vec{k},\eta)B_i^*(\vec{k}',\eta)\right\rangle = (2\pi)^3S_B(k,\eta)\delta(\vec{k}-\vec{k}'). \quad (7)
$$

$$
\begin{aligned}
a^4(\eta)\frac{k^3}{2\pi^2}S_B(k,\eta) &= \frac{k^3}{2\pi^2}\left(\frac{4\sigma_T}{3e}\right)^2\frac{\mathcal{P}_{\rm ini}^N}{\pi^2}k^2\int dq\ q^2 \\
&\int_{-1}^{1}d\mu\ \left[\int_0^\eta \mathrm{d}\eta'\ a^2(\eta')\rho_\gamma(\eta')\delta v(k,q,\mu,\eta')\right]^2 \qquad (8)
\end{aligned}
$$

このとき q はスカラー場の波数、μ はスカラー場の波数と揺らぎの波数のなす角 $\mu = \vec{q}\cdot\vec{k}/qk$、$\eta$ は conformal time、$\mathcal{P}_{\rm ini} = (6\pi^2)^2/N$ は NLSM の初期スペクトル、δv は (5) 式である。

3 Results

2 章で行った定式化をもとにテクスチャーによって生成される磁場を数値シミュレーションを用いて計算した。図 1 に数値シミュレーションを用いて求めた磁場のスペクトルを示す。$z \simeq 2000$ での共動なホライズンは $k \sim 10^{-2}\mathrm{Mpc}^{-1}$ であることを考慮すると sub-horizon では $\propto k$、super-horizon では $\propto k^7$ の波数依存性を示すスペクトルであることが分かる。

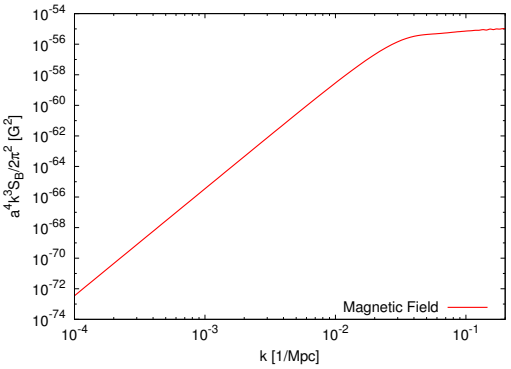


図 1: $(v^4/m_{\rm pl}^4N) = 10^{-12}$ としたときの $z \simeq 2000$ でのテクスチャーによって生成される磁場のスペクトル。縦軸はスペクトル $a^4k^3S_B/2\pi^2$、横軸は共動の波数 $k[\mathrm{Mpc}^{-1}]$。

4 Discussion

NLSM に従うスカラー場の解を Fenu et al (2009) より代入して計算することで磁場のスペクトルの波数依存性が説明出来る。Fenu et al (2009) の解を代入すると、super-horizon、sub-horizon ともにスカラー場の波数が $q \sim 1/\eta$ のホライズンスケールで磁場のソースとなる渦度が生成されているとき、3 章にあるように sub-horizon で $\propto k$、super-horizon で $\propto k^7$ という波数依存性が満たされる。これにより、テクス

チャーによって生成される磁場は常にその時々でのホライズンスケールで生成されていることが分かる。

5 Summary & Conclusion

2 章で述べたように、テクスチャーから生成される揺らぎはすべて、スカラー場のエネルギー運動量テンソルに起因する渦度によって生成される。これがボルツマン方程式を通して伝搬し宇宙初期の光子とバリオンに相対速度を与えることで初期宇宙に磁場が生成される。またこれによって生成される磁場のスペクトルは super-horizon で k^7、sub-horizon で k^1 である。この結果と NLSM に従うスカラー場の解を照らし合わせて考えることで、テクスチャーは主にそのホライズンスケールで磁場を生成していることが分かる。

Reference

E.Fenu et al JCAP 10(2009)005

K.Ichiki et al Phys.Rev D 85, 043009 (2012)

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

Instability of black holes immersed in magnetic fields

野田　宗佑 (名古屋大学 理学研究科 M2)

Abstract

外部磁場中で、ブラックホールのスカラー摂動に対する安定・不安定性について議論する。
1957 年の Regge-Wheeler 方程式の発見以来、ブラックホールの摂動に対する安定・不安定性は議論されてきたが、ブラックホールの周辺環境を考慮した議論はあまりされてこなかった。Jet の発生機構の解明をブラックホールの物理学に求める場合、その候補の１つとして回転しているブラックホールからのエネルギー引き抜き機構があり、この場合には磁場中でのブラックホールからのエネルギー引き抜き機構を考える必要がある。また、エネルギー引き抜きに関する現象として Super radiant instability やブラックホールボムと呼ばれるものがあり、これは箱で囲ったブラックホールの摂動を考えた場合にエネルギー引き抜き機構が関わると系が不安定になるというものである。磁場がスカラー場を閉じ込める働きをするならば、磁場中でのエネルギー引き抜き機構を考えるとブラックホール-周辺系は不安定になるはずであるが、外部磁場がある場合にはエネルギー引き抜きの条件は求められる一方で解くべき方程式が変数分離不可能な形となり、これまでに確立している方法では安定・不安定性の計算までを行うことはできない。
そこで、ここでは変数分離ができない系の安定・不安定の計算方法について提案する。

1　Motivation

宇宙には活動銀河核（AGN）と呼ばれる天体が存在する。これは系外銀河の中心に見つかっている天体で、非常に大きなエネルギーを放出しているが、その発生機構はいまだ解明されていない。しかし、AGN の中心にはブラックホールが存在することが間接的には（直接的な証拠はまだ無い。）分かっており、ブラックホールに物質が降着するときの重力エネルギーや、回転しているブラックホールの性質の１つであるエネルギー引き抜き機構が AGN から放出されるエネルギーの源になっているとも言われている。また、このようなブラックホールの周りには周辺環境が作り出す磁場があると考えられるため、磁場がある環境下でエネルギー引き抜き機構を考える必要がある。

2　ブラックホールの安定・不安定性

ここではブラックホール時空上の場の振る舞いについて考えるが、その場の安定性はブラックホールそのものの安定性を議論するのとほぼ同値である。ほぼと言っているのは、ここでは場のエネルギー運動量テンソルが計量に与える影響を無視しているからである。
しかし、このような近似のもとでもブラックホールに摂動を与えているというのは重力摂動を考えるとよくわかる。これは

$$g_{\mu\nu} = g^{BG}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{1}$$

のように摂動を加えるものであり、見方によっては Back Ground の計量は変えずに、その上に重力波がいる状況を考えていると見ることもできる。
今回ここで議論するのは、この重力波の代わりにスカラー場を考えた場合である。

3　Super radiance

以下では、Kerr ブラックホール上でのスカラー場の振る舞いについて考える。
まず Kerr 計量は

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right)dt^2 - \frac{2aMr\sin^2\theta}{\Sigma}2dtd\phi + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2Mr\sin^2\theta}{\Sigma}\right)\sin^2\theta d\phi^2 \tag{2}$$

のように Boyer-Lindquist 座標で書き、この時空の上で Klein-Gordon 方程式を考える。

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \Phi = 0 \tag{3}$$

Ansatz として $\Phi = \frac{R_{lm}(r)}{\sqrt{r^2+a^2}} S_{lm}(\theta) e^{-i\omega t} e^{im\phi}$ と置き上式に代入すると、 r についての式は

$$\frac{d^2R}{dr_*^2} + (\omega^2 - V(r))R = 0 \tag{4}$$

となる。
ここで、$V(r)$ は

$$V \equiv \frac{4Mram\omega - a^2m^2 + \Delta(a^2\omega^2 + \Lambda_{lm})}{(r^2+a^2)^2} + \frac{\Delta(3r^2 - 4Mr + a^2)}{(r^2+a^2)^3} - \frac{3\Delta^2 r^2}{(r^2+a^2)^4} \tag{5}$$

である。
この方程式の無限遠、Horizon 近傍での解はそれぞれ

$$R = C_{in} e^{-i\omega r_*} + C_{out} e^{i\omega r_*} \tag{6}$$

$$R = e^{-i(\omega - m\Omega_H) r_*} \tag{7}$$

と求まり、それぞれの点での Wronskian の保存を用いると

$$\left|\frac{C_{out}}{C_{in}}\right|^2 = 1 - \left(\frac{\omega - \Omega_H m}{\omega}\right) \left|\frac{1}{C_{in}}\right|^2 \tag{8}$$

が成りたつ。（ここで Ω_H はブラックホール Horizon 上の角速度である）
これを見ると

$$\omega \leq m\Omega_H \tag{9}$$

という条件を満たす波に対しては反射率が 1 を超え、ブラックホールによる反射で波の増幅が起こることがわかる。
これが Super radiance と呼ばれる、エネルギー引き抜き現象である。（ブラックホールの回転エネルギーを波が引き抜く）

4 Magnetic Super radiance

それでは、この Super radiance を磁場の影響下で考えるとどうなるであろうか。
ここでは Wald 解と呼ばれる無限遠で一様になるような磁場を用いる。

4.1 Wald 解

定常、軸対称な時空の上での Maxwell 方程式の解を求めるが、これは Killing vector lemma, Maxwell 方程式, Kommer integral を用いて、さらに無限遠（ブラックホールから十分離れた場所）では磁場は一様になるようなものを考えるという条件から求まるもので、ベクトルポテンシャルが Killing vector で表される電磁場である。
このベクトルポテンシャルは

$$A^\mu = \frac{B}{2}(\psi^\mu + 2a\eta^\mu) \tag{10}$$

となるが、Gauge 変換をして無限遠で $A_0 = 0$ になるものを用いる。

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu(eBt) \tag{11}$$

η^μ、ψ^μ はそれぞれ定常、軸対称に関する Killing vector である。

4.2 磁場がある場合の Super radiance の条件

磁場中でのスカラー場の振る舞いについて考える。磁場との相互作用を見るためにここでは複素スカラー場を考え、その電荷を e、質量を μ とする。
この時 Klein-Goldon 方程式は

$$(\nabla_\mu - ieA'_\mu)(\nabla^\mu - ieA'^\mu)\Phi - \mu^2\Phi = 0 \tag{12}$$

である。
この場合にも Horizon の近傍のみを考えると（磁場が一様になってしまうほどの遠方では磁場は無いという近似）磁場が無い場合と同じように変数分離が可能であり、 r についての方程式は次のようになる。

$$\Delta \frac{d}{dr}\left(\Delta \frac{d}{dr} R(r)\right) + [W^2 - \Delta(\mu_{eff}^2 r^2 + \lambda)]R(r) = 0 \tag{13}$$

ここで、W　μ_{eff} はそれぞれ

$$W \equiv \omega(r^2+a^2) - am + 2aMeBr \tag{14}$$

$$\mu_{eff}^2 \equiv \mu^2 - eBm \tag{15}$$

である。
この場合にも磁場が無い場合と同じ手順で Wronskian の保存を用いると、反射率と透過率の関係式が得られる。

$$\left|\frac{C_{out}}{C_{in}}\right|^2 = 1 - \left(\frac{\omega - m\Omega_H + eBa}{\sqrt{\omega^2 - \mu_{eff}^2}}\right)\left|\frac{1}{C_{in}}\right|^2 \quad (16)$$

よって、この場合には

$$\omega \leq m\Omega_H - eBa \quad (17)$$

が反射率が 1 を超える、つまり Super radiance が起こる条件である。

5 変数分離できない場合の計算

系が安定か不安定かを測る為には、Super radiance の条件を求めるだけでは不十分であり、ω 自体を求める必要がある。しかし、その計算は変数分離ができる場合のみに使えるものであった。ここでは、変数分離が不可能な場合についての計算方法の 1 つを見る。

5.1 変数分離ができる場合

この場合には、 r についての方程式

$$\frac{d^2R}{dr_*^2} + (\omega^2 - V(r))R = 0 \quad (18)$$

を特定の境界条件（問題による）のもとで解く方法は数多く知られており、WKB 近似を用いる方法や Shooting 法などの数値計算で解いていく方法が知られている。ここで解くといっているのは、場の ω を求めるということである。（一般には複素数になる）
例えば、Schwarzschild 時空上で磁場の無い場合に massless スカラー場の ω を Horizon 上で ingoing、遠方で outgoing という境界条件のもと WKB 近似を用いて計算すると

$$\omega = \frac{L}{3\sqrt{3}M} - i\frac{1}{3\sqrt{3}M}\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (19)$$

となる。場の時間依存性が $e^{-i\omega t} = e^{-i\omega_R t}e^{\omega_I t}$ であることを思い出すと、この例では ω の虚部が負であるため系は摂動に対して安定である。

5.2 変数分離ができない場合

ここまで考えた場合は磁場は Wald 解で、かつ Horizon からずっと離れた場所での磁場は無視するという近似を用いていたために特別に変数分離ができた。しかし一般には Kerr 時空上で電磁場とスカラー場が couple する系は変数分離不可能である。
この場合に ω を求める方法について考える。
ここでは、簡単のため A_t,A_ϕ 成分のみを持ち、それらが r,θ の関数になっているような電磁場を考える。

$$A_\mu = A_t(r,\theta)\delta_{t\mu} + A_\phi(r,\theta)\delta_{\phi\mu} \quad (20)$$

この場合に Klein-Gordon 方程式

$$(\nabla_\mu - ieA_\mu)(\nabla^\mu - ieA^\mu)\Phi - \mu^2\Phi = 0 \quad (21)$$

に $\Phi = R_{lm}(r)S_{lm}(\theta)e^{-i\omega t}e^{im\phi}$ を代入する。
ここで S_{lm} は Spheroidal harmonics で、ブラックホールの回転パラメータ a を 0 にすると Legendre 陪関数になるようなものであり、直交関係や規格化条件は Legendre 陪関数と同じである。
S_{lm} の直交関係を用いると、R_{lm} についての方程式は

$$\frac{d}{dr}\left(\Delta\frac{dR_{lm}}{dr}\right) + G(r)R_{lm} + \sum_{l'} A_{ll'm}R_{l'm} = 0 \quad (22)$$

と書ける。ここで、$A_{ll'm}$ は Clebsch Gordan 係数を含むような定数で、この項の存在が系が変数分離不可能であることを意味している。（異なる l を持つ mode が混ざり合う項）
Clebsch Gordan 係数の性質からこの項の $\sum$ は限られた数の和になる。
こうなると lm を指定すれば有限の大きさのベクトル、行列に対する微分方程式（連立微分方程式）になり、あとは変数分離可能な場合と同じように数値計算などで ω を計算する。

6 まとめ

方程式が変数分離できない場合のスカラー場の ω の計算方法についてその方法の概略を説明した。変数分離できる場合には 1 本の微分方程式を適当な境界条件のもとで解くことで ω を求めることができるが、変数分離不可能な場合には方程式に異なる角運

動量が混ざる項（Clebsch Gordan 係数を含む項）が現れ、適当な境界のもとで連立微分方程式を扱う必要があることが分かった。

Reference

[1]R.Wald, ”Black hole in a uniform magnetic field”, Physical Review D(1974), vol. 10, Issue 6, pp. 1680-1685

[2]Richard Brito, Vitor Cardoso, Paolo Pani, ”Superradiant instability of black holes immersed in a magnetic field” Phys.Rev.D89:104045,(2014)

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

Domain wall cosmology

樋口　将文 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

任意の warp factor に対し、その warp factor を Einstein 方程式やスカラー場の方程式の解とするような模型を、スカラー場を重力と結合させることによって構成することが出来る。これは再構築 (reconstruction) と呼ばれる方法で、この方法により 4 次元時空が高次元中の domain wall として実現される厳密解をもつ模型を構成することができる。一般に reconstruction による domain wall 解には ghost が現れる。コンパクト化や warp factor をうまく選ぶことにより、ghost が現れない模型を構成することが出来る。スカラー場を 2 つ入れた模型では reconstruction により一般の Friedmann-Robertson-Walker(FRW) 宇宙が domain wall 上で再現される模型を構成することができる。一般に domain wall 宇宙模型では 4 次元重力子も domain wall 上に局所化できるとは限らないため調べる必要がある。本講演では [1] に基いて一般の FRW 宇宙 domain wall 模型の構成法とその Brans-Dicke 型模型および 4 次元重力子の局所化について説明する。Brans-Dicke 型模型では一般の FRW 宇宙が domain wall に埋め込まれた、ghost-free な模型を構成することができる。次元重力子と 4 次元の一般の FRW 宇宙における重力子のふるまいとを比較すると warp factor の時間依存性として違いが現れた。これは warp factor の時間変化が十分遅い場合は無視できる。このとき warp factor が domain wall から離れると十分速く $-\infty$ に近づけば 4 次元重力子は domain wall 上に局所化されているとみなすことができる。

1　Introduction

これまで多くの brane 宇宙模型が提唱されてきた [2, 3, 4]。しかし、その起源や brane が構成されるメカニズムについては明らかにされていない。2 つの scalar 場を導入して再構築を行うことにより 5 次元に埋め込まれた domain wall 宇宙を構成することができる [5]。brane は domain wall の厚さが 0 の極限として得られる。domain wall 宇宙では標準模型が予言する粒子は domain wall 上に局所化されるが、重力は時空の歪みそのものであるため 4 次元重力子が domain wall に局所化するかどうか調べる必要がある。また、再構築の一つの問題点として一般に ghost が現れる。ghost は運動項が逆符号で現れるためエネルギーが際限なく小さくなり、物理的に問題である。これに関し、Sec.2 では再構築により一般の FRW 宇宙が埋め込まれた domain wall 模型を構成し、ghost が現れない特別な scale factor と warp factor の例を示す。Sec.3 ではこの特別な時間発展をする模型を共形変換をすることで任意の時間発展を記述できる Brans-Dicke 型の宇宙模型を構成する方法を説明する。さらに Sec.4 で 4 次元重力子の局所化について説明する。

2　Reconstruction

5 次元時空に一般の FRW 宇宙が任意の warp factor $u(w,t)$ で埋め込まれた計量は

$$ds^2 = dw^2 + e^{u(w,t)} ds^2_{\mathrm{FRW}} \tag{1}$$

$$ds^2_{\mathrm{FRW}} = -dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right) \tag{2}$$

で与えられる。2 つの scalar 場を用いた作用

$$S_{\varphi\chi} = \int d^5x \sqrt{-g} \Big[\frac{R}{2\kappa^2} - \frac{1}{2} A(\varphi,\chi) \partial_A \varphi \partial^A - B(\varphi,\chi) \partial_A \varphi \partial^A \chi - \frac{1}{2} C(\varphi,\chi) \partial_A \chi \partial^A \chi - V(\varphi,\chi) \Big] \tag{3}$$

が提唱された。この作用において $\varphi = t, \chi = w$ と仮定し、(1) が解となるように係数 A, B, C, V を決定

する。

$$A = -\ddot{u} + \frac{1}{2}\dot{u}^2 - 2\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{a}\dot{u}}{a} + 2\frac{k}{a^2} \tag{4}$$

$$B = -\frac{3}{2}\dot{u}' \tag{5}$$

$$C = -\frac{3}{2}u'' - \frac{1}{2}e^{-u}\left(\ddot{u} + \dot{u}^2 + 2\frac{\ddot{a}}{a} + 5\frac{\dot{a}\dot{u}}{a} + 4\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 4\frac{k}{a^2}\right) \tag{6}$$

$$V = -\frac{3}{4}\left[u'' + 2u'^2 - e^{-u}\left(\ddot{u} + \dot{u}^2 + 2\frac{\ddot{a}}{a} + 5\frac{\dot{a}\dot{u}}{a} + 4\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 4\frac{k}{a^2}\right)\right] \tag{7}$$

このとき $|w| \to \infty$ で $u(w,t)$ が十分速く $-\infty$ になればエネルギー密度が $w = 0$ に局所化され、domain wall を構成できる。ここで一般に行列 $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ の固有値の少なくとも一つが負になるので ghost が現れることが分かる。[5] では $k = 0$ の場合に ghost が現れない例がいくつか示された。ここでは例として

$$a(t) = a_0 t^{h_0} \tag{8}$$

$$e^{u(w,t)} = T(t)W(w) \tag{9}$$

$$T(t) = T_1 t^{1-3h_0} + T_2 t^{-2h_0} \tag{10}$$

$$W(w) = e^{-\sqrt{1+\frac{w^2}{w_0^2}}} \tag{11}$$

を考える。ここで a_0, h_0, T_1, T_2, w_0 は定数である。このとき係数 A, B, C とポテンシャル V は

$$A = \frac{1}{\kappa^2}\frac{3}{2}\left(\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} + \frac{2h_0}{t}\right)^2 \tag{12}$$

$$B = 0 \tag{13}$$

$$C = \frac{1}{\kappa^2}\frac{3}{2}w_0^{-2}\left(1 + \frac{w^2}{w_0 2}\right)^{-3/2} \tag{14}$$

$$V = -\frac{1}{\kappa^2}\frac{3}{4w_0^2}\left[2 - \frac{2}{1+\frac{\chi^2}{w_0^2}} - \left(1 + \frac{\chi^2}{w_0^2}\right)^{-3/2}\right] \tag{15}$$

となる。行列 $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ の固有値はともに正なので ghost が現れないことが分かる。

3 Brans-Dicke type model

既に述べたように作用 (3) の模型は一般に ghost が現れる。前節の具体的な ghost が現れない模型を共形変換して任意の時間発展を記述する Brans-Dicke 型の模型を構成する。そこで共形時間

$$d\tau = \frac{dt}{a(t)} \tag{16}$$

を用いる。計量 (2) は

$$ds^2_{\mathrm{FRW}} = a(t(\tau))^2\left[-d\tau^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2\right] \tag{17}$$

となる。ここでは簡単のために $k = 0$ とした。ここで scale factor および warp factor を (8-11) に選んで共形時間で書いたものを $\tilde{a}(\tau)$ と書く。このとき τ と t の関係は

$$\tau = \frac{t^{1-h_0}}{(1-h_0)a_0} \tag{18}$$

となる。ここで新たな scalar 場を

$$\tilde{\varphi}(t) = \frac{\varphi^{1-h_0}}{(1-h_0)a_0} \tag{19}$$

と定義すると $\tilde{\varphi} = \tau$ と書ける。計量 g_{AB} に対して共形変換

$$g_{AB} \to e^{-2\Theta(\varphi)} g_{AB} \tag{20}$$

を行う。Θ を任意の scale factor$A(\tau)$ を用いて

$$e^{2\Theta(t)} = \frac{A(\tau)^2}{\tilde{a}(t(\tau))^2} \tag{21}$$

とすると新たな計量は任意の時間発展を記述することができる。このとき作用は

$$S_{\varphi\chi} = \int d^5x\sqrt{-g}\left\{\frac{e^{-3\Theta(\varphi)}R}{2\kappa^2} - \frac{1}{2}e^{-3\theta(\varphi)}\left(A(\varphi,\chi) - \frac{12}{\kappa^2}\Theta'(\varphi)\right)\partial_A\varphi\partial^A\varphi - e^{-3\Theta(\varphi)}B(\varphi,\chi)\partial_A\varphi\partial^A\chi - \frac{1}{2}e^{-3\Theta(\varphi)}C(\varphi,\chi)\partial_A\chi\partial^A\chi - e^{-5\Theta(\varphi)}V(\varphi,\chi)\right\} \tag{22}$$

となり、これは Jordan frame の作用とみなせる。

4 Localization of 4 dimensional graviton

まず最初に作用

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{R}{2\kappa^2} - \frac{\omega(t)}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \mathcal{V}(\varphi)\right) \tag{23}$$

を考える。$\varphi = \varphi(t)$ とすると (3) はこれを 5 次元に拡張したものだと考えられる。また、通常の FRW 模型と比較して scalar 場符号が時間依存することが許されており、non-canonical な scalar 場になり得るという意味で拡張された FRW 宇宙模型と考えることができる [6]。計量を FRW 計量に仮定して再構築により係数 $\omega(t)$ とポテンシャル $\mathcal{V}(\varphi)$ を決めると

$$\omega = 2\left(-\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) \tag{24}$$

$$\mathcal{V} = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2} \tag{25}$$

となり一般に $\omega < 0$ となり得るので、やはりこの場合も ghost が現れる。摂動

$$g_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{26}$$

を考え、gauge 条件

$$h_{0\mu} = \nabla^i h_{ij} = h^i{}_i = 0 \tag{27}$$

を課すと重力子 h_{ij} が従う運動方程式は

$$\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a}\partial_t - \partial_t^2 + \frac{\triangle}{a^2}\right)h_{ij} = 0 \tag{28}$$

となる。

次に (3) の模型に対して 4 次元重力子の局所化について調べる。そこで摂動

$$g_{AB} \to g_{AB} + h_{AB} \tag{29}$$

を考える。さらに

$$h_{Aw} = 0 \tag{30}$$

を仮定し、gauge 条件

$$h_{0\mu} = \nabla^i h_{ij} = h^i{}_i = 0 \tag{31}$$

を課す。このとき $h_{ij}(w,x) = e^{w,t}\hat{h}_{ij}(x)$ を仮定することにより 4 次元重力子 $\hat{h}_{ij}(x)$ が従う運動方程式は

$$\left(2\frac{\dot{a}\dot{a}}{a} - \dot{u}\partial_t + 2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a}\partial_t - \partial_t^2 + \frac{\triangle}{a^2}\right)\hat{h}_{ij} = 0 \tag{32}$$

となる。$|w|$ が大きくなるとき十分速く u が $-\infty$ になれば 4 次元重力子は局所化される。このとき $\dot{u}\left(2\frac{\dot{a}}{a} - \partial_t\right)\hat{h}_{ij} = 0$ であれば 4 次元の場合の結果 (28) と一致する。したがって $u(w,t)$ の時間変化が十分に小さければ $\hat{h}_{ij}$ は (23) の模型の重力子と同じふるまいをする。もし $\dot{u}$ が無視できなければいくらかの補正が現れる可能性がある。

5 Conclusion

2 つの scalar 場を用いた再構築により Brans-Dicke 型 4 次元 domain wall 宇宙模型を構成した。再構築は scale factor と warp factor の両方を任意にとれるような計量を厳密解としてもつ作用を構成することができるが、一般に ghost が現れるという問題があった。ここで構成した方法では ghost が現れないような特別な scale factor と warp factor を選び、それを共形変換することで任意の時間発展を記述する計量に frame を変更した。また、この模型では Randall-Sundrum 模型 [4] と同様に 4 次元重力子が domain wall に局所化される。domain wall 上の 4 次元重力子の方程式は同様の 4 次元模型 [6] と比較して、warp factor の時間微分に比例した余分な因子が現れた。この違いが無視できない場合は摂動として寄与し、CMB の観測などにより発見される可能性が期待できる。

domain wall の厚さが 0 の極限として brane が得られる。brane 模型では brane の運動を考える場合などに境界条件を課す必要がある。また、一般に brane bending mode による ghost も現れる。domain wall 模型ではこの境界条件と brane bending mode による ghost は存在しない。domain wall の厚さ 0 の極限をとるとき、境界条件は自然に現れ、domain wall 模型で一般に現れる ghost が brane 上で brane bending mode からくる ghost として現れると考えられる。

残されている問題点として domain wall の安定性がある。安定性を議論するためには scalar 場 φ, χ も含めた時間に依存する摂動を考える必要がある。

Reference

[1] M. Higuchi and S. Nojiri, "Reconstruction of Domain Wall Universe and Localization of Gravity," arXiv:1402.1346 [hep-th].

[2] G. Dvali, G. Gabadadze, and M. Porrati, "4-D gravity on a brane in 5-D Minkowski space," *Phys.Lett.* **B485** (2000) 208–214, arXiv:hep-th/0005016 [hep-th].

[3] L. Randall and R. Sundrum, "A Large mass hierarchy from a small extra dimension," *Phys.Rev.Lett.* **83** (1999) 3370–3373, arXiv:hep-ph/9905221 [hep-ph].

[4] L. Randall and R. Sundrum, "An Alternative to compactification," *Phys.Rev.Lett.* **83** (1999) 4690–4693, arXiv:hep-th/9906064 [hep-th].

[5] Y. Toyozato, K. Bamba, and S. Nojiri, "Scalar Domain Wall as the Universe," *Phys.Rev.* **D87** no. 6, (2013) 063008, arXiv:1202.5375 [hep-th].

[6] S. Nojiri and S. D. Odintsov, "Unifying phantom inflation with late-time acceleration: Scalar phantom-non-phantom transition model and generalized holographic dark energy," *Gen.Rel.Grav.* **38** (2006) 1285–1304, arXiv:hep-th/0506212 [hep-th].

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

Simulating Anisotropic Clustering of LRGs with Subhalos

岡　アキラ (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

銀河クラスタリングに観測されるバリオン音響振動 (BAO; 100[Mpc/h]) は、視線方向とそれに垂直な方向での距離測定が異なる宇宙論パラメータに依存するため、宇宙論の仮定の誤りにより非等方性が生まれる (AP 効果)。 また、分光サーベイにより得られる銀河のパワースペクトルは、銀河自身の持つ特異速度場の影響で非等方性を帯びる (Redshift-Space Distortion; RSD)。その非等方性の強さは、大スケールでは密度ゆらぎの重力的な成長率と密接に関係しており、BAO の観測を組み合わせることで宇宙論的スケールでの重力理論の検証が可能となる。ただし、銀河サンプルから宇宙論的な情報を得るためには、理論で予言されるダークマター (DM) と観測される銀河の間の関係の理解が不可欠である。そこで、本研究では、DM 粒子の N 体シミュレーションから作られたハロー・サブハローカタログをもとに、Sloan Digital Sky Survey II DR7 Luminous Red Galaxy (LRG) の非等方パワースペクトルの多重極成分 (P0,P2,P4) を再現するカタログを得るための条件を調べた。

1　Introduction

近年の観測機器の目覚ましい発展に伴い、我々の宇宙が加速膨張している、という驚くべき事実が明らかとなった (2011 年ノーベル物理学賞)。この加速膨張の起源を解明することは、現代の宇宙論分野において、主たる課題の一つである。

加速膨張は、Einstein 重力の下で通常のエネルギー成分に加えてダークエネルギーを考慮するか、あるいは、Einstein-Hilbelt 作用を適切に変更することで実現することができる。したがって、加速膨張起源の解明に向け、まずは重力理論を宇宙論スケール (>Mpc) で検証することが重要な課題である。以下に説明するように、重力理論の宇宙論的検証は、銀河クラスタリングの非等方性の解析を行ことによってのみ可能となる。

銀河分布には、二点統計量で特徴付けられるクラスタリングパターン (二点相関関数およびそのフーリエ変換であるパワースペクトル) に、最終散乱面 ($z \sim 1000$) 付近で刻まれた密度ゆらぎのバリオン音響振動 (BAO) の名残が観測されている。この BAO は ~ 100[Mpc/h] の標準ものさしとして利用できる。分光サーベイにより得られた銀河分布は、その赤方偏移によって視線方向の位置を決定されるが、測定された BAO の見込み角、および、赤方偏移から共同距離に変換する際に仮定した宇宙論パラメータと真の宇宙論パラメータが異なることによって、元来球対称であるべき BAO に見かけの非等方性が生じ (AP 効果; e.g., Alcock & Paczynski (1979))、したがって、銀河クラスタリングにも非等方性が生じる。

一方で、クラスタリングの非等方性は銀河の視線方向の特異速度によっても引き起こされる (RSD; e.g., Kaiser (1987))。銀河の特異速度は局所的な重力ポテンシャルに従って獲得されるため、RSD の非等方性の強さは重力の情報をもたらす。したがって、分光サーベイにより得られた銀河のクラスタリングパターンに刻まれた非等方性を精密に解析することで、BAO から宇宙膨張の、RSD から重力の情報を同時に引き出すこと、すなわち、重力理論の宇宙論的検証が可能となる。

しかし、バリオン物理が複雑になる銀河形成や銀河進化の精密なモデルは未だ存在しないため、銀河のクラスタリングパターンを精密に予言することは難しい。一方で、宇宙の物質成分の大部分を占めるダークマター (DM) の重力進化に関しては、信頼に足る解析計算および数値計算の手法が確立している。したがって、銀河クラスタリングを解析する際には、DM のパワースペクトル (あるいは二点相関関数) を計算し、DM のパワースペクトルと銀河のパワース

ペクトルの統計的な差異 (銀河バイアス) を経験的にモデル化することによって、データと理論を突き合わせられる。ここで、銀河バイアスのモデル化が、理論の不定性を支配している。すなわち、銀河バイアスの不定性をいかに取り除くか、が精密な検証に必須である。

本研究で提案された手法は一般の分光サーベイ銀河サンプルに適用可能だと考えられるが、その方法論ゆえ、非等方パワースペクトルが得られている銀河サンプルについてのみ議論を進める。ここで用いる銀河サンプルは、視野 10,000 平方度、赤方偏移 0.5 に渡る大規模測光・分光サーベイである Sloan Digital Sky Survey(SDSS) により提供されている Luminous Red Galaxy(LRG) である。LRG は、本研究で着目したい非等方パワースペクトル (ルジャンドル展開の係数 ($\ell = 4$ まで); P_0, P_2, P_4) が測定されている、論文執筆当時では唯一のサンプルである (Yamamoto et al. 2010)。さらに、その広大なサーベイ体積ゆえに大規模構造を探る上で非常に有用なサンプルであり、これまで多くの宇宙論解析に用いられ、したがって、LRG のバイアスについての議論も多く行われてきた。LRG サンプルは、サンプルのうち 95%もの LRG が周囲に LRG を伴わず単独で存在するため、ダークマターハローの中心と対応していると考えられていた。しかし、非等方性を解析する上では RSD を引き起こす特異速度が重要であり、ハロー中心の速度とハロー中心の周りをランダム運動している天体の速度では、速度構造が大きく異なると予想されるため、ハロー中心と LRG との対応関係を、非等方パワースペクトルの観点から見直すことは重要である。

本研究 (Nishimichi & Oka 2013) では、LRG の非等方パワースペクトル (P_0, P_2, P_4) を再現するようなハローおよびハロー中のより局所的な重力束縛系であるサブハローが満たすべき条件を明らかにすることで、LRG の速度構造を含むバイアスに関する知見を得ることを目的とする。ハロー・サブハローが銀河を保有するには、十分な重力ポテンシャルが必要であるという物理的推察から得られる仮定の下、大規模シミュレーション中のハロー・サブハローサンプルに対して、質量しきい値を設け、その質量しきい値以上のものを模擬 LRG とし、模擬 LRG の非等方パワースペクトルを観測データ (Yamamoto et al. 2010) と比較する。結果として、N 体シミュレーションを用いて LRG の非等方パワースペクトルを再現するには、ハローの中心に LRG を対応付けるだけでは不十分であることを明らかにし、さらに、サブハローと LRG を対応付けることで非等方パワースペクトルを再現できることを示した。

本集録では、ページ数の制約から、サブハローの重要性に重点をおいた議論を展開するが、本研究は根源的動機の一つである重力理論の宇宙論的検証への応用可能性についても議論を広げており、シミュレーションデータを理論テンプレートとして活用できる可能性を示した。その他の結果に関する詳細は論文 (Nishimichi & Oka 2013) を参照されたい。

2 Methods

ここでは、Yamamoto et al. (2010) によって得られた LRG の非等方パワースペクトル ($P0, P2, P4$) を再現するような、ハロー・サブハローカタログの満たすべき条件を求める。宇宙論的 N 体シミュレーションによって、DM 粒子の非線形重力進化を解き、DM 粒子の分布からハローとサブハローのカタログを作成する。シミュレーションデータは、パブリックコードの GADGET-2 を用いて実行された、Nishimichi & Taruya (2011) のものを使用した。ハロー・サブハローの同定には、それぞれ FoF アルゴリズム、SUBFIND アルゴリズムを適用した。

こうして得られたハロー・サブハローカタログをもとに、以下のアルゴリズムで模擬 LRG カタログを作成する。

1. ハローの質量しきい値 ($M_{\rm halo,min}$) を与え、しきい値を越えるハローのみ取り出す。
2. 過程 1 でしきい値を上回ったハロー中のサブハローに対して、最も質量が重たいものをセントラル、それ以外をサテライト、とラベル付けする。
3. サブハローの質量しきい値 ($M_{\rm sub,min}$) を与え、しきい値を越えるサブハローのみ取り出す。
4. 残ったサンプルに対して非等方パワースペクトル (P_0, P_2, P_4) を測定する。

ここで、過程 2 は結果に影響を与えないが、後の議論のために必要となる。セントラルは位置・速度ともにハロー中心と非常に似ている。一方で、サテライトは、ハロー中心周りをランダム運動する種族であり、セントラルサブハローと性質が大きく異なる。これらの過程を実行する度に、観測データとの適合度合いをカイ二乗、

$$\chi^2 \equiv \sum_{\ell=0,2,4} \sum_{k<k_{\rm max}} \left[\frac{P_{\ell,{\rm mock}}(k) - P_{\ell,{\rm obs}}(k)}{\Delta P_{\ell,{\rm obs}}(k)} \right]^2 \quad (1)$$

で評価する。ここで、$P_{\ell,{\rm X}}$ は、それぞれ模擬 LRG(mock)、観測データ (obs) の非等方パワースペクトルである。$\Delta P_{\ell,{\rm obs}}$ は観測データに付随する誤差である。これをマルコフ連鎖モンテカルロ (MCMC) 法で繰り返し行い、カイ二乗を最小にするカタログを探す。ここで、サブハローの重要性を調べるために、いくつかのモデルを定義する。

1. サブハローを一切用いない。ハローの質量しきい値 ($M_{\rm halo,min}$) のみをパラメータとする。すなわち、過程 1 と過程 4 のみを繰り返す。

2. サブハローを用いる。ハローの質量しきい値 ($M_{\rm halo,min}$) およびサブハローの質量しきい値 ($M_{\rm sub,min}$) をパラメータとする。

さらに、模擬 LRG の位置および速度を、シミュレーションデータにどのように対応づけるか、という不定性が残っている。ここでは、我々の解析結果が恣意的なサンプリングによるものではないことを主張するために、二つの対応関係をそれぞれ調べる。

a. ハロー・サブハローの重心および重心速度を模擬 LRG の位置および速度とする。

b. ハロー・サブハロー中の DM 粒子のうち、最も強い重力ポテンシャルを感じているものの位置および速度を模擬 LRG の位置および速度とする。

したがって、我々が調べるモデルは計四種類である。それらを、Model 1b などと呼ぶ。

3 Results

前章の結果を表 1 および図 1 にまとめる。表からも図からも、サブハローなしでは、P_0, P_2, P_4 を同時に精度よく再現することができないことがわかる。特に、P_2 におけるモデル間の差異が大きく、これはハロー内部のサブハローの固有運動が非等方性を担っていることを示唆している。さらに、模擬 LRG とハロー・サブハローの対応関係 (a および b) によらずに、サテライトが 20-30%必要であることを明らかにした。

4 Discussion and Conclusion

宇宙論パラメータを制限する目的で広く用いられてきた、SDSS LRG サンプルの生息環境を理解する目的で、宇宙論的 N 体シミュレーションによって作成されたハロー・サブハローカタログを調べた。LRG はこれまで、ハロー中心と一対一の対応関係があると信じられてきたが、クラスタリングの非等方性の観点からそれが誤りであることを指摘した。また、ハロー中心の周りをランダム運動するサテライトは、モデルによらず必要で、その割合は全体の 20-30% 程度であることも明らかにした。

また、紙面の都合上、説明は Nishimichi & Oka (2013) に譲るが、我々の手法のロバスト性を主張するために、ここで述べたモデル以外に、セントラルとサテライトで質量しきい値を変える場合、や、セントラルをランダムに捨てることによってサテライトの割合を実効的に変える場合についても調べた。その全てが、非等方クラスタリングを理解するためには、サブハローの存在が本質的に重要であることを示唆している。その上、我々は P_0, P_2, P_4 を説明することのみを要請してカタログを作成したにも関わらず、Multiplicity 関数まで同時に再現に成功したことは特筆に値する。Nishimichi & Oka (2013) では、さらに、HOD と P_0, P_2, P_4 を同時に再現するカタログの作成法や、宇宙論パラメータをシミュレーションデータから直接制限することができることを論じた。

これらの一連の手法は、銀河が重力ポテンシャルの局所ピーク付近に形成しやすい、という物理的な仮定にのみ基づいており、したがって、今後の分光

表 1: それぞれのモデルのベストフィットパラメータおよびカイ二乗。n_g は LRG の数密度である。$f_{\rm sat}$ は全模擬 LRG 中サテライトサブハローに保有されている模擬 LRG の割合を示す。1σ は $f_{\rm sat}$ の 1σ の誤差である。また、カイ二乗は、それぞれの P_ℓ についてのカイ二乗と、合計したものをパラメータの数で割った $\chi^2_{\rm red}$ を記載する。

Model	$M_{\rm host,min}$	$M_{\rm sub,min}$	n_g	$f_{\rm sat}$	$\pm(1\sigma)$	$\chi^2_{0,\rm min}$	$\chi^2_{2,\rm min}$	$\chi^2_{4,\rm min}$	$\chi^2_{\rm red}$
1a	2.50	-	1.28	0	-	109.2	916.8	27.1	11.8
1b	2.70	-	1.16	0	-	119.0	656.5	34.6	9.10
2a	1.29	0.211	4.07	0.300	$^{+0.017}_{-0.012}$	48.0	28.4	27.8	1.18
2b	1.45	0.299	3.30	0.248	$^{+0.015}_{-0.010}$	31.2	28.7	30.7	1.03

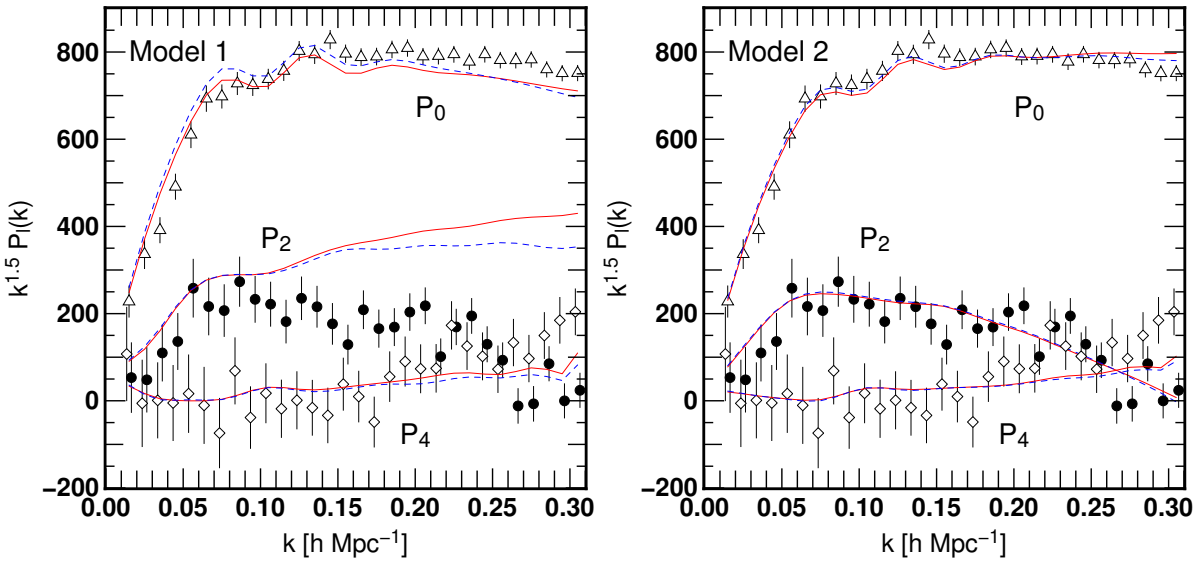


図 1: 上: Model 1(サブハローなし) のベストフィット。下:Model 2(サブハローあり) のベストフィット。両者を見比べると、特に、P_2 の違いが顕著である。Model 1(サブハローなし) では再現できない LRG の非線形な速度構造を、Model 2(サブハローあり) を用いることで、ある程度再現できることを示している。(Nishimichi & Oka (2013) より引用)

サーベイ銀河サンプルにも適用可能であると期待できる。

Acknowledgement

夏の学校参加に際して、旅費および参加費用を補助してくださった須藤靖教授に深く感謝する。

Reference

C.Alcock and B.Paczynski, 1979, Nature, 281, 358

N.Kaiser, 1987, MNRAS, 227, 1

K.Yamamoto et al., 2010, Phys. Rev. D 81, 103517

T.Nishimichi and A.Oka, 2013, arXiv:1310.2672

T.Nishimichi and A.Taruya, 2011, Phys. Rev. D 84, 043526

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

Expanding Universe with non linear gravitational wave

池田　大志 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

Issacson の短波長重力波の研究によると、短波長重力波の有効的なエネルギー運動量テンソルはトレースレスになり、その結果短波長重力波のみで満たされた宇宙の膨張則は放射成分で満たされた宇宙と同じになることが示される。しかし、この先行研究では重力波の振幅が小さい等の仮定や短波長重力波の平均化が入っており、これらの計算がどこまで妥当かどうかは再確認が必要である。
そうした中で本発表では、重力波だけで満たされた宇宙 (重力波宇宙) の膨張則について議論する。重力波宇宙の時間発展は数値相対論を用いて、フルな Einstein 方程式を解くことで得る。この膨張則を調べることで、Issacson の研究結果を再確認するとともに、Issacson の計算では追うことのできない長波長領域での宇宙の膨張則を明らかにする。

1　Introduction

Issacson の短波長重力波の研究によると、短波長重力波は局所的に平均化することで、重力波の有効的なエネルギー運動量テンソルを定義することができ、そのエネルギー運動量テンソルはトレースレスであることが示される。それにより、フリードマン宇宙に短波長重力波が入っているときには、そのエネルギー密度は放射成分と同様に $\rho^{(GW)} \propto 1/a^4$ となる。そのため、短波長重力波のみの宇宙は放射成分だけの宇宙と同様に $H \propto 1/a^2$ と振る舞うことが結論される。
しかし、この Isaacson の短波長重力波の研究は、通常の摂動論とは異なるため何と比べてどの程度短波長の重力波であればこの近似が有効かはよくわからない。また、平均化の仕方も曖昧でより正確な評価が必要である。そこで、今回は Issacson の近似がどの程度正しいかを、数値的に調べることにした。そのために重力波宇宙を構成し時間発展させる。また通常の重力波の計算で行われるような背景時空と重力波の分離は行わず、計量の時間発展をフルに解いていく。そのため、考えている宇宙は一様等方でなくなりスケール因子の評価の仕方に任意性がある。今回はスケール因子の評価として、固有体積、固有面積、固有長さを用いる。おのおのの評価でスケール因子を計算した際にどの程度 Issacson 近似が使えるのかを調べていく。

2　3+1 分解

Einstein 方程式を数値的に解くためには方程式の中の時間発展の式と拘束条件の式とをあらわに書く必要がある。そのために使われるのが 3+1 分解である。ここでは簡単に 3+1 分解を説明していく。
3+1 分解の基本的な変数は 3 次元計量 γ_{ij}、lapse α、shift vector β、外曲率 K_{ij} である。それぞれ次の式で定義できる。

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt) \quad (1)$$

$$K_{ij} = \nabla_i n_j \quad (2)$$

ここで $\times$ は考えている (3D) 超曲面の法線ベクトルである。 これらの変数を使って (真空の)Einstein 方程式を書くと拘束条件の式と時間発展の式が得られる。まず拘束条件については次の momentum 拘束条件と Hamiltonian 拘束条件が得られる。

$$D_j K^j{}_i - D_i K = 0 \quad (3)$$

$$R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 0 \quad (4)$$

また時間発展の式は次のように得られる。

$$(\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}_\beta)K_{ij} = -D_i D_j \alpha + \alpha\{R_{ij} + KK_{ij} - 2K_{ik}K^k{}_j\} \quad (5)$$

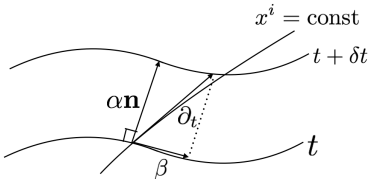


図 1: lapse と shift の幾何学的意味

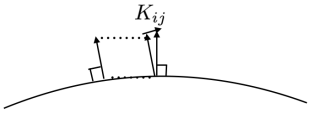


図 2: 外曲率の幾何学的意味

$$(\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}_\beta)\gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} \tag{6}$$

こうして Einstein 方程式の拘束条件の式と時間発展の式が得られたが、数値的な安定性の為に以下で定義される変数 Ψ、$\tilde{\gamma}_{ij}$、$\tilde{A}_{ij}$、K、α、β^i を用いる。

$$\gamma_{ij} = \Psi^{-4}\tilde{\gamma}_{ij} \tag{7}$$

$$\det(\tilde{\gamma}_{ij}) = 1 \tag{8}$$

$$A_{ij} = K_{ij} - \frac{1}{3}K\gamma_{ij} \tag{9}$$

$$\tilde{A}_{ij} = \Psi^{-4}A_{ij} \tag{10}$$

これらの変数を用いて拘束条件の式を書くと

$$\tilde{D}_j\tilde{A}^{ij} + 6\tilde{A}^{ij}\tilde{D}_j \ln\Psi - \frac{2}{3}\tilde{D}^i K = 0 \tag{11}$$

$$\tilde{D}^2\Psi - \frac{1}{8}\tilde{R}\Psi + (\frac{1}{8}\tilde{A}^{ij}\tilde{A}_{ij} - \frac{1}{12}K^2)\Psi^5 = 0 \tag{12}$$

を得る。また時間発展の式も書くことができる。
拘束条件は任意の時刻で成立しなくてはならないので、時間発展を構成するときには拘束条件を満たすように構成しなくてはならない。

3　初期値の構成

今回は重力波の宇宙の膨張則への影響を調べたいので、真空で重力波のみの宇宙を調べる。その宇宙の時間発展を数値的に追うために、対応する宇宙の初期値を拘束条件を解いて構成する。
以下の条件を満たすように構成していく。

- 各時刻で Hubble 定数を定義するために $trK = \text{const}$ を要請する。
- 線形化したときに線形重力波になるようにする。
- 周期的境界条件を要請する。計算領域としては重力波、1 波長分。

これらの条件を満たすような初期値を拘束条件を解いて構成していく。
拘束条件は次の Hamilton 拘束条件と、momentum 拘束条件である。

$$\tilde{D}^2\Psi - \frac{1}{8}\tilde{R}\Psi + (\frac{1}{8}\tilde{A}^{ij}\tilde{A}_{ij} - \frac{1}{12}K^2)\Psi^5 = 0 \tag{13}$$

$$\tilde{D}_j\tilde{A}^{ij} + 6\tilde{A}^{ij}\tilde{D}_j \ln\Psi - \frac{2}{3}\tilde{D}^i K = 0 \tag{14}$$

まず、先の仮定から

$$K = \text{const} \tag{15}$$

である。ここから K の空間微分の項は落ちる。さらに

$$\tilde{A}_{ij} = 0 \tag{16}$$

とする。こうすることで momentum 拘束条件は自明に満たされ、さらに初期時刻での shift vector β を 0 と置くことで

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\gamma}_{ij} = \mathcal{L}_\beta\tilde{\gamma}_{ij} - 2N\tilde{A}_{ij} - \frac{2}{3}\tilde{D}_k\beta^k\tilde{\gamma}_{ij} = 0 \tag{17}$$

となる。これは (線形化したときに) 構成する初期値が、波の振幅が最大になった瞬間の時刻に対応していることを意味している。さらに

$$\tilde{\gamma}_{ij} = \text{diag}(\frac{1+h^{(3)}}{1+h^{(2)}}, \frac{1+h^{(1)}}{1+h^{(3)}}, \frac{1+h^{(2)}}{1+h^{(1)}}) \tag{18}$$

とおく。ここで

$$h^{(i)} = \text{Amp}\ cos(\omega x^i) \tag{19}$$

である。これは線形化したときに

$$\tilde{\gamma}_{ij} \backsimeq \text{diag}(1+h^{(3)}-h^{(2)}, 1+h^{(1)}-h^{(3)}, 1+h^{(2)}-h^{(1)}) \tag{20}$$

となり、+モード重力波の重ね合わせになっている。
あとは周期的境界条件を課して Hamilaton 拘束条件を Ψ について解けば欲しい初期値が得られる。

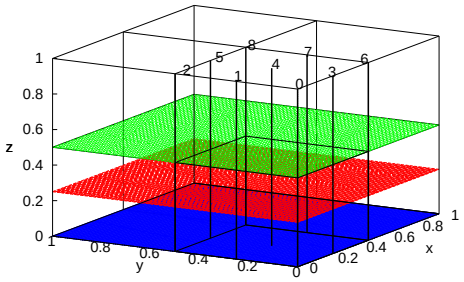


図 3: 重力波の一周期分の BOX である。面積は図の色がついた 3 つの領域でのそれぞれの評価を用いることにする。また長さについては 0 から 8 までの各場所について評価をする。

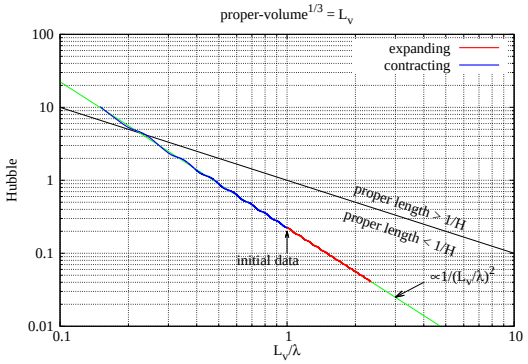


図 4: 体積で評価したスケール因子と Hubble 定数の関係。青線と赤線が計算結果で緑線が短波長領域で Issacson のべきで fit したものである。

4 時間発展

拘束条件を解いて時間発展の初期値は得られたので、時間発展を計算する。各時刻での Hubble 定数は

$$H = \frac{1}{3}K \tag{21}$$

で定義する。これは FLRW とのアナロジーである。またスケール因子としては固有体積、固有面積、固有長さを用いた 3 通りの方法で定義する。

$$L_V = \left(\int_{\text{wavelength}} \sqrt{\gamma} d^3x\right)^{1/3} \tag{22}$$

$$L_A(z) = \left(\int_{\text{wavelength}} \sqrt{\gamma_{xx}\gamma_{yy}} dxdy\right)^{1/2} \tag{23}$$

$$L_L(x,y) = \int_{\text{wavelength}} \sqrt{\gamma_{zz}} dz \tag{24}$$

このようにスケール因子の定義に任意性があるのは空間が一様等方でないからである。ここで面積と長さによる評価では、どの場所で評価するかに任意性があるので適当な箇所 (3) で評価をすることにする。こうして各々の評価の仕方でスケール因子と Hubble 定数との関係を調べていく。

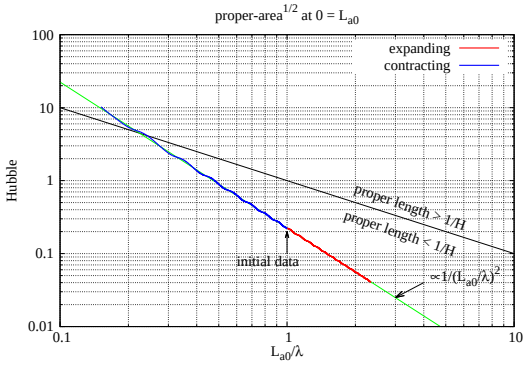


図 5: 図 (3) の青の領域での面積で評価したスケール因子と Hubble 定数の関係。青線と赤線が計算結果で緑線が短波長領域で Issacson のべきで fit したものである。

5 Conclusion

体積と面積での評価は図 (4) と図 (5) の通りである。 図からわかる通り体積と面積による評価では Issacson の近似はかなりよいことがわかる。また長さによる評価は図 (6) である。長さによる評価では波の物理的な長さが Hubble distance と同程度になると、Issacson の fit からの差が出ていることがわかる。
今回は面積と長さによる評価についてのグラフは一部しか載せることができなかったが、他の箇所での面積、長さによる評価でも同様な振る舞いが見られた。長さによる評価で Issacson の近似が悪くなることから、重力波の平均化が不十分な場合には Isacson の近似が使えなくなることがわかる。

Reference

R. A. Isaacson. 1968. Phys. Rev. 166, 1263

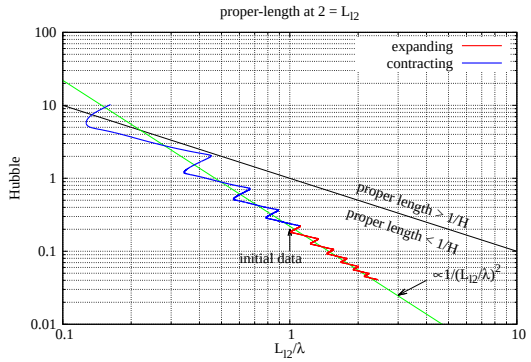


図 6: 図 (3) の箇所での長さで評価したスケール因子と Hubble 定数の関係。青線と赤線が計算結果で緑線が短波長領域で Issacson のべきで fit したものである。

R. A. Isaacson. 1968. Phys. Rev. 166, 1272

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

Density-Independent SPH 法の宇宙論的シミュレーションコードへの実装

小野間 章友 (筑波大学大学院 数理物質科学研究科)

Abstract

宇宙物理学では、流体シミュレーションの手法として、Smoothed Particle Hydrodynamics method (SPH) がよく使われてきた。従来の手法では接触不連続面が解けないという大きな問題点が存在した。しかし、近年 Density-Independent SPH(DI-SPH) と呼ばれる新しい SPH の Scheme が提案された。(Saitoh T. R. and Makino J 2013)
ただし、本研究では、Lagragian から導出された、一般的な定式化を採用している。(Hopkins, P.F. 2013)
今回はこの定式化と実装方法、従来の SPH(Standard SPH)、DI-SPH でのテスト計算の結果を示す

1 Introduction

SPH 法は、粒子法による流体計算の手法で、粒子の周りに kernel 関数で重みを持たせて積分することで、物理量の平均値を求める。つまり、ある粒子の kernel 内の物理量 $f(x)$ の平均は、

$$\langle f(\boldsymbol{x})\rangle = \int f(\boldsymbol{x}')W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}';h)d\boldsymbol{x}' \tag{1}$$

と表す。また、物理量の微分は、部分積分を使って、

$$\begin{aligned}\langle \nabla f(\boldsymbol{x})\rangle &= \int W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}';h)\nabla' f(\boldsymbol{x}')d\boldsymbol{x}' \\ &= \int \nabla' \left(W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}';h)f(\boldsymbol{x}')\right) - \\ &\qquad \int f(\boldsymbol{x}')\nabla' W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}';h)d\boldsymbol{x}'\end{aligned}$$

第一項は発散定理より、$\int_S W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}';h)f(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{n}'dS'$ となる。S を kernel の表面と考えると、後述のように kernel 関数は kernel の表面では 0 となるので、結局以下のようになる。

$$\begin{aligned}\langle \nabla f(\boldsymbol{x})\rangle &= -\int f(\boldsymbol{x}')\nabla' W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}';h)d\boldsymbol{x}' \\ &= \int f(\boldsymbol{x}')\nabla W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}';h)d\boldsymbol{x}'\end{aligned} \tag{2}$$

kernel 関数は、kernel 半径 (smoothing length)h で 0 になるような関数を選ぶ。今回は、SPH でよく用いられている 3 次元の cubic spline 関数を選んだ。

$$W(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|,h) = \frac{1}{\pi h^3}\begin{cases}1-\frac{3}{2}s^2+\frac{3}{4}s^3 & (0\le s<1)\\ \frac{1}{4}(2-s)^3 & (1\le s<2)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases} \tag{3}$$

ここで、$s\equiv|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/h$ である。
ただし、∇W の計算のときはには少し注意が必要である。このまま kernel 関数を微分をすると、s が小さいような場合は tensile 不安定を起こす（近傍の粒子が過剰に近寄りすぎる）ため、$s\le\frac{2}{3}$ の場合は、kernel の微分にコアを残すような形 ($s=1$) とする。(Thomas, P. A.and Couchman, H. M. P. 1992)

SPH 法の特徴としては、同じ粒子の計算である N 体との相性がいい、ガリレイ不変、高密度部分が自動的に高解像度となる、といった利点がある。しかし一方で、離散化の体積要素 ΔV に密度を用いるとき、「密度は微分可能」という仮定の元で計算しているため、接触不連続面の計算がうまくできない。そのため、流体の不安定性の成長が抑制されるという問題点を持っている。
しかし、Density-Independent SPH では、離散化の体積要素に陽に密度を用いず、その代わりに状態方程式から体積要素を用いて離散化することで、接触不連続面も正しく解くことができる。

2 Formulation

全粒子の Lagrangian は、

$$L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2 + \sum_{i=1}^{N} m_i u_i \tag{4}$$

ここで u_i は単位体積あたりの粒子のエネルギーである。
熱力学第一法則より、断熱過程を考えると体積変化は

$$\left.\frac{\partial u_i}{\partial q_i}\right|_A = -\frac{P_i}{m_i}\frac{\partial(\Delta V_i)}{\partial q_i} \tag{5}$$

また、ポリトロピックなガスを仮定をすると、状態方程式は、

$$P_i = (\gamma-1)u_i\left(\frac{m_i}{\Delta V_i}\right) \tag{6}$$

となる。
kernel 内の粒子数が一定となることを束縛条件として設定すると、束縛条件 $\phi_i(\boldsymbol{q})$ は、kernel の半径 (smoothing length) を h_i として、

$$\phi_i(\boldsymbol{q}) \equiv \frac{4\pi}{3}h_i^3\frac{1}{\Delta\tilde{V}} - N_{\rm ngb} = 0 \tag{7}$$

この $\Delta\tilde{V}$ は、kernel の半径を求めるときに用いる体積要素で、Standard-SPH では、m_i/ρ_i が用いられている。
この束縛条件のもとでの Euler-Lagrange 方程式は、Lagrange の未定乗数 λ_i を用いて、以下のように書ける。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{N}\lambda_j\frac{\partial\phi_j}{\partial q_i} \tag{8}$$

$q_i = h_i$ の場合、つまり smoothing length に対する Euler-Lagrange 方程式を解くと、

$$-\frac{\partial L}{\partial h_i} = m_i\frac{\partial u_i}{\partial h_i} = -P_i\frac{\partial\Delta V}{\partial h_i}$$

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial h_i} = 4\pi h_i^2\frac{1}{\Delta\tilde{V}}\left(1-\frac{h_i}{3\Delta\tilde{V}}\frac{\partial\Delta\tilde{V}}{\partial h_i}\right)$$

より、Lagrange の未定乗数 λ_i は、

$$\lambda_i = -\frac{3P_i\Delta\tilde{V}^2}{4\pi h_i^3}\psi_i \tag{9}$$

$$\psi_i \equiv \frac{h_i}{3\Delta V}\frac{\partial\Delta V}{\partial h_i}\left(1-\frac{h_i}{3\Delta\tilde{V}}\frac{\partial\Delta\tilde{V}}{\partial h_i}\right)^{-1} \tag{10}$$

と求まる。今度は $q_i = r_i$ について同様に計算して、上で求めた未定乗数を代入すると運動方程式は以下の通りになる。

$$m_i\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{N} P_j\left(\nabla_i\Delta V_j + \psi_j\nabla_i\Delta\tilde{V}_j\right) \tag{11}$$

次に、離散化した体積要素 ΔV を考える。あるスカラーの物理量 x_i と、y_i を用いて、$\Delta V_i = x_i/y_i$ とすると、(1) 式を離散化したものに、y_i を入れると、

$$y_i \equiv \sum_{j=1}^{N} x_j W_{ij}(h_i) \tag{12}$$

と、y_i を定義することができる。すると、(7) 式の中に出てくる ΔV_i に関する微分は、

$$\frac{\partial\Delta V_i}{\partial h_i} = -\frac{x_i}{y_i^2}\frac{\partial y_i}{\partial h_i},\quad \nabla_i\Delta V_j = -\frac{x_j}{y_j^2}\nabla_i y_j \tag{13}$$

となり、ここで y_i に関して微分可能であることが前提であることが分かる。これらを運動方程式に代入して計算すると、

$$m_i\frac{d\boldsymbol{v_i}}{dt} = -\sum_{j=1}^{N} x_i x_j\left[\frac{P_i}{y_i^2}f_{ij}\nabla_i W_{ij}(h_i) + \frac{P_j}{y_j^2}f_{ji}\nabla_i W_{ij}(h_j)\right], \tag{14}$$

$$f_{ij} \equiv 1 - \frac{\tilde{x}_j}{x_j}\left(\frac{h_i}{3\tilde{y}_i}\frac{\partial y_i}{\partial h_i}\right)\left[1+\frac{h_i}{3\tilde{y}_i}\frac{\partial\tilde{y}_i}{\partial h_i}\right]^{-1} \tag{15}$$

エネルギー方程式も、同様にして求められる。ここで問題となるのは、離散化の体積要素を作る、x_i と y_i をどのように選ぶかであり、ここが Standard-SPH と、DI-SPH の最大の違いとなる。

Standard SPH の場合は、以下の様な定式となる。(Springel V., Hernquist L. 2002)
まず、体積要素として、$x_i = m_i$、$y_i = \rho_i$ を使う。(今の場合、$\Delta V = \Delta\tilde{V}$ とする)
すると、運動方程式は、

$$\frac{d\boldsymbol{v_i}}{dt} = -\sum_{j=1}^{N} m_j\left[\frac{P_i}{\bar{\rho}_i^2}f_i\nabla_i W_{ij}(h_i) + \frac{P_j}{\bar{\rho}_j^2}f_j\nabla_i W_{ij}(h_j)\right], \tag{16}$$

$$f_i \equiv \left[1+\frac{h_i}{3\bar{\rho}_i}\frac{\partial\bar{\rho}_i}{\partial h_i}\right]^{-1},\ \bar{\rho}_i \equiv \sum_{j=1}^{N} m_j W_{ij}(h_i) \tag{17}$$

次に、Density Independent の場合の定式化を考える。流体を解くという観点から考えると、状態方程式から体積要素 ΔV は、

$$\Delta V_i = (\gamma - 1)\frac{m_i u_i}{P_i} \tag{18}$$

と、考えることができる。つまり、体積要素は粒子の持つ内部エネルギーを、エネルギー密度で割ったもので計算することになる。これなら、密度が微分可能でない場所も計算ができる。
さらに、smoothing length の h_i を見積もるときに使う $\Delta\tilde{V}$ は、束縛条件を満たす計算（束縛条件を満たすまで iteration をかける）の収束性から、$\Delta\tilde{V} = 1/\bar{n}$ という、kernel の数密度の逆数を用いる。（すなわち、$\tilde{x} = 1, \tilde{y} = \bar{n}$ ということになる）
数密度の計算は、単純に、

$$\bar{n}_i = \tilde{y}_i \equiv \sum_{j=1}^{N} W_{ij}(h_i) \tag{19}$$

以上の条件で運動方程式を書くと、以下の様になる。

$$\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = -\sum_{j=1}^{N}(\gamma-1)^2 m_j u_i u_j \left[\frac{f_{ij}}{\bar{P}_i}\nabla_i W_{ij}(h_i) + \frac{f_{ji}}{\bar{P}_j}\nabla_i W_{ij}(h_j)\right],$$
$$f_{ij} = 1 - \left[\frac{h_i}{3(\gamma-1)\bar{n}_i m_j u_j}\frac{\partial \bar{P}_i}{\partial h_i}\right]\left(1 + \frac{h_i}{3\bar{n}_i}\frac{\partial \bar{n}_i}{\partial h_i}\right)^{-1} \tag{20}$$

この運動方程式を元に、今回のコードは実装した。

3 Results

テスト計算は、shocktube、Kelvin-Helmholtz instabilities、Hydrostatic Equilibrium の 3 つを行った。

3.1 shock tube tests

初期条件は、高密度側が $\rho_H = 1.0, P_H = 1.0$、低密度側が、$\rho_L = 0.125, P_L = 0.1$ である。以下の結果は、同時刻の比較をしたものである。左側が standard

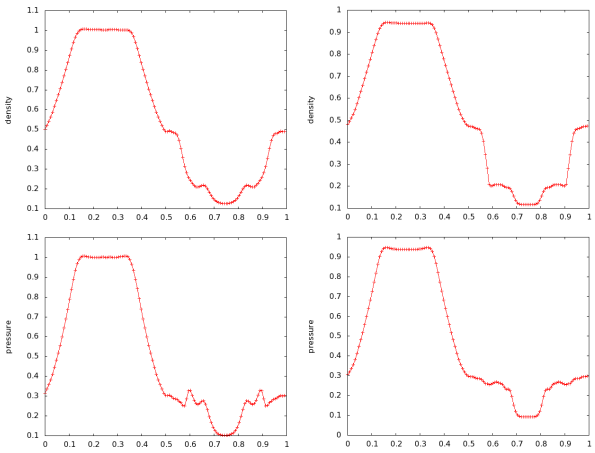


図 1: shocktube test の結果

SPH で、右側が DI-SPH の結果である。これを見ると、DI-SPH のほうが、接触不連続面での圧力の不自然なゆらぎが少なくなっていることが分かる。

3.2 Kelvin-Helmholtz instabilities

次に、KH 不安定性のテストを行った。
初期条件は、密度がそれぞれ、$\rho_H = 4.0, \rho_L = 1.0$、$P = 2.5$ である。これに、微小な速度を流れに垂直に加えた。(Price, D. J. 2008)

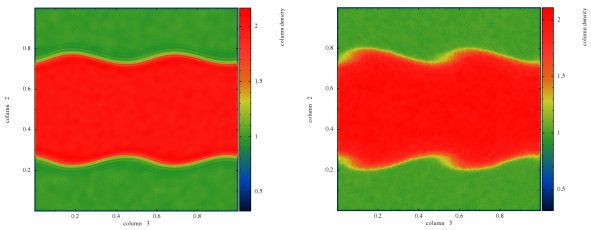


図 2: KHI の結果

左側が Standard で、右側が DI-SPH の結果である。なお、時間は不安定性の成長スケール τ_{kh} の 3 倍程度におけるスナップショットである。綺麗に KHI が解けているわけではないが、全く解けていない Standard と比較すると、不安定性が見られる。

3.3 Hydrostatic Equilibrium

圧力平衡状態で、密度だけ異なる二つの領域をおき、その形状変化をテストしたものである。初期条件は、正方形を境にして、高密度側（内側）と、低密度側（外側）を作り、どちらの領域も同じ圧力の初期条件をもたせた。

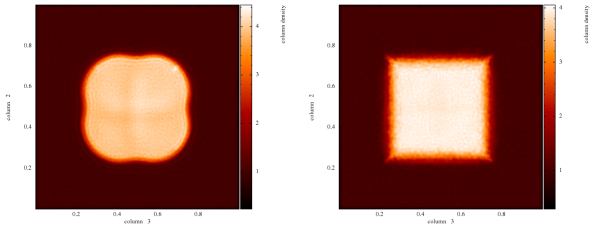


図 3: Hydrostatic Equilibrium の結果

左が Standard SPH の結果で、右が DI-SPH の結果である。左は角がとれて丸みを帯びてるのが分かる。本来、初期条件の形をある程度保つはずで、DI-SPH は初期条件の四角い形をまだ保っているのがわかる。

4 Discussion

以上の 3 つのテスト計算を行ったが、どれも定性的には Standard よりは良い結果となっていることが分かる。しかし、論文のテスト結果ほどうまく解けてはいなかった。これは本来 KHI などは 2 次元コードにするか、3 次元にしても薄くスライスしたような領域で計算させるともっとうまくいくという結果が論文には紹介されていたが、今回使用したコードは宇宙論的なシミュレーションを行うのが前提となっているコードのため、立方体の計算領域でテストを行った影響が強いものと考えられる。それでも、Standard よりは良い結果となっているので、これを用いてさらに今度は宇宙論的なシミュレーションを行っていきたいと考えている。

Reference

Saitoh T. R. and Makino J. 2013. ApJ...768...44S

Hopkins, P. F. 2013, MNRAS, 428, 2840

Springel V., Hernquist L., 2002, MNRAS, 333, 649

Thomas, P. A.; Couchman, H. M. P., 1992, MNRAS.257...11T

Price, D. J. 2008, Journal of Computational Physics, 227, 10040

重力波データ解析における Short time Fourier 変換の可能性

若松 剛司 (新潟大学大学院 自然科学研究科)

Abstract

重力波は今まで直接観測されていない。重力波は一般相対性理論によりその存在を予言され、The Hulse-Taylor binary pulser(PSRB1913+16) の観測により間接的に示されている。

レーザー干渉型重力波観測装置において出力は時間スケールで変化する。そこで時間周波数解析が要求される。重力波の波形は、主に連星合体 (Compact Binary Coalescence:CBC) と重力崩壊型超新星爆発 (Super nova:SN) で区別される。連星合体の場合は周波数が増大していき、合体後に減衰するような波形である。SN はバースト的な波形である。さらに、出力にはノイズが含まれるので、その影響もある。今回の発表の内容は Short time Fourier 変換である。この解析方法は元の信号に窓をかけ、その窓を移動することによって、周波数の成分の度合いを三次元的に表すことができる。そして、重力波の実際の波形に近いものではどのようになるか考察してみる。

1 Introduction

時間周波数解析の基礎について述べる。基本的物理量が時間とともに変化するとき、つまり、横軸が時間であり、縦軸がある物理量で表されるとき、時間波形ができる。これを信号という。信号は正弦波（余弦波）の線形な重ね合わせで表現でき、Fourier 級数の形でかける。正弦波（余弦波）には種々の周波数と振幅がある。信号を Fourier 変換したものは、周波数領域または周波数空間での信号であり、それを信号の周波数表現と考えることができる。時間変化する信号を $s(t)$ とし、それを Fourier 変換したものを $S(\omega)$ とする。ここで ω は角周波数であり、周波数は $\omega = 2\pi f$ の関係である。つまり、よく知られている

$$S(f) = \int s(t)e^{-2\pi ift}dt \quad (1)$$

$$s(t) = \int S(f)e^{2\pi ift}df \quad (2)$$

$$S(\omega) = \int s(t)e^{-i\omega t}dt \quad (3)$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int S(\omega)e^{i\omega t}d\omega \quad (4)$$

となる。

しかし、単に Fourier 変換を行っただけでは、周波数の時間変動までは見ることができない。例えば、$f = t^2 + t$ のように変化する周波数は、Fourier 変換を行っても見ることができない。

そこで、元の信号に窓関数をかけて変形信号にして、その後、Fourier 変換を行う。さらに、窓関数を時間ごとに移動することによって、周波数の時間変動を見ることができる。変形信号の持続時間が短い場合に、その Fourier 変換は短時間 Fourier 変換 (Short time Fourie 変換) と呼ばれる。

2 Methods/Instruments

Short time Fourie 変換について述べる。窓関数を $h(t)$ とする。すると窓関数をかけた変形信号 $s_t(\tau, t)$ は $s_t(\tau) = h(\tau)s(\tau - t)$ となる。この変形信号を Fourier 変換するので

$$S_t(f,t) = \int s_t(\tau,t)e^{-2\pi ift}d\tau \quad (5)$$

となる。 次に窓関数について述べる。今回の計算では、窓関数はガウス窓を用いた。窓関数とは両端が 0 に収束している正値の関数である。 元の信号に窓関数をかけているので Fourier 変換を行った結果は、元の信号とは異る結果である。信号の性質を考慮した適切な窓関数を選ぶ必要がある。

3 Results

様々なテスト波形を用いてスペクトルを計算した。3 つの波形のスペクトルの結果を図 1、図 2、図 3 に示す。その中でも、周波数が振動している波形で計算したところ、瞬時周波数から予測されるスペクトルとは異る結果が出た。

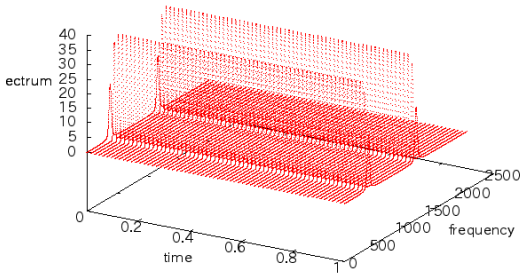


図 1: $cos(2\pi \times 400t) + cos(2\pi \times 1200t)$

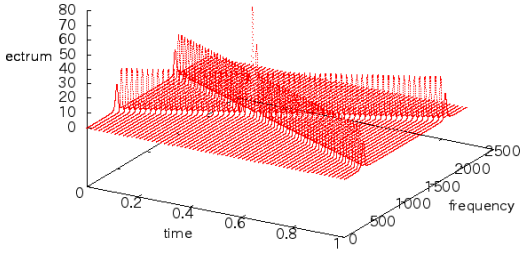


図 2: $cos(2\pi \times (600t^2 + 500t)) + cos(2\pi \times (-600t^2 + 1500t))$

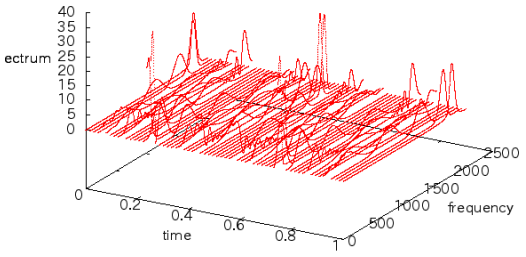


図 3: $cos(2\pi \times cos(900t + 400 \times sin(2\pi \times 2t)))$

振動しているような波形からは、期待されるスペクトルが見れなかった。おそらく、周波数が振動しているような波形での窓関数の選び方が適切ではなかったことと考えられる。重力波の CBC からの波形では連星が回転している段階での周波数は徐々に増大していくと考えられる。周波数は時間変動をしている。連星の質量やスピンなどの条件でその波形は変化する。さらに、SN の場合は CBC とは特徴が異る波形である。つまりは、波形ごとに最適窓を考慮しなければならないと考える。 今回はガウス窓のみを用いて計算を行ったのだが、窓関数の種類も他に多く存在するので、他の窓関数を用いた計算もしなければならない。

4 Discussion/Conclusion

周波数が時間変動している $t^2 + t$ のような波形でも計算したのだが、そのスペクトルは瞬時周波数から予測される時間変動が見れた。しかし、周波数が

Reference

時間-周波数解析 著者 L. コーエン. 1998. 発行元 朝倉書店

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

重力凹レンズを起こす球対称モデルにおける光の伝播時間の遅れ

中島 昂己 (弘前大学大学院 理工学研究科)

Abstract

我々は重力レンズにおいて従来の凸型だけでなく凹型の重力レンズを起こす球対称なモデルを仮定し、その時空における光の伝播時間の遅れについて議論する。光の伝播時間の遅れが計量のパラメータにどのように依存するかを定性的に調べ、銀河系内のパルサー観測において観測結果から時空の性質を決定出来ることを示した。

1 Introduction

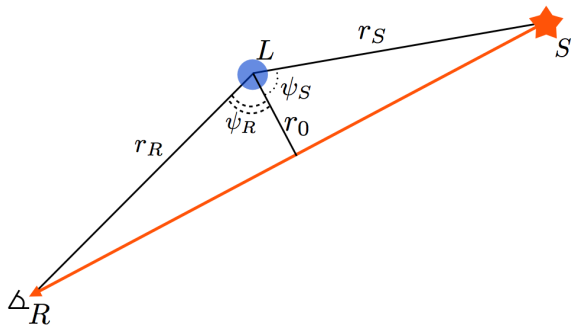


図 1: time delay の概略

一般相対論によると、重力場中を光が通る場合平坦な時空を通る場合に比べて光の伝播時間は遅れる (time delay)。これは 1960 年代に太陽系における実験で調べられている (Shapiro et al. 1968)。

time delay は光源が相対的に運動している場合、ドップラーシフトのような振動数変化を起こす (frequency shift)。探査機カッシーニによって行われた 2000 年代の実験結果は一般相対論の最も強い制限になっている (Bertotti et al. 2003)。太陽系の他には銀河系内にある連星パルサーの観測によって精度良く確かめられている。

これまでに我々は時空の計量において距離の依存性を一般化したモデルを仮定して弱場における重力レンズ効果の一般化を行ってきた。

このモデルは時空の性質を球対称静的とし、微少量 ε_1, ε_2 と $1/r^n$ からなる項によって以下のように計量が表される。

$$ds^2 = -\left(1-\frac{\varepsilon_1}{r^n}\right)c^2dt^2 + \left(1+\frac{\varepsilon_2}{r^n}\right)dr^2 + r^2d\Omega^2 + O(\varepsilon_1\varepsilon_2,\ \varepsilon_1^2,\ \varepsilon_2^2) \tag{1}$$

$$n>0,\ \frac{\varepsilon_1}{r^n}\ll 1, \frac{\varepsilon_2}{r^n}\ll 1,\quad d\Omega^2 = d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2$$

ε_1, ε_2 は質量等から決まるパラメータで、n は座標原点からの距離 r のべき数を表す。このモデルは様々な弱場の球対称モデルを再現可能で、$n=1$ では Schwarzschild、$n=2$ では Ellis ワームホール、$n=0$ では等温球といったよく知られた時空だけでなく Ellis ワームホールといったエキゾチックな物質・エネルギーで構成される時空も表すことが出来る。

この球対称モデルを用いて、我々はこれまでに弱場における様々な重力レンズ効果を一般化してきた (Kitamura et al. 2013, Izumi et al. 2013)。

いくつかの重力レンズ効果について観測結果からレンズ天体の判別（よく知られている Schwarzschild 時空なのか、それ以外の球対称時空なのか）が可能であることを確かめ、エキゾチックな物質・エネルギーが起こす重力レンズ効果について定性的に示した。

本研究では重力レンズ観測以外に光が重力場中を通る際に受ける効果としてパルサーを光源とした time delay、frequency shift の一般化を行う。そして観測結果から重力源である天体が Sch とそれ以外の球対称時空を区別出来るのかを検証する。

2 Methods

(1) 式から光のラグランジアンは

$$L = -\left(1-\frac{\varepsilon_1}{r^n}\right)c^2\dot{t}^2 + \left(1+\frac{\varepsilon_2}{r^n}\right)\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\dot{\phi}^2) \quad (2)$$

$$\text{“}\cdot\text{“} = \frac{d}{d\lambda},\quad \lambda:\ \text{アフィンパラメータ}$$

時空が球対称なので、一般性を失わずに $\theta=\pi/2$ としてよい。

光のエネルギー E と角運動量 h は保存量で

$$E \equiv \left(1-\frac{\varepsilon_1}{r^n}\right)c^2\dot{t},\quad h\equiv r^2\dot{\phi}$$

保存量 E、L と $ds^2=0$ より光の到着時刻に関して

$$\left(\frac{dr}{cdt}\right)^2 \approx \left(1-\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{r^n}\right)\left(1-\frac{r_0^2}{r^2}\left(1-\frac{\varepsilon_1}{r^n}+\frac{\varepsilon_1}{r_0^n}\right)\right) \quad (3)$$

r_0: 光と中心天体との最近接距離

$r=r_0/cos\psi$ とすると、光が光源 S から観測者 R へ伝播する際の平坦な時空を通る場合との到着時間差は

$$\Delta T = \frac{1}{cr_0^{n-1}}\int_{\psi_S}^{\psi_{(O)}}\frac{\varepsilon_1(1-\cos^n\psi)}{\sin^2\psi}d\psi + \int_{\psi_S}^{\psi_{(O)}}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\cos^{n-2}\psi d\psi \quad (4)$$

本研究では銀河系内とその近辺にあるパルサーを光源とするため、光の最近接距離 r_0 と r_S, r_R に対して $\frac{r_0}{r_S}$, $\frac{r_0}{r_R}\to 0$ の極限をとると ψ_S, $\psi_R\to\pi/2$ である。これより n の偶奇に対して (4) 式は

n: 偶数 $n=2p$

$$\delta t_{2p} \approx \frac{\pi}{c}\frac{(2p-3)!!}{(2p-2)!!}\frac{2p\varepsilon_1+\varepsilon_2}{r_0^{2p-1}}. \quad (5)$$

n: 奇数 $n=2p+1$

$$\delta t_{2p+1} \approx \frac{2}{c}\frac{(2p-2)!!}{(2p-1)!!}\frac{(2p+1)\varepsilon_1+\varepsilon_2}{r_0^{2p}}. \quad (6)$$

となる。

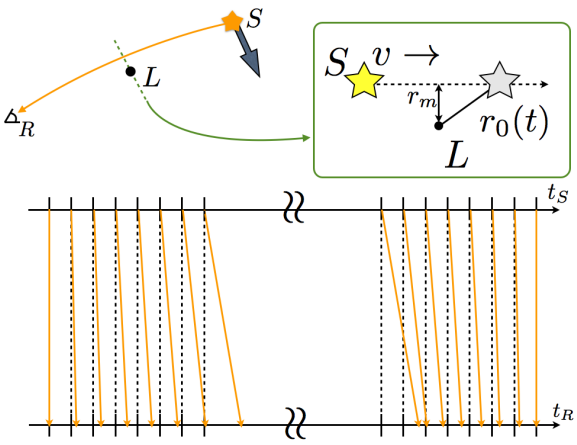


図 2: frequency shift の概略

3 Discussion

光源が相対的に運動している場合、time delay は相対論的な振動数変化 (frequency shift) を起こす。この frequency shift y は

$$y \equiv -\frac{d\Delta T(t)}{dt} \quad (7)$$

と定義される。

図 2 のように観測者との間に重力源があり、光源（パルサー）は相対的に運動しているとする。

この時の光源の運動を図 1 のように重力源のある面（レンズ面）に写影する時、レンズ面上の光源は速さ v で等速直線運動しているとする。この時、光（レンズ面上での光源）と重力源との距離 r_0 は時間に依存して変化し、r_0 の最小値 r_m を用いて以下のように表される。

$$r_0(t) = \sqrt{r_m^2+v^2t^2}$$

(5)、(6) 式より、n の偶奇に対して y は

n: 偶数 $n=2p$

$$y_{2p} = \frac{\pi}{c}\frac{(2p-1)!!}{(2p-2)!!}\frac{\varepsilon}{r_0^{2p+1}}v^2t, \quad (8)$$

n: 奇数 $n=2p+1$

$$y_{2p+1} = \frac{2}{c}\frac{(2p)!!}{(2p-1)!!}\frac{\varepsilon}{r_0^{2p+2}}v^2t. \quad (9)$$

のようになる (ただし、$\varepsilon = n\varepsilon_1 + \varepsilon_2$)。

今回は重力源が $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ と $\varepsilon > 0,\ \varepsilon < 0$ の場合において予想される光の伝播時間遅れと frequency shift をプロットした (図 3、4)。

各時空による time delay、 frequency shift の比較は time delay、freqency shift に対する n の依存性がよく読み取れるようにピーク位置を揃える。ここで $\varepsilon > 0,\ n = 1$ は Schwarzschild 時空に相当するため、**$10M_\odot$ の Schwarzschild 時空**による time delay、frwquency shift を基準に $\varepsilon,\ n$ 依存性を調べた。

なお、光源の速さ v は銀河中心に対する銀河系内天体の典型的な公転速度 $v = 200$[km/sec]、r_0 の最小値 r_m は 40AU とした。

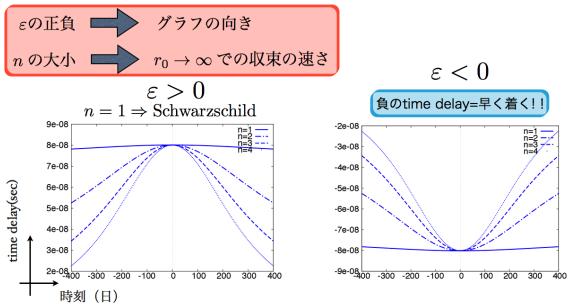


図 3: time delay における ε と n の依存性

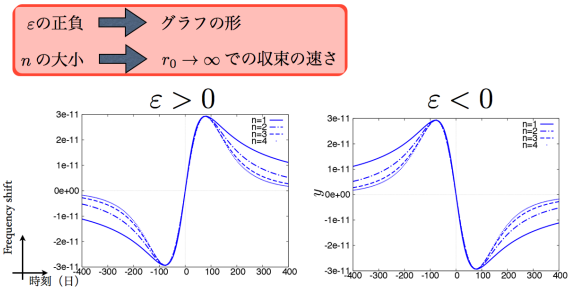


図 4: frequency shift における ε と n の依存性

図 3、4 から、プロットしたどの時空でも光源が重力源から離れていく場合、time delay の効果が弱くなり frequency shift も 0 に漸近していくことがわかる。ただし、$n = 1$ では time delay がほとんど弱くならないのに対して、$n = 2,\ 3,\ 4$ の時空では r_0 の変化に対する time delay の効果の変化が強くなる。これに伴って、frequency shift も r_0 の変化に対して $n = 1$ 以外の時空は $n = 1$ の時空より早く 0 に収束する。

また、time delay の符号、frequency shift の形は ε の符号に依存して変化する。$\varepsilon < 0$ の場合、time delay も負になるため、この時光は平坦な時空を通る場合よりも早く到着すると考えられる。

これらのことから、time delay 及び frequency shift 観測から得られた波形の解析によって重力源の時空構造を Schwarzschil 時空のような標準的な時空かエキゾチックな物質・エネルギーによる時空かを判別することができることがわかった。

4 Conclusion

- 重力凹レンズを起こす球対称モデルで time delay と frequency shift を一般化
- 観測で得られた波形から n の値と ε の正負が判別出来、どのような性質の時空なのか推定が可能

Reference

[1] I. I. Shapiro et al. Phys. Rev. Lett, 20, 1265-1269 (1968).

[2] B. Bertotti et al. Nature 425(2003)

[3] T. Kitamura, K. Nakajima, and H. Asada, Phys. Rev. D 87, 027501(2013).

[4] K. Nakajima, K. Izumi, and H. Asada, arXiv:1404.2720 [gr-qc]

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

Brans-Dicke 理論における重力波の解析

小川 茂樹 (東京理科大学大学院 理学研究科)

Abstract

スカラー・テンソル 理論とは重力が Einstein の計量テンソル場だけでなくスカラー場によっても媒介されると考えるものであり、現在の宇宙の加速膨張を説明することが出来ることから活発に研究されている。 スカラー・テンソル理論では、重力波は通常の+・×モードに加えスカラーモードも存在する。今回はスカラー・テンソル理論の典型である Brans-Dicke 理論における重力波を導出した後、観測に与える影響について議論した。

1 Introduction

重力波は、Einstein が一般相対性理論の中でその存在を予言しており、「時空のさざなみ」と表現される。一般相対性理論の枠組みでは、物質との相互作用が非常に小さい、光速で伝播するなどの特性を持っている。重力波の存在は J.Taylor と R.Hulse により証明されている。1974 年に彼らは、PSR1913+16 という連星パルサーの公転周期の変化が重力波の放出によるものだとして観測結果と比較したところ、ほぼ一致することを示し重力波の存在を間接的に証明したが、実際に重力波を直接的に観測した例は未だない。しかし現在、世界各地で次世代のレーザー干渉計重力波検出器の稼働が予定されており、これにより重力波の初検出の期待が高まっている。重力波の検出は重力理論の検証においても大変有効である。

スカラー・テンソル理論とは重力が Einstein の計量テンソル場だけでなくスカラー場によっても 媒介されると考えるものであり、現在の宇宙の加速膨張を説明することが出来ることから活発に研究されている。今回の研究では代表的なスカラー・テンソル理論の 1 つである Brans-Dicke 理論における重力波を導出した後、観測に与える影響について議論する。

2 Brans-Dicke 理論

計量とスカラー場が共存する重力理論は一般相対性理論を拡張する理論として考える事ができる。そのような理論をスカラー・テンソル理論と呼び、Brans-Dicke 理論はその代表格である。作用は

$$S = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}\left[\varphi R - \frac{\omega_{\rm BD}}{\varphi}\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi\right] + \int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}_m[\psi_m, g_{\mu\nu}] \tag{1}$$

となる。ここで、φ はスカラー場、$\omega_{\rm BD}$ は BD パラメータ、ψ_m は物質場である。右辺の第一項は非最小結合と呼ばれ、スカラー場と計量場との結合を表し、第二項はスカラー場の非正準な運動項、第三項は物質のラグランジアンで計量と物質場に依存し、$\mathcal{L}_m$ 自体にはスカラー場は含まない。

$g_{\mu\nu}$、φ について変分をとると、場の方程式は以下のように求まる。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi}{\varphi}T_{\mu\nu} + \frac{\omega_{\rm BD}}{\varphi^2}\left[\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\nabla\varphi)^2\right] + \frac{1}{\varphi}(\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi - g_{\mu\nu}\Box\varphi) \tag{2}$$

$$(3+2\omega_{\rm BD})\Box\varphi = 8\pi T \tag{3}$$

(3) 式より $\omega_{\rm BD}\to\infty$ でスカラー場の物質結合が消滅し、GR に帰着することが分かる。

3 Brans-Dicke 理論における重力波

Brans-Dicke 理論における重力波は (2)、(3) 式を線形化する事で得る事が出来る。そこで、以下の摂

動を考える。

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{4}$$
$$\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi \tag{5}$$

ここで、$|h_{\mu\nu}| \ll 1$、$|\delta\varphi| \ll 1$ で、φ_0 はバックグラウンドにおける量である。この時のクリストッフェル記号、リッチテンソル、リッチスカラーは h の 1 次まで計算すると以下のように表す事が出来る。

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}(\partial_\gamma h^{\alpha}_{\beta} + \partial_\beta h^{\alpha}_{\gamma} - \partial^{\alpha} h_{\beta\gamma}) \tag{6}$$
$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\alpha\partial_\mu h^{\alpha}_{\nu} + \partial_\nu\partial^{\alpha} h_{\mu\alpha} - \partial_\alpha\partial^{\alpha} h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu h) \tag{7}$$
$$\mathcal{R} = \partial^\beta\partial^\alpha h_{\alpha\beta} - \partial_\beta\partial^\beta h \tag{8}$$

以上より真空 ($T_{\mu\nu} = 0$) における線形化された場の方程式は

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\mathcal{R} = -\partial_\mu\partial_\nu\Phi + \eta_{\mu\nu}\Box\Phi \tag{9}$$
$$\Box\Phi = 0 \tag{10}$$

ここで $\Phi(x) \equiv -\delta\varphi/\varphi_0$ である。次に新たな場を以下のように定義する

$$\theta_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h + \eta_{\mu\nu}\Phi \tag{11}$$
$$\theta \equiv -h + 4\Phi \tag{12}$$

これより場の方程式は $\theta_{\mu\nu}$ を用いて

$$\Box\theta_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial^\alpha\theta_{\alpha\nu} - \partial_\nu\partial^\alpha\theta_{\alpha\mu} + \eta_{\mu\nu}\partial^\beta\partial^\alpha\theta_{\alpha\beta} = 0 \tag{13}$$

と表すことが出来る。ここで、$\theta_{\mu\nu}$ と θ に関するゲージ変換を考える

$$\theta'_{\mu\nu} = \theta_{\mu\nu} - \partial_\nu\xi_\mu - \partial_\mu\xi_\nu + \eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\xi_\alpha \tag{14}$$
$$\theta' = \theta + 2\partial^\alpha\xi_\alpha \tag{15}$$

いま ξ^μ を $\Box\xi_\nu = \partial^\mu\theta_{\mu\nu}$ と選ぶと

$$\partial^\mu\theta'_{\mu\nu} = 0 \tag{16}$$

となる。これはローレンツゲージである。このとき (13) 式は以下のように与えられる。

$$\Box\theta'_{\mu\nu} = 0 \tag{17}$$

これは波動方程式であり、この時の解は平面波になる。

$$\theta_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}\exp(ik^\alpha x_\alpha) \tag{18}$$
$$\Phi = B\exp(ik^\alpha x_\alpha) \tag{19}$$

ここで $()'$ は省略した。$\Box\xi^\mu = 0$ より ξ の任意性が残っているため、ξ を

$$\begin{cases} \Box\xi^\mu = 0 \\ \partial_\mu\xi^\mu = -\frac{1}{2}\theta + \Phi \end{cases} \tag{20}$$

とする。もし、$\theta = 2\Phi$ のとき

$$h_{\mu\nu} = \theta_{\mu\nu} \tag{21}$$

となり、$h_{\mu\nu}$ は平面波である事が分かる。また $\theta_{\mu\nu}$ は以下の条件を満たす。

$$\begin{cases} \partial^\mu\theta_{\mu\nu} = 0 \\ \theta = 2\Phi \end{cases} \tag{22}$$

重力波が z 方向に伝播するとき、k^μ は

$$k^\mu = (k, 0, 0, k) \tag{23}$$

であり、$\theta_{\mu\nu}$ の振幅 $A_{\mu\nu}$ は $\partial^\mu\theta_{\mu\nu} = 0$ より

$$A_{0\nu} = -A_{3\nu} \tag{24}$$
$$A_{\nu 0} = -A_{\nu 3} \tag{25}$$
$$A_{00} = -A_{30} = A_{33} \tag{26}$$

となる。ここで $A_{\mu\nu}$ のゲージ変換を考えると、

$$A'_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} - ik_\mu\tilde{\xi}_\nu - ik_\nu\tilde{\xi}_\mu \tag{27}$$

$A'_{\mu\nu}$ の成分は

$$A'_{00} = A_{00} + 2ik\tilde{\xi}_0 \tag{28}$$
$$A'_{11} = A_{11}, A'_{22} = A_{22}, A'_{21} = A_{21} \tag{29}$$
$$A'_{31} = A_{31} - ik\tilde{\xi}_1, A'_{32} = A_{32} - ik\tilde{\xi}_2 \tag{30}$$

となり、$A'_{00} = A'_{31} = A'_{32} = 0$ となるように $\tilde{\xi}_0$、$\tilde{\xi}_1$、$\tilde{\xi}_2$ を選ぶ。また $h = 2\Phi$ より

$$h = h_{11} + h_{22} = 2\Phi \tag{31}$$

となる。このゲージ下では摂動の計量 $h_{\mu\nu}$ は

$$h_{\mu\nu} = A^{(+)}(t-z)e^{(+)}_{\mu\nu} + A^{(\times)}_{\mu\nu}(t-z)e^{(\times)_{\mu\nu}} + \Phi(t-z)e^{(s)}_{\mu\nu} \tag{32}$$

ここで、$e_{\mu\nu}^{+,\times,s}$ は以下の通りである。

$$e_{\mu\nu}^{(+)} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{\mu\nu}^{(\times)} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{33}$$

$$e_{\mu\nu}^{(s)} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ここで $A^{(+)}e_{\mu\nu}^{(+)} + A^{(\times)}e_{\mu\nu}^{(\times)}$ は通常の重力波である。また、$\Phi e_{\mu\nu}^{(s)}$ はスカラー重力波を表す。

4 偏光モード

このゲージにおける線素はスカラー波のみに限ったとき、

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + (\delta_{ij} + h_{ij}(t-z))dx^i dx^j \qquad (34) \\ &= -dt^2 + (1+\Phi(t-z))(dx^2+dy^2) + dz^2 \end{aligned}$$

となる。スカラー重力波の波長は質点間の距離より十分大きいとし、ビームスプラッターを座標の原点に置く。また、周波数 f は $1/T_0$ より十分小さいとする。ここで、T_0 は原点から質点に向かうビームの時間である。原点から座標 X、Y、Z の質点の距離は

$$L = \sqrt{(1+\Phi_0)(X^2+Y^2)+Z^2} \tag{35}$$

となり、波が伝播する方向の横方向の座標に作用する。もし、$L_0 \equiv \sqrt{X^2+Y^2+Z^2} = T_0$ とすると、Φ_0 の 1 次の次数で

(Z=0 のとき)

$$L = \left(1 + \frac{1}{2}\Phi_0\right) L_0$$

(X=Y=0 のとき)

$$L = L_0$$

となる。以上より、スカラー波も通常の＋、×偏光のように横方向である。また、スカラー波の入射方向の位相のズレは

$$\Delta\varphi(\theta,\phi) = -\frac{1}{2}\Phi_0 \cdot \varphi_{arm} \cdot \sin^2\theta\cos 2\phi \tag{36}$$

となる。干渉計の角感度は図 1 に示される。

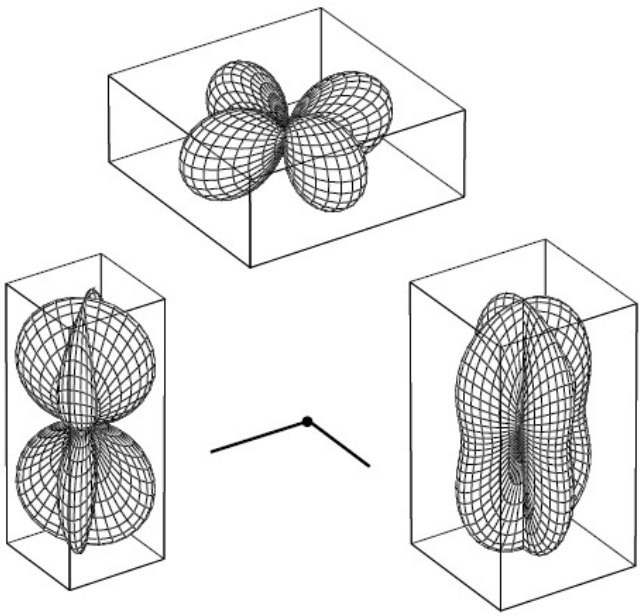


図 1: スカラーモード（上）、＋モード（右下）、×モード（左下）

5 Conclusion

今回は、スカラー・テンソル理論の代表格である Brans-Dicke 理論における重力波の解析を行った。その結果、導出された偏光モードには通常の＋・×モードの他にスカラーモードが存在する事が分かった。また、スカラーモードは＋・×モード同様に横方向に作用する。今後の方針としては、重力波の具体的な波源を仮定することで観測にどのような影響を与えるか議論したい。また、より一般化されたスカラー・テンソル理論である Horndeski 模型などにおける重力波について同様の解析を行っていきたい。

Reference

Michele Maggiore and Alberto Nicolis. 2000. Phys. Rev. D 62, 024004

Kent Yagi. 2013. Int.J.Mod.Phys. D22 (2013) 1341013

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

原始ベクトルモードの性質と CMB からの制限

嵯峨 承平 (名古屋大学大学院　宇宙論研究室)

Abstract

宇宙論的摂動論を考えた場合、摂動のモードがスカラー、ベクトル、テンソルモードと分解される。完全流体を仮定したアインシュタイン重力のもとで、ベクトルモードは膨張とともに薄まっていく減衰解しか存在せず、標準的な宇宙論を考える場合は無視される。ところが非等方圧を持つ、例えば無質量ニュートリノなどが存在するとベクトルモードに成長解が現れる。一般的にベクトルモードが存在すると、宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) の B-mode 偏光を作ることが知られており B-mode 観測によって原始ベクトルモードを制限することが可能となる。本研究では、このベクトルモードが作る CMB のゆらぎからどのような制限がなされるかを示したためその一連の結果を発表する。

1 Introduction

BICEP2 による大スケールにおける CMB B モード偏光の発見 (BICEP2 Collaboration 2014) は、インフレーション起源の原始重力波の検証になりうる。この BICEP2 の結果は原始重力波では説明することが困難なシグナルが存在しており多くの議論がなされている。また、*Planck* によって得られたテンソル-スカラー比の制限より大きな値を示唆しており、これについても同様に多く研究されている。

例えば、CMB の B モード偏光を生成する状況は、原始重力波だけではなくその他にもいくつも存在する。位相欠陥や磁場が初期宇宙で存在している場合に独自の偏光を作り出すため、これらの B モード偏光が混入している可能性が指摘されている。また、等曲率ゆらぎと断熱ゆらぎの負相関によって *Planck* と BICEP2 の相違を説明するような試みもなされている。

本研究では、B モード偏光を作るソースとしてベクトルモード、特に無質量ニュートリノのような free-streaming 粒子によって生成されるベクトルモードを考える。標準宇宙論ではベクトルモードは減衰モードしか存在しないために無視される。しかし、無質量ニュートリノがある宇宙における特別な初期条件のもとではベクトルモードが存在しうることが示されている (Lewis 2004)。我々はこのベクトルモードによって作られる B モードがどのような性質を持ち、BICEP2 の結果をうまく説明することが可能であるかどうかを調べた。次の章では、無質量ニュートリノのベクトルモードについて簡単に説明を行う。3 章では、MCMC を用いて解析を行った結果を示す。

一方で、BICEP2 の解析で用いられた foreground に関する問題が挙がってきている。BICEP2 チームは *Planck* のマップを用いているが、そのマップ自体が CIB の強度をまだ考慮していなく、偏光度を小さく見積もってしまっている可能性がある。この問題については、完全な foreground のマップが公開されない限り議論することは困難であるため本研究ではこれ以上言及はしない。

2 Vorticity vector mode

本研究では計量を synchronous ゲージのもとで考える。すなわち、

$$ds^2 = a^2\left[-d\eta^2 + (\delta_{ij} + h_{ij})\,dx^i dx^j\right] , \quad (1)$$

計量のベクトルモードは次のように偏極ベクトルを用いて展開される。

$$h_{ij}(\eta, \mathbf{k}) = \sum_{\lambda=\pm1} h^{(\lambda)}\left[\hat{k}_i \epsilon_j^{(\lambda)}(\hat{k}) + \hat{k}_j \epsilon_i^{(\lambda)}(\hat{k})\right] , \quad (2)$$

$\lambda = \pm 1$ はヘリシティの状態を表す。一般相対論はパリティ保存する理論であるため一般的にこのヘリシティの状態は混ざらないためここからは ± 1 を略す

ことにする。そして、アインシュタイン方程式は、

$$\dot{\sigma} + 2\mathcal{H}\sigma = -8\pi G a^2 p \Pi / k \ , \quad (3)$$

$$k^2 \sigma = 16\pi G a^2 q \ , \quad (4)$$

ただし、$\sigma \equiv \dot{h}/k$ で計量摂動を表す。ここから分かるように、非等方圧が無視される場合、計量摂動は a^{-2} で減衰するモードしか存在しない。ところが、非等方圧が存在できる場合には正則なモード (vorticity mode) が存在しうる。

Vorticity モードは、流体の初期条件において光子と無質量ニュートリノの運動量が反対向きで全運動量がゼロとなっている初期条件の時に可能なモードである。これは、スカラー摂動の等曲率ゆらぎとのアナロジーで理解することができる。

Vorticity モードを特徴付ける初期パワースペクトルを次のように定義する。

$$\langle \sigma(\mathbf{k}) \sigma^*(\mathbf{k}') \rangle \equiv (2\pi)^3 \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_v(k) \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \ , \quad (5)$$

$$\mathcal{P}_v \equiv r_v \mathcal{A}_s \left(\frac{k}{k_{v0}} \right)^{n_v - 1} \ , \quad (6)$$

ここで、r_v が vector-to-scalar ratio、n_v が vector-spectral index である。また、スカラーモード、テンソルモードも同様に次のように定義する。

$$\mathcal{P}_s(k) = \mathcal{A}_s \left(\frac{k}{k_{s0}} \right)^{n_s - 1 + \frac{1}{2}\alpha_s \ln(k/k_{s0})} \ , \quad (7)$$

$$\mathcal{P}_t(k) = r_t \mathcal{A}_s \left(\frac{k}{k_{t0}} \right)^{n_t} \ , \quad (8)$$

pivot scale はそれぞれ $k_{s0} = 0.05\mathrm{Mpc}^{-1}$、$k_{v0} = 0.05\mathrm{Mpc}^{-1}$、$k_{t0} = 0.01\mathrm{Mpc}^{-1}$ とおいた。

このベクトルモードによって作られる CMB のゆらぎを図 1 に示した。図 1 から分かるように、BICEP2 で観測された $50 \lesssim \ell \lesssim 300$ で B モード偏光をあわせると温度ゆらぎの大スケールではテンソルモードの方が大きくなる。言い換えると、vorticity モードはテンソルモードよりも温度ゆらぎを “つくりにくい” とも言える。

3 Results

この章では cosmoMC を用いて解析を行った結果を示す。テンソルモードとベクトルモードの比較を行う上で表 1 のようにパラメーター範囲を動かして解析を行った。

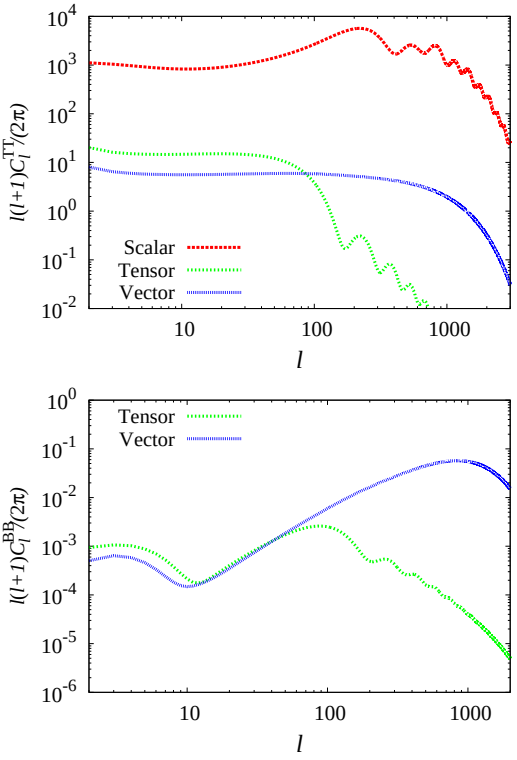


図 1: スカラーの断熱初期条件による温度ゆらぎ (赤)、原始重力波 (緑) と vorticity モード (青) による温度ゆらぎと B モード偏光。それぞれスケール不変なスペクトルを仮定している。

Parameter	Prior range	Baseline
α_s	$[-0.5 : 0.5]$	0
r_v	$[0 : 0.2]$	0
n_v	$[-2.0 : 6.0]$	1
r_t	$[0 : 1.0]$	0
n_t	$[-2.0 : 5.0]$	0

表 1: パラメーターを変化させる場合の範囲。ベクトルモードはテンソルモードよりも遷移関数が大きくなるため小さなベクトル-スカラー比が要求される。

3.1 One-parameter estimation

まず始めに、スケール不変を仮定した場合テンソルモードとベクトルモードどちらがよく fit するかを調べた。best-fit パラメーターを選んだときの、カイ二乗値 (または、log likelihood) を比較することでどちらがより fit するかを知ることができる。結果として、$\chi^2_{\rm vec} - \chi^2_{\rm tens} = -3.294$ となりベクトルモードの方がよく fit することが分かった。これはスケール不変を仮定した場合、BICEP2 で得られたデータ $50 \lesssim \ell \lesssim 300$ で fit すると温度ゆらぎにテンソルモードの方が大きく寄与してしまうためである。

3.2 Two-parameter estimation

続いて、2 パラメーターを動かすことで得られるカイ二乗値を比較する。(i)(r_v, n_v)、(ii) (r_t, n_t)、(iii) (r_t, α_s)、(iv) (r_v, r_t) のパラメーターを変化させ同様の解析を行った。(i) はベクトルモードのみ、(ii) はテンソルモードのみ、(iii) は BICEP2 とほぼ同じパラメーター設定、(iv) はベクトルモードとテンソルモードの混合型という 4 種類で行う。結果を表 2 にまとめた。

この結果から、blue のテンソルモードがよく fit することが分かる。これは、テンソルモードは blue になることで大スケールの温度ゆらぎへの寄与を抑えることができるからである。一方でベクトルモードが fit しないのは、テンソルモードより小スケールでゆらぎを作る傾向があるため (これはシルク減衰のスケールまで続く。)blue にしても小スケールで温度ゆらぎに寄与してしまうためである。

しかし、blue なテンソルモードは標準的なインフレーションでは生成されず特別な機構を考える必要があるためあまり期待されている訳ではない。

3.3 Three-parameter estimation

最後に、(Ichiki et al. 2012) と同様に (r_t, r_v, n_v) の 3 パラメーターを動かして制限を行う。テンソルモードはスケール不変なスペクトルとして固定してある。この結果を図 2 に示す。おもしろいことに、ベクトル-スカラー比は 0 を disfavore しているがテンソル-スカラー比はそうではない。すなわち、ベクトルモードとスケール不変なテンソルモードが存在している場合、ベクトルモードで B-mode 偏光を作った方が fit があうということである。この理由も先ほどと同様、テンソルモードはベクトルモードよりも温度ゆらぎを大スケールで作りやすいことが原因であると考えられる。

(i) Vector mode		
parameters	best fit	68% limits
$10^4 r_v$	$6.8^{+4.4}_{-4.4}$	$6.2^{+1.14}_{-1.31}$
n_v	$0.47^{+0.93}_{-0.55}$	$0.55^{+0.194}_{-0.263}$
$\chi^2 = 8715.696$		$(\Delta\chi^2 = 2.593)$

(ii) Tensor mode		
parameters	best fit	68% limits
r_t	$0.16^{+0.21}_{-0.11}$	$0.17^{+0.045}_{-0.051}$
n_t	$2.0^{+0.99}_{-1.8}$	$1.7^{+0.45}_{-0.40}$
$\chi^2 = 8713.103$		

(iii) Running index		
parameters	best fit	68% limits
r_t	$0.17^{+0.18}_{-0.10}$	$0.19^{+0.037}_{-0.046}$
$10^2\alpha_s$	$-2.9^{+2.6}_{-2.6}$	$-2.9^{+0.74}_{-0.74}$
$\chi^2 = 8714.250$		$(\Delta\chi^2 = 1.147)$

(iv) Vector and Tensor modes		
parameters	best fit	68% limits
r_t	$0.076^{+0.14}_{-0.076}$	$0.069^{+0.032}_{-0.041}$
$10^4 r_v$	$3.4^{+5.7}_{-3.3}$	$4.1^{+1.3}_{-1.4}$
$\chi^2 = 8715.231$		$(\Delta\chi^2 = 2.128)$

表 2: それぞれのパラメーター設定における best-fit と likelihood の極値からの制限と 1-σ(marginalized) error。

4 Summary

本研究は無質量ニュートリノのような free-streaming 粒子が引き起こす特殊な初期条件のもとでのベクトルモードの可能性について議論した。スカラーモードで、等曲率ゆらぎではなく断熱ゆらぎが支持されているのは観測によって決定されており、

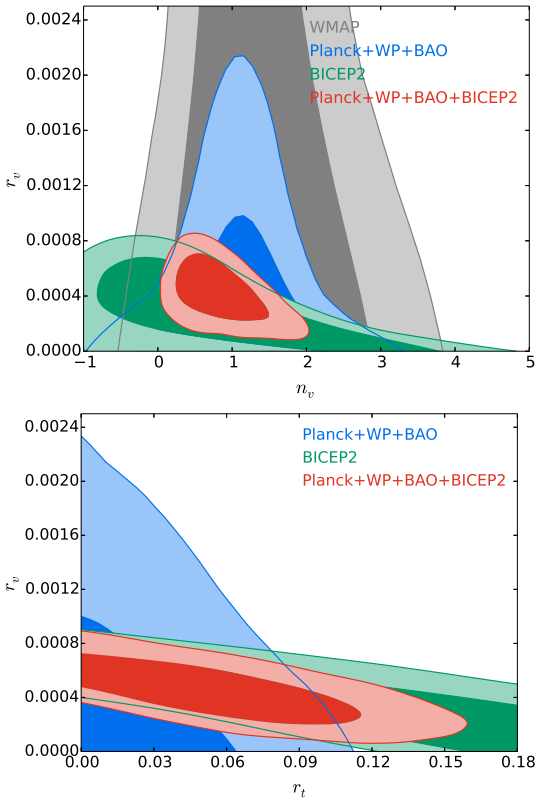


図 2: 各パラメーターの制限。BICEP2 のみは収束させるために標準的な宇宙論 6 パラメーターを *Planck* の best-fit に固定してある。

それと同様にこのベクトルモードの可能性も観測によって決められるべきである。そのもとで、本研究は BICEP2 によって検出されたと言われている B-mode によってこのベクトルモードが可能であるかを MCMC を用いて解析した。

その結果、ベクトルモードはスケール不変な場合テンソルモードよりもよく fit することが確認できた。これは、BICEP2 の結果だけに対して有効という訳でなく一般的な vorticity mode の性質であるため今後のより精密な観測によって明らかにされると考えられる。

最後に、B-mode の将来観測でより精密な shape を決定することは非常に重要であるが大スケール観測か小スケール観測のどちらがよく決定しやすいかを述べておく。小スケール側は、lensing B-mode によって縮退があると考えられる。すなわち、ベクトルモードと lensing B-mode はほぼ同じ位置にピークがありこれを区別するには非常に精密な小スケール観測が必要である。一方で、大スケール観測はテンソルモードのピークの有無によって有効な判断が可能となる。加えて、再電離のための山が見えるかどうかでも blue なテンソルモードかを知ることが可能であるため、大スケール観測の方が適していると考えられる。

Reference

P. A. R. Ade *et al.* [BICEP2 Collaboration], Phys. Rev. Lett. **112**, 241101 (2014).

S. Saga, M. Shiraishi and K. Ichiki, arXiv:1405.4810.

A. Lewis, Phys. Rev. D **70**, 043518 (2004).

K. Ichiki, K. Takahashi and N. Sugiyama Phys. Rev. D **85**, 043009 (2012).

光学浮上鏡を用いた重力デコヒーレンスの観測実験

牛場　崇文 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

重力理論と量子論の統一理論の構築は現代の物理学における大きな未解決問題の一つであり、これを解決することができれば、初期宇宙の現象に対して非常に大きな示唆を与えてくれるものである。現在までに、様々な理論提案がなされているが、それらの検証実験は十分になされていると言い難いのが現状である。
本講演ではそのように十分な検証を行うことが困難な量子重力理論の中で、近年テーブルトップの実験によって検証の可能性が示唆されている重力デコヒーレンスと呼ばれる現象に焦点を当て解説を行う [1]。また、私たちが提案するレーザー光を用いて浮上させた鏡を用いた重力デコヒーレンスの観測実験について解説する。この実験により重力デコヒーレンスの観測に成功すれば、量子力学における観測問題に大きな示唆を与えることができると期待される。

1　序章

近年の爆発的な技術的な進歩に伴い、振動子の精密位置計測分野において、原子や分子などの量子性を観測しやすい物体比べて非常に重い振動子を光の量子性を用いて量子的に駆動することに成功している。現在までに fg スケールの振動子から mg スケールの振動子まで様々な質量スケールの振動子を量子的に駆動することに成功しており、将来的には重力波検出器によって kg スケールの振動子でも光子の量子性によって振動子の動きが支配されるようになると言われている。このような大きな質量スケールの振動子は原子や分子などの軽い物体に比べて重力による影響が大きいため、これらの振動子を用いることによって重力デコヒーレンスの観測が可能であるとの提案がなされており、研究が進められている。

2　重力デコヒーレンス

重力デコヒーレンスとは重力エネルギーによって系の量子性を崩壊させる現象である。ハイゼンベルグの不確定性関係として時間とエネルギーの不確定性関係は

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar \tag{1}$$

と表される。ここで ΔE を重力エネルギーとしたときの Δt は重力エネルギーによる系の量子性の寿命を表す。

このようなメカニズムによって系の量子性が崩壊することが確認できれば、マクロな物体における量子的な重ね合わせ現象が実生活において観測されない理由や、波動関数の波束が観測によって収縮してしまう理由に関して何らかの示唆を与えられると考えられている。

3　観測方法

重力デコヒーレンスの観測のためにはマクロな物体の間にエンタングルメント状態を生成し、その崩壊時間を見ることによって重力デコヒーレンスによる量子性の崩壊を観測する。このような重力デコヒーレンスの観測は重力波の分野から発症したもので、重力波検出器を用いて観測することが可能である。図 1 に日本の重力波検出器 KAGRA のメインとなる干渉計部分の図を示す。

KAGRA では、最も感度が良い周波数帯で、ハイゼンベルグの不確定性関係から決まるような極限的な感度 (SQL) に到達するため、干渉計の二枚の鏡が光子の量子性を介してエンタングルメント状態となる。したがって、レーザーのスイッチを OFF した後にそのエンタングルメントがどの程度持続するのかを観測することによって、重力デコヒーレンスの理論が正しいかどうかの検証が可能となる。

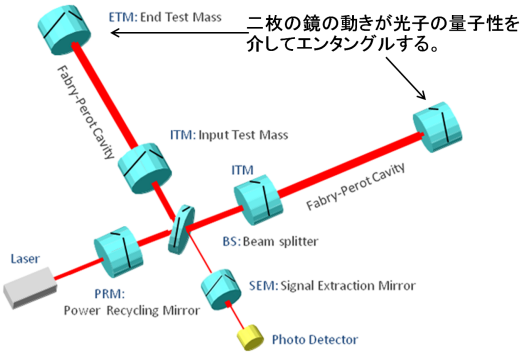


図 1: KAGRA の干渉計のメイン部分

4　先行研究とその問題点

このような重力デコヒーレンスの観測は重力波検出器のような非常に重たいスケールのみで観測するのではなく、いろいろな質量スケールで観測することが重要となる。特に mg スケールでの観測は重力波検出器のような大規模な実験装置ではなくテーブルトップでの実験によって実現可能性があることから私たちの実験室ではそれを目指した研究が行われている [2]。

しかしながら、地上で観測を行うためには振動子を固定する機械的なサポートが必要不可欠であり、そのサポートからの熱雑音によって二つの振動子の間にエンタングルメント状態を生成することが困難となっている。一方で、宇宙に振動子を打ち上げることで機械的なサポートなしに振動子を駆動することができるが、衛星計画であるために膨大な時間と費用がかかるため観測の成功までには多大な時間を要すると考えられる [3]。

5　光学浮上

そこで、地上で機械的なサポートなしに振動子を浮かせることができれば、重力デコヒーレンスの観測の大きな妨げとなる機械的サポートからの熱雑音による影響を原理的になくすことが可能である。そのために用いられる手法として光学浮上と呼ばれるものがある。これは光の輻射圧力のみを用いて物体を浮上させる手法で、様々なセットアップでの光学浮上が提案されている [4,5]。

一般に 1 μm 程度の波長をもつ光子の光子数状態間のエネルギーギャップは

$$\Delta E_p = \hbar\omega \sim 10^{-19}\ \mathrm{J} \tag{2}$$

である。一方で室温における熱揺らぎの大きさは

$$\Delta E_t = k_B T \sim 10^{-23}\ \mathrm{J} \tag{3}$$

である。したがって、光子数状態間の遷移が外界の熱揺らぎによって引き起こされる確率は

$$P \propto \exp\left(-\frac{\Delta E_p}{\Delta E_t}\right) \sim 0 \tag{4}$$

となるため、レーザー光が外界の熱揺らぎに対してエネルギーのやり取りをすることはない。したがって、レーザー光のみを用いて部隊を浮上させると熱雑音を導入することなく物体を支持することができる。

6　実験の進捗

このような経緯から私たちは光学浮上させた微小鏡をエンタングルメントさせることにより、重力デコヒーレンスの観測を行うことのできる新しい実験セットアップを考案した。現在までに、浮上鏡の系の安定性解析や浮上鏡の感度計算によるエンタングルメントを生成するための実験パラメータの設定を行った。また、実際に浮上させる微小鏡の製作を企業に依頼し製作が完了している。

7　まとめ

重力が量子力学の枠組みの中で果たす役割の一つとして挙げられる重力デコヒーレンスの観測は巨視的な系でのエンタングルメント状態の崩壊時間として実験的に観測することが可能である。その観測のために私たちは光学浮上鏡を用いた観測実験を計画しており、理論計算および実験準備が進められている。本実験において重力デコヒーレンスの観測に成功すれば、巨視的な系において量子的な重ね合わせ状態が観測されない理由や、観測によって波動関数の波束の収縮が何故起こるのかといった量子力学における観測問題に対して大きな示唆を与えることができる。

Reference

[1] Roger Penrose: General Relativity and Gravity 28, 5 (1996)

[2] N. Matsumoto, Y. Michimura, et. al.: arXiv:1312.5031

[3] R Kaltenbaek G. Hechenblaikner et. al.: Experimental Astronomy 34, 2 (2012)

[4] S. Singh, G. A. Phelps et. al.: Phys. Rev. Lett. 105, 213602

[5] G. Guccione, M. Hosseini et. al.: Phys. Rev. Lett. 111, 183001 (2013)

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

RXJ1131-1231 の重力レンズモデル

高橋 誠 (近畿大学大学院 総合理工学研究科)

Abstract

4 重像クエーサー RXJ1131-1231 のフラックス異常の有無を確認するためにはフラックス分布をコア部分とホスト銀河に分離しなければならない。本研究ではすでに知られている SIE-ES モデルのパラメータを用いて分離を行った。

1 Introduction

宇宙空間にどのようにダークマターが分布しているか観測的に決めるためには重力レンズが有用である。特に 4 重像クエーサーレンズを用いることによって $10^{8-9}M_{\odot}$ のダークハローの有無を調べることができる。

重力レンズでフィットする物理量は、フラックス、像の位置、時間遅延である。そのうち位置がよくフィットする重力レンズモデルでもフラックス比が合わない場合をフラックス比異常と呼ぶ。フラックス比異常の有無を確かめるにはクエーサーのコア部分のフラックスの値が必要だがコア部分の光とホスト銀河の光が混ざってしまうのでそれらを分離する必要がある。

2 Methods/Instruments and Observations

本研究は図 1 の HST で観測された 4 重像クエーサー RXJ1131-1231 に対し以下の方法でクエーサーのコア部分とホスト銀河の分離を試みる。波長は 1600nm、F160W フィルタで H バンドを撮影したもの。

- クエーサーの輝度分布を仮定する。
- 光路を計算する。
- Point spread function を畳み込んで像を作る。
- 像と観測を比較する。

以上を繰り返して最良のクエーサーの輝度分布を見つけ出す。

今回、数値計算に使用するレンズ銀河のポテンシャルはすでにパラメータが推定されている SIE-ES モデルを仮定する。

SIE(Singular Isothermal Ellipsoid) とは楕円対称性のあるポテンシャル分布でパラメータは全質量、楕円率、楕円の回転の 3 つである。

ES(External Shear) とは銀河の外から来るポテンシャルで銀河のポテンシャルに 1 次の歪みを加える。パラメータは歪みの大きさと回転の 2 つである。

3 Results

χ by eye で得られた像を図 2 に示す。ホスト銀河の輝度分布をプロットすると図 3 の様になり指数法則 $n = 1$ はほぼ寄与しなかった。

4 Discussion

今後は χ^2 を用いてより精度よくフィッティングする。さらに MIR の観測データに応用する予定である。

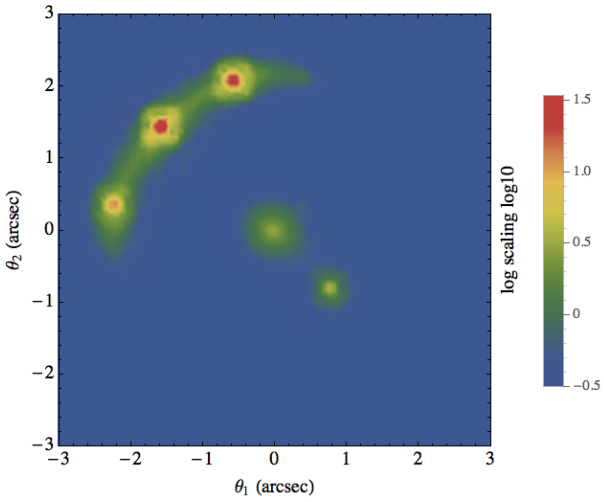


図 1: HST H band

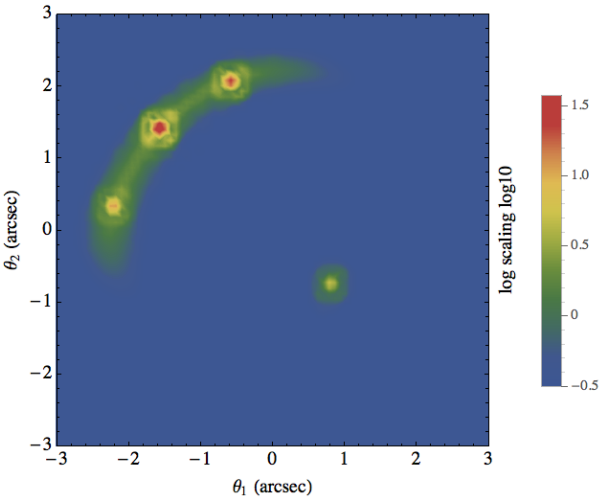


図 2: 計算結果

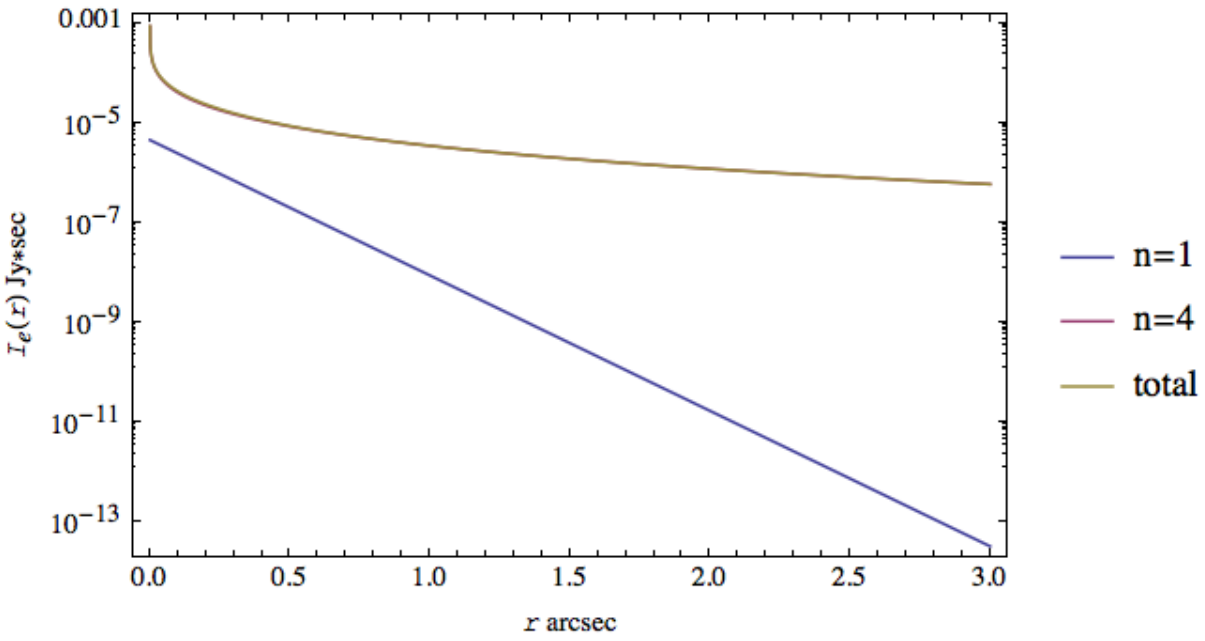


図 3: ホスト銀河の輝度分布

Stabilization of linear higher derivative gravity with constraints

秋田　悠児 (立教大学　理論物理学研究室)

Abstract

Linear instability in non-degenerate higher derivative theories, which is known as Ostrogradski's instability, can be removed by the addition of constraints. These constraints must reduce the dimension of original phase space. In other words, instabilities are removed only if constraints reduce the dynamical degrees of freedom(d.o.f) from original ones. Also, theories with curvature invariants such as $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$, $C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma}$, have the Ostrogradski's instability because they contain higher derivatives of the metric with respect to time.

I will start with a review about the stabilization of higher derivative gravity models. I consider the Lagrangian of the form $\mathcal{L} = \sqrt{-g}(R - 2\Lambda + \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu})$. First, I give the second-order action for metric perturbations on a general background. Then, I focus on the Minkowski background, and demonstrate how the instabilities appear in each type of perturbations (i.e. scalar, vector, and tensor modes.) by constructing the Hamiltonian. I show that those instabilities can be removed by imposing constraints on the theory. Finally, I will give some comments on cosmological implications of the constrained theory.

1 Introduction

Non-degenerate higher derivative theories suffer from the Ostrogradski's instability. The statement of Ostrogradski's instability is that we cannot avoid appearing the ghost in non-degenerate higher derivative theories. However, several theories such as $f(R)$ gravity evade this instability while they contain higher derivatives of the metric with respect to time. This is because they are degenerate, which means that they are constrained. Unstable degrees of freedom of $f(R)$ and GR is removed by gauge constraint. In general, non-degenerate higher derivative theories are inevitably unstable.

We consider the following action

$$S = \frac{M_{\rm Pl}^2}{2}\int d^4x\sqrt{-g} \times \left[R - 2\Lambda + \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}\right] . \quad (1)$$

First, we show that this theory is unstable, i.e. , the ghost will appear in this theory. Then, we stabilize the theory by adding suitable constraints which reduce the dimension of the phase space.

2 Higher derivative gravity: quadratic action

We consider the Lagrangian which contains the quadratic curvature invariant $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$.

$$\frac{\mathcal{L}}{\sqrt{-g}} = \frac{M_{\rm Pl}^2}{2}\left[R - 2\Lambda + \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}\right] . \quad (2)$$

Our first purpose is to calculate the action up to the quadratic order in the metric perturbation $h_{\mu\nu}$, which is given by

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} . \quad (3)$$

We obtain Ricci tensor, Ricci scalar,and Einstein tensor in linear order as follows.

$$\begin{aligned} R^L_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left(\bar{\nabla}_\rho\bar{\nabla}_\mu h^\rho{}_\nu + \bar{\nabla}_\rho\bar{\nabla}_\nu h^\rho{}_\mu \right. \\ &\qquad \left. -\Box h_{\mu\nu} + \bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu h\right) , \\ R^L &= \bar{g}_{\mu\nu}\delta R^L_{\mu\nu} - \bar{R}^{\mu\nu}h_{\mu\nu} , \\ G^L_{\mu\nu} &= \delta R^L_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\delta R^L - \Lambda h_{\mu\nu} . \end{aligned}$$

Note that, the indices are raised and lowered by back ground metric $\bar{g}_{\mu\nu}$. Assuming that constant curvature background of either Minkowski, de Sitter, Anti-de Sitter, the Weyl tensor vanishes, we should thus compute the linear order term of weyl tensor to calculate the action up to quadratic order. Then, we obtain the Second order action,

$$\begin{aligned} S &= -\frac{M_{\rm Pl}^2}{4}\int d^4x\sqrt{-\bar{g}}h^{\mu\nu} \\ &\quad \Big[(1+8\alpha\Lambda+\frac{4}{3}\beta\Lambda)G^L_{\mu\nu} \\ &\quad +(\beta+2\alpha)(\bar{g}_{\mu\nu}\Box-\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu+\Lambda\bar{g}_{\mu\nu})R^L \\ &\quad +\beta(\Box G^L_{\mu\nu}-\frac{2\Lambda}{3}\bar{g}_{\mu\nu}R^L)\Big] \ . \end{aligned} \tag{4}$$

In this equation, we omit δ so δR is denoted as R^L.

3 Metric perturbations around Minkowski background and instabilities

Metric perturbations are given by

$$\begin{aligned} {\rm d}s^2 &= -(1+2A)dt^2+2(B_{,i}-S_i)dx^i dt \\ &+ \left[(1-2\psi)\delta_{ij}+2E_{,ij}+2F_{(i,j)}+h_{ij}\right]dx^i dx^j \ . \end{aligned}$$

Here, A, B, E, and ψ are scalar perturbations. S_i and F_i are vector perturbations and are transverse. h_{ij} is tensor perturbation and is transverse and traceless. We will consider each types of perturbations in the following sections.

3.1 Tensor perturbation : Helicity-2 sector

In this section, we consider the tensor perturbation, which has helicity-2. Using Eq. (4), (5), we obtain

$$\begin{aligned} S = \frac{M_{\rm Pl}^2}{2}\int d^4x\Big[\beta\left\{(\ddot{h}_{ij})^2+2\dot{h}^{ij}\nabla^2\dot{h}_{ij}+(\nabla^2 h_{ij})^2\right\} \\ +(\dot{h}_{ij})^2+h^{ij}\nabla^2 h_{ij}\Big] \ . \end{aligned} \tag{5}$$

Notice that only the term which is proportional to β survives. This action contains higher order derivative with respect to t. Let us discuss the instability of this system by constructing the Hamiltonian. The choice of canonical variables are

$$\begin{aligned} h^{(1)}_{ij} \equiv h_{ij} \quad &\leftrightarrow \quad \pi^{ij} = 2\dot{h}^{ij}+\beta(-2\dddot{h}^{ij}+4\nabla^2\dot{h}^{ij}) \ , \\ h^{(2)}_{ij} \equiv \dot{h}_{ij} \quad &\leftrightarrow \quad p^{ij} = 2\beta\ddot{h}^{ij} \ . \end{aligned}$$

Using these definitions, we can construct the Hamiltonian by Legendre transform:

$$\begin{aligned} H = \frac{M_{\rm Pl}^2}{2}\int d^3x\Big[\frac{1}{4\beta}p^{ij}p_{ij}+\pi^{ij}h^{(2)}_{ij}-2\beta h^{(2)}_{ij}\nabla^2 h^{(2)}_{ij} \\ -h^{(2)}_{ij}h^{(2)\,ij}-\beta\nabla^2 h^{(1)}_{ij}\nabla^2 h^{(1)\,ij}-h^{(1)}_{ij}\nabla^2 h^{(1)}_{ij}\Big] \ . \end{aligned} \tag{6}$$

This Hamiltonian is linearly dependent on π^{ij}, and therefore the Hamiltonian is not bounded from below, which means that the tensor perturbation of the theory is unstable.

3.2 Scalar perturbation : Helicity-0 sector

We can obtain the quadratic action of scalar perturbations as follows:

$$\begin{aligned} S &= \frac{M_{\rm Pl}^2}{2}\int d^4x\Big[(-6\dot{\Psi}^2-2\Psi\nabla^2\Psi+4\Psi\nabla^2\Phi) \\ &\quad +4\left(\beta+3\alpha\right)\left(3\ddot{\Psi}^2+4\dot{\Psi}\nabla^2\dot{\Psi}+2\ddot{\Psi}\nabla^2\Phi\right) \\ &\quad +2\left(3\beta+8\alpha\right)\left(\nabla^2\Psi\right)^2+2(\beta+2\alpha)\left(\nabla^2\Phi\right)^2 \\ &\quad -4(\beta+4\alpha)\nabla^2\Psi\nabla^2\Phi\Big] \ . \end{aligned} \tag{7}$$

Here, Ψ and Φ are the gauge invariant perturbations defined by

$$\Phi \equiv A+\dot{B}-\ddot{E} \ , \tag{8}$$

$$\Psi \equiv \psi \ . \tag{9}$$

Φ is non-dynamical since $\dot{\Phi}$ does not appear in the action. This means that variation with respect to Φ gives a constraint. The choice of canonical variables are

$$\Phi \equiv \Phi \quad \leftrightarrow \quad p_\Phi = 0 \ , \tag{10}$$

$$\Psi \equiv \Psi \quad \leftrightarrow \quad p_\Psi = \frac{\delta S}{\delta\dot{\Psi}} \ , \tag{11}$$

$$\chi \equiv \dot{\Psi} \quad \leftrightarrow \quad p_\chi = 8(\beta+3\alpha)(3\ddot{\Psi}+\nabla^2\Phi) \ . \tag{12}$$

Then, we have the Hamiltonian of the form

$$\begin{aligned} H &= \frac{M_{\rm Pl}^2}{2}\int d^3x \left[p_\Psi \chi + \frac{p_\chi^2}{48(\beta+3\alpha)} - \frac{p_\chi \nabla^2\Phi}{3} \right. \\ &\quad +(6\chi^2 + 2\Psi\nabla^2\Psi - 4\Psi\nabla^2\Phi) \\ &\quad -16(\beta+3\alpha)\chi\nabla^2\chi - 2(3\beta+8\alpha)(\nabla^2\Psi)^2 \\ &\quad \left. 4(\beta+4\alpha)\nabla^2\Psi\nabla^2\Phi \frac{2\beta}{3}(\nabla^2\Phi)^2 \right] . \end{aligned} \tag{13}$$

There is one constraint derived from variation with respect to Φ for this Hamiltonian. Substituting this constraint to the Hamiltonian, we obtain the reduced Hamiltonian of the form

$$\begin{aligned} H_R &= \frac{M_{\rm Pl}^2}{2}\int d^3x \\ &\quad \times \left[p_\Psi\chi + \frac{1}{\beta}p_\chi \left\{1-(\beta+4\alpha)\nabla^2\right\}\Psi \right. \\ &\quad + \frac{\beta+2\alpha}{16\beta(\beta+3\alpha)}p_\chi^2 + 6\chi^2 - 16(\beta+3\alpha)\chi\nabla^2\chi \\ &\quad + \frac{6}{\beta}\Psi^2 - (10+\frac{48\alpha}{\beta})\Psi\nabla^2\Psi \\ &\quad \left. + \frac{32\alpha(\beta+3\alpha)}{\beta}(\nabla^2\Psi)^2 \right] . \end{aligned} \tag{14}$$

One can see that the instability appears also in the case of scalar perturbations.

4 Stabilization of the theory by adding constraints

In this section, we explain how the theory is stabilized. First, we discuss the tensor perturbation. Adding the constraint to Eq. (5) by using the Lagrange multiplier λ_{ij}, we obtain the quadratic action of the form

$$\begin{aligned} S &= \frac{M_{\rm Pl}^2}{2}\int d^4x \left[\beta \left\{ (\ddot{h}_{ij} - \lambda_{ij})^2 + 2\dot{h}^{ij}\nabla^2\dot{h}_{ij} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. +(\nabla^2 h_{ij})^2 \right\} + (\dot{h}_{ij})^2 + h^{ij}\nabla^2 h_{ij} \right. \\ &\quad \left. +4\beta\lambda^{ij}\nabla^2 h_{ij} \right] . \end{aligned} \tag{15}$$

Then, we construct the Hamiltonian. The choice of canonical variables are

$$h_{ij}^{(1)} \equiv h_{ij} \quad \leftrightarrow \quad \pi^{ij} = 2\dot{h}^{ij} + \beta(-2\dddot{h}^{ij} + 4\nabla^2\dot{h}^{ij} + 2\dot{\lambda}_{ij}) , \tag{16}$$

$$h_{ij}^{(2)} \equiv \dot{h}_{ij} \quad \leftrightarrow \quad p^{ij} = 2\beta(\ddot{h}^{ij} - \lambda_{ij}) , \tag{17}$$

$$\lambda_{ij} \equiv \lambda_{ij} \quad \leftrightarrow \quad p_\lambda^{ij} = 0 . \tag{18}$$

Using these definitions, the Hamiltonian is given of the form

$$\begin{aligned} H &= \frac{M_{\rm Pl}^2}{2}\int d^3x \left[\pi^{ij}h_{ij}^{(2)} + \frac{1}{4\beta}p^{ij}p_{ij} \right. \\ &\quad -h^{(1)ij}(\beta\nabla^2\nabla^2 + \nabla^2)h_{ij}^{(1)} - q^{ij}(1+2\beta\nabla^2)q_{ij} \\ &\quad \left. +\lambda^{ij}(p_{ij} - 4\beta\nabla^2 h_{ij}^{(1)}) \right] . \end{aligned} \tag{19}$$

Eq. (18) is the primary constraint. This constraint is satisfied only on the hypersurface in the phase space. We obtain the secondary constraints by implying that primary constraint holds for arbitrary time, i.e., Poisson bracket between primary constraint and the Hamiltonian should be 0. Then, we obtain a secondary constraint. Since this secondary constraint holds also for arbitrary time, we obtain the another secondary constraint, and so on. Finally, we obtain the secondary constraints as follows.

$$\phi_1 \ : \ p_{\lambda_{ij}} \approx 0 , \tag{20}$$

$$\phi_2 \ : \ p_{ij} - 4\beta\nabla^2 h_{ij} \approx 0 , \tag{21}$$

$$\phi_3 \ : \ \pi_{ij} - 2h_{ij}^{(2)} \approx 0 , \tag{22}$$

$$\phi_4 \ : \ 2(\beta\nabla^2\nabla^2 + \nabla^2)h_{ij}^{(1)} - \frac{1}{\beta}p_{ij} + 2(-1+2\beta\nabla^2)\lambda_{ij} \approx 0 . \tag{23}$$

Here, $\approx$ is 'weak equality', which means that this equation is satisfied only on the hypersurface. Substituting these constraints to Eq. (15), we obtain the reduced Hamiltonian

$$\begin{aligned} H_R &= \frac{M_{\rm Pl}^2}{2}\int d^3x \left[\frac{1}{4}\pi^{ij}(1-2\beta\nabla^2)\pi_{ij} \right. \\ &\quad \left. +h^{(1)ij}(-\nabla^2 + 3\beta\nabla^2\nabla^2)h_{ij}^{(1)} \right] . \end{aligned} \tag{24}$$

The reduced Hamiltonian is bounded from below, which means that the theory does not contain the ghost. We succeeded the stabilization of the theory.

Taking the same approach as tensor perturbation, we can discuss the scalar perturbations. We start with the action which contains the Lagrange multiplier λ. the action is given of the form

$$\begin{aligned} S &= \frac{M_{\rm Pl}^2}{2}\int d^4x \Big[(-6\dot{\Psi}^2 - 2\Psi\nabla^2\Psi + 4\Psi\nabla^2\Phi) \\ &+4\left(\beta+3\alpha\right)\left(3\ddot{\Psi}^2 + 4\dot{\Psi}\nabla^2\dot{\Psi} + 2\ddot{\Psi}\nabla^2\Phi\right) \\ &+2\left(3\beta+8\alpha\right)\left(\nabla^2\Psi\right)^2 + 2(\beta+2\alpha)\left(\nabla^2\Phi\right)^2 \\ &-4(\beta+4\alpha)\nabla^2\Psi\nabla^2\Phi + 32(\beta+3\alpha)\lambda\nabla^2\Psi \\ &+12(\beta+3\alpha)(\lambda^2 - 2\ddot{\Psi}\lambda - \frac{2}{3}\lambda\nabla^2\Phi) + C\lambda\Psi)\Big] \end{aligned} \tag{25}$$

The choice of canonical variables are

$$\Phi \equiv \Phi \quad \leftrightarrow \quad p_\Phi = 0\ , \tag{26}$$

$$\Psi \equiv \Psi \quad \leftrightarrow \quad p_\Psi = \frac{\delta S}{\delta\dot{\Psi}}\ , \tag{27}$$

$$\chi \equiv \dot{\Psi} \quad \leftrightarrow \quad p_\chi = 8(\beta+3\alpha)\left[3(\ddot{\Psi}-\lambda)+\nabla^2\Phi\right] \tag{28}$$

$$\lambda \equiv \lambda \quad \leftrightarrow \quad p_\lambda = 0\ . \tag{29}$$

Eq. (26), (29) are primary constraints. We obtain the secondary constraints as follows.

$$\phi_1 \ : \ p_\Phi \approx 0\ , \tag{30}$$

$$\phi_2 \ : \ p_\lambda \approx 0\ , \tag{31}$$

$$\phi_3 \ : \ p_\chi - C\Psi - 32(\beta+3\alpha)\nabla^2\Psi \approx 0\ , \tag{32}$$

$$\phi_4 \ : \ \nabla^2\left[\frac{p_\chi}{3} + 4\Psi - 4(\beta+4\alpha)\nabla^2\Psi + \frac{4\beta}{3}\nabla^2\Phi\right] \approx 0\ , \tag{33}$$

$$\phi_5 \ : \ p_\Psi + (12+C)\chi \approx 0\ , \tag{34}$$

$$\begin{aligned} \phi_6 \ : \ &\frac{(12+C)p_\chi}{24(\beta+3\alpha)} + 2(6+\alpha)\lambda + 32(\beta+3\alpha)\nabla^2\lambda \\ &+4(3\beta+8\alpha)\nabla^2\nabla^2\Psi - 4(\beta+4\alpha)\nabla^2\nabla^2\Phi \\ &-4\nabla^2\Psi - \frac{C}{3}\nabla^2\Phi \approx 0\ . \end{aligned} \tag{35}$$

We can construct the Hamiltonian, and substitute these constraints. Then we obtain the reduced Hamiltonian of the form

$$\begin{aligned} H_R &= \frac{M_{\rm Pl}^2}{2}\int d^3x \\ &\left[\frac{-p_\Psi}{(12+C)^2}\left\{(6+C) + 16(\beta+3\alpha)\nabla^2\right\}p_\Psi\right. \\ &+\frac{1}{\beta}\left\{(6+C) + \frac{C^2(\beta+2\alpha)}{16(\beta+3\alpha)}\right\}\Psi^2 \\ &\left\{(22+\frac{48\alpha}{\beta}) + \frac{C}{\beta}(3\beta+4\alpha)\right\}\Psi\nabla^2\Psi \\ &\left.+\frac{32(\beta+3\alpha)(\beta+\alpha)}{\beta}(\nabla^2\Psi)^2\right]\ . \end{aligned} \tag{36}$$

This Hamiltonian is also bounded from below.

5 Conclusion and future outlook

First, we perturb the metric around the Minkowski space, and show that the theory is unstable by calculating the quadratic action to the metric fluctuations. Then, we removed those instability by adding suitable constraints.

The future task is improving the application to inflationary fluctuations in higher derivative gravity.

Reference

T. -j. Chen and E. A. Lim. 2014. JCAP **1405**, 010 [arXiv:1311.3189 [hep-th]].

T. -j. Chen, M. Fasiello, E. A. Lim and A. J. Tolley.2013. JCAP **1302**, 042 [arXiv:1209.0583 [hep-th]].

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

弱い重力レンズ効果による 2 点相関関数の計算

伊勢田　竜也 (弘前大学大学院 理工学研究科)

Abstract

本研究の目的は、すばる望遠鏡を用いた HSC 計画により、遠方銀河の弱い重力レンズ効果の 2 点相関関数から宇宙論パラメータ Ω_m,σ_8 がどれだけ制限できるかを求める事である。

ここで本研究に関わりのある HSC 計画について述べる。HSC 計画とは HSC(Hyper Suprime-Cam) を搭載しているすばる望遠鏡を用いた大規模銀河サーベイの計画である。今年度から観測を始めており、今後 5 年間で 1500 平方度の面積を観測する予定である。主な目的は、遠方銀河の弱い重力レンズサーベイからダークマターやダークエネルギーの性質を探ることである。HSC は Wide/Deep/Ultradeep の 3 層構造のサーベイであり、本研究では 1500 平方度の広い視野を持つ HSC-Wide の観測領域内で 2 点相関関数の計算を行った。

本研究では、HSC 計画へ向けて国立天文台の浜名さんが作成したシミュレーションを用いた。そのシミュレーションは光源を遠方銀河、レンズを手前の 3 次元密度ゆらぎ、観測量を銀河の形の歪み (コンバージェンス) として作成したものである。それを使い、HSC-Wide の観測領域内における弱い重力レンズ効果によるコンバージェンス κ の 2 点相関関数を計算した。その関数は、観測者を中心に極座標 (θ, ϕ) をとるとき

$$w(\theta_{12}) = \langle \kappa(\theta_1, \phi_1)\kappa(\theta_2, \phi_2) \rangle$$

で表されるものである。ここで θ_{12} は天球面上の 2 点 $(\theta_1, \phi_1), (\theta_2, \phi_2)$ の間の角度である。

今回は HSC-Wide の観測領域内での 2 点相関関数を計算し、それが理論モデルと一致するか確認するまでを紹介する。

1 Introduction

まず本研究に関わりのある HSC 計画について述べる。HSC 計画とは, 従来の Suprime-Cam(主焦点カメラ) の 7 倍の視野を持つ HSC(Hyper Suprime-Cam) を搭載しているすばる望遠鏡を用いた大規模銀河サーベイの計画である。今年度から観測を始めており、5 年間で 1500 平方度の面積を観測する予定である。主な目的は、遠方銀河の弱い重力レンズサーベイからダークマターやダークエネルギーの性質を探ることである。HSC は Wide/Deep/Ultradeep の 3 層構造のサーベイであり、本研究では 1500 平方度の広い視野を持つ HSC-Wide の観測領域内で 2 点相関関数の計算を行った。

本研究では HSC 計画へ向けて国立天文台の浜名さんが作成した N 体シミュレーションのデータを用いた。そのシミュレーションとは, 以下のように作成されたものである。

1. 宇宙初期のパワースペクトルを再現するようにダークマター粒子を配置。
2. 周期境界条件を満たす、立方体の一辺の長さが L=450,900,1350,1800,2250,2700,3150,3600[Mpc/h] の 8 種類のシミュレーションボックスを用意する。
3. シミュレーションボックス内でのダークマター間の重力進化を数値的に計算。
4. シミュレーションボックスを観測点を中心に 8 つ置く。(図 1 参照)
5. 観測点から 150Mpc ごとに球殻を作る。
6. 各球殻上で密度ゆらぎ $\delta(\theta, \phi)$ を計算。
7. 3 次元ゆらぎを 2 次元に射影する。

本研究の目的は、HSC-Wide による観測領域内での弱い重力レンズ効果による 2 点相関関数から宇宙論パラメータ Ω_m,σ_8 がどれだけ制限できるかを求める事である。HSC-Wide の観測領域は Spring equatorial、Fall equatorial、Northern sky の 3 つに分かれている (以下ではそれぞれ Spring、Fall、Northern と書く)。図 2 の赤い部分が HSC-Wide の領観測域で

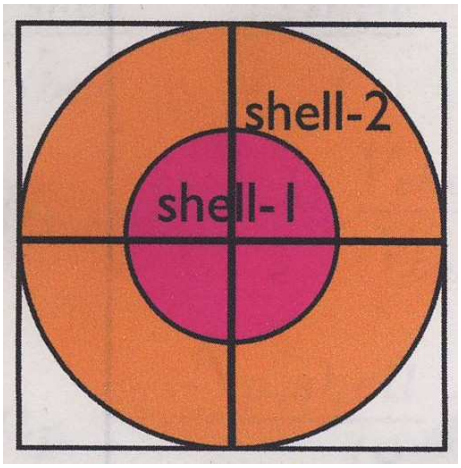


図 1: シミュレーションボックスの配置のイメージ図。中心が観測者の位置である。(浜名 2012)

あり、右下が Spring、左下が Fall、上が Northern である。表 1 は HSC-Wide の観測領域を赤経(RA)、赤緯(Dec) で表したものである。

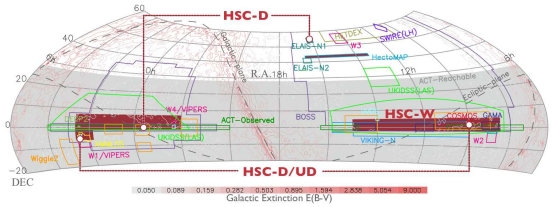


図 2: HSC の観測領域

表 1: HSC-Wide の観測領域

Name	RA,Dec	Area [deg^2]
Fall equatorial	22:00≤RA≤02:40 & $-1°$≤Dec≤ $+7°$ 01:50≤RA≤02:40 & $-7°$≤Dec≤ $-1°$	≃ 640
Spring equatorial	08:30≤RA≤15:00 & $-2°$≤Dec≤ $+5°$	≃ 680
Northern sky	13:20≤RA≤16:40 & $+42.5°$≤Dec≤ $+44°$	55

2 Methods

さきに述べたシミュレーションを用いて、HSC-Wide の観測領域内での弱い重力レンズ効果によるコンバージェンス κ の 2 点相関関数を計算した。それを 10 枚の異なるデータのマップで行い、平均値と分散を求めた。なお使用したマップの赤方偏移は $z = 1$ である。

そうして得られた 2 点相関関数(の平均値と分散) を全天の 2 点相関関数(の平均値と分散)、理論モデルと比較した。

また、計算時間の都合上、計算に用いるデータのスキップ数を全天では 500、Spring と Fall は 10 とした。ここでスキップ数が 500 というのはデータを 500 個ごとに 1 つ使い計算したということである。

3 Results

2 点相関関数は 10 枚の異なるデータのマップから平均値と分散を求めたものである。以下の図で θ は天球面上の 2 点間の角度,ξ は 2 点相関関数の値である。赤線は理論モデル (theoretical model) の数値、緑線は全天の ξ、青線は観測領域内の ξ である。

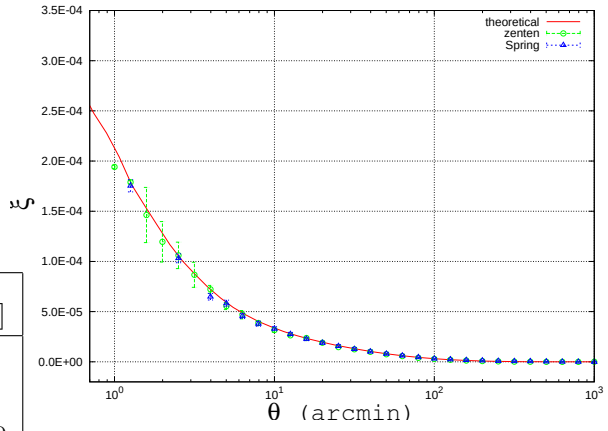


図 3: Spring

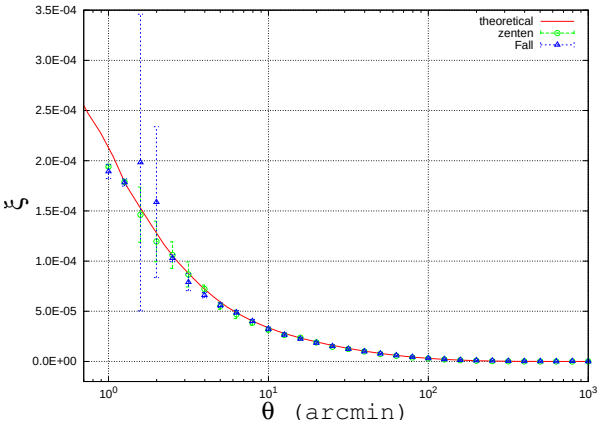


図 4: Fall

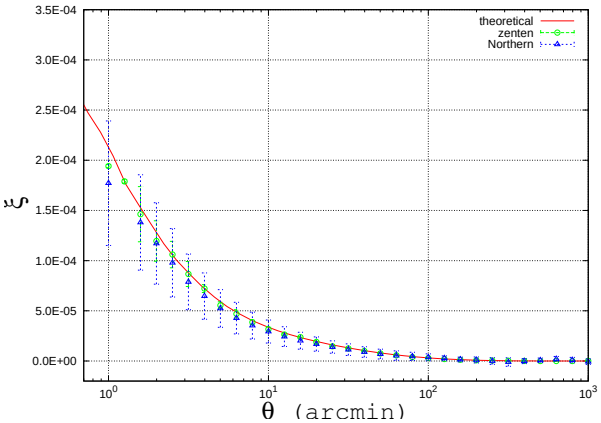


図 5: Northern

4 Conclusion

理論値と全天・観測領域内の 2 点相関関数の計算結果をそれぞれ比較すると、よく一致しているといえる。しかし、全天と観測領域内の 2 点相関関数をエラーバーを比較すると、観測領域内のエラーバーの方が小さい場所がある。エラーバーは面積の平方根の逆数に比例するため、この点では矛盾している。全天の ξ の計算でスキップ数が大きく、ペアの数が少ないためにエラーバーが大きくなっていることが考えられる。

Reference

the HSC Science Collaborations. 2012. HSC Science White Paper

L.Fu et al. 2008. A&A479,9

The HSC collaboration team. 2013. wide-field imaging with Hyper Suprime-Cam:Cosmology and Galaxy Evolution

Martin Kilbinger et al. 2013 MNRAS,430,2200-2220

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

6 次元位相空間における無衝突ボルツマン方程式による自己重力系の数値シミュレーション

土屋 将太郎 (筑波大学大学院 数理物質科学研究科)

Abstract

DIRECT INTEGRATION OF THE COLLISIONLESS BOLZMANN EQUATION IN SIX-DIMENSIONAL PHASE SPACE;SELF-GRAVITATING SYSTEM のレビューを行う。

6 次元位相空間における無衝突ボルツマン方程式を数値的に解くことで自己重力系の数値シミュレーションコードを開発し, 重力不安定性、ランダウダンピング、キング球の安定性を含むいくつかのシミュレーションを行い、線形予測理論と比較することでそのコードの精度を確かめた。更に、N 体シミュレーションと比較することで N 体シミュレーションに対する長所・短所を調べ、宇宙の大規模構造形成の数値シミュレーションにおいての N 体シミュレーションとの妥当性を調べる。

1 Introduction

銀河・銀河団・宇宙の大規模構造形成などの自己重力系の数値シミュレーションはこれまで N 体シミュレーションが採用されてきたが、物理量に含まれるショットノイズや人工的な 2 体緩和などの粒子数の制限からくる問題点がある。その点、無衝突ボルツマン方程式を数値的に解く手法ではこれらの問題点がなく優位性があるとされてきたが計算コストや必要メモリ容量の膨大さからこれまで低次元のシミュレーションしか行われてこなかった。

この論文では、近年の計算機の発達によって可能となった 6 次元位相空間での無衝突ボルツマン方程式の数値シミュレーションを行い、その妥当性の評価と N 体シミュレーションとの比較による優劣の見極めを目的とする。また、これらの結果から宇宙の大規模構造形成におけるダークマターの密度ゆらぎに大きな速度分散を持つニュートリノによる無衝突減衰効果の数値シミュレーションを行うことが最終的な目的である。

2 Numerical scheme

無衝突自己重力系について物質の分布関数 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t)$ は以下の Vlasov-Poisson 方程式に従う。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = 0 \tag{1}$$

ここで $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{v}$ はそれぞれ空間座標、速度空間座標であり、ϕ は以下の Poisson 方程式を満たす重力ポテンシャルである。

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho = 4\pi G \int f d^3\boldsymbol{v} \tag{2}$$

Poisson 方程式についてはフーリエ変換による畳み込み法で解き、Vlasov-Poisson 方程式については位相空間を有限体積法で離散化し、それぞれの方向に分けて 6 つの 1 次元移流方程式として解く。

1 次元移流方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

の数値解法としては、質量の保存・分布関数の正値性・最大値の原理を保障した Positive Flux Conservation(PFC) スキーム（Filbet et al 2001）を採用した。

3 Test calculations

数値シミュレーションの妥当性を評価するために、以下のテストシミュレーションを行った。

i. 初期条件に速度分散と密度ゆらぎを与えて、密度ゆらぎが重力不安定性による成長と無衝突減衰 (ランダウ減衰) によるゆらぎの減衰が線形摂動理論と一致しているか確認するテスト

ii. Vlasov-Poisson 方程式の安定な定常解を持つ King 球が定常状態を保っているのか確認するテスト

iii. 2 つの King 球を衝突させたシミュレーションを N 体シミュレーションでの結果と比較するテスト

4 Results

ここでは、i. と iii. についてのシミュレーション結果を載せる。

i. について、1 次元自己重力系において初期条件を

$$f(x,v,t) = \frac{\bar{\rho}}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right)(1 + A\cos kx) \tag{4}$$

とおき、σ は速度分散、A はゆらぎの大きさ、k は密度ゆらぎの波数である。この波数 k がジーンズ波数 k_J より小さいとき ($k < k_J$) は密度ゆらぎは重力不安定性により成長していく、また $k > k_J$ の時は無衝突減衰によってゆらぎが減衰していく。ジーンズ波数は以下で与えられる。

$$k_J = \left(\frac{4\pi G\bar{\rho}}{\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

それぞれの k/k_J での密度ゆらぎの時間発展を図 1 に表わした。また太線は線形理論での成長・減衰率を表わしている。上 2 つは $k < k_J$ の場合でゆらぎは重力不安定性により成長し、した 2 つは $k > k_J$ の場合で無衝突減衰によってゆらぎが減少していることがわかる。どの k/k_J も初期段階においては線形理論とよく一致している。$k/k_J = 2.0$ については物質の大部分が重力ポテンシャルに束縛されポテンシャルを浅くするのに運動エネルギーを消費してしまって途中で無衝突減衰が止まってしまった。この傾向は $k/k_J = 1.1$ での $t > 3T$ にも同様の傾向が見られた。

iii. について King 球の初期条件を

$$f(\varepsilon) = \begin{cases} \rho_1(2\pi\sigma^2)^{-3/2}(e^{\varepsilon/\sigma^2} - 1) & (\varepsilon > 0) \\ 0 & (\varepsilon < 0) \end{cases}$$

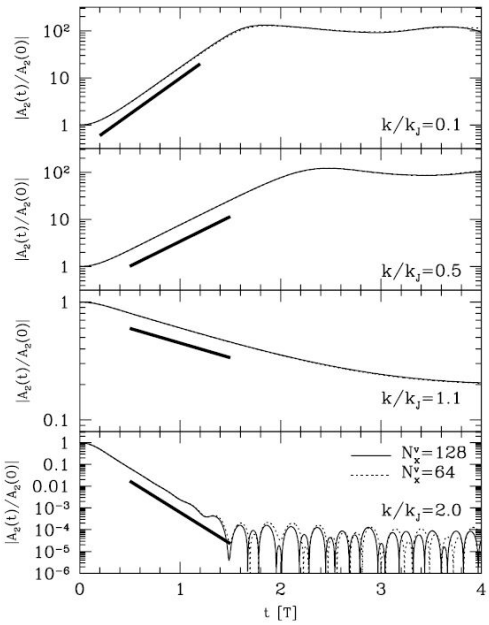


図 1: $k/k_J = 0.1, 0.5, 1.1, 2.0$ での密度ゆらぎの時間発展、太線は線形理論での傾き

とおき、ε は相対エネルギー、ρ_1、σ は King 球の全体の形状と全質量 M から決められた定数である。また空間分布を特徴づける King パラメータ $W = \Psi(0)/\sigma^2$ はここでは $W = 3$ としてある。この 2 つの King 球を $x-y$ 平面に対称に配置し、x 軸にそって反対向きの速度を与え 2 つの King 球のオフセット衝突させる。

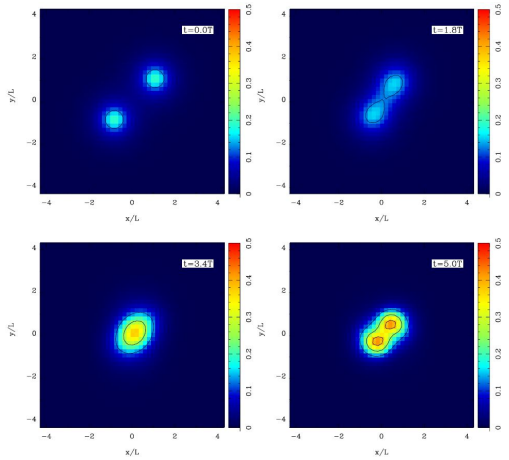


図 2: 位置空間での $t = 0.0$(左上), $1.8T$(右上), $3.4T$(左下), $5.0T$(右下) での質量密度マップ

図 2 は、Vlasov シミュレーションでの位置空間において質量密度マップの時間発展を表わしている。$t = 3.4T$ のとき最初に 2 つの King 球が衝突し、すり抜けていく。図 3、図 4 は $t = 5.0T$ においての Vlasov シミュレーションと N 体シミュレーションでの位置空間における質量密度マップである。

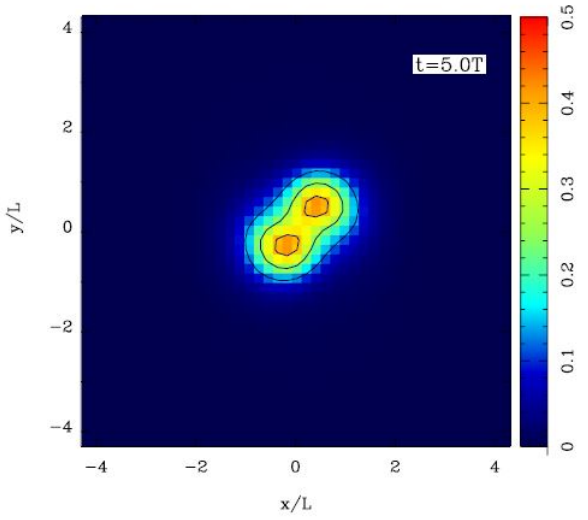


図 3: Vlasov シミュレーションでの位置空間において $t = 5.0T$ での質量密度マップ

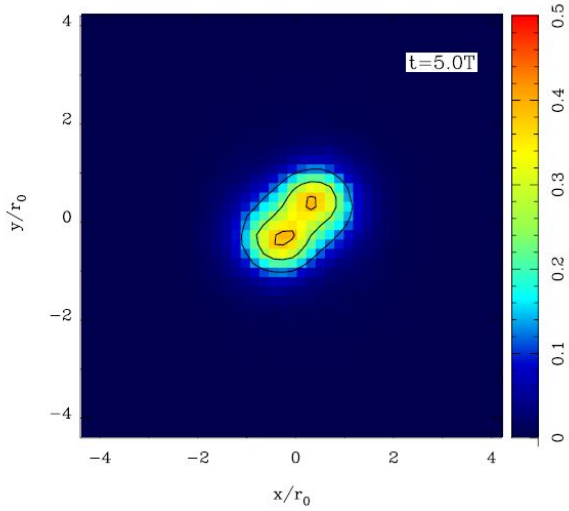


図 4: N 体シミュレーションでの位置空間において $t = 5.0T$ での質量密度マップ

N 体シミュレーションではそれぞれの King 球を 10^6 個の粒子で再現している。ショットノイズなどの影響で N 体シミュレーションでは 2 つのピークが若干非対称になっているが、位置空間においては 2 つのシミュレーションではほとんど差はなかった。

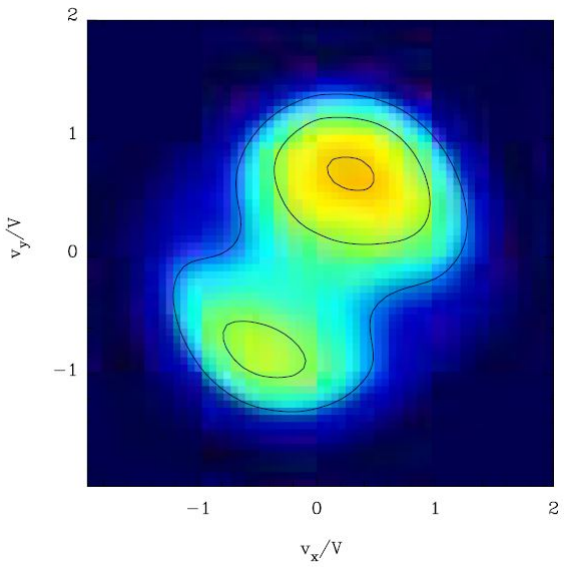


図 5: Vlasov シミュレーションでの速度空間において $t = 4.2T$ での密度マップ

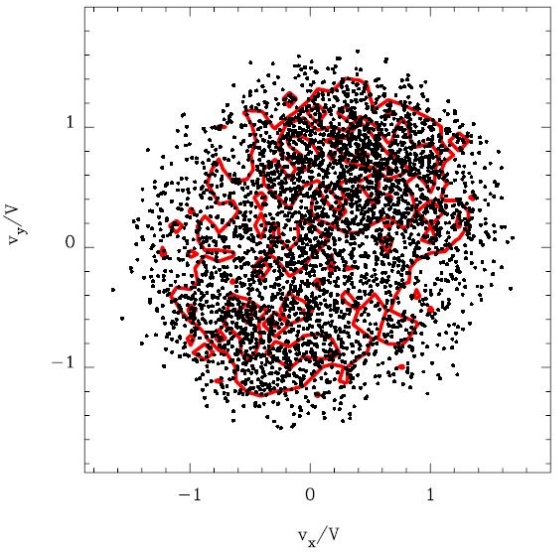


図 6: N 体シミュレーションでの速度空間において $t = 4.2T$ での密度マップ

次に速度空間において Vlasov シミュレーションと N 体シミュレーションの比較を行う。図 5、図 6 は 2 つのシミュレーションから $t = 4.2T$ での位置空間において、2 つの King 球の中心付近の 1 メッシュを速度空間での密度マップに表わしたものである。図 5 ではしっかりと 2 つのピークが見られるが、図 6 の N 体シミュレーションではこのような 2 つのピークはショットノイズなどの影響によりうまく再現できてないと思われる。

5 Summary and Discussion

6 次元位相空間での Vlasov-Poisson 方程式系の数値シミュレーションを達成し、一連のテストシミュレーションから開発したコードの精度を確かめた。N 体シミュレーションとの比較から空間成分においては大きな差は見られなかったが、速度空間成分については Vlasov シミュレーションのほうが有効であることがわかった。これにより、宇宙の大規模構造形成における大きな速度分散をもつニュートリノによるダークマターの密度ゆらぎの無衝突減衰効果をうまく扱える。また、今まで N 体シミュレーションが主流であったが、Vlasov シミュレーションコードの開発により 2 成分シミュレーションも可能となった。

Reference

著者 K, Yoshikawa, N, Yoshida, and M, Umemura. 2013,
発行元 ApJ,762,116

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

Large tensor mode and sub-Planckian excursion in generalized G-inflation

國光 太郎 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

宇宙マイクロ波背景放射の偏光観測から初期宇宙におけるゆらぎのテンソル・スカラー比について、$r \simeq 0.2$ という結果が報告された [1]。このような大きなテンソル・スカラー比をインフレーションでつくるためには、インフレーション中のスカラー場の値の変位がプランク・スケールよりも大きい必要がある。この制限は Lyth bound とよばれる [2]。

一方、非正準運動項や高階微分相互作用を許せば、大きなテンソル・スカラー比を実現しながら場の値の変位をプランク・スケールよりも小さい値に抑えることは可能である。この発表では Generalized G-inflation の枠組み [3] を用いて、どのような場合に Lyth bound から逃れることができるのか、分類の上、明らかにする。

1 Introduction

今年の 3 月、BICEP2 collaboration によって宇宙マイクロ波背景放射の B モード偏光の発見が報告された [1]。この B モード偏光が初期宇宙で生成されたものであれば、これは初期宇宙におけるテンソルゆらぎ、すなわち重力波の存在を示すものであり、非常に重要な発見となる。

初期宇宙においてこのような重力波を生成するのはインフレーションである。BICEP2 collaboration によって報告された初期ゆらぎのテンソル・スカラー比は $r \simeq 0.2$ であり、もしこれらが正準運動項を持つ単一場のインフラトンによって生成されたものであるとすれば、インフレーション中の場の変位の大きさはプランク・スケールよりも大きなものとなる。場の変位がプランク・スケールよりも大きいこと自体は問題ないと一般には考えられるが、一部の素粒子模型に大して大きな制限となり、プランク・スケールでポテンシャルに対して大きな補正を生じさせるようなモデルは棄却される。この制限は Lyth bound [2] とよばれる。

一方、非正準運動項や高階微分相互作用項を持つインフラトンの場合には、この制限を回避することができる。この事実は個別のモデルにおいては知られていたが、これについての網羅的な分類はこれまで行われていなかった。ここでは、運動方程式が 2 階微分に抑えられる最も一般的なインフレーションの枠組みである Generalized G-inflation [3] に従って、インフレーション中の場の変位の大きさの下限を分類する。これにより、どのようなインフレーションモデルにおいて Lyth bound を回避することが可能となるかを明らかにする。またモデルに基づいた計算をおこなって、実際に Lyth bound が回避されることも示す。

2 Lyth Bound

まず、Lyth bound の導出 [2] をレビューする。Lyth bound は正準運動項を持つスカラー場の場合の、場の値の変位についての制限である。

インフレーション中の e-fold 数は

$$N = \int H dt = \int \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi \simeq \int \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} \frac{d\phi}{M_P} \qquad (1)$$

と書ける。ここで、

$$\epsilon = \frac{\dot{H}}{H^2} \simeq \frac{\dot{\phi}^2}{2H^2}, \qquad (2)$$

を用いた。

スカラーゆらぎ、テンソルゆらぎのパワースペクトルはそれぞれ

$$\mathcal{P}_\zeta = \frac{1}{8\pi^2}\frac{H^2}{M_P^2\epsilon} \tag{3}$$

$$\mathcal{P}_t = \frac{2}{\pi^2}\frac{H^2}{M_P^2} \tag{4}$$

と書けるため、

$$r = 16\epsilon \tag{5}$$

を得る。(1) と (5) を用いると、

$$\Delta\phi \geq \sqrt{2\epsilon_{\min}}NM_P \sim 3\sqrt{\frac{r}{0.01}}M_P \tag{6}$$

となる。これが Lyth bound である。仮に BICEP2 によって発見された B モード偏光が初期宇宙起源のものでなかった場合でも、近い将来に r が 0 でない値であることが発見されれば、プランク・スケールを越えた変位が必要となることが分かる。

3 Generalized G-inflation

次に、Generalized G-inflation の枠組み [3] についてレビューする。Genralized G-inflation は運動方程式が 2 階微分に抑えられる最も一般的なインフレーションの枠組みで、以下の作用で書ける [4]

$$S = \sum_{i=2}^{5}\int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}_i \tag{7}$$

$$\mathcal{L}_2 = K(\phi, X) \tag{8}$$

$$\mathcal{L}_3 = -G_3(\phi, X)\Box\phi \tag{9}$$

$$\mathcal{L}_4 = G_4(\phi, X)R + G_{4X}\left[(\Box\phi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2\right] \tag{10}$$

$$\mathcal{L}_5 = G_5(\phi, X)G_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu\phi \tag{11}$$

$$-\frac{1}{6}G_{5X}\left[(\Box\phi)^3 - 3\Box\phi(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2 + 2(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^3\right] \tag{12}$$

ここで $X = -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2$、$K$ と G_i は任意の関数である。これらの任意関数を適切に選ぶことにより、インフレーションが実現する。

ここで、インフレーション中はインフラトンの運動が十分ゆっくりであるとして、任意関数を以下のように X で展開する。

$$K(\phi, X) = -V(\phi) + \mathcal{K}(\phi)X + \frac{1}{2}h_2(\phi)X^2 + \ldots \tag{13}$$

$$G_i(\phi, X) = g_i(\phi) + h_i(\phi)X + \ldots \tag{14}$$

以下ではこの展開を用いる。

4 General Bounds

ここでは Generalized G-inflation の枠組みで Lyth bound がどのように一般化されるかを見る。簡単のため、インフラトンのエネルギーの大部分をポテンシャルが占める slow roll inflation の枠組みで考える。

インフレーション中の e-fold 数は、正準運動項の場合と同様に

$$N = \int Hdt = \int \frac{H}{\dot\phi}d\phi$$

と書ける。すなわち、インフレーション中の場の値の変位は、

$$\Delta\phi \geq N\left(\frac{\dot\phi}{H}\right)_{\min}$$

となる。

これを求めるために $\dot\phi$ について解き、それを r を用いて表すと

$$\frac{\dot\phi}{H} = \sqrt{\frac{g_4 r}{8Y}}\left(\mathcal{K} + h_2X + 6H^2h_4 + 4H\dot\phi(h_3 + H^2h_5)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$Y = \frac{\mathcal{K} + h_2X + 6H^2h_4 + 4H\dot\phi(h_3 + H^2h_5)}{\mathcal{K} + 3h_2X + 6H^2h_4 + 6H\dot\phi(h_3 + H^2h_5)} = \mathcal{O}(1)$$

を得る。これにより、インフレーション中の場の値の変位を計算することができて、

$$\Delta\phi \geq \left(\frac{N}{50}\right)\left(\frac{r}{0.01}\right)^{\frac{1}{2}}q_*M_P$$

となる。ここで

$$q = \left[\frac{2g_4}{YM_P^2\left(\mathcal{K} + h_2X + 6H^2h_4 + 4H\dot\phi(h_3 + H^2h_5)\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

であり、インフレーション中は q が大きく変わらないと仮定した。つまり q がインフレーション中に小さい値となるようなインフレーションモデルを選ぶことによって、sub-Planckian な場の変位が実現可能となる。

5 A Concrete model

最後に、実際に sub-Planckian な場の変位を実現するモデルとして、Potential driven G-inflation [5] を取り上げ、実際の計算をおこなう。扱うモデルの作用は

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}M_P^2R + X - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{M^3}X\Box\phi\right]$$

である。インフレーション中に最後の項が支配的になるとして、$\dot{\phi}$ について解き、e-fold 数を計算すると、

$$N = \int \frac{H}{\dot{\phi}}d\phi \simeq \frac{1}{M^{\frac{3}{2}}M_P^2}\frac{m^2}{5}\phi^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5}$$

を得る。ここで ϕ_* はインフレーションの終わりから N e-fold 前の場の値である。

生成されるゆらぎの大きさから m を M で表すことができ、ϕ_* を M の関数として書くことができる。場の変位は必ず ϕ_* よりも小さいので、

$$\Delta\phi \leq \phi_* = 2.6\times10^{-3}\left(\frac{M}{10^{12}\mathrm{GeV}}\right)M_P$$

を得る。よって $M \ll M_P$ であれば sub-Planckian なインフレーションが実現することが分かる。

このモデルの spectral index とテンソル・スカラー比は

$$n_s - 1 = 0.970, \quad r = 0.11$$

であり、sub-Planckian な場の変位での大きな r が実現、すなわち Lyth bound を回避していることが分かる。

Reference

[1] P. A. R. Ade *et al.* [BICEP2 Collaboration], Phys. Rev. Lett. **112**, 241101 (2014) [arXiv:1403.3985 [astro-ph.CO]].

[2] D. H. Lyth, Phys. Rev. Lett. **78**, 1861 (1997) [hep-ph/9606387].

[3] T. Kobayashi, M. Yamaguchi and J. 'i. Yokoyama, Prog. Theor. Phys. **126**, 511 (2011) [arXiv:1105.5723 [hep-th]].

[4] G. W. Horndeski, Int. J. Theor. Phys. **10**, 363 (1974).

[5] K. Kamada, T. Kobayashi, M. Yamaguchi and J. 'i. Yokoyama, Phys. Rev. D **83**, 083515 (2011) [arXiv:1012.4238 [astro-ph.CO]].

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

Spacetime approach to force-free magnetospheres

小笠原 康太 (立教大学 理論物理学研究室)

Abstract

force-free 電気力学 (Force-Free Electrodynamics , FFE) は、磁気圏の相対論的プラズマを記述し、パルサーやブラックホールを扱う際に重要な役割を担っている。扱う主な式は Maxwell 方程式、及び force-free 条件 $F_{\mu\nu}j^{\nu}=0$ である。FFE は ADM 形式で扱われることが多いが、今回私は wedge 積、外微分を用いて、FFE を記述する。これによって計量に依らず式を記述する事が可能になる。

1 はじめに

FFE を満たす電磁場は Euler ポテンシャル ϕ_1, ϕ_2 を用いて

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi_1\partial_\nu\phi_2 - \partial_\mu\phi_2\partial_\nu\phi_1 \quad (1)$$

$$F = d\phi_1 \wedge d\phi_2 \quad (2)$$

と書ける。(2) は (1) の微分形式による表現である。

ϕ_1, ϕ_2 一定の超曲面を flux surface という。これに垂直なベクトル場を flux surface の生成子とよび、FFE は flux surface の存在に基づく幾何学理論となっている。

ここでは (1)、(2) の表式の導出と、EEF の中で中心的な役割を担う Euler ポテンシャルについて、時空がある対称性をもつ場合の一般的な Euler ポテンシャルの選び方を示す。

なお、計量は $(-,+,+,+)$、単位系として $c=G=1$、Maxwell 方程式には Heaviside-Lorentz 単位系を用いる。

2 force-free 電気力学

force-free 条件は以下のように導出される。Maxwell 方程式及び、電磁場のエネルギー運動量テンソル

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu \quad (3)$$

$$T^{\mu\nu}_{\rm EM} = F^{\mu\rho}F^{\nu}{}_{\rho} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \quad (4)$$

より

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu}_{\rm EM} = -F^{\mu}{}_{\nu}j^{\nu} \quad (5)$$

全系のエネルギー運動量テンソル

$$T^{\mu\nu}_{\rm full} = T^{\mu\nu}_{\rm EM} + T^{\mu\nu}_{\rm matter} \quad (6)$$

は保存則 $\nabla_\nu T^{\mu\nu}_{\rm full}=0$ を満たす。FFE は系のエネルギーは電磁場が支配的とするものであり、これは

$$T^{\mu\nu}_{\rm full} \approx T^{\mu\nu}_{\rm EM} \quad (7)$$

と考えることと等しい。これより force-free 条件

$$F_{\mu\nu}j^{\nu}=0 \quad (8)$$

を得る。

3 微分形式

本集録、発表で使用する微分形式の用語、計算を紹介する。

3.1 外微分 k 形式（k-form）

n 次元空間の外微分 k 形式（k-form）u は、以下のように表現される。

$$u = \sum_{i_1<\cdots<i_k} f_{i_1\cdots i_k}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k} \quad (9)$$

k-form は、基底 $dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$ の線形結合で表現され、1 次独立な基底の数は ${}_nC_k = \frac{n!}{(n-k)!n!}$ 個存在する。k を微分形式の次数といい、k-form は ${}_nC_k$ 次線形空間である。例として 3 次元デカルト座標系を考えると、1-form の張る空間は 3 次元ベクトル空間の双対空間になっている。

3.2 wedge 積：$\wedge$

wedge 積には以下のような計算のルールがある。

$$dx^i \wedge dx^i = 0 \tag{10}$$

$$x^i \wedge dx^j = -x^j \wedge dx^i \tag{11}$$

$$(fu) \wedge v = u \wedge (fv) = f(u \wedge v) \tag{12}$$

u, v は任意の微分形式、f は関数である。その他、分配法則、結合法則も成立する。

3.3 外微分：d

外微分を用いる利点は、座標不変性である。これにより、座標系に関係なく物理量の微積分計算が可能になる。主に用いる計算は

$$\begin{aligned} du &= d\left(f_{i_1\cdots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}\right) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j\right) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \end{aligned} \tag{13}$$

$$d(dv) = 0 \ {}^\forall v \tag{14}$$

(14) は Poincaré の補助定理といい、今後の計算では頻繁に用いる。

3.4 スター演算子：$*$

ここでは volume form を $dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$ と取る。n 次元空間の k 形式 $\lambda = dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ に対する star 演算子 $*$ の作用は

$$*\lambda = \sigma dx^{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n} \ , \ \sigma = \pm 1 \tag{15}$$

であり、$*\lambda$ の張る空間は λ の張る空間の双対空間になっている。σ の符号は

$$\lambda \wedge *\lambda = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n \tag{16}$$

となるように決める。

$*$ を 2 回作用させれば自分自身のもとの基底で表現されるが、符号は空間の次元 n と元の次数 k によって $*(*\lambda) = (-1)^{k(n-k)}$ となる。以降基本的に 4 次元を扱うので、$n = 4$ の場合は

$$k = (\text{even}) \quad \Rightarrow \quad *(*\lambda) = \lambda \tag{17}$$

$$k = (\text{odd}) \quad \Rightarrow \quad *(*\lambda) = -\lambda \tag{18}$$

となる。

3.5 Maxwell 方程式/微分形式による表現

微分形式において電磁場は 2-form で表現され、テンソルで書かれたものとの対応は以下のようになる。

$$\nabla_\rho F_{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad dF = 0 \tag{19}$$

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu \quad \Rightarrow \quad d * F = J \tag{20}$$

$$(J = *j \quad , \quad J_{\mu\nu\rho} = j^\sigma \epsilon)$$

4 Euler ポテンシャル

FFE を満たす電磁場が Euler ポテンシャルを用いて (1) の形に書けることを示す。まず、非相対論的な MHD(magnetohydrodynamics) の形式から出発する。非相対論的な MHD において、ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ はスカラー関数 α, β, χ を用いて以下のように書ける。

$$\boldsymbol{A} = \alpha \boldsymbol{\nabla} \beta + \boldsymbol{\nabla} \chi \tag{21}$$

これより磁場 $\boldsymbol{B}$ は

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla} \alpha \times \boldsymbol{\nabla} \beta \tag{22}$$

と書け

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\nabla} \alpha = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\nabla} \beta = 0 \tag{23}$$

となっている。$\boldsymbol{\nabla} \chi$ の項は、ベクトル解析の公式 $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \phi = 0 \ {}^\forall \phi$ より消えるので、以下では α, β を非相対論的な MHD での Euler ポテンシャルとよぶことにする。

force-free 条件が成立している場合、磁場 $\boldsymbol{B}$ と電場 $\boldsymbol{E}$ は $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{E} = 0$ を満たす。これを用いて Maxwell 方程式 $\partial_t \boldsymbol{B} + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0$ を以下のように書き換える。ベクトル解析の公式より

$$\boldsymbol{E} + \partial_t \alpha \boldsymbol{\nabla} \beta - \partial_t \beta \boldsymbol{\nabla} \alpha + \boldsymbol{\nabla}(\alpha \partial_t \beta) = \boldsymbol{\nabla} f \tag{24}$$

f は任意のスカラー関数。さらに、(23) と $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{E} = 0$ より

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\nabla}(f - \alpha \partial_t \beta) = 0 \tag{25}$$

を得る。これと、$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \alpha \times \boldsymbol{\nabla} \beta$ を考えると

$$\psi(\alpha, \beta) := f - \alpha \partial_t \beta \tag{26}$$

という α と β の任意スカラー関数 ψ を導入することで、電場と磁場は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= -\partial_t\alpha\boldsymbol{\nabla}\beta + \partial_t\beta\boldsymbol{\nabla}\alpha + \boldsymbol{\nabla}\psi(\alpha,\beta) \quad (27)\\ \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{\nabla}\alpha\times\boldsymbol{\nabla}\beta \quad (28)\end{aligned}$$

ここで、(1) より $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ を書き下してみると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= -\partial_t\phi_1\boldsymbol{\nabla}\phi_2 + \partial_t\phi_2\boldsymbol{\nabla}\phi_1 \quad (29)\\ \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{\nabla}\phi_1\times\boldsymbol{\nabla}\phi_2 \quad (30)\end{aligned}$$

であり、α,β を用いて書いたものと比較すると $\boldsymbol{\nabla}\psi(\alpha,\beta)=0$ となれば両者が一致することがわかる。以下では電磁場がいつでも (29)、(30) の形で書けることを微分形式を用いて示す。

(27)(28) より、この電磁場は 2-form で

$$F = d\alpha\wedge d\beta + d\psi\wedge dt \quad (31)$$

と書ける。Euler potential ϕ_1,ϕ_2 を用いた場合は $F = d\phi_1\wedge d\phi_2$ となるので、(31) がこの形で書けることを示す。(27) と (29) の違いは $\boldsymbol{\nabla}\psi(\alpha,\beta)$ の項なので、ここがゼロ ($\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}=\frac{\partial\psi}{\partial\beta}=0$) の場合は自明なので、($\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\neq 0$) の場合を考える。この場合

$$\begin{aligned} F &= d\alpha\wedge d\beta + d\psi\wedge dt \quad (32)\\ &= \frac{\partial\alpha}{\partial\psi}d\psi\wedge d\beta + d\psi\wedge dt \quad (33)\\ &= d\psi\wedge\left\{\frac{\partial\alpha}{\partial\psi}d\beta + dt\right\} \quad (34)\end{aligned}$$

と変形でき、さらに

$$\Phi(\psi,\beta) := \int\frac{\partial\alpha(\psi,\beta)}{\partial\psi}d\beta \quad (35)$$

を定義すれば (34) は以下のようになる。

$$F = d\psi\wedge\left\{dt + \frac{\partial\Phi}{\partial\beta}d\beta + \frac{\partial\Phi}{\partial\psi}d\psi\right\} \quad (36)$$

これより

$$\phi_1 = \psi\ ,\ \phi_2 = t + \Phi(\psi,\beta) \quad (37)$$

と ϕ_1 , ϕ_2 を選べば、$F = d\phi_1\wedge d\phi_2$ を得る。

この Euler ポテンシャルは時空の計量などから決定されるが、一意には決まらない。変換

$$\phi_1\to\tilde{\phi}_1 = \tilde{\phi}_1(\phi_1,\phi_2)\ ,\ \phi_1\to\tilde{\phi}_2 = \tilde{\phi}_2(\phi_1,\phi_2) \quad (38)$$

で得られる $(\tilde{\phi}_1,\tilde{\phi}_2)$ もまた Euler ポテンシャルとなる。この変換に対して電磁場は $F_{\mu\nu}\to\tilde{F}_{\mu\nu}$ となり以下のように変化する。

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu\tilde{\phi}_1\partial_\nu\tilde{\phi}_2 - \partial_\mu\tilde{\phi}_2\partial_\nu\tilde{\phi}_1\\ &= \left(\frac{\partial\tilde{\phi}_1}{\partial\phi_1}\frac{\partial\tilde{\phi}_2}{\partial\phi_2} - \frac{\partial\tilde{\phi}_1}{\partial\phi_2}\frac{\partial\tilde{\phi}_2}{\partial\phi_1}\right)F_{\mu\nu} \quad (39)\end{aligned}$$

よって、このポテンシャルの変換で電磁場が不変になるためには

$$\frac{\partial\tilde{\phi}_1}{\partial\phi_1}\frac{\partial\tilde{\phi}_2}{\partial\phi_2} - \frac{\partial\tilde{\phi}_1}{\partial\phi_2}\frac{\partial\tilde{\phi}_2}{\partial\phi_1} = \frac{\partial(\tilde{\phi}_1,\tilde{\phi}_2)}{\partial(\phi_1,\phi_2)} = 1 \quad (40)$$

つまり、変換 (38) の Jacobian が 1 になることが必要。これは電磁場の gauge 自由度に対応する。

5 対称性と Euler ポテンシャル

一般に、時空がある対称性をもっているとき、対応する Euler ポテンシャルがもつ対称性や性質は非自明である。そのため、時空のもつ対称性を Euler ポテンシャルに反映させる方法が必要になる。時空が対称性をもつとき、それに対応する killing ベクトル場が必ず存在する。以下ではこの killing ベクトル場と Euler ポテンシャルとの関係式を議論する。

Killing ベクトル場 X が存在するとき、その Lie 微分は恒等的にゼロである。Cartan's magic formula ($\mathcal{L}_X = (X\cdot)d + d(X\cdot)$)、Maxwell 方程式 ($dF=0$) より

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_X F = X\cdot(dF) + d(X\cdot F) = 0\\ \Rightarrow\quad & X\cdot F = df\\ \Rightarrow\quad & (X\cdot d\phi_1)d\phi_2 - (X\cdot d\phi_2)d\phi_1 = df \quad (41)\end{aligned}$$

ここで $\tilde{\phi}_1 = -f$ と選ぶと (40) より

$$-\frac{\partial f}{\partial\phi_1}\frac{\partial\tilde{\phi}_2}{\partial\phi_2} + \frac{\partial f}{\partial\phi_2}\frac{\partial\tilde{\phi}_2}{\partial\phi_1} = 1 \quad (42)$$

の成立が必要なので、ここから $\tilde{\phi}_2$ が決まる。このようにして決まった $\tilde{\phi}_1,\tilde{\phi}_2$ で (41) を書き直すと

$$(X\cdot d\tilde{\phi}_1)d\tilde{\phi}_2 - (X\cdot d\tilde{\phi}_2)d\tilde{\phi}_1 = -d\tilde{\phi}_1 \quad (43)$$

となるので、$\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2$ と killing ベクトル場 X との関係式として

$$X \cdot d\tilde{\phi}_1 = 0 \ , \ X \cdot d\tilde{\phi}_2 = 1 \tag{44}$$

を得る。よって、killing ベクトル場が求まれば、(44) を積分することで、時空の対称性を反映させた Euler ポテンシャルを得ることができる。

6 まとめ

・系のエネルギーは電磁場が支配的であると考えること ($T^{\mu\nu}_{\rm full} \approx T^{\mu\nu}_{\rm EM}$) で、force-free 条件 $F_{\mu\nu}j^{\nu} = 0$ を得る。

・force-free 条件を満たす電磁場は、Euler ポテンシャル ϕ_1, ϕ_2 を用いて $F = d\phi_1 \wedge d\phi_2$ と書ける。

・Euler ポテンシャルは一意には決まらず、$\phi_1 \to \tilde{\phi}_1 = \tilde{\phi}_1(\phi_1, \phi_2)$, $\phi_1 \to \tilde{\phi}_2 = \tilde{\phi}_2(\phi_1, \phi_2)$ かつ、(Jacobian)$= 1$ を満たす変換の自由度（gauge 自由度）が存在する。

・時空に対称性があり対応する killing ベクトル場が求まったとき、上記の変換の自由度を利用して対称性を反映させた Euler ポテンシャルを得ることができる。

7 今後の課題

回転ブラックホールに存在する磁気圏は回転によりトロイダル磁場とポロイダル電場が発生し、これにより磁気圏に沿って電磁気的エネルギーの輸送がおこる。また、ブラックホールの回転軸に沿って磁力線が伸びている場合、ブラックホール自身の回転エネルギーを電磁場のエネルギーとして遠方に輸送可能になる。巨大ブラックホールが高速回転している場合、現在観測されている γ 線バーストなどのエネルギーを十分説明できる。これには電磁場のエネルギーを運動エネルギーの形に変換する機構が必要になり MHD の理解も欠かせない。

これら興味深い現象をより理解するために、現在提唱されているモデルの深い理解と、理論的考察を進めていきたい。

8 参考文献

[1] Gralla, Samuel E., and Ted Jacobson. ”Spacetime approach to force-free magnetospheres.” arXiv preprint arXiv:1401.6159 (2014).

[2] Uchida, Toshio. ”Theory of force-free electromagnetic fields. I. General theory.” Physical Review E 56.2 (1997): 2181.

[3] Uchida, Toshio. ”Theory of force-free electromagnetic fields. II. Configuration with symmetry.” Physical Review E 56.2 (1997): 2198.

[4] Poisson, Eric. A Relativist's Toolkit. Cambridge University Press, 2004.

反 de Sitter 時空の不安定性

古賀 泰敬 (立教大学大学院 理学研究科)

Abstract

反 de Sitter(AdS) 時空は曲率が負の極大対称な時空であり, 宇宙項が負の Einstein 方程式の真空解である.AdS 時空が, 同じく極大対称時空である Minkowski 時空と de Sitter 時空 (それぞれ曲率が 0, 正) と大きく異なるのは, 空間的な無限遠が時間的な面になっている点である. この性質により, 無限遠からのフラックスがないとする境界条件における AdS 時空は漸近的に不安定である. この発表では, 漸近的に AdS 時空である時空の不安定性を, 球対称, 負の宇宙定数のゼロ質量スカラー場の Einstein 方程式の数値シミュレーションによって調べた,Piotr Bizon と Andrzej Rostworowski の研究 [1] をレビューする.
ここで与える仮定により, ゼロ質量スカラー場の Einstein 方程式は一次元の波動方程式に帰着する. これについて波束を用いた数値シミュレーションを行うと系が最終的に重力崩壊を起こすことがわかった.

1 イントロダクション

AdS 時空は, その空間的無限遠が時間的な面であるという事実から Cauchy ホライズンが存在する. そのため, 漸近的 AdS 時空における場の発展を議論する際には適当な境界条件が必要となる. 球対称な漸近的 AdS 時空での, 球対称スカラー場の発展における, そのような境界条件についてはすでに研究がなされている [2]. Piotr Bizon と Andrzej Rostworowski の研究では, この境界条件を満たすモデルを用いて AdS 時空の不安定性を調べた。

2 モデル

負の宇宙定数 ($\Lambda < 0$) のゼロ質量スカラー場の $3+1$ 次元 Einstein 方程式

$$G_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = 8\pi G(\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(\partial\phi)^2), \quad (1)$$

$$g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla\beta\phi = 0 \quad (2)$$

を解く ($c=1$). 球対称のため, 計量を

$$ds^2 = \frac{l^2}{\cos^2 x}(-Ae^{-2\delta}dt^2 + A^{-1}dx^2 + \sin^2 x d\Omega^2) \quad (3)$$

と仮定し,ϕ, A, δ は t, x のみの関数とする. ここで,$l^2 = -3/\Lambda$ であり, 各変数の領域は $-\infty < t < \infty$,$0 \leq x < \pi/2$ である. 式 (3) を (1),(2) に代入すると, スカラー場の方程式は

$$\dot{\Phi} = (Ae^{-\delta}\Pi)', \dot{\Pi} = \frac{1}{\tan^2 x}(\tan^2 x Ae^{-\delta}\Phi)', \quad (4)$$

独立な Einstein 方程式は

$$A' = \frac{1+2\sin^2 x}{\sin x\cos x}(1-A) - \sin x\cos x A(\Phi^2+\Pi^2), \quad (5)$$

$$\delta' = -\sin x\cos x(\Phi^2+\Pi^2) \quad (6)$$

と得られる. ただし,$\Phi = \phi'$, $\Pi = A^{-1}e^{-\delta}\dot{\phi}$, $\dot{} = \partial_t, ' = \partial_x$ で $4\pi G = 1, l^2 = 1$ とした.
$x = 0$ 付近においての滑らかさを要請すると ϕ, A, δ はそれぞれ

$$\phi(t,x) = f_0(t) + \mathcal{O}(x^2) \quad (7)$$

$$\delta(t,x) = \mathcal{O}(x^2) \quad (8)$$

$$A(t,x) = 1 + \mathcal{O}(x^2) \quad (9)$$

となる.$\delta(t,0) = 0$ は,t が原点で固有時間をとるように選んだ. Cauchy ホライズンを回避するため $x = \pi/2$ の無限遠での境界条件は, $\rho = \pi/2 - x$ として

$$\phi(t,x) = f_\infty(t)\rho^3 + \mathcal{O}(\rho^5) \quad (10)$$

$$\delta(t,x) = \delta_\infty(t) + \mathcal{O}(\rho^6) \quad (11)$$

$$A(t,x) = 1 - 2M\rho^3 + \mathcal{O}(\rho^6) \quad (12)$$

と表される [2]. 任意関数 $f_0(t), f_\infty(t), \delta_\infty(t)$ は原点, 無限遠境界上での振る舞いを決め,M は系の全質量と解釈される.

3　数値シミュレーション

式 (2),(5),(6) 以下のように数値的にシミュレーションした. スカラー場の初期値をガウス型波束で,

$$\Phi(0,x)=0,\Pi(0,x)=\epsilon\exp(-\frac{\tan^2 x}{\sigma^2}) \qquad (13)$$

と設定する. パラメータは, 幅を $\sigma = 1/16$ で固定し, 振幅を $\epsilon = 45, 44, 43$ と変化させて調べた. 方法は,t=const の超曲面の場を式 (2) に従って微小時間 dt 発展させていき, その都度式 (5)(6) で計量を更新していくというものである. 時間発展は runge kutta 方を用い, 時間, 空間それぞれについて 4 次の精度で計算した.

4　結果

計算した結果, それぞれの振幅において最終的に,A=0 となる事象の地平面が形成された. $\epsilon = 45$ の地平面の形成は図 1, 図 2 のようになった. t=0 にて原点を中心に広く分布していた波束は, 時間発展とともにより原点に集中していく. さらに時間が経過すると, 次第に階段的な分布に遷移し, その不連続部分で A=0 に落ちる（図 2）. この振る舞いは $\epsilon = 44, 43$ においてもほぼ同様であった. これらの振幅 ϵ と地平面の位置 x の関係は図 3. これらより大きい振幅では同様に重力崩壊するであろうが, 小さい振幅における不安定性についてはさらなるシミュレーションが必要である.

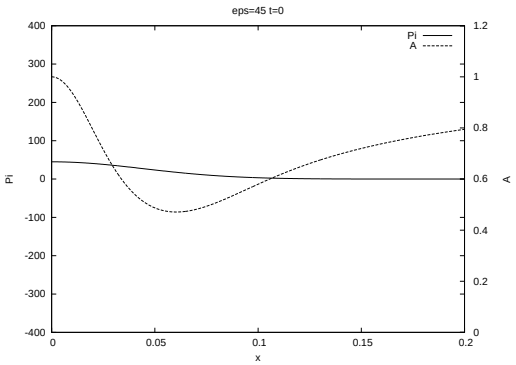


図 1: $\epsilon = 45, t = 0$ の Π,A

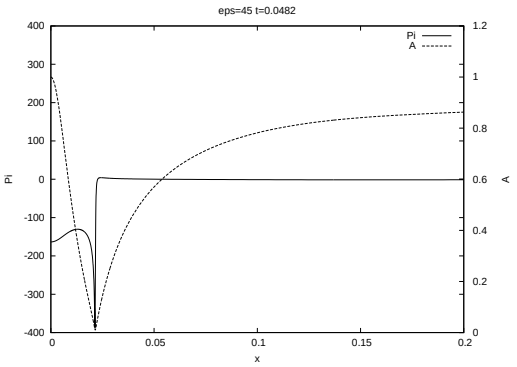


図 2: $\epsilon = 45, t = 0.0482$ の Π,A

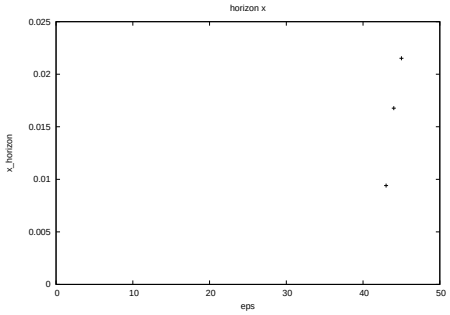


図 3: 地平面の半径 x

5　参考文献

[1]P. Bizon and A. Rostworowski,Phys. Rev. Lett. 107,031102(2011).
G. Holzegel and J. Smulevici, arXiv:11030712.

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

コンパクト天体の存在下におけるカメレオン場の宇宙論的進化

髙橋 一史 (東京大学大学院理学系研究科)

Abstract

ダークエネルギー問題を解決する試みの中で, 様々な修正重力理論が提案されてきた. $f(R)$ 重力などの理論は, 共形変換によって Einstein-Hilbert 作用にスカラー場を含んだ理論の形に書き換えることができ, これによって宇宙の加速膨張が説明される. このときスカラー場と物質との結合により, 物質に働く力は逆 2 乗則からずれてしまうことが問題となるが, これはカメレオン機構が働くことにより解決される.

本研究では, 特に $f(R)$ 重力理論に着目し, 天体の外側で宇宙論的な解と矛盾なく接続する解を構成した. また, 天体が安定に存在することを要請し, $f(R)$ 重力理論への新しい種類の制限を発見した.

1 Introduction

近年 Ia 型超新星の観測により, 宇宙が加速膨張していることが示された. この加速膨張を引き起こすダークエネルギーの正体は未だに解明されていないが, 候補の一つとして宇宙定数がある. 宇宙定数の起源を量子場の零点振動による真空のエネルギーと考えると, 観測されたダークエネルギーの密度との間におよそ 120 桁もの齟齬が生じる. この「宇宙定数問題」を解決するため, これまで様々なモデルが提案されてきた. その中で一般相対論を変更することで宇宙の加速膨張を説明しようとする理論も多く提案され, それらは修正重力理論と総称される.

修正重力理論の一つに, $f(R)$ 重力理論という枠組みがある. これは一般相対論の Einstein-Hilbert 作用に含まれるリッチスカラー R を, R の一般の関数 $f(R)$ に置き換えるというものである. $f(R)$ 重力理論は, 共形変換によって Einstein-Hilbert 作用にスカラー場を含んだ理論の形に書き換えることができる (K. Maeda. 1988). このとき, スカラー場 ϕ のポテンシャル $V(\phi)$ は関数 $f(R)$ から決まる. さらに, ϕ は通常の物質とも相互作用するため, 実効的には物質密度 ρ の寄与が加わったポテンシャル $V_{\rm eff}(\phi)$ 中を運動することになる. 物質密度の時間変化に伴って $V_{\rm eff}(\phi)$ も変化し,ϕ は基本的にはその極小を追って時間発展する. この新しい系は Einstein フレーム, 元の系は Jordan フレームと呼ばれ, 数学的には等価である.

Einstein フレームで見ると, このスカラー場 ϕ がスローロールすることにより宇宙の加速膨張が説明される. しかし, ϕ と物質とが結合しているため, 物質に働く力は逆 2 乗則からずれてしまう (「第 5 の力」). この問題は, スカラー場にカメレオン機構が働くことにより解決される (J. Khoury and A. Weltman. 2004). カメレオン機構とは, 周囲の物質の密度が大きいほど ϕ の実効的な質量が大きくなり, 第 5 の力の到達距離が小さくなるため, これまで行われてきた地球スケールでの一般相対論の検証実験には牴触しなくなるというものである. このときスカラー場は, カメレオン場とも呼ばれる.

従来の研究においては, 天体近傍におけるカメレオン場の振舞いを考える際, 初めから静的な解を仮定していた. そこで本研究では, 平坦な FLRW 背景時空において, 天体の外側で宇宙論的な解と問題なく接続するような解を構成した. また, その解を用いて $f(R)$ 重力理論への新たな制限を発見した.

2 $f(R)$ Gravity

$f(R)$ 重力理論の作用は, 次で与えられる.

$$\begin{aligned} S &= S_{\rm g} + S_{\rm m} \\ &= \frac{M_{\rm Pl}^2}{2}\int d^4x\sqrt{-g}f(R) + \int d^4x\mathcal{L}_{\rm m} \end{aligned} \tag{1}$$

$M_{\rm Pl}$ は換算 Planck 質量, $S_{\rm m}$ は物質場の作用である. 共形変換

$$g_{\mu\nu} \to \bar{g}_{\mu\nu} = f'(R)g_{\mu\nu} \tag{2}$$

により Einstein フレームに移ると,

$$S_{\rm g} = \int d^4x\sqrt{-\bar{g}}\left[\frac{M_{\rm Pl}^2}{2}\bar{R} - \frac{1}{2}(\bar{\nabla}_\mu\phi)^2 - V(\phi)\right] \quad (3)$$

となる. ここでスカラー場 ϕ は

$$e^{2\beta\phi/M_{\rm Pl}} = f'(R), \quad \beta \equiv \frac{1}{\sqrt{6}} \quad (4)$$

により定義され, ポテンシャル $V(\phi)$ は

$$V(\phi) = \frac{M_{\rm Pl}^2}{2}\frac{Rf'(R) - f(R)}{f'(R)^2} \quad (5)$$

で与えられる (ϕ 依存性が顕わでないが, 式 (4) を通じて ϕ の関数となっている). また, $S_{\rm m}$ に含まれる計量テンソルを通じて, ϕ は物質場と結合することになる.

3 Chameleon Mechanism

式 (3) を ϕ について変分すると

$$\bar{\Box}\phi = V'(\phi) + \frac{\beta}{M_{\rm Pl}}e^{4\beta\phi/M_{\rm Pl}}g^{\mu\nu}\sum_i T^{(i)}_{\mu\nu} \quad (6)$$

を得る. ただし $T^{(i)}_{\mu\nu}$ は, Jordan フレームにおける i 番目の物質のエネルギー運動量テンソルである. 以下では簡単のため, 1 種類の非相対論的物質のみが存在する場合を考える.

Einstein フレームでは, ϕ と物質場との結合により ρ そのものは保存しないが, $\tilde{\rho} \equiv e^{3\beta\phi/M_{\rm Pl}}\rho$ という組合せが保存する. つまり $\tilde{\rho}$ は ϕ と独立である. これを用いると, 式 (15) は以下のように書ける.

$$\bar{\Box}\phi = V'(\phi) + \frac{\beta}{M_{\rm Pl}}\tilde{\rho}e^{\beta\phi/M_{\rm Pl}} \quad (7)$$

この式の右辺から, ϕ の運動は物質場に依存した実効ポテンシャル

$$V_{\rm eff}(\phi) \equiv V(\phi) + \tilde{\rho}e^{\beta\phi/M_{\rm Pl}} \quad (8)$$

により決まることがわかる. 以下

$$V'(\phi) < 0, \quad V''(\phi) > 0, \quad V'''(\phi) < 0 \quad (9)$$

を要請する. このとき $V_{\rm eff}(\phi)$ の概形は図 1 のようになり, 極小を持つ.

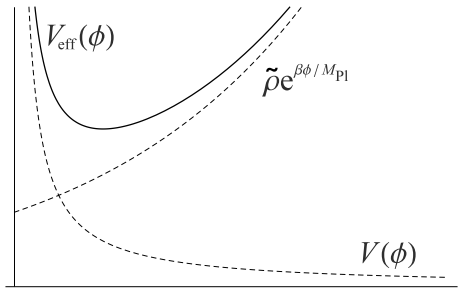


図 1: 実効ポテンシャル $V_{\rm eff}(\phi)$

$V_{\rm eff}$ を極小にするような $\phi = \phi_{\rm min}$ は

$$V'(\phi_{\rm min}) + \frac{\beta}{M_{\rm Pl}}\tilde{\rho}e^{\beta\phi_{\rm min}/M_{\rm Pl}} = 0 \quad (10)$$

を満たし, その極小のまわりの摂動に対応する質量は

$$m^2 = V''(\phi_{\rm min}) + \left(\frac{\beta}{M_{\rm Pl}}\right)^2\tilde{\rho}e^{\beta\phi_{\rm min}/M_{\rm Pl}} \quad (11)$$

となる. 式 (9) の要請の下では, 密度 ρ の増加とともに m も増加することがわかる.

コンパクト天体近傍のカメレオン場の形状は, 天体があまり小さくない場合には, 内側では天体の密度 ρ_c から, 外側では背景密度 ρ_b からそれぞれ決まる $V_{\rm eff}(\phi)$ の極小をとると考えられる. この場合には, カメレオン場の値の変化は天体表面にごく近い領域 (thin-shell) でのみ起こる (J. Khoury and A. Weltman. 2004). 天体内外で滑らかに接続するような静的な解は, 次のようになる.

$$\phi = \begin{cases} \phi_c & ,\text{inside} \\ \frac{\beta\rho_c}{3M_{\rm Pl}}\left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_s^3}{r} - \frac{3}{2}R_s^2\right) + \phi_c & ,\text{shell} \\ -\frac{\beta\rho_c}{M_{\rm Pl}}\epsilon\frac{R_c^3}{r}e^{-m_b(r-R_c)} + \phi_b & ,\text{outside} \end{cases}$$

ここで ρ_c, R_c はそれぞれ天体の密度と半径, ϕ_c, ϕ_b は天体の充分内側, 外側における $\phi_{\rm min}$ の値である. また, ϵ は thin-shell パラメータと呼ばれ, shell の厚さ $R_c - R_s$ および $\delta\phi_c \equiv \phi_c - \phi_b$ と, 次のように関係する.

$$\epsilon = \frac{M_{\rm Pl}}{\beta}\frac{|\delta\phi_c|}{R_c^2\rho_c} \approx \frac{R_c - R_s}{R_c} \quad (12)$$

本研究では, $\epsilon \ll 1$ の場合のみ考える.

4 Solution for a Compact Object and Constraint on $f(R)$

平坦な FLRW 背景時空を考え, 中心に一様密度 ρ_c, 半径 R_c の球対称なコンパクト天体が存在しているとする. Jordan フレームにおける計量は conformal Newtonian ゲージを採用する.

$$ds^2 = -(1+2\Psi)dt^2 + a^2(1+2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j \quad (13)$$

本研究では, 天体が安定に存在し, かつ天体外部で宇宙論的な解に接続するような解を構成した. つまり天体が膨張・収縮しないよう, 天体内部で背景宇宙の膨張速度を打ち消すような速度ゆらぎ

$$\delta u^i = \begin{cases} -Hr^i & ,\text{inside} \\ 0 & ,\text{outside} \end{cases} \quad (14)$$

を持ち, かつ無限遠で摂動量が消えるような解である. 解析にあたり, 以下の仮定をおいた.

- ρ_c, R_c : 一定
- $\rho_c \gg \rho_b$ (ρ_b :背景密度)
- ρ_b から決まる ϕ の質量を m_b として

$$H \ll m_b \ll R_c^{-1}$$

- $|\beta\phi/M_{\rm Pl}| \ll 1$
- $|\beta\dot{\phi}/M_{\rm Pl}| \ll H$
- コンパクト天体は thin-shell を持つ

解くべき式は, Klein-Gordon 方程式

$$-\ddot{\delta\phi} - 3H\dot{\delta\phi} + \frac{\Delta}{a^2}\delta\phi = \begin{cases} 0 & ,\text{inside} \\ \frac{\beta}{M_{\rm Pl}}\rho_c & ,\text{shell} \\ m_b^2\delta\phi & ,\text{outside} \end{cases} \quad (15)$$

および Einstein 方程式

$$-\frac{\Delta}{a^2}\tilde{\Phi} + 3H(\dot{\tilde{\Phi}} + H\tilde{\Phi}) = \begin{cases} 4\pi G V_c^{\rm eff} & ,\text{inside} \\ 4\pi G\rho_c & ,\text{shell} \\ 0 & ,\text{outside} \end{cases} \quad (16)$$

$$\partial_i(\dot{\tilde{\Phi}} + H\tilde{\Phi}) = 4\pi G\rho\delta u_i \quad (17)$$

$$\tilde{\Phi} + \tilde{\Psi} = 0 \quad (18)$$

である. ただし $V_c^{(\rm eff)} \equiv V^{(\rm eff)}(\phi_c)$ であり,

$$\tilde{\Phi} = \Phi - \frac{\beta}{M_{\rm Pl}}\delta\phi, \quad \tilde{\Psi} = \Psi - \frac{\beta}{M_{\rm Pl}}\delta\phi \quad (19)$$

とおいた.

式 (15) の解は, 近似の最低次で

$$\delta\phi = \begin{cases} \delta\phi_c & ,\text{inside} \\ \frac{\beta\rho_c}{3M_{\rm Pl}}\left(\frac{a^2r^2}{2} + \frac{R_s^3}{ar} - \frac{3}{2}R_s^2\right) + \delta\phi_c & ,\text{shell} \\ -\frac{\beta\rho_c}{M_{\rm Pl}}\epsilon\frac{R_c^3}{ar}e^{-m_b(ar-R_c)} & ,\text{outside} \end{cases}$$

となる. 一方, 式 (16) の解は

$$\tilde{\Phi} = \begin{cases} 2\pi G[V_c^{\rm eff}(R_c^2 - \frac{a^2r^2}{3}) - 2V_cR_c^2\epsilon] & ,\text{inside} \\ 2\pi G[\rho_c(R_c^2 - \frac{a^2r^2}{3}) + \frac{2}{3}V_c\frac{R_s^3}{ar}] & ,\text{shell} \\ \frac{4\pi G}{3}V_c^{\rm eff}\frac{R_c^3}{ar}(1 - \frac{V_c}{V_c^{\rm eff}}\epsilon) & ,\text{outside} \end{cases}$$

となるが, これを式 (17) に代入して δu^i を求めると, shell および天体外部では式 (14) と一致するが, shell よりも内側では

$$\delta u^i = -\left[1 + \frac{V(\phi_c)}{\rho_c}\right]Hr^i \quad (20)$$

となりずれがある. 従って

$$V(\phi_c) \ll \rho_c \quad (21)$$

が必要となることがわかる.

式 (21) は, 式 (5) を通じて関数 $f(R)$ のパラメータ領域に制限を与える. この制限は, 膨張宇宙において天体が安定に存在することを要請して初めて得られるものであり, $f(R)$ 重力理論への新しい種類の制限となる.

これまでの議論では, 結合定数 $\beta = 1/\sqrt{6}$ のカメレオン理論としての $f(R)$ 重力を扱ってきた. しかし上記制限において β の値は本質的でないため, $\beta = \mathcal{O}(1)$ であるような一般のカメレオン理論に対しても, この制限は成り立つと考えられる.

5 Conclusion

本研究では, 平坦な FLRW 背景時空に球対称なコンパクト天体が存在する場合に, 天体外部で宇宙論的な解に漸近するような解を構成した. また, 天体が安定に存在することを要請し, $f(R)$ 重力理論への新たな制限を与えた. この結果は, より一般のカメレオン理論においても成り立つ.

Reference

K. Maeda, Phys. Rev. D 39, 3159 (1988)

J. Khoury and A. Weltman, Phys. Rev. D 69, 044026 (2004)

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

スカラー場ゆらぎが作る初期重力波

藤田 智弘 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

BICEP2 がインフレーション起源の重力波を観測したと報告したことで、背景重力波に対する関心はかつてないほど高まっている。重力波がインフレーションによって直接作られたとすると、その振幅はインフレーションのエネルギースケールで決まるので、振幅を観測的に測ることでインフレーションのエネルギースケールを知ることができる。これが背景重力波が重要視される最大の理由である。しかし、初期宇宙において他の方法でも重力波が作られた場合、重力波振幅とインフレーションエネルギースケールの関係は変更を受ける。本発表では、インフレーション中に生成されるスカラー場のゆらぎが、摂動の 2 次の効果で重力波を生成するメカニズムに着目し、その振幅を計算する。観測される背景重力波のうち、この機構で作られるものが支配的であった場合、インフレーションのエネルギースケールは従来の関係式を用いて求めたものより低くなることが分かる。

1 イントロダクション

インフレーション理論とは、非常に初期の宇宙では宇宙膨張が指数関数的であったという理論モデルである。インフレーションは銀河等の構造形成の種となる初期宇宙での密度ゆらぎの生成を予言し、さらにその予言が宇宙背景放射 (CMB) を始めとする様々な観測によって確認されたことによって、まだその詳細は不明な部分が多々あるものの、広く信じられている理論である。しかし、インフレーションは我々の既知の物理学が適用できないような高いエネルギーで起こったと考えられるため、純粋な理論研究だけでその詳細を明らかにすることは難しい。インフレーションの性質に迫るには多角的な観測を用いながら、同時に理論面での整備を進め、一歩ずつ理解を深めていくことが不可欠である。

これまでインフレーションを調べる際に最もよく用いられてきたのは、スカラーゆらぎである。宇宙の密度ゆらぎ、もしくは、CMB の温度ゆらぎはスカラーという種類のゆらぎに分類される。それらは近年飛躍的に観測が進み、特に CMB の観測から、インフレーションが生成したスカラーゆらぎの振幅は次の値であることが分かっている。

$$\mathcal{P}_\zeta \approx 2.2 \times 10^{-9}. \tag{1}$$

ここで $\mathcal{P}_\zeta$ は曲率ゆらぎのパワースペクトルと呼ばれる量であるが、本質的にはインフレーションが生成したスカラータイプのゆらぎの振幅を表している。このスカラーゆらぎ振幅や、そのスケール依存性から、インフレーション理論に対して重要な制限が得られたものの、未だインフレーションにおける加速膨張のメカニズムや背後にある理論を特定するには至っていない。

スカラーゆらぎの振幅を用いた議論が深まってきたため、次なるターゲットとして別のタイプのゆらぎ、すなわちテンソルゆらぎが注目を集めてきた。テンソルゆらぎとは、いわゆる重力波に他ならない。特に、今年の 3 月に BICEP2 実験がインフレーション起源の重力波の痕跡を検出することに初めて成功したと報告したことで、重力波への注目は一挙に高まった。インフレーションはスカラーゆらぎだけでなくテンソルゆらぎの生成も予言しており、重力波を観測することでインフレーション理論の新しい側面が明らかになることが期待される。[1]

[1] 最近になって BICEP2 実験が検出したのはインフレーション起源の重力波ではなく、我々の銀河のダスト起源のシグナルなのではないかという指摘が複数報告されている。しかし、例え BICEP2 が観測したものが foreground であったとしても、数多くの CMB B-mode 観測 (BICEP2 と同じ方式の実験) が現在進行形または計画中であり、近い将来に背景重力波が検出されることが期待できる。それに備えて、理論面の整備を進めることは非常に重要である。

2　インフレーションが作るゆらぎ

インフレーション中はゆらぎが量子論的な効果で生成されることがよく知られている。その定性的な説明は以下のようになされる。量子論の観点では、真空とは全く何もない時空ではなく、様々な粒子が不確定性関係に従い、現れては消えていくという動的平衡をなしている。その様子は 1 次元量子力学で見られる、零点振動（ゼロ点エネルギー）と同じである。もし宇宙が加速膨張していなければ、零点振動はそのままであり、実体のあるゆらぎに転化したりはしない。

しかし加速膨張宇宙では不思議なことが起きる。零点振動の周期が宇宙膨張によって引き伸ばされて長くなっていき、ついには（実質的に）止まってしまうのである。様々なタイミングで止まる場の値はランダムに決まるので、零点振動している場がポテンシャルエネルギーを持っていると、エネルギーのゆらぎ、すなわち密度ゆらぎが生じる。また同様の機構で、重力波も生成する。

曲がった時空の場の量子論を用いるとインフレーションで生成されるゆらぎの振幅は計算できる。それによると、スカラー・テンソルゆらぎの振幅は次の式で与えられる。

$$\mathcal{P}_\zeta = \frac{H^2}{8\pi^2 M_{Pl}^2 \epsilon}, \tag{2}$$

$$\mathcal{P}_h = \frac{2H^2}{\pi^2 M_{Pl}^2}. \tag{3}$$

ここで、$H \equiv \dot{a}(t)/a(t)$ は宇宙膨張速度を表す Hubble parameter、$M_{Pl} \approx 2.43 \times 10^{18}\mathrm{GeV}$ は定数 reduced Planck mass、最後に $\epsilon = -\dot{H}/H^2$ は slow-roll parameter と呼ばれ、H の時間変化を表すパラメータである。この式を見ると分かるように、スカラー振幅は H^2/ϵ に比例しているため、スカラーゆらぎの観測だけでは、2 つのパラメータが縮退して、それぞれの値を決定することができない。しかし、テンソルゆらぎの振幅は H だけで決まるので、背景重力波を観測できれば縮退を解くことができる。さらに、フリードマン方程式（一様等方宇宙のアインシュタイン方程式）より宇宙のエネルギー密度 ρ が

$$\rho \quad = 3M_{Pl}^2 H^2 \tag{4}$$

と書ける事が分かるので、重力波を観測して H を決定することは、同時にインフレーション中のエネルギー密度を求めることになる。素粒子理論の観点では、これはインフレーションを記述する理論のエネルギースケールを決定することになり、極めて重要な情報である。BICEP2 の報告を信じ、この関係式を用いると、$H \approx 10^{14}\mathrm{GeV}$ あるいは $\rho \approx (10^{16}\mathrm{GeV})^4$ となり、ちょうど GUT(大統一理論：電磁気・弱い力・強い力の 3 つが統一される理論）の典型的なスケールに一致しているため、注目を集めている。

3　スカラーゆらぎが作る重力波

インフレーションが作る背景重力振幅として eq. (3) は広く受け入れられているが、この式を観測される重力波に当てはめるには「**他に背景重力波を作る機構はない**」という重大な仮定が必要である。何故なら、より大きな振幅の背景重力波が他の機構で作られた場合、eq. (3) に従う重力波は隠されてしまい、H を正しく見積もるためには違う式を使わなければならない。

スカラー・ベクトル・テンソルの 3 種のゆらぎは摂動の 1 次では独立に扱えることが示せる (decomposition theorem)。しかしながら、摂動の 2 次のオーダーでは相互に関係することがよく知られている。その例として、スカラーゆらぎは摂動の 2 次の効果によって、重力波を生成するのである。実際、TT ゲージをとった重力波の運動方程式には

$$\Box h_{ij} = -4M_{Pl}^{-2} T_{ij}^{lm} S_{lm}(\eta, \boldsymbol{k}), \tag{5}$$

$$S_{lm} = \int d^3x e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \partial_l \delta\phi \partial_m \delta\phi, \tag{6}$$

という形でスカラー摂動 $\delta\phi$ の 2 次オーダーのソースタームが生じる。この効果は摂動の高次という理由で通常無視されるものの、必ず存在することに注意しよう。従って、もしこのソースタームによって誘起される重力波がインフレーションから直接作られる重力波よりも大きな振幅を持つなら、重力波とインフレーションとの関係は変更を受けることになる。

インフレーションによって作られたスカラーゆらぎがインフレーション後にこの効果によって重力波を生成するという先行研究はいくつかあるが (e.g. (1))、

その場合は BICEP2 等の CMB B-mode 観測で見られるような大スケール (low-ℓ) の背景重力波は作られ得ない。そこで我々は、インフレーションによって作られたスカラーゆらぎがインフレーション中に重力波を生成する効果に着目した。

少し計算すると分かるのは、eq. (3)　よりも大きな重力波を作るためにはそれを誘起するスカラーゆらぎの振幅が非常に大きくないといけないということである。これは摂動の 2 次効果を考えていることからもすぐ予想できる。Biagetti et al. (2) はスカラーゆらぎの振幅が大きくなる場合の 1 つとして、音速が小さいようなモデルを考察した。スカラー場の音速 c_s が 1 より小さいと、その振幅は $c_s^{-3/2}$　倍になることが簡単に示せる。彼らは数値計算で重力波振幅を計算し、その結果をフィットすることで $\mathcal{P}_h \propto c_s^{-18/5}$ という結果を得たが、これは我々の解析的な結果と一致していない。

4　結果

我々はインフレーション中に subdominant な軽いスカラー場 (つまりインフラトンではないスカラー場）が 1 より小さい音速を持つ場合に誘起される重力波振幅を解析的に求めた。その結果、重力波振幅は次の式で与えられることを見出した。

$$\mathcal{P}_h \simeq \frac{32}{15\pi c_s^3}\frac{H^4}{M_{Pl}^4}. \tag{7}$$

これが観測される重力波を表しているとすると、インフレーションのエネルギースケールは

$$H \simeq 10^{14}\mathrm{GeV}\left(\frac{r}{0.1}\right)^{1/4}\left(\frac{c_s}{10^{-3}}\right)^{3/4}, \tag{8}$$

で与えられる、ただし r は tensor-to-scalar ratio である, $r \equiv \mathcal{P}_h/\mathcal{P}_\zeta$。よって、$c_s < 10^{-3}$ であれば、BICEP2 の報告した大きさの重力波振幅でありながらも、インフレーションエネルギースケールは低い $H < 10^{14}$GeV ということは可能である。

Reference

[1] M. Kawasaki, N. Kitajima and S. Yokoyama, JCAP **1308**, 042 (2013) [arXiv:1305.4464 [astro-ph.CO]].

[2] M. Biagetti, M. Fasiello and A. Riotto, "Enhancing Inflationary Tensor Modes through Spectator Fields," Phys. Rev. D **88**, 103518 (2013) [arXiv:1305.7241 [astro-ph.CO]].

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

Fisher 行列解析を用いた宇宙論パラメータの制限の推定

平川　拓実 (広島大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙の平坦性問題や地平線問題を解決する有力なシナリオとしてインフレーションという初期宇宙での指数関数的な宇宙の加速膨張がある。これは WMAP や Planck 衛星で観測された宇宙背景放射 (CMB) の異方性も上手く説明している理論モデルである。しかしながら、その理論モデルは未だに決定しておらず現在も様々なインフレーションモデルが研究されている。インフレーションモデルを決定するためにはインフレーションを引き起こすポテンシャルを決める必要があり、CMB や銀河の大規模構造 (LSS) の大規模サーベイ観測はこれに制限を与える。Fisher 行列解析は実際に観測を行う前に、将来のサーベイ観測によってインフレーションに関わる宇宙論パラメータをどの程度制限することができるか見積もることができる。そして、それによってインフレーションのポテンシャルの形をどの程度制限できるか予想することができる。本収録では Fisher 行列解析の理論とその宇宙論への応用についてレビューする。

1　Introduction

研究の Motivation は曲率 $K < 0$ になるようなインフレーション模型の制限を考えることである。そのために”Landscape Paradigm” という仮定を考える [1]。この仮定では、永遠にインフレーションを続けている”megaverse” と呼ばれる宇宙の中に多数の真空が存在する状態を考える。その中の相対的に高いエネルギーを持つ真空は偽真空と呼ばれる。そして、偽真空からよりエネルギーの低い真空への tunneling event によって ”pocket universe ”というものが生まれる。多数の真空の存在は多くの pocket universe を生み出し、その pocket universe のうち宇宙定数などの条件が絶妙に調整された pocket universe が現在、私達が存在している宇宙になっていると考えられている。tunnelling event によって生じる宇宙の特徴は負の曲率 ($K < 0$) を持って生まれてくることである。現在宇宙で観測される曲率パラメータ $\Omega_k (= -K/H_0^2)$ はインフレーションによって tunneling 直後の負の曲率が引き伸ばされて観測されるもので tunneling event 後のインフレーションの長さに依存している。したがって観測によって $\Omega_k > 0$ ということが確認されればインフレーションに強い制限を与えることができる。また、もう一つのインフレーションを特徴付けるパラメータとして spectral index n_s というものがあり、このパラメータは tunneling event 後のインフレーションの傾きに依存している。本収録では Fisher 行列解析という手段を用いて、インフレーションに関するパラメータ Ω_k, n_s の二つについて将来の観測実験によりどの程度制限を与えることができるかということを推定していく。

そこでまず、2 章では Fisher 行列解析がどのようなものなのかを review する。そして 3 章では銀河の大規模構造のパワースペクトル解析に対する Fisher 行列の計算について概説し、4 章で具体的に Fisher 行列の計算結果について述べる。5 章では、結論と今後について述べる。

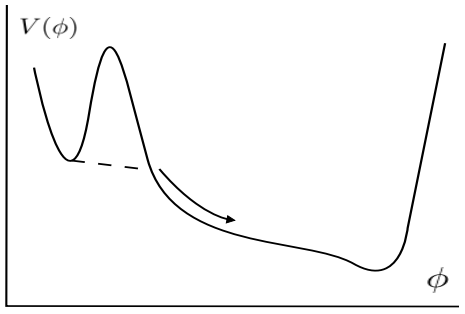


図 1: tunneling event のイメージ。左の” 谷”（偽真空）から右の相対的に低いポテンシャルを持つ真空へ点線に沿って tunneling をが起こり pocket universe が生まれる様子を表している。

2 Fisher 行列解析

まず、ベイスの定理より次の式が与えらる。

$$\mathcal{L}(D|\theta) = \frac{\mathcal{L}(D)}{\mathcal{L}(\theta)}\mathcal{L}(\theta|D) \tag{1}$$

$\mathcal{L}(D|\theta)$ はパラメータ θ が与えられた時のデータの確率分布関数で likelihood と呼ばれる。また、$\mathcal{L}(\theta|D)$ はデータが与えられた時のパラメータ θ の確率分布関数で posterior と呼ばれる。$\mathcal{L}(\theta), \mathcal{L}(D)$ はパラメータ θ とデータの確率分布関数で、ここでは、それぞれ定数と置く。以上より $\mathcal{L}(D|\theta) \propto \mathcal{L}(\theta|D)$ という関係がベイスの定理から成り立つことがわかる。

そして Fisher 行列は既知の確率分布関数 $\mathcal{L}(D|\theta)$ を使って次のように定義される。

$$F_{ij} \equiv -\left\langle \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}(D|\theta)}{\partial\theta_i \partial\theta_j} \right\rangle \tag{2}$$

θ_i, θ_j は知りたいパラメータに対応している（本収録では Ω_k, n_s そしてバイアスパラメータに対応している）。そして、これを使って $\ln \mathcal{L}(D|\theta)$ のテイラー展開から $\mathcal{L}(D|\theta)$ を次のように表せる。

$$\mathcal{L}(D|\theta) = N \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{ij} \Delta\theta_i F_{ij} \Delta\theta_j\right] \tag{3}$$

さらに先ほどの likelihood と posterior の比例関係より次のようにも書くことができる。

$$\mathcal{L}(\theta|D) = N' \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{ij} \Delta\theta_i F_{ij} \Delta\theta_j\right] \tag{4}$$

（ただし N, N' は規格化定数、$\Delta\theta$ はパラメータの誤差。）このように未知の確率分布関数 $\mathcal{L}(\theta|D)$ を既知の確率分布関数 $\mathcal{L}(D|\theta)$ で定義した Fisher 行列を使って表すことができる。

またパラメータの誤差は、χ^2 の定義

$$\Delta\chi^2 \equiv 2\Delta \ln \mathcal{L} = \sum_{ij} \Delta\theta_i F_{ij} \Delta\theta_j \tag{5}$$

$$\begin{cases} \Delta\chi^2 = \chi^2(\theta) - \chi_0^2(\theta_0) \\ \Delta \ln \mathcal{L} = \Delta \ln \mathcal{L}(\theta_0|D) - \Delta \ln \mathcal{L}(\theta|D) \end{cases}$$

と表 1 から求めることができる（θ_0：確率分布関数が最大になる時のパラメータ）[2]。

表 1: パラメータの数と CL に関するχ^2の値

CL	1	2	3
$68.3\%(1\sigma)$	1.00	2.30	3.53
$95.4\%(2\sigma)$	2.71	4.61	6.25
$99.73\%(3\sigma)$	9.00	11.8	14.2

このような Fisher 行列解析を用いる有用性は、実際に観測を行う前にパラメータの誤差を推定することができるということである。これにより将来の観測実験のセットアップを探求することができ、より効率の良い観測実験の計画をたてることが可能になる。さらに全く独立な観測実験の補完性も探索できる。

3 銀河の大規模構造での Fisher 行列の計算

銀河のパワースペクトル (likelihood) がガウス分布であると仮定し具体的に Fisher 行列を計算していく。このとき確率分布関数は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{L}(D|\theta) &= -\frac{1}{2}\int d\vec{k} \int d\vec{k'} \big(P^{obs}(\vec{k}) - \big\langle P(\vec{k})\big\rangle\big) \\ &\times \; C(\vec{k}, \vec{k'})\big(P^{obs}(\vec{k'}) - \big\langle P(\vec{k'})\big\rangle\big) \end{aligned} \tag{6}$$

ただし、

$$C(\vec{k}, \vec{k'}) = \frac{V}{2(2\pi)^3 (P(\vec{k} + \frac{1}{n}))^2}\delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k'}) \tag{7}$$

で $\big\langle P(\vec{k})\big\rangle, \big\langle P(\vec{k'})\big\rangle$ のみがパラメータθ_i, θ_j依存するとする。すると Fisher 行列は次のように書き下すことができる。[2]

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \int_{-1}^{1}\int_{k_{\min}}^{k_{\max}} \frac{\partial \ln P_g(k,\mu)}{\partial\theta_i}\frac{\partial \ln P_g(k,\mu)}{\partial\theta_j} \\ &\times \; V_{\rm eff}(k,\mu)\frac{k^2 dk d\mu}{2(2\pi)^2} \\ &\quad (i,j = n_s, \Omega_k, b_0, A_1, A_2) \end{aligned} \tag{8}$$

このとき、

$$P_g(k,\mu) = (b(k) + f\mu^2)P_m(k,\mu) \tag{9}$$

は銀河のパワースペクトル、そして

$$V_{\rm eff}(k,\mu) \equiv \left[\frac{nP_g(k,\mu)}{nP_g(k,\mu)+1}\right]^2 V_{\rm survey} \qquad (10)$$

を定義する。さらに$b(k)$ はクラスタリングバイアス、f は成長率、μ は視線方向と波数ベクトルの間の角度の余弦、$P_m(k,\mu)$ はダークマターのパワースペクトル、n は銀河の数密度、$V_{\rm survey}$はサーベイの体積である。

ダークマターのパワースペクトルは物質の密度揺らぎから

$$P_m(k) = \left\langle |\delta_k^{(m)}|^2 \right\rangle \qquad (11)$$

と定義され、図 2 のような振る舞いをすることからダークマターのパワースペクトルが n_s, Ω_k に依存していてこれを使うことで銀河の大規模構造からインフレーションの情報を引き出せるということがわかる。

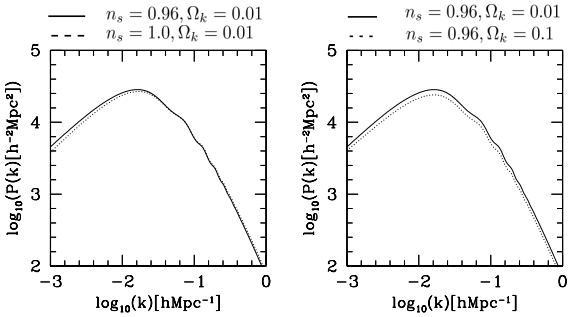


図 2: ダークマターのパワースペクトル

銀河の密度揺らぎは物質の密度揺らぎを反映しているが、これらは必ずしも一致しない。このことをクラスタリングバイアスと呼び、これが銀河の形成プロセスや銀河のタイプに依存することは分かっているがまだ完全には理解されていない。そこで今回はクラスタリングバイアスを次のように仮定して計算を行った。(b_0, A_1, A_2は定数)

$$b(k) = b_0 \frac{1+A_2k^2}{1+A_1k} \qquad (12)$$

線形成長率 f は線形理論での物質揺らぎの成長を表す成長因子 D_1 を用いて次のように定義される。

$$f \equiv \frac{d\ln D_1}{d\ln a} \qquad (13)$$

また、実際の計算では式 (6) を数値計算して Fisher 行列の各成分の値を求めるのだが、本収録ではΩ$_k$と n_sの誤差についてだけ解析したいので、Ω$_k$と n_s以外のパラメータ（バイアスパラメータ）を Marginalize してやる必要がある。例えば、バイアスパラメータ A$_2$を Marginalize する場合、

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(n_s,\Omega_k,b_0,A_1|D) = \int d\Delta A_2\ \mathcal{L}(\theta|D) \\
&= N'' \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{ij}\Delta\theta_i\left(F_{ij} - \frac{F_{iA_2}}{F_{A_2A_2}}F_{jA_2}\right)\Delta\theta_j\right] \\
&= N'' \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{ij}\Delta\theta_i\widetilde{F_{ij}}\Delta\theta_j\right] \\
&(i,j = n_s,\Omega_k,b_0,A_1)
\end{aligned} \qquad (14)$$

と書き直すことができる（ただし N'' は規格化定数)。これをあと、b_0, A_1について行えば、$\mathcal{L}(n_s,\Omega_k|D)$ を求めることができ、n_sとΩ$_k$についての 2×2 のFisher 行列をバイアスパラメータの影響も考慮しつつ求めることができ、それを使って二つパラメータの誤差について解析を行うことができる。

4 解析結果

この章では、前章の Fisher 行列の計算を使ってパラメータの誤差を解析する。本収録では Fisher 行列を計算する際に、銀河のサーベイの体積と銀河の数密度に

$$V_{\rm survey} = 10^{11}(h^{-3}Mpc^3), n = 10^{-4}(h^3Mpc^{-3})$$

(20000 平方度,$0.5 \le z \le 2.0$) という値を代入した。これは将来行われる予定の観測（Euclid 衛生、DESI など）のサーベイの体積を想定している。また波数の範囲 $k_{\rm max}, k_{\rm min}$ は $0.01 \le k \le 0.2$ とし、クラスタリングバイアスと線形成長率には $b_0 = 2.0, A_1 = -0.1, A_2 = 0.2, f = 0.52$ という値をそれぞれ代入した。

以上のような値を式 (6) に代入して数値計算し Fisher 行列を求めパラメータの誤差を解析した結果が図 3 である。この図より 1σの範囲でパラメータ

Ω_k, n_sは$\Delta\Omega_k \sim \pm 0.008, \Delta n_s \sim \pm 0.025$ の範囲での制限が推定され、このような誤差の範囲でインフレーション模型が制限される可能性があるということがわかった。

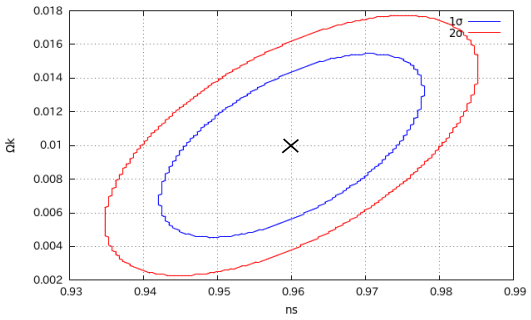


図 3: 二つのパラメータ n_s, Ω_k以外の誤差が CMB などの観測で精度良く決まっているとしたときの, $\mathrm{n_s}, \Omega_\mathrm{k}$ の誤差。縦軸が $\mathrm{n_s}$, 横軸がΩ_k, ×印はΩ_kと $\mathrm{n_s}$のターゲットパラメータで$\Omega_\mathrm{k} = 0.01, \mathrm{n_s} = 0.96$ を選んだ。内側の青色の線が $1\sigma(68.3\%)$ の等高線、外側の赤色の線が $2\sigma(95.4\%)$ の等高線である。

5　まとめ、結論

本収録では、Landscape Paradigm で考えられるような曲率パラメータ $\Omega_k > 0$ のインフレーション模型の制限を推定するために、銀河の大規模構造での Fisher 行列を計算しインフレーションに関するパラメータ n_s, Ω_k についての制限を推定した。

しかし、この計算はまだ不十分で Cosmological distortion の効果も加える必要がのでまず計算を完成させることが今後の課題であり、その上で前章の結果に対してバイアスの値、銀河の数密度の値もしくは、k の範囲を変えた場合にパラメータ n_s, Ω_k の誤差にどれだけ影響がでるのかを統計的に調べる必要もある。

また、本収録では銀河の大規模構造でのみ Fisher 行列解析を行ってきたが、今後は CMB での Fisher 行列解析も計算してその時のパラメータ n_s, Ω_k の誤差を解析しインフレーション模型を具体的に決定できるか調べると共に tunnelling event によって初期揺らぎにどのぐらい影響があるのかということも考えていきたい。

参考文献

[1] Ben Freivogel, Matthew Kleban, Maria Rodriguez Martinez and Leonard Susskind. JHEP03(2006)039

[2] Licia Verde arXiv:0911.3105v1(2012)

[3] Zhiqi Huang,Licia Verde and Filippo Vernizzi arXiv:1201.5955v2(2012)

[4] K.Yamamoto ApJ 595:577-588(2003)

[5] Raphael Bousso, Daniel Harlow and Leonardo Senatore arXiv:1309.4060v2(2013)

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

量子場の真空について-アンルー効果-

清田 哲史 (広島大学大学院 理学研究科 M1)

Abstract

ブラックホール時空上の場の量子論は、ホーキング放射と呼ばれる熱的放射の存在を予言する。一般相対性理論の等価原理によると、ブラックホールにおける重力による加速度と、ミンコフスキー時空中の加速度運動を結びつけることができる。アンルー効果とは一様な加速度で運動する観測者が、場が真空状態であったとしても有限温度（アンルー温度）の放射を見ると予言する効果である。本発表ではアンルー効果について説明する。まずミンコフスキー時空において静止している観測者 a と、一様加速度で運動している観測者 b について考える。観測者 a には実験室系 (t, x)、また観測者 b には固有座標系 (τ , ξ) （加速度運動する観測者 b が周りに張る座標系）を用いる。ミンコフスキー計量を固有座標系で表すことで得られる新たな計量をリンドラー計量と呼ぶ。次に、質量 0 のスカラー場を考え、それぞれの座標系において量子化を行うことで、ミンコフスキー時空であらわれる生成消滅演算子と、リンドラー時空の量子場にあらわれる生成消滅演算子がボゴリューボフ変換で結びつくことを見る。それぞれの量子場の真空状態は異なった状態であると示すことができる。そして、一様な加速度で運動する観測者がミンコフスキー時空の真空状態を観測すると、励起された状態として観測することが示される。この励起は加速度を α として、温度 $T = \alpha/2\pi$ の熱的ボーズ・アインシュタイン分布と同じ励起スペクトルを持つことがわかる。最新の研究として、超高強度レーザーの電磁場を用いることでアンルー効果を検証する可能性が議論されている。

1　2 つの座標系

本発表では、全体を通して実験室系 (t, x) と固有座標系 (τ , ξ) の 2 つの立場から見る必要がある。固有座標系は, 一様加速度で運動している観測者が長さ ξ の定規を持ち、その定規と定規の各点に括りつけた時計で距離と時間をはかった座標系である。この 2 つの座標系の間には、

$$t(\tau, \xi) = \frac{1 + a\xi}{a} \sinh(a\tau) \tag{1}$$

$$x(\tau, \xi) = \frac{1 + a\xi}{a} \cosh(a\tau) \tag{2}$$

の関係が成り立っている。$x > 0$ において、図 1 のように座標を張ることができる。また (1), (2) 式より τ と ξ は

$$-\infty < \tau < \infty \tag{3}$$

$$-\frac{1}{a} < \xi < \infty \tag{4}$$

の範囲をとる。

図より、この固有座標系にいる観測者は $t - x > 0$ の領域からくる光を見ることはできないが、$t - x < 0$ かつ $t + x < 0$ の領域からくる光は

$$\tau = -\infty \tag{5}$$

$$\xi = -\frac{1}{a} \tag{6}$$

の地平線からきたように見える。

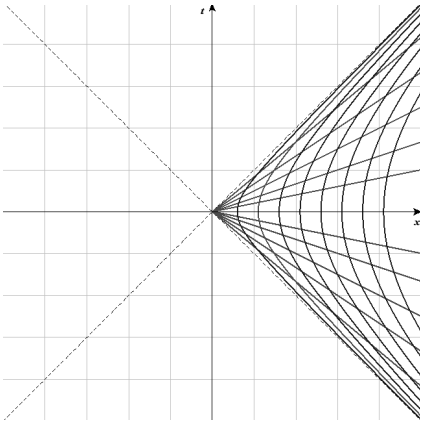


図 1: 縦軸 t、横軸 x とした。$t - x < 0$ かつ $t + x > 0$ の範囲で双曲線を描いているのが ξ : 一定 の線。原点から放射線状に伸びている直線が τ : 一定 の線。

2　リンドラー時空

今後の計算のために

$$\tilde{\xi} = \frac{1}{a}\ln(1+a\xi) \tag{7}$$

$$-\infty < \tilde{\xi} < \infty \tag{8}$$

により ξ を $\tilde{\xi}$ に置き換える。これより 2 つの系の線素は

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 \tag{9}$$

$$= \exp(2a\tilde{\xi})(d\tau^2 - d\tilde{\xi}^2) \tag{10}$$

と書ける。(t,x) で書かれた計量での時空をミンコフスキー時空、$(\tau,\tilde{\xi})$ で書かれた計量での時空をリンドラー時空と呼ぶ。また、(1), (2) 式は

$$t(\tau,\tilde{\xi}) = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{a\tilde{\xi}}\sinh(a\tau) \tag{11}$$

$$x(\tau,\tilde{\xi}) = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{a\tilde{\xi}}\cosh(a\tau) \tag{12}$$

と書き換えられる。

3　場の量子化

質量 0 のスカラー場を ϕ として、ミンコフスキー時空とリンドラー時空についてそれぞれ量子化する。2 節の置き換えにより

$$S[\phi] = \frac{1}{2}\int[(\partial_t\phi)^2 - (\partial_x\phi)^2]dtdx \tag{13}$$

$$S[\phi] = \frac{1}{2}\int[(\partial_\tau\phi)^2 - (\partial_{\tilde{\xi}}\phi)^2]d\tau d\tilde{\xi} \tag{14}$$

と書くことができる。これより運動方程式は

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial \tilde{\xi}^2} = 0 \tag{16}$$

となる。$\phi(t,x)$ と $\phi(\tau,\tilde{\xi})$ についてそれぞれ量子化すると、

$$\hat{\phi}(t,x) = \int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\mathrm{e}^{-i\omega\bar{u}}\hat{a}_\omega^- + \mathrm{e}^{i\omega\bar{u}}\hat{a}_\omega^+ + \mathrm{e}^{-i\omega\bar{v}}\hat{a}_{-\omega}^- + \mathrm{e}^{i\omega\bar{v}}\hat{a}_{-\omega}^+) \tag{17}$$

$$\hat{\phi}(\tau,\tilde{\xi}) = \int_0^\infty \frac{d\Omega}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\Omega}}(\mathrm{e}^{-i\Omega u}\hat{b}_\Omega^- + \mathrm{e}^{i\Omega u}\hat{b}_\Omega^+ + \mathrm{e}^{-i\Omega v}\hat{b}_{-\Omega}^- + \mathrm{e}^{i\Omega v}\hat{b}_{-\Omega}^+) \tag{18}$$

となる。ここで、

$$\bar{u} = t - x, u = \tau - \tilde{\xi}$$

$$\bar{v} = t + x, v = \tau + \tilde{\xi}$$

を導入した。Ω, ω はそれぞれの場での運動量であり、$\Omega > 0, \omega > 0$　また $\hat{a}_\omega^\pm, \hat{b}_\Omega^\pm$ は、各時空での生成消滅演算子であり、$\hat{a}_\omega^-, \hat{b}_\Omega^-$ と $\hat{a}_\omega^+, \hat{b}_\Omega^+$ はをれぞれエルミート共役の関係にある。また

$$\hat{a}_\omega^-|0_M>=0 \tag{19}$$

$$\hat{b}_\Omega^-|0_R>=0 \tag{20}$$

が成り立っている。ここでミンコフスキー真空を $|0_M>$ リンドラー真空を $|0_R>$ とおいた。

4　ボゴリューボフ変換

次に、量子場の 2 つの表現を結びつけるボゴリューボフ変換を説明する。

(11), (12) 式より、$\bar{u}$ を u の関数、$\bar{v}$ を v の関数として見ることができるため、(17) 式と (18) 式の場を結びつけることができる。ここで恒等式の関係より、$\bar{u}$ と u について

$$\int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\mathrm{e}^{-i\omega\bar{u}}\hat{a}_\omega^- + \mathrm{e}^{i\omega\bar{u}}\hat{a}_\omega^+) = \int_0^\infty \frac{d\Omega}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\Omega}}(\mathrm{e}^{-i\Omega u}\hat{b}_\Omega^- + \mathrm{e}^{i\Omega u}\hat{b}_\Omega^+) \tag{21}$$

と書ける。両辺フーリエ変換して整理すると

$$\hat{b}_\Omega^- = \int_0^\infty d\omega[\alpha_{\omega\Omega}\hat{a}_\omega^- + \beta_{\omega\Omega}\hat{a}_\omega^+] \tag{22}$$

となる。ここで

$$\alpha_{\omega\Omega} = \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} [\mathrm{e}^{-i\Omega u - i\omega \bar{u}}] \tag{23}$$

$$\beta_{\omega\Omega} = \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} [\mathrm{e}^{-i\Omega u + i\omega \bar{u}}] \tag{24}$$

を導入した。α, β は一般にボゴリューボフ係数と呼ばれるものであり、この場合

$$\alpha_{\omega\Omega} = \beta_{\omega\Omega} \exp\left(\frac{\pi\Omega}{a}\right) \tag{25}$$

の関係を示すことができる。

5　粒子の数密度

3 節でミンコフスキー真空とリンドラー真空が異なる状態であることを見た。ここで、固有座標系にいる観測者はミンコフスキー真空をどのような状態としてみるのかについて考える。固有座標系における粒子の数密度演算子は、$\hat{N}_\Omega = \hat{b}_\Omega^+ \hat{b}_\Omega^-$ で定義される。したがって、固有座標系においてミンコフスキー真空を観測した時の粒子の平均数は

$$\begin{aligned} < \hat{N}_\Omega > &= < 0_M | \hat{b}_\Omega^+ \hat{b}_\Omega^- | 0_M > & (26) \\ &= \int_0^\infty d\omega |\beta_{\omega\Omega}|^2 & (27) \\ &= \left[\exp\left(\frac{2\pi\Omega}{a}\right) - 1\right]^{-1} \delta(0) & (28) \end{aligned}$$

ここで $\delta(0)$ は発散量因子と呼ばれ、空間の体積を表す。これより数密度は

$$n_\Omega = \left[\exp\left(\frac{2\pi\Omega}{a}\right) - 1\right]^{-1} \tag{29}$$

となる。

6　アンルー温度

運動量 Ω で質量 0 の粒子のエネルギーは $E = |\Omega|$ である。したがって、ボーズ・アインシュタイン分布の式

$$n(E) = \left[\exp\left(\frac{E}{T}\right) - 1\right]^{-1} \tag{30}$$

と (29) 式を比較することで

$$T = \frac{a}{2\pi} \tag{31}$$

が求まる。SI 単位系で書くと

$$\begin{aligned} T &= \frac{\hbar}{kc} \frac{a}{2\pi} & (32) \\ &\cong \left(\frac{a}{10^{20} m/s^2}\right) K & (33) \end{aligned}$$

となる。ここで k はボルツマン定数
$1K$ の温度を観測するために必要な加速度は

$$a = 10^{20} m/s^2 \tag{34}$$

となり、極めて大きな加速度を必要とする。

7　まとめと展望

本発表ではまず実験室系と固有座標系を導入し、それぞれの計量での時空がミンコフスキー時空とリンドラー時空となることを見た。次に、質量 0 のスカラー場 ϕ をこの 2 の時空について量子化した。それぞれの時空の真空状態をボゴリューボフ変換によって結びつけることで、固有座標系にいる観測者がミンコフスキー真空を観測した時に見る粒子の平均数とアンルー温度を求めることができた。本文で見たように、実際にアンルー効果を観測するのは困難に見えるが、最近では超高強度レーザーをによる電磁場を用いて粒子を加速させ、アンルー効果によって観測される粒子との相互作用によるブラウン運動から、アンルー効果を検証しようとする試みも議論されている。

Reference

Sergei Winitzki「Elementary Introduction to Quantum Fields in Curved Spacetime Lecture notes」,(2006)

修正重力の可否性を問う新たな手法

松原　元気 (立教大学大学院　理学研究科)

Abstract

本件は ”Stability of Schwarzschild-like solutions in f(R,G) gravity models (Antonio De Felice, Teruaki Suyama, Takahiro Tanaka) Phys.Rev.D83:104035,2011 ”のレビューである。
重力理論・宇宙論において、ダークエネルギーなどの説明のために新しい重力理論が必要となる。既存の理論と同様、これら修正重力理論においても系が安定になる必要がある。このため、Ghost という系を不安定にする場を生じる理論は一様に棄却されてきた。
しかし、Ghost の質量が超大になる場合、つまり Ghost が物理的に意味のない場となる場合にはその修正理論は棄却されずに済む、という新たな視点を導入する。今回のレビューでは、一般の f(R,G) Gravity で球対称時空にゆらぎを与えると、常に Ghost が生じること、及び、Ghost の質量が自然に超大になることを示す。

1　考察する状況の設定

修正重力のラグランジアンが

$$S=\frac{M_{\rm Pl}^2}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\,[F\,R+\xi\,\mathcal{G}-U(F,\xi)],$$

の場合のみを考察する。ただし、F,ξ はラグランジュの未定乗数で、U はその関係式を与える。

U の与え方次第で、一般の $f(R,G)$ Gravity を表すことができる。

背景時空は次の一般球対称時空とする。

$$ds^2=g^0_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu=-A(r)\,dt^2+\frac{dr^2}{B(r)}+\frac{r^2\,dz^2}{1-z^2}+r^2(1-z^2)\,d\varphi^2$$

これらより、各場の EOM が変分より求められる。

$$\begin{aligned}
U&=-\frac{4B\,\xi'\,A'}{A\,r^2}+\frac{12B^2\,\xi'\,A'}{A\,r^2}-\frac{4B\,F'}{r}-\frac{2B\,F\,A'}{A\,r}-\frac{B\,F'\,A'}{A}+\frac{2F}{r^2}-\frac{2B\,F}{r^2},\\
F''&=-\frac{2B'\,\xi'}{r^2\,B}-\frac{F'\,B'}{2B}+\frac{B\,\xi''}{4r^2}-\frac{4\xi''}{r^2}-\frac{F\,B'}{r\,B}+\frac{2\xi'\,A'}{A\,r^2}+\frac{F'\,A'}{2A}-\frac{6\xi'\,B\,A'}{A\,r^2}+\frac{F\,A'}{A\,r}+\frac{6B'\,\xi'}{r^2}\\
R&=\frac{\partial U}{\partial F},\\
\mathcal{G}&=\frac{\partial U}{\partial\xi},
\end{aligned}$$

2　Perturbation の運動方程式

背景時空に摂動を入れる。今回は THE REGGE-WHEELER-ZERILLI FORMALISM によって、摂動を odd wave と even wave に分解する。

◆ odd wave の場合

摂動成分は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
&h_{tt}=0,\quad h_{tr}=0,\quad h_{rr}=0,\\
&h_{ta}=\sum_{\ell,m}h_{0,\ell m}(t,r)E_{ab}\partial^b Y_{\ell m}(\theta,\varphi),\\
&h_{ra}=\sum_{\ell,m}h_{1,\ell m}(t,r)E_{ab}\partial^b Y_{\ell m}(\theta,\varphi),\\
&h_{ab}=\frac{1}{2}\sum_{\ell,m}h_{2,\ell m}(t,r)\left[E_a{}^c\nabla_c\nabla_b Y_{\ell m}(\theta,\varphi)+E_b{}^c\nabla_c\nabla_a Y_{\ell m}(\theta,\varphi)\right].
\end{aligned}$$

これにより、摂動の入ったラグランジアンは

$$S_{\rm odd}=\frac{M_{\rm Pl}^2}{2}\sum_{\ell,m}\int dt\,dr\,\mathcal{L}_{\rm odd}=\frac{M_{\rm Pl}^2}{2}\sum_{\ell,m}\int dt\,dr\left[A_1\left(\dot h_1-h_0'\right)^2+A_2h_0\dot h_1+A_3h_0^2-A_4\dot h_1^2\right],$$

となる。各係数は原論文 Appendix に収録されている。

ゲージ変換と各場での変分結果から得られる束縛条件により、このラグランジアンは Dynamical な場をひとつだけ含み、それを Q とする。Q によってラグランジアン中の h_0,h_1 は

$$\begin{aligned}
h_1&=-\frac{A_1\,\dot Q}{A_4},\\
h_0&=\frac{r}{2A_1+2r\,A_1'-A_3r^2}\left[(r\,A_1'+2A_1)\,Q+r\,A_1\,Q'\right].
\end{aligned}$$

と表示される。これによってラグランジアンを表示しなおすと

$$\mathcal{L}_{\rm odd}=A_1\left[2\,Q\left(\dot h_1-h_0'+2\frac{h_0}{r}\right)-Q^2\right]-\frac{2\,(A_1'r+A_1)\,{h_0}^2}{r^2}+A_3{h_0}^2-A_4{h_1}^2.$$

これにより、運動項が正になる条件、No Ghost Condition が得られた。

◆ even wave の場合

odd と同様に分解すると、摂動成分は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
h_{tt} &= -A(r)\sum_{\ell,m} H_{0,\ell m}(t,r)Y_{\ell m}(\theta,\varphi),\\
h_{tr} &= \sum_{\ell,m} H_{1,\ell m}(t,r)Y_{\ell m}(\theta,\varphi),\\
h_{rr} &= \frac{1}{B(r)}\sum_{\ell,m} H_{2,\ell m}(t,r)Y_{\ell m}(\theta,\varphi),\\
h_{ra} &= \sum_{\ell,m} \alpha_{\ell m}(t,r)\partial_a Y_{\ell m}(\theta,\varphi)\,,
\end{aligned}
$$

摂動の入ったラグランジアンは

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\rm even} = {} & H_0'\,(a_1\delta\xi' + a_2\,\delta F' + a_3 H_2 + j^2\,a_4\,\alpha + a_5\,\delta\xi + a_6\,\delta F) + j^2\,H_0\,(a_7\,H_2 + a_8\,\alpha + a_9\,\delta\xi + a_{10}\,\delta F)\\
& + j^2\,b_1\,H_1^2 + H_1\,(b_2\,\delta\xi' + b_3\,\delta F' + b_4\,H_2 + j^2\,b_5\,\alpha + b_6\delta\xi + b_7\delta F) + c_1\,H_2^2\\
& + H_2\,[c_2\,\delta\xi' + c_3\,\delta F' + j^2\,c_4\,\alpha + \delta\xi\,(j^2\,c_6 + c_7) + \delta F\,(j^2\,c_9 + c_{10})] + \dot{H}_2\,(c_5\,\delta\xi + c_8\,\delta F)\\
& + j^2\,(d_1\,\dot{\alpha}^2 + d_2\,\alpha^2) + j^2\,\alpha\,(d_3\,\delta\xi' + d_4\,\delta F' + d_5\,\delta\xi + d_6\,\delta F) + e_1\,\delta F^2 + e_2\,\delta F\,\delta\xi + f_1\,\delta\xi^2\,,
\end{aligned}
$$

ここでも変分により束縛条件が生じる。

$$
\begin{aligned}
& a_1\,\delta\xi'' + a_2\,\delta F'' + (a_5 + a_1')\,\delta\xi + (a_2' + a_6)\,\delta F + j^2\,a_4\,\alpha' + a_3\,H_2' + (a_5' - j^2\,a_9)\,\delta\xi + (a_6' - j^2\,a_{10})\,\delta\xi\\
& + (a_3' - j^2\,a_7)\,H_2 + (a_4' - a_8)\,j^2\,\alpha = 0\,,
\end{aligned}
$$

これを用いて、次のように場を再定義する。

$$
j^2\,a_4\,\alpha = a_4\,v_0 - a_3\,H_2 - a_2\,v_1'\,.
$$

$$
\delta F = v_1 - \frac{a_1}{a_2}\,\delta\xi = v_1 - \frac{4(1-B)}{r^2}\,\delta\xi\,.
$$

$$
\begin{aligned}
v_0 &= v_2\,(1+4j^2)^{1/2},\\
\delta\xi &= v_3\,(1+4j^2)^{1/2},
\end{aligned}
$$

この結果、even wave のラグランジアンは次のようにカノニカルに表示できる。

$$
\mathcal{L}_{\rm even} = \sum_{i,j=1}^{3}\,[K_{ij}(r,j)\,\dot{v}_i\,\dot{v}_j - L_{ij}(r,j)\,v_i'\,v_j' - D_{ij}(r,j)\,v_i'\,v_j - M_{ij}(r,j)\,v_i\,v_j]\,,
$$

よって各場の運動項が負にならない No Ghost Condition は

$$
K_{33} > 0\,, \qquad K_{22}\,K_{33} - K_{23}^2 > 0\,, \qquad \det(K_{ij}) > 0.
$$

すると、これは odd wave の No Ghost Condition と常に対立してしまう。よって、球対称時空で f(R,G) を考えると、常に Ghost が存在してしまうことがわかる。

3 Schwarzschild-Background での考察

これまで一般球対称時空について考察したが、ここでメトリックを具体的に Schwarzschild Black Hole に指定する。また odd wave の No Ghost Condition が満たされているとして、even wave に注目する。

3 つの Propagating wave の Kinetic term の符号を知るため、KineticMatrix を対角化する。このため、次のような場の張替えを行う。

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \frac{\sqrt{6}}{3r}\,w_1 + \frac{2}{r\sqrt{6}}\,w_2\,,\\
v_2 &= \frac{r\,j^2 + r_s}{\sqrt{6}\,\sqrt{1+4j^2}\,(r-r_s)}\,w_1 + \frac{r\,j^2 + 7r_s - 6r}{\sqrt{6}\,\sqrt{1+4j^2}\,(r-r_s)}\,w_2 + w_3\,,\\
v_3 &= \frac{r^2}{2\sqrt{6}\,\sqrt{1+4j^2}\,r_s}\,w_2\,.
\end{aligned}
$$

$$
\tilde{K}_{11} = 1\,, \quad \tilde{K}_{22} = -1\,, \quad \tilde{K}_{33} = \frac{2(r-r_s)^2\,(1+4j^2)\,(j^2-2)}{j^2\,[(j^2-2)\,r + 3r_s]^2}\,,
$$

これに伴い、MassMatrix も変形して、

whereas the new symmetric mass matrix, $\tilde{M}_{ij} = P_{ki}\,M_{kl}\,P_{lj}$, satisfies $\tilde{M}_{i3} = 0$ for $i = 1,2,3$, and its non-zero components are

$$
\tilde{M}_{11} = \frac{U_{xFF}}{3}\,, \quad \tilde{M}_{12} = \frac{U_{xF\xi}}{3\sqrt{6}}\,, \quad \tilde{M}_{22} = \frac{U_{\xi\xi}}{36}\,.
$$

となる。

再定義された場 w_2 の運動項が負となり、これがゴーストとなる。かつ、ミンコフスキ時空に漸近した場合、$\tilde{M}_{22}$ が $\tilde{G} \to 0$ により発散する質量を持つ。よって、Ghost が発生したが、それが低重力場環境では物理的意味をなさないことが分かった。

4 簡単な具体例

具体例として、太陽系スケールでの観測に矛盾がないこと、すなわち、太陽を中心とした低重力球対称時空を考えた時に Ghost の質量が十分大きくなることを示す。

ダークエネルギーを与える ToyModel のうち、これまでに用いた条件を満たす修正重力として

$$f(R,\mathcal{G}) = R + \mathcal{F}_R(R) + \mathcal{F}_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}),$$

$$\mathcal{F}_R(R) = \mathcal{A}_R \mu^{2p+2}/(R^p + c_R\,\mu^{2p}), \qquad \mathcal{F}_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}) = \mathcal{A}_{\mathcal{G}} \mu^{8n+2}/(\mathcal{G}^{2n} + c_{\mathcal{G}}\,\mu^{8n})$$

がある。この場合に低重力として $R >> H_0{}^2, G >> H_0{}^4$ を用いると、

$$U_{,FF} = 1/f_{,RR} = O(\mu^{-2p-2}\,R^{p+2}) \text{ and } U_{,\xi\xi} = 1/f_{,\mathcal{G}\mathcal{G}} = O(\mu^{-8n-2}\,\mathcal{G}^{2n+2})$$

$$m^2_{\text{non-ghost}} = O\left(H_0^2\left[\frac{\rho_{\text{local}}}{\rho_c}\right]^{p+2}\right), \quad m^2_{\text{ghost}} = O\left(H_0^2\left[\frac{H_0^{-2} r_s}{r^3}\right]^{4n+2}\right)$$

$\rho_c \approx 4 \times 10^{-30}\text{g/cm}^3$ is the critical density of the universe.

the energy density ρ_{local} of matter surrounding a star

各定数に太陽系の情報

$$r_s \sim 3\text{km},\ r \sim 1\text{AU},\ \rho_{\text{local}} \sim 10^{-24}\text{g/cm}^3$$

を入れる。よって、この場合の PropagatingWave の質量は

$$m^2_{\text{non-ghost}} \approx (10^{22.7-2.7p}\text{cm})^{-2} \text{ and } m^2_{\text{ghost}} \approx (10^{6-88.4n}\text{cm})^{-2}$$

となる。よって、n〜1 の場合、質量は十分大きい値となる。

5 Conclusion

- f(R,G) 修正重力では、球対称時空は Ghost の存在から安定になれないことが分かった。
- 修正重力として適切であれば、Ghost が存在しても自動的にその質量が超大なものとなる。
- Ghost の存在が、修正重力として棄却される理由にはならないことが予想できた。

6 参考文献

1. Stability of Schwarzschild-like solutions in f(R,G) gravity models (Antonio De Felice, Teruaki Suyama, Takahiro Tanaka) Phys.Rev.D83:104035,2011

2. T. Regge and J. A. Wheeler, Phys.Rev. 108, 1063 (1957)

3.5 keV X 線輝線が示唆する Mixed dark Matter モデルにおける Substructure 問題

原田 了 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

ΛCDM モデルは銀河団程度以上の大規模構造の観測結果を説明するが、銀河程度以下の小規模構造の観測との間には矛盾が生じている。そのような矛盾として、天の川銀河周辺に存在する矮小銀河の最大回転速度に対する分布が食い違う Substructure 問題や、中心密度が食い違う Too Big To Fail 問題が知られている。

これを Warm Dark Matter (WDM) の自由流減衰により小規模構造を均すことで解決しようとすると、Lyman-α の森の観測結果から加わる WDM モデルへの制限と矛盾する。ところが、WDM と CDM を混ぜた Mixed Dark Matter (MDM) モデルなら Lyman-α の森からの制限を緩和し、この矛盾を解消できる可能性がある。また、最近 Andromeda 銀河や Perseus 銀河団などから起源が不明な 3.5 keV の X 線輝線が検出された。これは Dark Matter 粒子の崩壊した信号である可能性がある。我々は、この信号を説明できる素粒子モデルは自然に MDM モデルとなることに注目した。

我々は、この 3.5 keV 輝線を説明できる MDM モデルにおける構造形成について調べた。N 体シミュレーションを実行すると、MDM モデルでの天の川銀河サイズ ($\sim 10^{12} M_\odot$) のハロー中のサブハローの数は CDM モデルの場合より $\sim 30\%$ から $\sim 50\%$ 程度減少した。特に最大回転速度に対する分布を調べると、MDM モデルの方が CDM モデルよりも観測をよく説明し、Substructure 問題の解決に近づくことを発見した。

1 Introduction

ΛCDM モデルは銀河団程度以上の大規模構造及び宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) などの観測結果を説明することができる。その一方で、銀河程度以下の小規模構造の観測との間には矛盾が生じている。そのような矛盾の一つとして substructure 問題 (Kravtsov 2010) というものが知られている。これは天の川銀河周辺に存在する矮小銀河と、ΛCDM モデルシミュレーション中に存在するサブハローの最大回転速度に対する分布 (Cumulative maximum circular Velocity Function, CVF) が食い違うという問題である。

こうした問題を解決する方策として、Warm Dark Matter (WDM) というものが考えられている。WDM 粒子は無視できない速度分散を持つため、自由流によって矮小銀河程度のスケールの構造を均す。この自由流減衰はサブハローの数を減少させるようにはたらくため、観測結果を説明できる可能性がある。自由流減衰が効くスケールは WDM 粒子が熱的に生成されたとすれば粒子質量に対応し、銀河程度以下のスケールの構造の観測結果を説明できるという条件によって WDM 粒子質量には制限が加えられている。それとは独立に、WDM 粒子質量には遠方のクエーサーのスペクトル中に見られる Lyman-α 吸収線の観測結果からも制限が加えられている。これらの制限を比較すると、互いに矛盾することが指摘されたが (Schneider et al. 2014)、CDM と WDM を混合した Mixed Dark Matter (MDM) モデルを考えると Lyman-α 吸収線からの制限を緩和し (Boyarsky et al. 2009)、この矛盾を解消できる可能性がある。

また、最近 Andromeda 銀河や Perseus 銀河団を始めとした多数の銀河団から起源が不明な 3.5 keV の X 線輝線が検出された (Bulbul et al. 2014; Boyarsky et al. 2014)。これは Dark Matter (DM) 粒子の崩壊などによる信号である可能性が指摘されている。我々は、特にこれが質量 $M \sim 7$ keV のステライルニュートリノの崩壊によって生じる信号である可能性を考えた。さらに、このステライルニュートリノが非共鳴生成 (NRP, Dodelson & Widrow (1994)) されたとすると、3.5 keV X 線輝線を説明するためには DM

全体は NRP ステライルニュートリノとその他の安定な粒子からできている必要がある。NRP ステライルニュートリノは宇宙初期に自由流減衰によって構造を均すため、WDM として振る舞う。それゆえ、安定な粒子が CDM として振る舞えば、3.5 keV X 線輝線を説明する DM モデルは MDM モデルとなる。本講演の目的は、この 3.5 keV X 線輝線を説明できる MDM モデルが substructure 問題を解決できるかどうか議論することである。

2 Structure Formation in the Mixed Dark Matter Model

2.1 Linear Structure Evolution

DM 全体のうち、$r_{\rm warm}$ の割合が NRP ステライルニュートリノでできており、残りが CDM でできている場合を考える。この場合、Andromeda 銀河からの X 線輝線のフラックスは

$$F \simeq 6.5\times10^{-5}\,\frac{\rm cts}{\rm s\,cm^2}\left(\frac{\Sigma_{\rm DM}}{500\,M_\odot/{\rm pc}^2}\right)\left(\frac{\Omega_{\rm fov}}{500\,{\rm arcmin}^2}\right) \times\left(\frac{\sin^2(2\theta)}{10^{-9}}\right)^2\left(\frac{M}{7\,{\rm keV}}\right)^6 \quad (1)$$

となる。ただし、$\Sigma_{\rm DM}$ は全 DM の柱密度で $\Omega_{\rm fov}$ は観測する視野角、θ はアクティブ・ステライル間の混合角である。いま、Andromeda 銀河からのフラックスとして Boyarsky et al. (2014) の値 $4.9^{+1.6}_{-1.3}\times10^{-6}\,{\rm cts/s/cm^2}$ を用い、かつ柱密度の値として $680^{+950}_{-500}\,M_\odot/{\rm pc}^2$(Boyarsky et al. 2010) を用いれば、$\sin^2(2\theta)/10^{-9}\simeq$ 0.1-0.7 という値を得る。さらに、h を 100 km/s/Mpc で規格化した Hubble パラメータとして、NRP ステライルニュートリノの密度パラメータは $\Omega_{\rm s}h^2\sim0.1(\sin^2(2\theta)/10^{-9})(M/7\,{\rm keV})^2$ であり (Dodelson & Widrow 1994)、全 DM の密度パラメータは $\Omega_{\rm DM}h^2\sim0.1$ なので、$M\sim7\,$keV の場合には $r_{\rm warm}=\Omega_{\rm s}h^2/\Omega_{\rm DM}h^2\sim\sin^2(2\theta)/10^{-9}$ となる。即ち、3.5 keV X 線輝線を説明できるのは $r_{\rm warm}\sim$ 0.1-0.7 であるが、本講演では特に $r_{\rm warm}=0.25$ の場合と $r_{\rm warm}=0.50$ の場合に着目する。

まずは CDM モデル、MDM モデル、WDM モデル (熱的生成粒子質量 2.4 keV) における構造の線形成長を調べた。これには公開コード `CAMB` (Lewis et al. 2000) を利用したが、MDM モデルで計算する時には質量のあるニュートリノの Fermi-Dirac 分布を NRP ステライルニュートリノの運動量分布に置き換える修正を加えた。また、宇宙論パラメータとしては Komatsu et al. (2011) の WMAP+BAO+H_0 Mean を用いた。

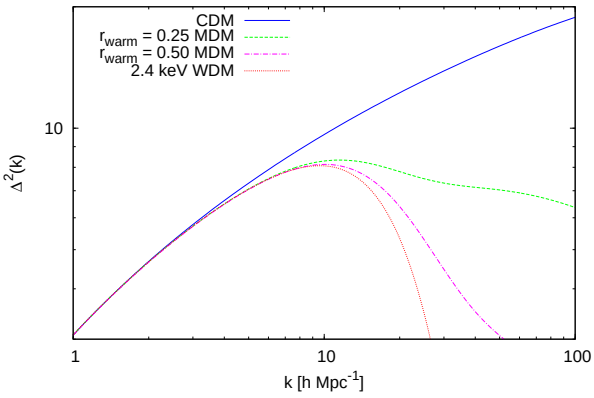


図 1: 4 つのモデルにおけるパワースペクトルを比較した。CDM 以外の 3 つのモデルは全て同じスケール以下でパワースペクトルが抑制されており、$r_{\rm warm}$ が大きいほど強く抑制される。

その結果得られた線型パワースペクトルを図 1 に載せる。自由流減衰によって、$r_{\rm warm}=0.25$ (緑破線) 及び $r_{\rm warm}=0.50$ (マゼンタ一点鎖線) の MDM モデルと WDM モデル (赤点線) におけるパワースペクトルは、CDM モデル (青実線) の場合よりも小スケールで小さくなっていることが見て取れる。いま、WDM モデルとして熱的生成粒子質量 $m_{\rm WDM}$ が 2.4 keV のものを比較に用いているが、それはパワースペクトルが抑制されるカットオフスケールが MDM モデルの場合と同じだからである。このカットオフスケールは当密度時 $t_{\rm eq}$ における共動 Jeans スケール

$$k_{\rm J}=a\sqrt{\frac{4\pi G\rho_0}{\sigma^2}}\bigg|_{t=t_{\rm eq}} = 64\,{\rm Mpc}^{-1}\left(\frac{m_{\rm WDM}}{2.4\,{\rm keV}}\right)^{4/3} \quad (2)$$

$$= 64\,{\rm Mpc}^{-1}\left(\frac{M}{7\,{\rm keV}}\right)\left(\frac{0.25}{r_{\rm warm}}\right)^{1/2} \quad (3)$$

で定義される。ただし G は万有引力定数、ρ_0 は平均物質密度、σ^2 は DM 粒子の速度分散である。$r_{\rm warm}=0.50$ の場合の $k_{\rm J}$ は正確には 64 Mpc^{-1} ではないが、

本講演では 64 Mpc^{-1} に近似して扱う。

ここで定義したカットオフスケールに対応する質量 M_{J} は

$$M_{\mathrm{J}} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{2\pi}{k_{\mathrm{J}}}\right)^3 \rho_0 \simeq 8.7\times10^7 \left(\frac{64\mathrm{Mpc}^{-1}}{k_{\mathrm{J}}}\right) M_\odot/h \tag{4}$$

と銀河程度以下の質量スケールになるので、今考えているモデルは substructure 問題を解決に近づける可能性がある。それを確かめるために、我々は次に N 体シミュレーションを行った。

2.2 Nonlinear Structure Formation

3.5 keV X 線輝線を説明できる MDM モデルにおける非線形構造形成を調べるために、N 体シミュレーションを行った。シミュレーションは公開コード `GADGET-2` (Springel 2005) を用いて行い、赤方偏移 $z = 19$ において図 1 のパワースペクトルを再現するように初期条件を生成した。シミュレーション領域は共動座標で一辺 10 Mpc/h の立方体であり、512^3 個の粒子 (質量 $\simeq 5.7\times10^5 \mathrm{M}_\odot/h$) を用いた。ソフトニング長は $\epsilon = 1\,\mathrm{kpc}$ とした。ハローは Friends-Of-Friends 法 (Davis et al. 1985) を用いて同定した。

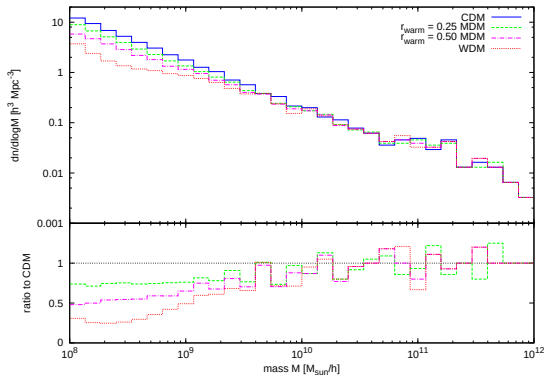


図 2: 上図：4 つのモデルの間の質量関数の比較。下図：WDM 及び 2 つの MDM モデルでの質量関数の、CDM モデルでの質量関数に対する比。色は図 1 に対応。CDM 以外のモデルでは $\sim 10^{10}\,M_\odot/h$ 以下の質量のハローの個数が CDM モデルの場合に比べて小さくなっている。

その結果得られた質量関数を図 2 に載せる。これを見ると、$\sim 10^{10}\,M_\odot/h$ 以下の質量において、MDM モデル及び WDM モデルでの質量関数は CDM モデルの場合に比べて小さくなっていることがわかる。これは銀河程度以下の質量なので、substructure 問題も解決に近づくことが期待できる。そこで、次に天の川銀河程度の質量のハローに含まれるサブハローについて、CVF を作ることを考える。

CVF は横軸に最大回転速度 $V_{\max}$ をとるが、これは

$$V_{\max} = \max_r \sqrt{\frac{GM(<r)}{r}} \tag{5}$$

で定義される。ただし、r はサブハロー中心からの距離で $M(<r)$ はサブハローの中心から距離 r の範囲に含まれる質量である。これはシミュレーションからは容易に計算できる一方で、矮小銀河の観測データは $V_{\max}$ を直接求められるほど分解能が高くない。そこで、観測データとしては視線速度分散 σ_{los} を用い、速度分布が等方的であることを仮定して

$$V_{\max} = \sqrt{3}\sigma_{\mathrm{los}} \tag{6}$$

として $V_{\max}$ を見積もる。

図 3 には CDM モデル及び二つの MDM モデルにおける CVF と観測された矮小銀河の CVF との比較を示す。ただし、矮小銀河は天の川銀河に束縛されているものと Andromeda 銀河に束縛されているものとの 2 つの集団を考えた。シミュレーションから CVF を作る際には、質量が $7.0\times10^{11}\,M_\odot$ 以上 $2.7\times10^{12}\,M_\odot$ 以下のハローを天の川銀河または Andromeda 銀河に対応する質量のハローとみなした。サブハローは `SUBFIND` アルゴリズム (Springel et al. 2001) によって同定した。観測では銀河中心から 279 kpc より遠くに矮小銀河が見つかっていないので、サブハローもハロー中心から 279 kpc 以内のもののみを考えた。

図 3 を見ると、$V_{\max}$ の小さい端では CDM モデルにおけるサブハローの数は少なくとも観測されたものより 1.5 倍以上多いが、MDM モデルでは観測を説明できるハローがシミュレーション中に存在する。$r_{\mathrm{warm}} = 0.25$ の MDM モデルにおいては青い線が、$r_{\mathrm{warm}} = 0.50$ の MDM モデルにおいてはシアン、青、黒の線がそれぞれ観測を説明できるハローに対応する。

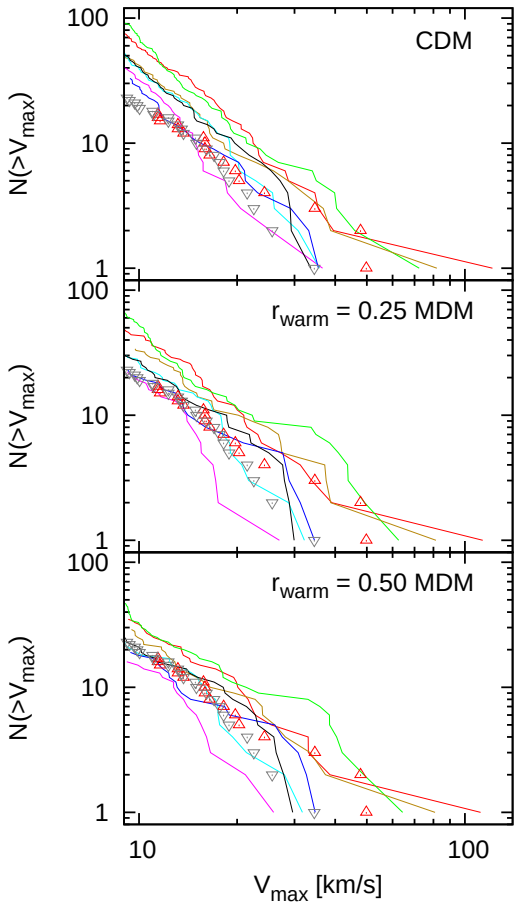


図 3: CDM および 2 つの MDM モデルにおける CVF。実線はシミュレーション中の各ハローの CVF を表す。赤い上向き三角と灰色の下向き三角はそれぞれ天の川銀河と Andromeda 銀河に束縛された矮小銀河についての CVF である。2 つの MDM モデルのシミュレーション中には、観測を説明できるハローが存在する。

3 Discussion and Conclusion

我々は、最近見つかった起源不明の 3.5 keV X 線輝線を説明できる DM モデルは自然と MDM モデルとなることに着目した。この MDM モデルは遠方クエーサーのスペクトル中の Lyman-α 吸収線も説明できる。さらに我々の N 体シミュレーションの結果を観測と比較することで、このモデルのもとでは substructure 問題が解決に近づくことを発見した。

観測とシミュレーションの間の小スケールでの矛盾としては他に Too Big To Fail 問題 (Boylan-Kolchin et al. 2011) がある。これは、最も明るい矮小銀河の中心密度が、シミュレーション中で質量が最大のサブハローの中心密度より小さくなっているという問題である。本講演で扱った MDM モデルにおいてこの Too Big To Fail 問題が解決されるかどうかというのは非常に興味深い問題であり、今後調査していく必要があるだろう。

Acknowledgement

本研究は鎌田歩樹氏 (UC Riverside) との共同研究である。指導教員の吉田直紀氏 (東京大学)、及び共同研究者の鎌田歩樹氏には多くの有益なアドバイスと議論を頂いたため、ここに謝意を述べる。

Reference

Boyarsky, A., Lesgourgues, J., Ruchayskiy, O., & Viel, M. 2009, Physical Review Letters, 102, 201304

Boyarsky, A., Ruchayskiy, O., Iakubovskyi, D., et al. 2010, MNRAS, 407, 1188

Boyarsky, A., Ruchayskiy, O., Iakubovskyi, D., & Franse, J. 2014, arXiv:1402.4119

Boylan-Kolchin, M., Bullock, J. S., & Kaplinghat, M. 2011, MNRAS, 415, L40

Bulbul, E., Markevitch, M., Foster, A., et al. 2014, ApJ, 789, 13

Davis, M., Efstathiou, G., Frenk, C. S., & White, S. D. M. 1985, ApJ, 292, 371

Dodelson, S., & Widrow, L. M. 1994, Physical Review Letters, 72, 17

Komatsu, E., Smith, K. M., Dunkley, J., et al. 2011, ApJS, 192, 18

Kravtsov, A. 2010, Advances in Astronomy, 2010,

Lewis, A., Challinor, A., & Lasenby, A. 2000, ApJ, 538, 473

Schneider, A., Anderhalden, D., Macciò, A. V., & Diemand, J. 2014, MNRAS, 441, L6

Springel, V. 2005, MNRAS, 364, 1105

Springel, V., White, S. D. M., Tormen, G., & Kauffmann, G. 2001, MNRAS, 328, 726

FastSound 計画: Hα 輝線の同定方法について

岡田 裕行 (東京大学大学院 理学研究科)

Abstract

FastSound 計画は，すばる望遠鏡 FMOS を用いた大規模銀河赤方偏移サーベイで，$1.2 \lesssim z \lesssim 1.5$ における銀河の 3 次元分布を用いて構造形成の成長率を表す $f(z)\sigma_8(z)$ を測定することで，重力理論に制限を与えることが最終目標である．

FastSound の分光候補天体は CFHTLS による測光カタログの photo-z, color および輝線フラックスの推定値から適切な条件により選択される (Tonegawa *et al.* 2013). FMOS により分光観測された銀河から，自動輝線検出ソフト FIELD (Tonegawa *et al.* 2014) によって Hα 輝線を検出し，約 3,200 天体の赤方偏移などの物理量の推定した．

FIELD による自動検出で得られた銀河カタログのなかでも複数の輝線が検出されている天体については輝線波長比から Hα 輝線の確実な同定が可能であり，カタログの信頼度を検証することができる．上記の複数輝線天体の解析により全カタログ中の [OIII], [SIII] 輝線の混入率は合わせて $4.0^{+1.0}_{-0.8}$ % 程度であることがわかった．$f(z)\sigma_8(z)$ の測定にも非 Hα の混入率と同じだけの系統誤差を生じることになるので，測定値に少なくとも $4.0^{+1.0}_{-0.8}$ % の補正をする必要がある．

1 Introduction

宇宙はビッグバンから始まったとされ，現在では宇宙全体が加速度的に膨張しているということが，Ia 型超新星，宇宙マイクロ波背景放射，宇宙の大規模構造の観測により明らかになっている (Riess *et al.* (1998), Perlmutter *et al.* (1999), Spergel *et al.* (2003), Tegmark *et al.* (2004))．

この加速膨張の原因として，現在最も有力とされる ΛCDM モデルをはじめ，ダークエネルギー，修正重力理論などさまざまな仮説が考えられているが，いまだに立証には至っていない．なかでも修正重力理論は，宇宙論的なスケールで一般相対性理論が破れている可能性を考えるもので，実際に $f(R)$, Galileon, massive gravity などといったさまざまな修正重力理論に基づく加速膨張宇宙モデルが提唱されている (Clifton *et al.* (2012))．

FastSound 計画の最終目標は，赤方偏移銀河サーベイによって $z \sim 1.3$ における銀河の 3 次元地図を作成し，それを用いて構造形成の成長率を表す $f(z)\sigma_8(z)$ を測定することで，重力理論に制限を与えることである．

2 FastSound Redshift Survey

FastSound 計画では，すばる望遠鏡 FMOS を用いて，$1.2 \lesssim z \lesssim 1.5$ における星形成銀河を分光観測し，Hα 輝線を検出することで銀河の 3 次元地図を作成し，そのカタログにクラスタリング解析を行って $f\sigma_8$ を測定する．$f\sigma_8$ は銀河のクラスタリングの非等方性, Redshift Space Distortion (RSD) として統計量に現れる．表 1 に見られるようにこれまでの RSD を目的とした銀河サーベイは $z < 1$ に限られており (Percival *et al.* (2004), Blake *et al.* (2011), Samushia *et al.* (2012), Reid *et al.* (2012), Beutler *et al.* (2012), de la Torre *et al.* (2013))，FastSound では $z = 1$ を超える $z \sim 1.3$ で初めて $f\sigma_8$ への制限を得る．

2014 年 7 月 21 日 にすべての計画されていた観測が終了し，現在は最終カタログの作成作業に入っている．4 つの観測フィールドで合わせて約 3,200 の銀河サンプルが得られる見込みで，観測領域の一部を使った解析により銀河のクラスタリングの兆候がすでに見られている．

表 1: RSD によって測定された $f\sigma_8$ の値.

z	$f(z)\sigma_8(z)$	Survey Name (year)
0.067	0.423±0.055	6dFGRS (2012)
0.17	0.51±0.06	2dFGRS (2004)
0.22	0.42±0.07	WiggleZ (2011)
0.25	0.3512±0.0583	SDSS LRG (2011)
0.37	0.4602±0.0378	SDSS LRG (2011)
0.41	0.45±0.04	WiggleZ (2011)
0.57	0.415±0.034	BOSS CMASS (2012)
0.6	0.43±0.04	WiggleZ (2011)
0.78	0.38±0.04	WiggleZ (2011)
0.8	0.47±0.08	VIPERS (1st DR) (2013)

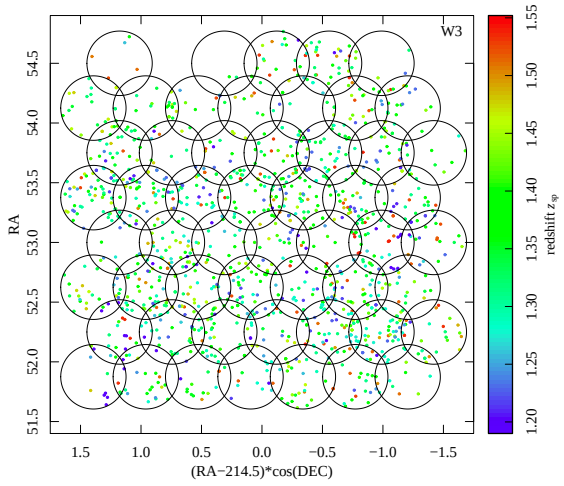


図 1: 観測領域のひとつ, “W3” の銀河地図．各円が観測領域を表している．複数の輝線が検出された場合は S/N $\geq$ 4.5 かつ最も S/N の高いものが Hα 輝線であると仮定して redshift に換算してある．

3 Emission Line Catalog

観測によって得られた分光データは，FastSound チームによって開発された自動輝線検出ソフト FIELD (Tonegawa *et al.* 2014) により，輝線候補とそのパラメータ (中心波長，輝線幅，輝線フラックス，S/N など) がカタログ化される．波長を redshift に換算することで 図 1 のような銀河カタログが得られる．

表 2: X 個の high-S/N 輝線 (S/N $\geq$ 4.5) と Y 個の low-S/N 輝線 (3.0 $\leq$ S/N $<$ 4.5) が検出された天体数のリスト.

X\Y	0	1	2	≥ 3	total
0	-	4896	502	63	5461
1	2335	595	121	28	3079
2	71	24	6	5	106
≥ 3	7	2	1	2	12
total	2413	5517	630	98	8658

FastSound の分光ターゲットは CFHTLS Wide の photometric redshift (photo-z) によって選んでいるが，photo-z が大きく間違っていれば Hα ではない輝線，例えば [OIII] などが観測波長域に紛れ込む可能性がある．FastSound の分光観測では，ほとんど輝線のみが検出され，continuum まで見ることはできないため，個別の天体に対して検出された輝線を同定することは非常に困難である．そのため統計的にどの程度の割合で非 Hα 輝線が混入するか評価することで，銀河カタログの信頼度を検証することが必要不可欠である．

自動検出における問題として，検出器自体のノイズや宇宙線のような “偽輝線” も候補として選んでしまうことがある．こちらも個別の輝線に対して “本物” と “偽” を区別することは難しいため，統計的に “偽輝線” がどの程度混ざるかを考える．

通常の観測では object−sky (normal frame) をデータとして用いるが，sky−object (inverted frame) についても自動検出を行う．object, sky ともにランダムなノイズは等確率に現れるはずなのでこの方法で偽輝線を個数を見積もることができる．

以下で述べる結果はすべて 2014 年 1 月までの観測データを解析した結果である．

図 2 のように，S/N $<$ 4.5 では急激に inverted frame の輝線候補が増え，カタログに含まれる偽輝線も多いので，S/N $\geq$ 4.5 のものを本物の輝線と見なすことにする．この条件で輝線天体は 3,197 個となる．なお，S/N $\geq$ 4.5 の中にも 5%程度の偽輝線が含まれるが，こちらは別に補正する．

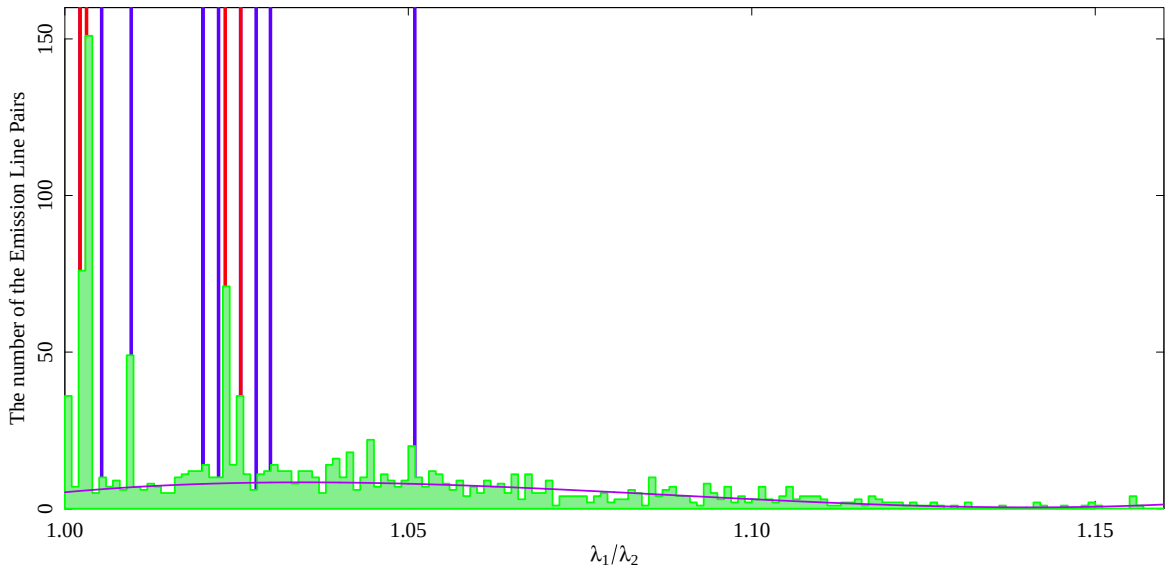


図 3: 複数輝線天体の波長比分布．赤の縦線の位置は Hα+[NII], Hα+[SII] の波長比に相当し，青の縦線は Hα を含まない輝線ペア（[OIII] doublet, [SIII] doublet, など）の波長比に相当する．また，紫色の曲線はノイズによる偽ペアの個数の期待値を表す．

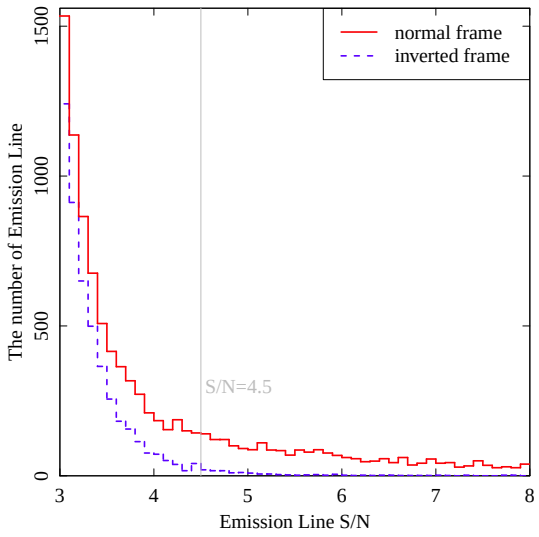


図 2: 輝線カタログの S/N 分布．normal frame と inverted frame (= 偽輝線のみ) における輝線の個数を表す．S/N $\geq$ 4.5 では偽輝線は少なく 5% 程度である．

4 Emission Line Identification

1 天体に 2 本以上の輝線が検出されていれば，その波長比から輝線の組を同定することができる．そのような天体を “複数輝線天体” と呼ぶ．

S/N $\geq$ 4.5 の輝線に限ると，複数輝線天体は銀河カタログ全体の 4%と少ないため，2 本目の輝線の条件を S/N $\geq$ 3.0 まで緩め，こちらの複数輝線天体カタログを用いることにする．この条件では 862 個，全天体の 27% が複数輝線天体となる．なお，2 本目の輝線は偽輝線である可能性が高くなるが，ノイズとして後から引くことにする．

図 3 は検出された輝線ペアの波長比分布である．波長測定の誤差は典型的に $< 4 \times 10^{-4}$ μm 程度であるため，波長比にして 0.05% の誤差を許して波長比の理論値と比較し，輝線の組を特定する．表 3 にその結果をまとめる．ともに real な輝線であるペアは 509.7 組ある中，Hα + X が 60% を占める一方，他の Hα 以外の輝線ペアに同定されたものは [OIII] をはじめ 13% あった．

表 3: 輝線ペアの同定結果 (preliminary)．割合は，ノイズを差し引いた輝線ペアの総数の推定値 509.7 に対するものである．

輝線ペア	ペア数	割合
Hα + [NII]λ6583	$190.1^{+15.0}_{-14.0}$	$37.3^{+2.9}_{-2.7}$ %
Hα + [NII]λ6548	$25.3^{+6.6}_{-5.5}$	$5.0^{+1.3}_{-1.1}$ %
Hα + [SII]λ6716	$57.7^{+9.2}_{-8.1}$	$11.3^{+1.8}_{-1.6}$ %
Hα + [SII]λ6731	$29.6^{+7.2}_{-6.1}$	$5.8^{+1.4}_{-1.2}$ %
[OIII] doublet	$43.1^{+8.1}_{-7.0}$	$8.5^{+1.6}_{-1.4}$ %
[SIII] doublet	$3.7^{+4.6}_{-3.4}$	$0.7^{+0.9}_{-0.7}$ %
Hβ + [OIII]λ5007	$9.9^{+5.3}_{-4.2}$	$1.9^{+1.0}_{-0.8}$ %
Hβ + [OIII]λ4861	$8.4^{+5.2}_{-4.1}$	$1.6^{+1.0}_{-0.8}$ %

5 Contamination from non-Hα Emisison Lines

輝線フラックス比の解析から doublet については“単輝線天体” についても非 Hα 輝線の個数を見積もることができる．[OIII] doublet, [SIII] doublet については輝線強度比が原子物理によりそれぞれ，正確に 3:1, 2:1 であるため，輝線のフラックス分布を解析することで単輝線天体について検出率を推定することができる．この結果を考慮すると，[OIII], [SIII] はそれぞれ S/N $\geq$ 4.5 の銀河カタログに $3.9^{+0.7}_{-0.6}$ %, $0.17^{+0.21}_{-0.16}$ % 含まれることが示される．非 Hα 輝線の混入率はそのまま $f\sigma_8$ の系統誤差となるので，すなわち， $4.0^{+1.0}_{-0.8}$ % の補正をする必要があることを示唆する．

6 Conclusion & Future Work

2014 年 1 月までに得られた FastSound 輝線カタログについて非 Hα 輝線の混入率を推定したところ，S/N $\geq$ 4.5 のカタログ中 $4.0^{+1.0}_{-0.8}$ % が [OIII] あるいは [SIII] であることがわかった．$f\sigma_8$ の測定にも $4.0^{+1.0}_{-0.8}$ % の系統誤差を生じることになるので，測定結果を少なくとも $4.0^{+1.0}_{-0.8}$ % の補正する必要がある．

ただし，[OIII], [SIII] 以外の輝線が検出されている可能性は棄却できないので，今後，より詳細に解析を進めてそのような輝線の混入率の上限を求める．

Reference

Tonegawa, M., Totani, T., Akiyama, M., *et al.* , arXiv:1308.5129.

Tonegawa, M., Totani, T., Iwamuro, F., *et al.* , arXiv:1405.6198.

Riess, A. G. *et al.* [Supernova Search Team Collaboration], Astron. J. 116, 1009 (1998).

Perlmutter, S. *et al.* [Supernova Cosmology Project Collaboration], Astrophys. J. 517, 565 (1999).

Spergel, D. N. *et al.* [WMAP Collaboration], Astrophys. J. Suppl. 148, 175 (2003).

Tegmark, M. *et al.* [SDSS Collaboration], Phys. Rev. D 69, 103501 (2004).

Clifton, T., Ferreira, P. G., Padilla, A., & Skordis, C. Physical Reports 513, 1 (2012).

Percival, W. J. *et al.* [The 2dFGRS Collaboration], MNRAS 353, 1201 (2004).

Blake, C. *et al.*, MNRAS 415, 2876 (2011).

Samushia, L., Percival, W. J. and Raccanelli, A., MNRAS 420, 2102 (2012).

Reid, B. A., *et al.*, MNRAS 426, 2719 (2012).

Beutler, F., *et al.*, MNRAS 423, 3430 (2012).

de la Torre, S. *et al.*, arXiv:1303.2622.

連続重力波のデータ解析手法

枝 和成 (東京大学大学院 理学系研究科ビッグバン宇宙国際研究センター)

Abstract

非軸対称に回転する中性子星は，周波数がほぼ一定の重力波を放出すると予言されており，日本の重力波検出器 KAGRA の有望な重力波源の一つと期待されている．連続重力波の周波数はほぼ一定であるので，出力データ中の連続波信号を雑音の中から抜き取るには，ただ単にフーリエ変換を利用すればよいと思うかもしれない．しかし，事態はそう単純ではなく，地球の運動によるドップラー変調の補正や，感度を稼ぐための 1 年以上にも及ぶ長時間積分を必要とする．さらに連続波源が連星中に存在する場合には、軌道運動によるドップラー変調も考慮しなければならない．このとき，重力波検出器を用いて全天にわたって電磁波で観測されないダークなパルサーを探査する場合には，計算資源の問題が生じる．本講演ではそのような困難を解決するために考案された連続波のデータ解析手法の紹介を行う．

1 イントロダクション

1.1 重力波源としての低質量 X 線連星系

回転中性子星はほぼ一定の回転周波数を持ち，地上重力波検出器で検出可能な連続重力波源である．重力波は，外殻の変形や磁気圧，質量降着により引き起こされる中性子星の非軸対称に由来している．このとき生じる重力波振幅 h_0 は

$$h_0 = \frac{4\pi^2 G}{c^4 r}\varepsilon I f_{\rm GW}^2 \tag{1}$$

と見積もられる．これは中性子星が早く回転しその歪みが大きければ，より強い重力波が放射されることを意味している．

連続重力波源の中でも特に低質量 X 線連星系 (LMXB：Low-Mass X-ray Binary) は重要である．LMXB は低質量の伴星と弱磁場の中性子星からなる連星系であり，中性子星は伴星周囲の塵やガスを剥ぎ取ることで質量を $\dot{M}$ の割合で得る．中性子星へ降り積もる物質の重力ポテンシャルエネルギーは，X 線のエネルギー源となる．したがって，中性子星から地球までの距離を D とすれば，地球上で観測される X 線のフラックスは $F_X \sim GM\dot{M}/4\pi RD^2$ と概算できる．一方，物質が降着することで半径 R の中性子星はトルク $N_{\rm acc} = \dot{M}\sqrt{GMR}$ を得てその回転速度を上昇させる．しかし質量降着によりいつまでも中性子星はスピンアップするわけではない．回転速度の上昇に伴い，遠心力が増加し，自己重力で自身の形状をとどめることができなくなるからである．したがって，多くの LMXB 中の中性子星の回転周波数はこの回転限界に近い $f \sim 1.5$ kHz であると期待される．ところが，実際の電磁波観測により推定される回転周波数の最大値はこの値を大きく下回っている．この観測事実は質量降着によるスピンアップを抑制する何らかの物理的機構の存在を示唆している．回転速度の上昇に伴い重力波によるエネルギー損失が増大することを思い出すと，この抑制機構が重力波放射であると仮定するのは自然であると考えられる．この仮定が正しいとき，降着によるトルクの上昇 $N_{\rm acc}$ と重力波放射によるトルクの減少 $N_{\rm GW}$ が釣り合い，中性子星の非軸対称 εI と X 線のフラックス F_X とが関係付けられ，重力波振幅 h_0 が，

$$h_0^2 = \frac{5G}{c^3}P_{\rm rot}\sqrt{\frac{R^3}{GM}}F_X \tag{2}$$

と表される．ゆえに，重力波観測により振幅 h_0 が定まり，さらに電磁波観測により X 線のフラックス F_X が測定できたとすれば，両者の観測結果を合わせることで中性子星の半径と質量との関係 $R^{3/4}M^{-1/4}$ を推定できる．

1.2 重力波のデータ解析の基本

パルサーのような連続波源からの重力波は，周波数がほぼ一定である．そのため，データ解析をする際には，フーリエ空間において重力波周波数に対応する位置に立つピークを探すことになる．一般に，検出器雑音に比べて重力波信号は非常に弱く，ピークの位置を雑音の中から特定するのは難しい．重力波のデータ解析の分野では，信号を雑音の中から掘り起こすための方法として，マッチドフィルター法と呼ばれるしらみつぶしの手法が広く用いられている．この手法では，検出器に存在するであろう，考えられる限りのすべての重力波の信号を，事前に予測し，テンプレートを作成する．そしてこれらのテンプレートと検出器データとの相関を次々と取っていく．もしも，あるテンプレートと検出器内部に存在する重力波信号の形がぴたりと合ったならば，重力波信号は相関操作により増幅され，雑音の中からピークが飛び出し，重力波の検出が達成される．

1.3 連続重力波のデータ解析手法

連続重力波のデータ解析手法は大きく分けてターゲット探査，指向型探査，全天探査の 3 種に分類することができる．ターゲット探査では電磁波観測により既知のパルサーからの重力波を探索する．重力波波形に含まれるパラメーターのうち，源の方向，スピン周波数とのその時間発展の値の範囲はある程度絞りこまれている．そのため，探索するパラメーター領域は制限されており，上記の探索手法のうちで最も感度が良い．指向型探査は，連続波源がありそうな方向，例えば超新星残骸の周辺に標的を当て調べる手法である．そして，全天探査は，全天球を隈なく探査し電磁波観測により捉えられないダークなパルサーを発見しようとする手法である．全天探査では重力波源の方向を表すパラメーター，赤経 α と赤緯 δ が探索パラメーターに追加されるため，テンプレート数が劇的に増加する．さらに重力波源が連星中に存在する場合には，その軌道運動を描くパラメーターも追加され，計算コストの面で問題が生じる．本講演ではこの連星中の連続波源からの重力波に焦点を当て，そのデータ解析手法の一つである TwoSpect アルゴリズムについて紹介をした．

2 TwoSpect アルゴリズム

TwoSpect アルゴリズムは，簡単に言えば，二回フーリエ変換を行うことで，軌道周期に対応する周波数に信号パワーを集中させ，重力波信号を取り出すアルゴリズムである．

連続波源が真空中に単独で存在する場合，そこから生じる重力波の周波数は単色とみなすことができる．しかし，実際に地上で観測される重力波信号の周波数は一定値 f_0 とはならない．というのは，地上検出器は地球の自転や公転により重力波源に対して相対的に運動しており，この相対運動がドップラー変調を引き起こすからである．したがって，何の補正も加えず到来してきた重力波信号をそのままフーリエ変換したとしても，その信号のパワーは元来の周波数 f_0 を中心として複数の周波数ビンにわたって広がってしまい，信号の強さの観点で損をしてしまう．そこで，長さ $T_{\rm obs}$ の信号の時系列データを，相対運動が無視できる程の短い時間間隔 $T_{\rm SFT} \ll 1$ day に分割し，こうして得られた N 個の時系列データ $h_{\alpha,j} \equiv h\left(t_{\alpha,j}\right)$ を離散フーリエ変換 (DFT：Discrete Fourier Transform) する．こうして，ただ一つの周波数ビンに信号パワーが詰まったデータ $\tilde{h}_{\alpha,k}$ $(\alpha = 0, \cdots, N-1, k = 0, \cdots, M-1)$ を得ることができる．

$$\tilde{h}_{\alpha,k} = \frac{\Delta t}{C} \sum_{j=0}^{M-1} w_j h_{\alpha,j} e^{-2\pi i j k/M}, \qquad (3)$$

ここで，w_j は窓関数，C は使用した窓関数に対応する規格化定数，$\Delta t \equiv T_{\rm SFT}/M$ は離散フーリエ変換の時間間隔を表す．この操作は短時間フーリエ変換 (SFT：Short Fourier Transform) と呼ばれる．各データ $\tilde{h}_{\alpha,j}$ は短い時間間隔 $T_{\rm SFT}$ の間に重力波を観測したときに対応する重力波信号であり，これを足し合わせることで，実効的に，観測時間 $T_{\rm obs}$ の間に観測したときに得られる重力波パワーを得ることができる．しかし，ただ足し合わせたのではドップラー効果のため信号は複数の周波数ビンに散逸してしまう．

そこで，ドップラー補正

$$f_{\rm obs}\left(t_j\right) = \left(1 + \frac{\boldsymbol{v}\left(t\right)\cdot\boldsymbol{n}}{c}\right)\hat{f}\left(t_j\right) \tag{4}$$

を行い，各データを周波数軸に関してスライドさせ足し合わせる．ここで，$f_{\rm obs}\left(t_j\right)$ は時刻 t_j に地上で観測される重力波周波数，$\boldsymbol{v}$ は太陽重心系 (SSB) に対する地上検出器の相対速度ベクトル，$\boldsymbol{n}$ は SSB から重力波源への単位ベクトルを表す．この周波数シフトは仮想的に重力波検出器を SSB に設置することに対応している．こうして全観測時間 $T_{\rm obs}$ にわたってただ一つの周波数ビンに信号パワーが集約されたデータを得ることができる．

一方，連星系中に連続波源が存在する場合は，連星運動によるドップラー効果 $\Delta f_{\rm obs}$ がまだ残っている．地球運動に対するドップラー補正後の，つまり SSB で観測される重力波信号の位相部分は

$$\Phi\left(t\right) = \Phi_0 + 2\pi\Big\{f_0\left(T - T_0\right) + \frac{\Delta f_{\rm obs}}{\Omega}\sin\left[\Omega\left(T - T_0\right) + \phi_0\right]\Big\} \tag{5}$$

と表せる．上式右辺第三項は信号パワーを複数の周波数ビンに分散させるため重力波検出を阻害する原因となり得る．ここで，簡単のため軌道が円軌道であることを仮定した．また，T_0 は参照時刻，Φ_0 は重力波の初期位相，ϕ_0 は軌道の初期位相，Ω は軌道角速度を表す．一回目のフーリエ変換 (1st FT) 後の，地球運動に関するドップラー補正を施した信号データ $\tilde{h}_{\alpha,k}$ には軌道運動による時間変化のみが含まれている．したがって，$\tilde{h}_{\alpha,k}$ をさらにフーリエ変換することで軌道周波数に対応する位置に重力波信号のピークが立つはずである．これが TwoSpect アルゴリズムの根幹である．次に，実際に観測で用いられるテンプレートを作成する．簡単のため，軌道の初期位相を $\phi_0 = \pi/2$，初期時刻を $T_0 = 0$ ととる．このとき，窓関数として，ハニング窓 $w_j = \left(1 - \cos 2\pi j/M\right)/2, C = \sqrt{3/8}$ を選ぶと，式 (3) より，信号データを SFT したデータ

$$\tilde{h}_{k,\alpha} \propto \frac{\mathrm{sinc}\left[m - k - T_{\rm SFT}\Delta f_{\rm obs}\sin\left(2\pi\alpha\frac{T_{\rm SFT}}{P}\right)\right]}{\left[1 - \left(m - k - T_{\rm SFT}\Delta f_{\rm obs}\sin\left(2\pi\alpha\frac{T_{\rm SFT}}{P}\right)\right)^2\right]} \tag{6}$$

が得られる．ここで，実数 m を $f_0 = m/T_{\rm SFT}$ と導入した．ここから，1st SFT 後の k 番目の周波数ビン，α 番目の SFT データ中に存在する信号パワーは $P_{k,\alpha} = 2\left|s_{k,\alpha}\right|^2/T_{\rm SFT}$ と計算できる．SFT の時間間隔が十分短いとして，$\alpha T_{\rm SFT} \to t$ と置換すると，1st SFT での信号パワーの時間変化

$$P_k\left(t\right) \propto \frac{\mathrm{sinc}^2\left[\left(f_0 - f_k - \Delta f_{\rm obs}\sin\left(\frac{2\pi}{P}t\right)\right)T_{\rm SFT}\right]}{\left[1 - T_{\rm SFT}^2\left(f_0 - f_k - \Delta f_{\rm obs}\sin\left(\frac{2\pi}{P}t\right)\right)^2\right]^2} \tag{7}$$

が得られる．上式の分母は窓関数に起因し物理的な意味を持たない．$P_k\left(t\right)$ が実際にピークを持つのは分子が 0 となる点であり，k 番目の周波数ビンにおける n 番目のピークの位置 $t_{k,n}^{\pm}$ とその間隔 Δ_k は

$$\begin{aligned} t_{k,n}^{-} &= nP + \frac{P}{2\pi}\sin^{-1}\left[\frac{f_k - f_0}{\Delta f_{\rm obs}}\right], \\ t_{k,n}^{+} &= nP + \frac{P}{2} - \frac{P}{2\pi}\sin^{-1}\left[\frac{f_k - f_0}{\Delta f_{\rm obs}}\right], \\ \Delta_k &\equiv t_{k,n}^{+} - t_{k,n}^{-} = \frac{P}{2} - \frac{P}{\pi}\sin^{-1}\left[\frac{f_k - f_0}{\Delta f_{\rm obs}}\right] \end{aligned} \tag{8}$$

と表せる．この時刻 $t_{k,n}^{\pm}$ は視線方向に対して中性子星が接近し離れる最大速度の時刻に対応している．式 (7) をさらにフーリエ変換することで，実際に解析の際に使用するテンプレートが作成できる．しかしこれ以上は解析的に計算できず数値的にテンプレートを作ることになる．テンプレートは $\left(h_0, f_0, \alpha, \delta, P, \Delta f_{\rm obs}\right)$ の 6 個のパラメーターで特徴づけされる．このとき，テンプレートの総数は 10^{15} のオーダーとなり，これを逐一調べていくのは計算コストの観点で難しい．このため，TwoSpect アルゴリズムでは，テンプレート探索をする際，いきなり厳密な理論波形を使うのではなく，まずはじめに，パラメーターの個数を減らした大雑把な理論波形を用いる．この大雑把な理論波形はガウシアンテンプレートと呼ばれており，式 (7) を $t = t_{k,n}^{\pm}$ にピークを持つダブルガウシアンの周期信号と見なす．こうすることで，2nd FT の信号パワーの解析式

$$\left|P_k\left(f'\right)\right|^2 = 4\pi\sigma^2 e^{-\left(2\pi f'\sigma\right)^2}\left[1 + \cos\left(2\pi\Delta_k f'\right)\right]\frac{\cos\left(2\pi NPf'\right) - 1}{\cos\left(2\pi Pf'\right) - 1} \tag{9}$$

が得られる．ここで，f' は 2nd FT の周波数，σ はピークの広がり，N はピークの個数を表す．

TwoSpect アルゴリズムでは，計算コストを削減するため，階層的探索が用いられている．この階層的探索では，具体的にテンプレートを使用する前にまず，位相パラメーターの情報を用いない，インコヒーレント探索をする．この過程で重力波信号が存在し得るパラメーター領域を絞る．次に，この領域内部でテンプレート探索をする．テンプレート探索では，まず大雑把なテンプレートであるガウシアンテンプレート (9) を用いて信号が存在し得るパラメーター領域をさらに絞り，次に，正確なテンプレートである式 (7) を使用することで，パラメーター領域内部の信号の候補となる点を特定する．

3 結果

3.1 LIGO・Virgo による制限

LIGO・Virgo グループは，最近，連星中に存在する連続波源からの重力波をはじめて全天探査し，TwoSpect アルゴリズムを用いて重力波振幅に制限を与えた．用いたデータは，LIGO S6 と Virgo VSR2-3 から得られた長さ $T_{\rm obs} = 40551300\text{s} \cong 1.28\text{yr}$ の時系列データであり，この結果，図 1 で示される重力波振幅の制限が得られた．最も感度が良い周波数 $f = 217\text{Hz}$ では，95 % の信頼度で $h_0 < 2.3 \times 10^{-24}$ という上限が与えられた．TwoSpect アルゴリズムでは軌道運動に対して円軌道であることを仮定しているが，この結果は離心率が $e < 0.9$ まで有効である．

3.2 展望

TwoSpect アルゴリズムは先に述べたように連星系が円軌道であるという強い仮定を置いている．しかし，より広いパルサーを調べるには TwoSpect アルゴリズムを楕円軌道に適用できるように拡張する必要がある。また，もともとの TwoSpect のプログラムでは，複数台の異なる検出器間の雑音の相関を取り雑音に由来する擬似的な信号を取り除いていない．将来的にはこのようなコインシデンステストを導入する必要がある．また，TwoSpect アルゴリズムを KAGRA で用いるとき，どこまでインコヒーレントに探査をするのか，どこまでガウシアンテンプレートを使用するのかは，有する計算機パワーと重力波に対する感度で決定する．この問題に対する最適解を調べるのはこれからの課題になるだろう．

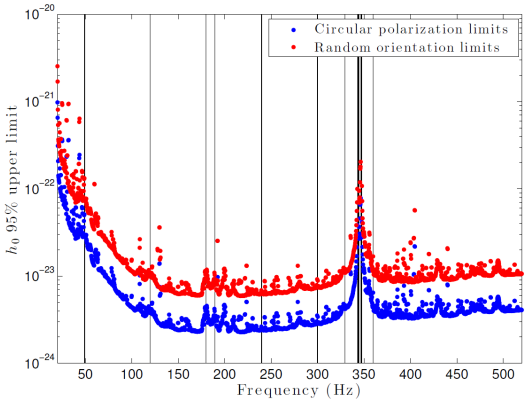


図 1: LIGO と Virgo のデータによる連続重力波への振幅上限 ((7) から引用)．青点は重力波が円偏光，赤点は重力波が任意の偏光を持つことを仮定したときの制限を表す．曲線中に現れる線は，ミラーの懸架ワイヤー上に励起するバイオリンモードと呼ばれる雑音に起因する．この線上では重力波は制限できない．

Reference

[1] M. Maggiore, "Gravitational waves. Vol 1, Theory and Experiments." (2008).

[2] L. Bildsten, Astrophys. J. **501**, L89 (1998) [astro-ph/9804325].

[3] P. Jaranowski, A. Krolak and B. F. Schutz, Phys. Rev. D **58**, 063001 (1998) [gr-qc/9804014].

[4] B. Allen, M. A. Papa and B. F. Schutz, Phys. Rev. D **66**, 102003 (2002) [gr-qc/0206032].

[5] E. Goetz and K. Riles, Class. Quant. Grav. **28**, 215006 (2011) [arXiv:1103.1301 [gr-qc]].

[6] L. Sammut, C. Messenger, A. Melatos and B. J. Owen, Phys. Rev. D **89**, 043001 (2014) [arXiv:1311.1379 [gr-qc]].

[7] J. Aasi *et al.* [The LIGO Scientific and the Virgo Collaborations], arXiv:1405.7904 [gr-qc].

超巨大ブラックホールと恒星質量ブラックホールの比較

本田扶紀（日本大学大学院 理工学研究科）

概要

超巨大質量ブラックホールや恒星質量ブラックホールなど, 様々な質量のブラックホールが存在すると考えられている. この研究の目的は, それらブラックホール天体が示す観測的特徴が, ブラックホールの質量にどのように依存するのかを明らかにすることである. そこで, 強度変化とそれに伴うスペクトル変化に着目し, それらの関係を相互相関関数を用いて定量的に評価する. 現在, 相互相関関数のプログラムと shot-noise などのシミュレーションのデータを作成し, プログラムの計算結果を検証している. しかし, 実際に観測されるデータは非周期的で離散的であるので, 離散相関関数 (Discrete Correlation Function，Edelson and Krolik 1988) を用いて, 解析を行う. 今後は, ISS の日本実験棟「きぼう」の船外実験プラットフォームに設置された X 線観測装置である MAXI や NASA の X 線天文衛星 RXTE で観測された非周期的で離散的な実際のデータを使い, 質量依存性を明らかにしていく.

1　目的

超巨大質量ブラックホールとは銀河の中心にあるような太陽の数百万倍から数億倍程度の質量をもつ天体のことである．一方，恒星質量ブラックホールは太陽の 30 倍程の質量の恒星が超新星爆発を起こしたときに生まれる天体である.

それら天体の観測的特徴の質量依存性を明らかにすることが本研究の目的である.

2　降着円盤の標準モデルについて

質量に依存しないことを明らかにするためにはブラックホールを観測することが必要である．しかし，ブラックホールは目に見えないため観測することができない. そこで降着円盤を観測する．降着円盤とはブラックホールの周りにまとわりついている円盤状のガスのことである．それを観測することでブラックホール周辺で何が起きているかを調べることができる.

よって，ここでは光学的に厚い降着円盤の標準モデル（標準降着円盤モデル [3]）について説明する.

1. 基本設定と基本仮定

   - 中心天体の重力が卓越しており，円盤状のガス雲のどこでもケプラー運動をしている. $v_{\rm r} \ll v_{\varphi}$
   - 重力，ガス圧，遠心力が釣り合っている.
   - 円盤の構造は定常的で回転軸に対して軸対象.
   - 幾何学的に薄い. $\frac{H}{r} \ll 1$
   - 光学的に厚い（不透明）.
     光学的厚み $\tau = \kappa\rho H = \kappa\Sigma/2 \gg 1$
     (面密度：$\Sigma = 2\rho H$)

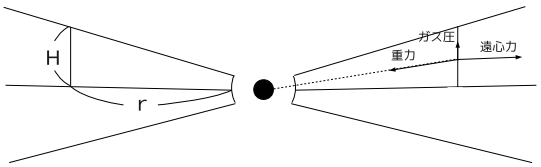


図 1: 降着円盤を横から見た図

2. 標準モデルの変数

   - $v_{\rm r}$：半径方向の速度
   - v_{φ}：回転方向の速度
   - H：円盤の厚み
   - ρ：ガスの密度
   - P：圧力

- T：温度
- κ：不透明度
- $t_{r\varphi}$：粘性テンソル

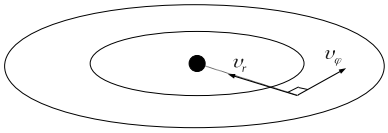


図 2: ガスの速度方向

上記の変数を r と質量降着率 $\dot{M}$ の関数で表すためにいろいろな保存則から方程式を導き，連立して解く．

3　標準モデルの基本方程式 [3]

(a) 連続の式
降着円盤の表面からガスが逃げたり，表面に余分なガスが降ることはない状態にあるとすると降着円盤を通って内向きに単位時間当たりに流れるガスの流量は円盤中どこでも一定である．

$$\dot{M} = -2\pi r \times 2H \times \rho v_r \quad (1)$$
$$= -4\pi r H \rho v_r \quad (2)$$
$$= -2\pi r v_r \Sigma \quad (3)$$

(b) 運動方程式（重力と遠心力の釣り合い）

$$\frac{GMm}{r^2} = m\frac{{v_\varphi}^2}{r} \quad (4)$$
$$v_\varphi = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad (5)$$

(c) 角運動量輸送の式（角運動量の保存）
降着円盤は差動回転をしているため粘性が起きる．粘性によって単位時間当たりに外側に流れる角運動量と粒子が内側に押される力の和が一定であるという式.

$$\dot{M}l + 2\pi r \times 2H \times r t_{r\varphi} = const. \quad (6)$$

(l：単位質量あたりの角運動量)

内縁では粘性は働かなくなると仮定すると $r = r_{\rm in}$ で　$t_{r\varphi} = 0$ なので

$$\dot{M}(\sqrt{GMr} - \sqrt{GMr_{\rm in}}) = -2\pi r^2 t_{r\varphi} \times 2H \quad (7)$$
$$\rightarrow 2t_{r\varphi}H = -\frac{\dot{M}}{2\pi}\sqrt{\frac{GM}{r^3}}\left(1 - \sqrt{\frac{r_{\rm in}}{r}}\right) \quad (8)$$

(d) 静水圧平衡の式 (鉛直方向の力学平衡)
圧力と重力の鉛直成分が釣り合っていることを静水圧平衡という.

$$\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dz} = \frac{GM}{R^2}\sin\theta = \frac{GM}{R^2}\frac{z}{R} \sim \frac{GMz}{r^3} \quad (9)$$
$$(R = \sqrt{r^2 + z^2} \sim r)$$

さらに近似する.

$$\frac{P}{\rho H} = \frac{GMH}{r^3} \quad (10)$$

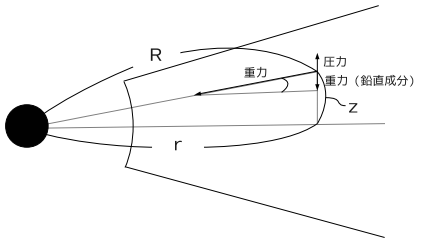


図 3: ガスの釣り合い

(e) エネルギー方程式（鉛直方向のエネルギー収支）
降着円盤モデルでは単位面積あたりの加熱率 $Q_{\rm vis}$，冷却率 $Q_{\rm rad}$ が釣り合っていると仮定しているので

$$Q_{\rm vis} = Q_{\rm rad} \quad (11)$$

流体力学の粘性によるエネルギー損失の式から

$$Q_{\rm vis} = -\frac{2}{3}t_{r\varphi} \times 2H \times \Omega \quad (12)$$
$$= \frac{3GM\dot{M}}{4\pi r^3}\left(1 - \sqrt{\frac{r_{\rm I}}{r}}\right) \quad (13)$$

円盤は光学的に厚いと仮定したので $\tau \gg 1$．赤道面の温度 $T_{\rm c}$ は表面温度 $T_{\rm eff}$ よりかなり高いので温度勾配できる．温度勾配の中を放射が拡散していき表面から黒体放射として放たれる．
放射流束（単位面積あたりの輸送率）は

$$F = -\frac{4acT^3}{3\kappa\rho}\frac{dT}{dz} \sim \frac{4acT^3}{3\kappa\rho}\frac{T_{\rm c}}{H} \quad (14)$$

(放射定数 $a = 7.56 \times 10^{-15} erg/cm^3/deg^4$，ステファンボルツマン定数 $\sigma = \frac{ac}{4}$)
円盤の単位面積あたりの放射率 $Q_{\rm rad}$ は

$$Q_{rad} = \frac{4acT^3}{3\kappa\rho}\frac{T_{\rm c}}{H} \times 2 = \frac{32\sigma {T_{\rm c}}^4}{3\tau} \quad (15)$$

ステファンボルツマンの法則から円盤表面の単位面積あたりの放射率は $F = \sigma {T_{\rm eff}}^4$

$$\frac{32\sigma {T_{\rm eff}}^4}{3\tau} = 2\sigma {T_{\rm eff}}^4 \rightarrow {T_{\rm eff}}^4 = \frac{16{T_{\rm c}}^4}{3\tau} \tag{16}$$

(f) 状態方程式円盤内の圧力は

$$\begin{aligned} P &= P_{\rm gas} + P_{\rm rad} && (17)\\ &= \frac{R_{\rm gas}}{\mu}\rho T_{\rm c} + \frac{a{T_{\rm c}}^4}{3} && (18)\end{aligned}$$

(P_{gas} プラズマガスの圧力，P_{rad} 光の放射圧，R_{gas} 気体定数，μ 平均分子量)

(g) 不透明度

$$\begin{aligned} \kappa &= \kappa_{\rm es} + \kappa_{\rm ff} && (19)\\ &= 0.40 + 0.64 \times 10^2 3\rho T^{-3.5} cm^2/g && (20)\end{aligned}$$

(κ_{es} 電子散乱，κ_{ff} 自由自由吸収)

(h) 粘性に関する仮定（アルファ則）
粘性テンソルはガスの粘り気を表しているので圧力が高くなれば粒子同士が圧迫し合って粘性テンソルも大きくなると考えられているので，粘性テンソルはガスの圧力に比例すると仮定する．

$$t_{\rm r\varphi} = \alpha P \tag{21}$$

4 表面温度 $T_{\rm eff}$ の質量 M 依存性

前節（e）のエネルギー方程式より

$$Q_{\rm vis} = Q_{\rm rad} \tag{22}$$

なので

$$\frac{3GM\dot{M}}{4\pi r^3}\left(1 - \sqrt{\frac{r_{\rm I}}{r}}\right) = 2\sigma {T_{\rm eff}}^4 \tag{23}$$

$$\rightarrow T_{\rm eff} = \left\{\frac{3GM\dot{M}}{8\pi\sigma r^3}\left(1 - \sqrt{\frac{r_{\rm I}}{r}}\right)\right\}^{1/4} \tag{24}$$

これを r で微分すると

$$\frac{dT_{\rm eff}}{dr} = \frac{3GM\dot{M}}{32\pi\sigma}\left(\frac{3GM\dot{M}}{8\pi\sigma r^3}\left(1-\sqrt{\frac{r_{\rm I}}{r}}\right)^{-\frac{3}{4}}\right)\left(-\frac{3}{r^4}+\frac{7}{2}\sqrt{\frac{r_{\rm I}}{r^9}}\right) \tag{25}$$

$\frac{dT_{\rm eff}}{dr} = 0$ のとき $r = \frac{49}{36} r_{\rm I}$

これは $T_{\rm eff}$ がピークの時の半径である．これを代入して $T_{\rm eff}$ の温度を求めると

$${T_{\rm eff}}^4 = \frac{6^3 \times 3^4 GM\dot{M}}{7^7\pi\sigma {r_{\rm I}}^3} = \frac{3^4 GM\dot{M}c^6}{7^7\pi\sigma G^3 M^3} \tag{26}$$

$$\rightarrow T_{\rm eff} = \left(\frac{3^4 GM\dot{M}c^6}{7^7\pi\sigma G^3 M^3}\right)^{1/4} \tag{27}$$

ここでシュバルツシルト時空内での円軌道の最小半径がシュバルツシルト半径の 3 倍であることを使った．

$$r_{\rm I} = \frac{6GM^2}{c} \tag{28}$$

これより表面温度 $T_{\rm eff}$ は質量 $M^{-\frac{1}{4}}$ に比例することが分かる．

5 相関関数

相関関数とは 2 つの関数の類似度を数値で表したものである．同一の関数間の相関関数を自己相関関数，異なる関数間の相関関数を相互相関関数という．数値の範囲は [-1,1] で 2 つの関数に類似性が無いときは 0，負の相関をもつ場合は-1，正の相関をもつ場合は 1 になる．正の相関があるとは，一方の値が増える（減る）ともう一方も増える（減る）ことで，負の相関があるとは，一方が増える（減る）ともう一方が減る（増える）ことをいう．

$$r_{xy} \equiv \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} \tag{29}$$

$$\left(\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_n}{n}\right)$$

分子の $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})/n$ は共分散である．共分散とは，それぞれの平均値 $\bar{x}$,$\bar{y}$ からの偏差の積が平均でどれほどであるかを表したものである．これを規格化するために，それぞれの標準偏差の積で割った値が相関係数である．

これらのデータをずらしながら, 相関係数をとっていく．そのときの式は, 次のようになる．

$$r_{xy} \equiv \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-h}(x_i - \bar{x})(y_{i+h} - \bar{y})}{\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} \tag{30}$$

6　shot-noise の相関

上記で説明した相関関数を使って shot-noise の相関を調べた．

shot noise とは式で表すと

$$y = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{31}$$

（y:shot noise の強さ，t:時間，τ:時定数）

それを図４に示した．

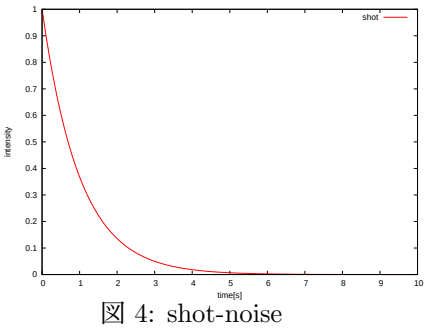


図 4: shot-noise

式 (30) を使った相関を表したものが図５である．

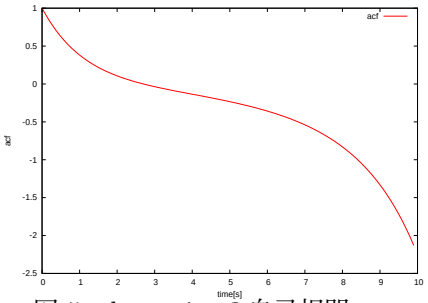


図 5: shot-noise の自己相関

7　解析解との fitting

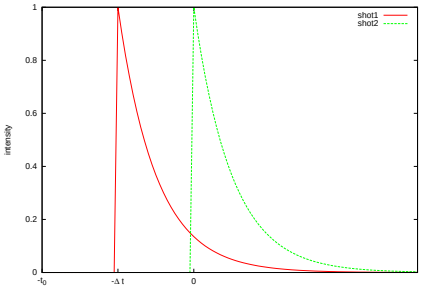


図 6: shot-noise の解析解を求める際に用いた図

次の式は図６のような２つの shot-noise の相関を解析的に解いたものである．第１項は $-t_0$ から $-\Delta t$，第２項は $t_0-\Delta t$ から 0，第３項は 0 から T までの相関を表している．

$$\begin{aligned} r(\Delta t) &= \frac{1}{T-\Delta t}\left\{\int_0^{t_0-\Delta t}(0-a)^2\,dt\right. \\ &+ \int_{t_0-\Delta t}^{t_0}(0-a)\left(\exp\left(-\frac{t+\Delta t-t_0}{\tau}\right)-a\right)dt \\ &+ \left.\int_{t_0}^{T-\Delta t}\left(\exp\left(-\tfrac{t+\Delta t}{\tau}\right)-a\right)\left(\exp\left(-\tfrac{t-t_0}{\tau}\right)-a\right)dt\right\} \end{aligned} \tag{32}$$

これらを $\tau \ll T$ として計算すると平均値 a は

$$a = \frac{1}{T}\int_0^T \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)dt = \frac{\tau}{T} \tag{33}$$

となる．これより解析解は

$$r(\Delta t) = \frac{\tau}{T-\Delta t}\left\{\frac{\exp(-\frac{\Delta t}{\tau})}{2} - \frac{\tau}{T} - \frac{\tau\Delta t}{T^2}\right\} \tag{34}$$

この解析解とプログラムによって発生させた shot-noise の相関を式 (34) で fitting を行った．その結果，x 軸の端に shot-noise が発生したときにグラフをずらすと shot-noise がもう一方のグラフと重ならなくなってしまうため正しい相関がとれないことが分かった．また，複数の shot-noise を発生させた場合，shot-noise 同士が重なっている範囲が広いと時定数の長い shot-noise と勘違いしてしまい，このような場合も正しい相関がとれない．

よって，shot-noise の数が少ない場合，時定数の fitting 結果はほぼ近い値であるが，shot-noise の数が多い場合は，shot-noise 同士が重なる部分が多いため正しい値が出ることは少ない．

8　まとめ

shot-noise の相関をとり，解析結果との fitting を行った．

今後の予定として，ポアソン乱数を含んだ shot-noise の相関関係を調べる．

9　参考文献

[1] S.Shapro & S.Teukolsky 『Black holes,White Dwarfs ,and Neutron Stars』 ,A Wiley-Interscience Pub.(1983) Shakura & Sunyaev

[2] H.Negoro 『Hard X-ray Time Lags in Accreting Black-Hole Systems』

[3] 福江純 『輝くブラックホール降着円盤』 プレアデス出版

FastSound 計画：サーベイの進展状況

舎川 元成 (東京大学大学院理学系研究科天文学専攻)

Abstract

FastSound 計画は、すばる望遠鏡の近赤外分光装置 FMOS を用いた宇宙論を目的とした大規模銀河サーベイである。本サーベイは天球上の合計約 30 平方度の領域で、赤方偏移 z =1.2–1.5 の約 5,000 の星形成銀河を分光観測し、Hα 輝線により赤方偏移を測定することで、銀河の三次元地図を作成する。この銀河三次元分布から赤方偏移空間歪み（RSD）効果を検出し、大規模構造の形成のスピード $f\sigma_8$ を測定することで、加速膨張の起源の可能性である修正重力理論を観測的に検証することが最大の科学目標である。本講演では、FastSound 計画の進展状況を報告する。本計画では、CFHTLS Wide の可視 5 バンドを用いた photometric redshift および Hα flux 推定を基にした分光ターゲット選択を行い、35 夜の観測を行った。観測は 2014 年 7 月をもって完了し、FIBRE-pac(Iwamuro et al. 2012), FIELD(Tonegawa et al., 2014) によるデータ処理を行った結果、$S/N > 4.5$ の輝線天体を約 4,000、$S/N > 3.0$ の輝線天体を約 6,000 得ることができた。起こりうる系統誤差の可能性を検討し、現在最終的な $f\sigma_8$ 測定結果に向けて精密な統計解析を行っている。

1 Introduction

遠方の Ia 型超新星の観測、宇宙マイクロ波背景放射（CMB) の温度揺らぎの解析は、現在の宇宙が加速膨張期にあることを明らかにした。一方で、一般相対論によれば、通常の物質のみでは宇宙の加速膨張を引き起こせないことが知られている。今日までに大きく分けて 2 つのアプローチ、すなわち、未知の形態のエネルギー（いわゆる「ダークエネルギー」）もしくは宇宙論的スケールにおける一般相対論の破れ（修正重力理論）によって宇宙の加速膨張を説明しようとする試みがなされてきた。これらの可能性を検証する観測も、様々なプローブを用いて行われてきた。中でも銀河を物質のトレーサーとして用いる、つまり宇宙の大規模構造を観測し、理論予測と比較する手法は、近年大きな注目を集めている。

赤方偏移空間歪み（Redshift Space Distortion; RSD）はその 1 つであり、観測される大規模構造の視線方向の歪みの大きさを測定することで、重力理論に制限を付けることができる。遠方銀河の距離測定は、輝線などから得られる赤方偏移によって行われるが、銀河は構造形成に伴う特異速度を持つため、その視線方向成分がドップラー効果を引き起こし、赤方偏移をわずかに変化させる。銀河の特異速度を $v = 300$km/s、赤方偏移 $z = 1$ を仮定すると、もし銀河の速度ベクトルが視線方向と平行である場合、$\Delta z/z = v/c$ から、$\Delta z = 0.001$ のずれが起こる。結果として、観測される大規模構造は、統計的に非等方性をもつようになる。非等方性の大きさは、銀河の特異速度場、すなわち構造形成率 f に依存し、f は重力理論によって規定される量である。従って、RSD 効果から測定される f を理論予測と比較することで、重力理論の検証を行うことができる。f はダークエネルギーの性質よりも重力理論の性質により敏感であり、RSD は修正重力理論の検証により重点を置いた観測手法である。

FastSound 計画は、日本とイギリスが中心になって行っている、すばる望遠鏡の近赤外分光装置 FMOS（Fiber Multi-Object Spectrograph）を用いた宇宙論的銀河サーベイである。近赤外領域で一度に 400 天体の分光が可能であるという、世界的に見てもユニークな装置である FMOS の特徴を活かして、赤方偏移 $z = 1.2$–1.5 の Hα 輝線銀河の三次元分布を観測、赤方偏移空間歪み（Redshift Space Distortion/RSD）効果の検出、大規模構造の形成速度 $f\sigma_8$ の測定から一般相対性理論を宇宙論的スケールで検証する計画である。可視の観測では、銀河の明るい輝線である Hα 輝線（静止系で 6563μm）が観測波長帯の外側に赤方偏移するため、$z < 1$ での観測に限られるが、近

赤外分光器 FMOS を用いることで、初めて $z > 1$ に到達することができる。本計画は 2011 年 9 月から 2014 年 7 月に 40 夜の観測を行い、現在全ての観測を完了した所である。本稿では、FastSound 観測状況と、一部のデータを使った初期的な解析結果について報告する。

2　ターゲット選択

赤方偏移サーベイにおいては、分光のターゲットとなる天体を選択する必要がある。FastSound 計画の波長帯は 1.44μm–1.66μm（Hα 輝線で $z = 1.19$–1.53）であるので、この赤方偏移で明るい Hα 銀河を、測光カタログから選ばなければならない。我々は CFHTLS Wide の可視 5 バンドの等級から求めた赤方偏移と Hα flux の推定値をもとにターゲット選択を行った。これは 2011 年秋の 5 夜の試験観測で幾つかのターゲット選択法を試した結果（Tonegawa et. al 2014）をもとに、近赤外データ UKIDSS の入手可能性を考慮して最終的に決定したものである。

3　観測と解析

本計画の観測は、2012 年 4 月から 2014 年 7 月の 35 夜行われた。FMOS の波長分解能は 2 種類から選択でき、高分散 (HR) モード、低分散 (LR) モードがある。LR モードは 0.9–1.8μm をカバーし、波長分解能は $R \sim 500$、HR モードは LR モードの波長幅の 4 分の 1 をカバーし、波長分解能は $R \sim 2000$ である。FastSound 計画では、ファイバー配置の効率を考慮し、HR モードを選択した。波長帯は、輝線の受かりやすさと科学的インパクトを考慮し、H short+(1.44μm–1.66μm) を選択した。積分時間は 1 視野あたり 30 分で、感度は 1.0×10^{-16}[erg/cm^2/s] ($S/N = 5$) である。

FMOS ファイバーのターゲット配置への方法も 2 通りあり、normal beam switch(NBS) モード、cross beam switch(CBS) モードがある。NBS モードは 400 本のファイバー全てがまずターゲットを観測し、続いてスカイ引きのためのスカイ観測を行う。CBS モードは 400 本のファイバーを 200 本ずつに分け、まず片方の 200 本がターゲット、残りの 200 本がスカイ観測を行い、その後ターゲットとスカイを交代して観測する。この場合常に最低 1 本のファイバーがターゲットに向くという利点が存在するが、ファイバー配

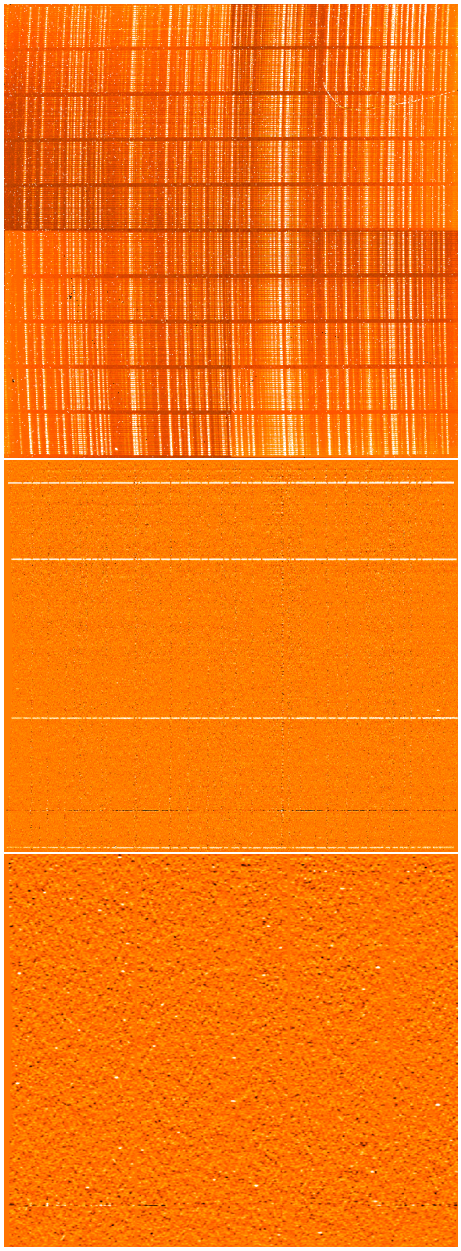


図 1: 画像処理のいくつかのプロセス。水平方向は波長の変化（右が長波長）、垂直方向は異なる天体を表す。（上）生画像。縦の白線は、OH mask から漏れている OH 夜光である。（中）画像処理パイプライン FIBRE-pac による解析後の画像。（下）輝線検出ソフト FIELD により計算された、各ピクセルの effective S/N。

置が複雑化しターゲット数がやや減少するため、本計画では NBS モードを用いた。

得られた画像データの解析は、FMOS 標準のパイプライン（FIBER-pac: Iwamuro et. al 2012）を用いた。解析された画像データから客観的かつ一様に輝線を探し出すために、FastSound 計画では、FMOS 画像専用の輝線検出ソフト（FIELD: Tonegawa et. al 2014）を開発した。このソフトは 2 次元の画像データと、輝線を模した 2 次元プロファイルをたたみ込み、effective な S/N 値を計算し、ある S/N 以上のものを輝線候補として選び出すものである。OH マスク付近の夜光漏れ、検出器の欠陥、宇宙線の影響に対しては、フラット画像、ノイズレベルマップ、バッドピクセルマップなどの情報を駆使して、このような偽検出を自動的に抑える特徴がある。さらに、通常の object−sky フレーム（正画像）に加えて、それを反転させた sky−object フレーム（反転画像）についても輝線検出ソフトを適用することで、偽検出の割合を見積もった。

図**??**に、2014 年 1 月までに観測を行った 118 視野に対する輝線検出の結果を示す。正画像には本物の輝線と偽輝線が含まれている一方で、反転画像から検出される候補は全て偽である。正画像と反転画像に含まれる偽輝線の数が同数であると仮定すれば、(正画像での検出数)−(反転画像での検出数) が、輝線の総数であると見積もることができる。表**??**は、いくつかの S/N 閾値に対する、正画像と反転画像の検出数である。$S/N > 4.5$ では本物の輝線数は $4656-501 \sim 4000$ である。輝線数は最大で $12421-6163 \sim 6000$ であるが、$S/N > 3.0$ では偽検出も多い（$6163/12421 \sim 50\%$）ため、RSD 解析に使うと系統誤差が大きすぎる（偽検出がランダムに現れるとすると、非等方性をならしてしまう）と思われる。

4　予想される $f\sigma_8$ 測定精度

2013 年春までに得られたデータを用いて、Kaiser の公式を用いたフィットを行った所、$f\sigma_8$ の fractional error は約 40% であった。統計誤差が天体数の平方根に反比例すると仮定すれば、最終的な統計誤差は 20–25% になると予想される。系統誤差については、前章で説明した通り、輝線の誤検出によるものが $\sim 5\%$ あり、その他に、検出は正しくても、それが Hα 輝線ではない（＝赤方偏移測定を誤る）ことによる系統誤差も考えられる。HiZELS（$z = 1.47$ の狭帯域サーベイ）のデータを使った見積もりでは、Hα 以外の輝線混入は $\sim 10\%$ と計算され（Tonegawa et. al 2014）、FastSound の実データを用いた推定も現在行われている（重・宇 c24 講演参照）。最終的にはこれらの系統誤差は補正した上で、最終的な $f\sigma_8$ 計算が行われる。

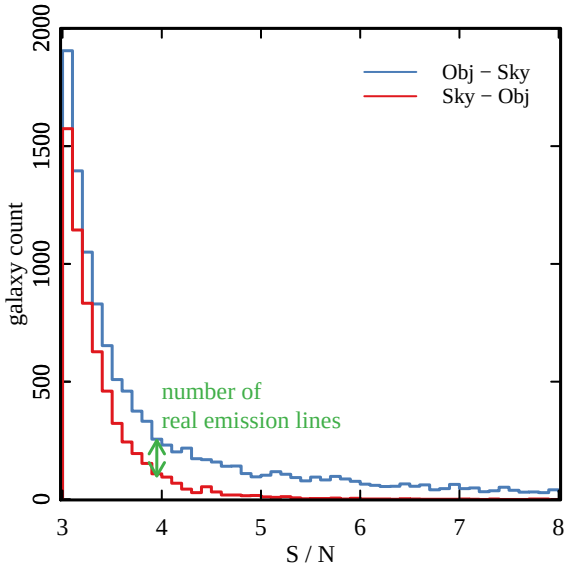


図 2: 輝線検出ソフト FIELD で検出された輝線の S/N 比のヒストグラム。通常の FMOS 二次元データと同時に、その正負を反転させたものに対しても輝線検出を行った。$S/N > 4.5$ ではほとんど誤検出がないことが分かる。

表 1: いくつかの S/N 閾値に対する輝線検出数。誤検出数の大まかな見積もりとして、画像の正負を反転させた Sky-Obj 画像に対する検出結果も示した。

	Obj.-Sky (1)	Sky-Obj. (2)
$S/N > 5.0$	3,105	107
$S/N > 4.5$	4,656	501
$S/N > 3.0$	12,421	6,163

Reference

Tonegawa, M., Totani, T., Akiyama, M., et. al 2014, PASJ, 66, 43

Tonegawa, M et. al 2014, arxiv:1405.6198

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

Langevin description of gauged scalar fields in a thermal bath

宮本 裕平 (東京大学大学院理学系研究科)

Abstract

我々は初期宇宙の高温状態における場の振動の散逸を明らかにすることを念頭に、ゲージ場と相互作用するスカラー場が熱浴中で振動している状況を考えた。このような場の運動は、揺動と散逸の効果が取り入れられたランジュバン方程式で記述される。本研究ではゲージ相互作用から導出される揺動と散逸項に対しても、その間に揺動散逸関係が成り立つことを確認した。

1 Introduction

近年の観測技術の向上により、宇宙の歴史を遡ることが可能になってきた。しかし、再結合よりもはるかに以前の宇宙の姿は未だ解明されたとは言いがたく、極初期宇宙の物理現象を明らかにするには人工的な粒子加速器以外の方法が不可欠である。そこで我々は初期宇宙の相転移現象に注目した。相転移現象は初期のインフレーション機構のみならず、位相欠陥 (A. Vilenkin and E. P. S. Shellard (2000)) や泡衝突による重力波の生成 (M. Kamionkowski, A. Kosowsky and M. S. Turner (1994))、宇宙膨張史の変更 (R. Easther, J. T. Giblin, Jr., E. A. Lim, W. -I. Park and E. D. Stewart (2008)) など、初期宇宙と観測を結びつける上で重要である。

相転移現象は多くの場合有効ポテンシャルを用いて記述されるが、動的な現象の記述には有効作用によるアプローチが必要である。有効ポテンシャルは準静的な運動に対しては有用な量であるが、あらゆる相転移現象の記述が可能なわけではないのである。

有効作用から導かれる運動方程式は、ランダム変数を含むランジュバン方程式となる。この「ランダム力」の有無により、相転移の様相が大きく異なる場合も先行研究 (M. Yamaguchi and J. Yokoyama (1997)) で調べられている。しかし、これまでに他のスカラー場やフェルミオン場と相互作用するスカラー場の有効作用についての研究はなされていたが (M. Yamaguchi and J. Yokoyama (1997), J. Yokoyama (2004))、ゲージ場と相互作用する場合については明らかではなかった。そこで、我々は最も単純なゲージ相互作用であるスカラー量子電磁理論において有効作用とそこから導かれるスカラー場の運動について考察した。

2 Effective Action

クーロンゲージ $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ におけるスカラー量子電磁理論のラグランジアンは

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =&\partial_\mu\Phi^\dagger\partial^\mu\Phi - m^2\Phi^\dagger\Phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\vec{A}_T\cdot\partial^\mu\vec{A}_T \\ &- ie\vec{A}_T(\Phi\vec{\nabla}\Phi^\dagger - \Phi^\dagger\vec{\nabla}\Phi) - e^2\vec{A}_T\cdot\vec{A}_T\Phi^\dagger\Phi \\ &+ \frac{1}{2}(\vec{\nabla}A_0)^2 - ieA_0(\Phi\dot{\Phi}^\dagger - \Phi^\dagger\dot{\Phi}) + e^2A_0^2\Phi^\dagger\Phi\end{aligned} \tag{1}$$

である。このラグランジアンから実時間有限温度の場の理論の枠内で有効作用を計算する。有効作用を非摂動的に求める方法は確立されておらず、結合定数について摂動展開した有効作用を計算することができる。また、有効作用の計算は 1 粒子既約ダイアグラムの計算に帰着する。$\mathcal{O}(e^2)$ のオーダーでは 1 粒子既約なダイアグラムは 2 つあり (図 1)、それらを評価することで次のような有効作用 Γ が得られる。



図 1: $\mathcal{O}(e^2)$ の 1 粒子既約ダイアグラム。

$$
\begin{aligned}
&\Gamma \\
&= \int d^4x \left[\phi^\dagger_\Delta(x) \left(-\partial_\mu \partial^\mu - m^2 - e^2 \frac{T^2}{6} \right) \phi_c(x) \right. \\
&\quad \left. + \phi_\Delta(x) \left(-\partial_\mu \partial^\mu - m^2 - e^2 \frac{T^2}{6} \right) \phi_c(x)^\dagger \right] \\
&\quad - 4ie^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3} e^{-i(\vec{p_1}+\vec{p_2})\cdot(\vec{x_1}-\vec{x_2})} \\
&\quad \times \mathcal{P}_{ij}(\vec{p_1}) p_{2i} p_{2j} \Theta(t_2 - t_1) \\
&\quad \times \left[g^<_{p_1}(t_1,t_2) G^<_{p_2}(t_1,t_2) - g^>_{p_1}(t_1,t_2) G^>_{p_2}(t_1,t_2) \right] \\
&\quad \times \left(\phi^\dagger_c(x_1) \phi_\Delta(x_2) + \phi_c(x_1) \phi^\dagger_\Delta(x_2) \right) \\
&\quad - 2ie^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3} e^{-i(\vec{p_1}+\vec{p_2})\cdot(\vec{x_1}-\vec{x_2})} \\
&\quad \times \mathcal{P}_{ij}(\vec{p_1}) p_{2i} p_{2j} \\
&\quad \times \left[g^<_{p_1}(t_1,t_2) G^<_{p_2}(t_1,t_2) + g^>_{p_1}(t_1,t_2) G^>_{p_2}(t_1,t_2) \right] \\
&\quad \times \phi^\dagger_\Delta(x_1) \phi_\Delta(x_2) \\
&\quad + \Gamma_{A_0} \,, \qquad (2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_{A_0} \\
&= - e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\vec{k}-\vec{q}|^2} \cdot \left(\frac{1}{2} + n_p \right) \\
&\quad \times \left(\frac{\omega^2}{\omega_p} + \omega_p \right) \left(\tilde{\phi_c}(k) \tilde{\phi_\Delta}^\dagger(k) + \tilde{\phi_\Delta}(k) \tilde{\phi_c}^\dagger(k) \right) \\
&\equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\tilde{\phi_c}(k) \tilde{\phi_\Delta}^\dagger(k) + \tilde{\phi_\Delta}(k) \tilde{\phi_c}^\dagger(k) \right) \tilde{f}_{A_0}(k)
\end{aligned} \qquad (3)
$$

3 Langevin equation

計算された有効作用は複素数となる。有効作用には次のような虚部がある。

$$
\begin{aligned}
i\Gamma \supset & - \int d^4x_1 d^4x_2 \mathcal{N}(x_1 - x_2) \\
& (\phi_{\Delta\,\mathrm{R}}(x_1) \phi_{\Delta\,\mathrm{R}}(x_2) + \phi_{\Delta\,\mathrm{I}}(x_1) \phi_{\Delta\,\mathrm{I}}(x_2)) \qquad (4)
\end{aligned}
$$

この項はノイズ変数として次のように書き直すことができる。実部と合わせて、

$$
\begin{aligned}
e^{i\Gamma} &= \int \mathcal{D}\xi_a \mathcal{D}\xi_b \, P[\xi_a] P[\xi_b] \exp \left[i\Gamma_{\mathrm{real}} + \right. \\
&\quad \left. + i \int d^4x (\xi_a(x) \phi_{\Delta\,\mathrm{R}}(x) + \xi_b(x) \phi_{\Delta\,\mathrm{I}}(x)) \right] \\
&\equiv \int \mathcal{D}\xi_a \mathcal{D}\xi_b \, P[\xi_a] P[\xi_b] \, \exp \left[i S_{\mathrm{eff}} \right] \qquad (5)
\end{aligned}
$$

のようにまとめることができる。運動方程式はフーリエ空間で

$$
\begin{aligned}
&(-\omega^2 + k^2 + m^2) \tilde{\phi}(\omega, \vec{k}) \\
&+ \left(e^2 \frac{T^2}{6} - \tilde{f}_{A_0}(\omega, \vec{k}) + \int \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\mathcal{P}}{\omega - \omega'} i\tilde{C}(\omega', \vec{k}) \right) \\
&\times \tilde{\phi}(\omega, \vec{k}) + \frac{1}{2} \tilde{C}(\omega, \vec{k}) \tilde{\phi}(\omega, \vec{k}) = \tilde{\xi}(\omega, \vec{k}) \qquad (6)
\end{aligned}
$$

となり、ノイズのパワースペクトル $\mathcal{N}$ と散逸項の間には

$$
\frac{\tilde{\mathcal{N}}(\omega, \vec{k})}{\frac{-1}{\omega} \mathrm{Im} \tilde{C}(\omega, \vec{k})} = \frac{\omega}{2} \frac{e^{\beta\omega} + 1}{e^{\beta\omega} - 1} = \omega \left(\frac{1}{2} + n_\omega \right) \qquad (7)
$$

という揺動散逸関係が満たされる。

4 Discussion

これまでは主に e^2 のオーダーでの有効作用と散逸について考えてきたが、実はこの次数では散逸率はゼロとなる。ゼロでない散逸率をもたらすのは $\mathcal{O}(e^4)$ の相互作用であり、例えば

$$
\Gamma_{\mathrm{D}} = \frac{e^4 |\phi(t)|^2}{4\pi M} (1 + 2N_M) \,. \qquad (8)
$$

のような散逸率が得られる。

Reference

A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, Cambridge University Press, Cambridge, England, 2000

M. Kamionkowski, A. Kosowsky and M. S. Turner, Phys. Rev. D **49**, 2837 (1994) [astro-ph/9310044].

R. Easther, J. T. Giblin, Jr., E. A. Lim, W. -I. Park and E. D. Stewart, JCAP **0805**, 013 (2008) [arXiv:0801.4197 [astro-ph]].

M. Yamaguchi and J. Yokoyama, Phys. Rev. D **56**, 4544 (1997) [hep-ph/9707502].

J. Yokoyama, Phys. Rev. D **70**, 103511 (2004) [hep-ph/0406072].

ブラックホールの回転エネルギー抽出について

中川　智希　（広島大学大学院　理学研究科）

平成 26 年 7 月 25 日

概 要

非常に明るい活動的銀河中心核には大質量のブラックホールが存在すると考えられ、その回転エネルギーを電磁気的に抽出することにより周りへの活動源となることが考えられている。Blandford と Znajek(1977) はあるモデルを用いて地平面に向かって負のエネルギー、すなわち、ブラックホールから外へ向かってエネルギーが流れること示した。本研究発表では定常、軸対称な状況を仮定し、曲がった空間での電磁気学の定式化を復習した後、Blandford-Znajek 過程について紹介する。さらに、その過程での問題点とそれを克服するために進行中の研究目標をまとめる。

1　曲がった空間の電磁場

時空の計量は Boyer-Lindquist 座標の時間 t と任意の空間座標 x^j を用いて、

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + g_{jk}(dx^j + \beta^j dt)(dx^i + \beta^i dt),$$

で表すことができる。ここで

$$\alpha^2 = \frac{\rho^2\Delta}{\Sigma^2}, \vec{\beta} = (\beta^r, \beta^\theta, \beta^\phi) = (0, 0, -\omega)$$

$$\omega = \frac{2Mar}{\Sigma^2}, \quad g_{jk} = \mathrm{diag}(\frac{\rho^2}{\Delta}, \rho^2, \varpi^2).$$

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr, \quad \rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$$

$$\Sigma^2 = (r^2+a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta, \quad \varpi = \frac{\Sigma}{\rho}\sin\theta$$

である。曲がった空間における定常な場合の Maxwell 方程式は以下のように書き表すことができる。(例えば、Thorne et al 1986)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho_e, \tag{1}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \tag{2}$$

$$\vec{\nabla}\times(\alpha\vec{E}) = (\vec{\beta}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} - (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{\beta}, \tag{3}$$

$$\vec{\nabla}\times(\alpha\vec{B}) = 4\pi\alpha\vec{j} - (\vec{\beta}\cdot\vec{\nabla})\vec{E} + (\vec{E}\cdot\vec{\nabla})\vec{\beta}. \tag{4}$$

ここで、ベクトル解析は上で与えた曲がった空間に対する曲線座標のものを意味する。また、$\vec{E}$、$\vec{B}$ は ZAMO 系で測った電磁場を意味する。軸対称で定常な場合、これらを表すのに以下の関数、磁気関数 G、電流関数 S 及び電気ポテンシャル Φ を用いるのが便利である。式 (2)-(3) は自動的に満たす。

$$\vec{B} = \frac{\vec{\nabla}G\times\vec{e}_{\hat{\phi}}}{\varpi} + \frac{S}{\alpha\varpi}\vec{e}_{\hat{\phi}} \tag{5}$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{\alpha}\vec{\nabla}\Phi - \frac{\vec{\beta}}{\alpha}\times\vec{B} \tag{6}$$

具体的な成分は以下となる。

$$[B_{\hat{r}}, B_{\hat{\theta}}, B_{\hat{\phi}}] = [\frac{1}{\varpi\rho}G_{,\theta}\,, -\frac{\Delta^{1/2}}{\varpi\rho}G_{,r}\,, \frac{S}{\alpha\varpi}]$$

$$[E_{\hat{r}}, E_{\hat{\theta}}, E_{\hat{\phi}}] = [-\frac{\Delta^{1/2}}{\alpha\rho}(\Phi_{,r} - \omega G_{,r}\,), -\frac{1}{\alpha\rho}(\Phi_{,\theta} - \omega G_{,\theta}\,), 0]$$

式 (4) のポロイダル ((r,θ)) 成分は以下となる。

$$4\pi\alpha\vec{j}_P = \frac{\vec{\nabla}S\times\vec{e}_{\hat{\phi}}}{\varpi} \tag{7}$$

式 (1) 及び式 (4) のトロイダル (ϕ) 成分は以下となる。関数 G と Φ の偏微分の二階方程式となる。(ここで、その具体形を省略する。)

2　エネルギーの流れ

定常な場合なのでエネルギーは保存する。その式は、エネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ を使って

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}T^{\mu}_{t})_{,\mu}=0 \tag{8}$$

と書くことができる。外に出ていくポインチングフラックス (Poynting Flux)、つまり、r 方向に出ていくエネルギー流 T^{tr} に表面積要素をかけ積分することで、球面から出て行く全エネルギーを計算できる。外向きを正にとると、

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)=-\int_{r=const}T^{r}_{t}\sqrt{-g}d\theta d\phi \tag{9}$$

を計算すれば良いことがわかる。T^{r}_{t} を ZAMO 系での量で表すと

$$T^{r}_{t}=-\frac{\Delta^{1/2}}{\rho}\left(\alpha T^{\hat{t}\hat{r}}+\omega\varpi T^{\hat{\phi}\hat{r}}\right) \tag{10}$$

電磁場のエネルギー運動量テンソル $T^{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ は $E^{\hat{\phi}}=0$ に注意して、関係する量は

$$T^{\hat{t}\hat{r}}=\frac{1}{4\pi}(\vec{E}\times\vec{B})_{\hat{r}}=\frac{1}{4\pi}E^{\hat{\theta}}B^{\hat{\phi}},\ \ T^{\hat{t}\hat{\phi}}=-\frac{1}{4\pi}B^{\hat{r}}B^{\hat{\phi}} \tag{11}$$

である。これより T^{r}_{t} は

$$\begin{aligned}T^{r}_{t}&=-\frac{1}{4\pi}\frac{\Delta^{1/2}}{\rho}(\alpha E^{\hat{\theta}}-\omega\varpi B_{\hat{r}})B^{\hat{\phi}}\\&=\frac{1}{4\pi\rho^{2}\sin\theta}\Phi_{,\theta}\,S\end{aligned} \tag{12}$$

となる。

3　外に向きのエネルギー流

エネルギー流の計算には関数 Φ と S を決める必要がある。いくつかの条件を課すことで比較的単純な議論を行うことができる。一つ目は理想 MHD 条件 (Ideal MHD condition) で、至る所で $\vec{E}\cdot\vec{B}=0$ である。これは式 (5)-(6) から、$\vec{\nabla}\Phi=\Omega(G)\vec{\nabla}G$ となる。Ω は磁気面の回転速度を表す。次に Force-Free 条件と呼ばれるものでは、式 (7) から $S=S(G)$ となる。電流は磁気面に沿って流れることを意味する。Blandford-Znajek 過程ではブラックホールの地平面 (Horizon) に近づくにつれ

$$B_{\hat{\phi}}=-E_{\hat{\theta}} \tag{13}$$

という”Znajek 条件” を課していることになる。これは局所的なフラックス $T^{\hat{t}\hat{r}}$ の項が内向きに落ち込んでいることを示している。理想 MHD 条件と上の条件を用いるとブラックホールの地平面に近づくにつれ

$$\Phi_{,\theta}=\Omega G_{,\theta} \tag{14}$$

$$\frac{S}{\alpha\varpi}=B_{\hat{\phi}}\ \ \rightarrow\ \ \frac{1}{\alpha\rho}(\Omega-\omega_{H})G_{,\theta} \tag{15}$$

が得られる。ここでの ω_H はブラックホールの地平面での ω(一定値) の値である。
これらを代入して、$(\frac{dE}{dt})$ は

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{H}=\frac{1}{4\pi}\Omega(\omega_{H}-\Omega)\int_{r_{H}}\frac{\Sigma}{\rho^{2}}(G_{,\theta})^{2}\sin\theta d\theta d\phi \tag{16}$$

となる。積分はゼロ又は正であり、その前の係数に注目すると、

$$0<\Omega<\omega_{H}\text{のとき}\quad\left(\frac{dE}{dt}\right)_{H}>0 \tag{17}$$

となり、地平面から外側へ正のエネルギーが流れて行く可能性を示している。

4　これまでの研究と問題点

これまで、Force-Free 条件や MHD 条件を採用して数値計算が行われた。しかし、

- 磁力線を表す G の形はどうすればよいのか。
- 特に Ω の値はどのように決めれるのか。

ほかにも Ideal MHD 条件が破れているという主張や、ブラックホール磁気圏についてまだ不明な点があるなど、問題点がいくつも挙げられる。

5　今後の研究目標

Blandford-Znajek 過程では Ideal MHD 条件や Force-Free 条件などの条件をいくつか課していた。そうすることで磁気関数 G、電流関数 S、ポテンシャル Φ を Ω を用いてうまくまとめることができていた。しかし、これらの条件を課すことが数学的には正しいが物理的には正しいのかという疑問がある。そこでこれらの仮定を使わない代わりに二成分流体モデルを考える。これまで研究では電場 $\vec{E}$ と磁場 B_ϕ を仮定したのに対し、電荷密度 ρ_e と電流密度 $\vec{j}$ のモデルを与えることで $\vec{E}$ と B_ϕ も求める。先の章に示したように S と Ω の地平面での値がブラックホールの回転エネルギーを引き抜くかどうかに関係するから重要であり、その振る舞いを知る。

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

対称性の破れとヒッグス機構

小川 達也 (大阪市立大学大学院 理学研究科)

Abstract

我々の宇宙には基本的な相互作用が 4 つあることが知られている。その 4 つとは、「強い相互作用」「弱い相互作用」「電磁相互作用」「重力相互作用」である。現在の素粒子標準模型では、これらの相互作用の内、弱い相互作用と電磁相互作用は SU(2) × U(1) の対称性を持つゲージ理論であるワインバーグ・サラム理論によって統一されており、強い相互作用は SU(3) 対称性を持つゲージ理論である量子色力学によって記述される。残る重力相互作用を記述するためには、量子論的に重力を取り扱う理論、すなわち量子重力理論が必要となるがこれは未完成の理論である。重力相互作用を除く、3 つの相互作用を、より高い対称性を持つゲージ理論により統一しようとする試みは盛んにおこなわれている。この理論が大統一理論 (GUT) である。初期宇宙のような非常に高温な状態では、大統一理論で考えられているような相互作用の統一が起こり、真空は高い対称性を持っていたと考えられる。この高い対称性を持つ真空は、宇宙が進化し、温度が下がるにつれて、ある種の相転移を起こし、より低い対称性を持つ真空に変化したと考えられる。このように真空の対称性が破れることで、ベクトル場に質量を持たせる仕組みを「ヒッグス機構」という。本発表では、簡単な実例を用い、このヒッグス機構について論じる。

1 自発的対称性の破れ

次のラグランジアンを考える。

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \bar{\phi})(\partial^\mu \phi) - V(\phi) \tag{1}$$

ここで、ϕ は複素スカラー場であり、ポテンシャル $V(\phi)$ は次で与えられる。

$$V(\phi) = \frac{1}{4}\lambda(\bar{\phi}\phi - \eta^2)^2 \tag{2}$$

λ と η は正の定数であり、このときポテンシャルは、いわゆるメキシカンハット型になる。このラグランジアンは、大域的位相変換 $U(1)$ 群のもとで不変となる。

$$\phi(x) \to \phi'(x) = e^{i\alpha}\phi(x) \tag{3}$$

このときの真空期待値は

$$\langle 0|\phi|0\rangle = \eta e^{i\theta} \tag{4}$$

であり、これを満たす円周すべてが真空となっている。無数に存在する真空から、一点を選ぶと、その時対称性は破れる。

2 ヒッグス機構

前セクションを踏まえ、次のラグランジアンを考える。

$$\mathcal{L} = \bar{D}_\mu \bar{\phi} D^\mu \phi - V(\phi) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{5}$$

ϕ は複素スカラー場で、共変微分は $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$、ポテンシャルは (2) で与えられる。このラグランジアンは次の局所ゲージ変換の $U(1)$ 群のもとで不変である。

$$\phi(x) \to \phi'(x) = e^{i\alpha(x)}\phi(x) \tag{6}$$

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + e^{-1}\partial_\mu \alpha(x) \tag{7}$$

真空期待値は、$|\phi| = \eta$ を満たすものであり、この真空から一点を選び、その周りで場を展開したものをラグランジアンに代入すると、ゲージ場 A_μ に質量持たせることができる

3 非可換ゲージ理論

今まで見てきたことを、一般の群 G の下でラグランジアンが不変になるように一般化する。このとき、

ゲージ変換は、行列表現 $D(g)$ を用いて、次のように一般化される。

$$\phi_i \to \phi_i' = D_{ij}(g)\phi_j \tag{8}$$

リー群 G の要素 g は生成子 L^a を用いて次のように書ける。

$$g = \exp(-i\omega_a L^a) \tag{9}$$

L は G のリー代数を生成し、次の交換関係を満たす。

$$[L^a, L^b] = if_c^{ab}L^c \tag{10}$$

さらに L を次のように規格化する。

$$Tr\{T^aT^b\} = \delta^{ab} \tag{11}$$

このような適切な装置のもとで、一般化されたラグランジアンを考える。

4 $SU(2)$ モデルにおける対称性の破れ

最も簡単な非可換群である $SU(2)$ を用いて対称性の破れるパターンを見ていく。$SU(2)$ の基本 2 表現中における、2 成分スピノールとしてのヒッグス場の変換を考える。このモデルでは、真空多様体は次のようになる。

$$G/H = SU(2) \cong S^3 \tag{12}$$

このとき、3 つのゲージ場がマッシブとなり、1 つのマッシブヒッグス場が残ったままになることがわかる。

5 Reference

A.VILENKIN E.P.S.SHELLARD
Cosmic Strings and Other Topological Defects
CAMBRIDGE MONOGRAPHS ON MATHEMATICAL PHYSICS

2014 年度 第 44 回 天文・天体物理若手夏の学校

一般相対論的な三体問題に対する三角解の線形安定性

山田 慧生 (弘前大学大学院 理工学研究科)

Abstract

本研究では，Newton 重力における Lagrange の正三角解に対応する，一般相対論的な任意質量の三体問題に対する三角形円軌道平衡解 [Yamada & Asada (2012)] の線形安定性を調べた．Lagrange の正三角解が線形安定であるための条件は天体の質量比に対するそれとして与えられる．今回，三体のうち一つを質量ゼロのテスト粒子とする制限三体問題における先行研究 [Douskos & Perdios (2002); Singh & Bello (2014)] と比較し，一般相対論的な三体相互作用がこの条件に如何に影響するかを議論する．

1 導入

現在，日本の KAGRA をはじめとして世界中で次世代の地上重力波検出計画が盛んであり，重力波を通じた一般相対論の検証が注目されている．これらの重力波検出器では，重力波の波形を予測していなければ実際の検出が困難であり，そのため，重力波の源となる天体ダイナミクスの理解は必要不可欠である．実際，有望な重力波源である連星ブラックホール等の軌道運動や合体によって放出される重力波に関する理論研究が活発に行われている．

他方で，一般相対論的な三体系ダイナミクスの理解の重要性が増している．一般相対論的な多体問題では，天体の運動方程式に Newton 重力における多体問題には現れない $m_1 \times m_2 \times m_3$（添字は天体の番号）のような質量の三重積が現れる．これまで，このような一般相対論的な多体相互作用の議論は不十分であった．しかし，重力波源となり得る一般相対論的な三体系が発見され (Ransom *et al.* 2014)，また，連星の外側に第三体が存在する場合，それによって連星のダイナミクスや重力波放出に強い影響の現れることが指摘されている (Wen 2003; Seto 2013)．

Newton 重力における三体問題の解析的な特殊解として Lagrange の正三角解が知られており，太陽系においても対応する天体 -Troja 群- が発見されている．正三角解では三体はそれぞれ正三角形の頂点にあり，互いに相対距離を変えずに円運動する．また，この正三角解から放出される重力波は連星系から放出されるそれと酷似しているが，将来的な精密観測によって連星系とは区別され得ることが指摘されている (Asada 2009)．

Lagrange の正三角解に一般相対論的な効果を取り入れた円軌道平衡解はすでに任意質量に対しても調べられている．この時，天体配置は一般相対論的な効果によって Newton 重力での正三角配置からずれることがわかっている (Krefetz 1967; Ichita, Yamada, & Asada 2011; Yamada & Asada 2012)．この一般相対論的な三角形円軌道平衡解（三角解）の三体相互作用を通じた一般相対論の検証を議論するためには，この解の安定性を調べることが必要である．

Newton 重力において，Lagrange の正三角解に対する線形安定性の条件は質量比に対するそれとして与えられる (Gascheau 1843; Routh 1875)：

$$\frac{m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1}{M^2} < \frac{1}{27}. \tag{1}$$

ここで，$M = m_1 + m_2 + m_3$ は系の総質量である．また，一般相対論的な制限三体問題について安定性の条件は

$$\frac{m_1 m_2}{M^2} < \frac{1}{27}\left(1 - \frac{391}{54}\varepsilon\right), \tag{2}$$

となり，一般相対論な効果によって Newton 重力の場合に比べ解が不安定になりやすいことが指摘されている (Douskos & Perdios 2002; Singh & Bello 2014)．ただし，後でも述べるように，ε は一般相対論的な効果の大きさを表す微小なパラメターである．

本研究では，一般相対論的な任意質量の三体問題に対する三角形円軌道平衡解の線形安定性を調べ，一般相対論的な三体相互作用が安定性の条件に如何に影響するかを議論する．

2　1PN 近似における三角解

本研究では，1 次の post-Newton (1PN) 近似を用いる．この近似では，天体の受ける重力が弱くほとんど Newton 的であるとし，また，天体の運動速度が光速に比べて十分小さいと仮定する．すなわち，

$$\varepsilon \equiv \frac{GM}{c^2 r} \sim \left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1. \tag{3}$$

ここで，G は重力定数，c は光速，M は系の総質量，r は天体間距離，v は天体の速度である．1 PN 近似では ε の 1 次まで考慮する．以下では，$G = c = 1$ の単位系を用いる．1PN 近似における多体系の運動方程式は Einstein-Infeld-Hoffmann (EIH) の運動方程式として知られている (Asada, Futamase, & Hogan 2011; Misner, Thorne, & Wheeler 1973)：

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{r}}_K = &\sum_{A\neq K} \boldsymbol{r}_{AK}\frac{m_A}{r_{AK}^3}\left[1 - 4\sum_{B\neq K}\frac{m_B}{r_{BK}}\right.\\
&-\sum_{C\neq A}\frac{m_C}{r_{CA}}\left(1-\frac{\boldsymbol{r}_{AK}\cdot\boldsymbol{r}_{CA}}{2r_{CA}^2}\right)\\
&\left.+\dot{r}_K^2 + 2\dot{r}_A^2 - 4\dot{\boldsymbol{r}}_A\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_K - \frac{3}{2}\left(\dot{\boldsymbol{r}}_A\cdot\boldsymbol{n}_{AK}\right)^2\right]\\
&-\sum_{A\neq K}\dot{\boldsymbol{r}}_{AK}\frac{m_A}{r_{AK}^2}\boldsymbol{n}_{AK}\cdot(3\dot{\boldsymbol{r}}_A - 4\dot{\boldsymbol{r}}_K)\\
&+\frac{7}{2}\sum_{A\neq K}\sum_{C\neq A}\boldsymbol{r}_{CA}\frac{m_A m_C}{r_{AK}r_{CA}^3}.\end{aligned} \tag{4}$$

この運動方程式を満たすような三体問題に対する三角形円軌道平衡解は，$I, J = 1, 2, 3$ として，天体間距離を $r_{IJ} = r_N\,(1 + \varepsilon\rho_{IJ})$ と置くことで与えられる (図 1)．ここで，r_N は Newton 重力における正三角解での天体間距離で，ρ_{IJ} は各天体間距離に対する 1PN 補正である．三体の共通重心を座標原点とし，一般相対論的な補正によっては三角形の面積が変わらないように系のスケールを固定すると，Newton 重力における正三角解に対する 1PN 補正はそれぞれ，

$$\begin{aligned}\rho_{12} &= \frac{1}{24}[(\nu_2-\nu_3)(5-3\nu_1) - (\nu_3-\nu_1)(5-3\nu_2)],\\
\rho_{23} &= \frac{1}{24}[(\nu_3-\nu_1)(5-3\nu_2) - (\nu_1-\nu_2)(5-3\nu_3)],\\
\rho_{31} &= \frac{1}{24}[(\nu_1-\nu_2)(5-3\nu_3) - (\nu_2-\nu_3)(5-3\nu_1)],\end{aligned} \tag{5}$$

ここで $\nu_I = m_I/M$ は総質量に対する各天体の質量比である．このとき，1PN 近似の下での各天体の角速度は共通で $\omega = \omega_N + \varepsilon\omega_{PN}$ となる．ここで，ω_N は Newton 重力における天体の角速度，

$$\omega_{PN} = -\frac{1}{16}[29 - 14(\nu_1\nu_2 + \nu_2\nu_3 + \nu_3\nu_1)]\omega_N, \tag{6}$$

である (Yamada & Asada 2012)．

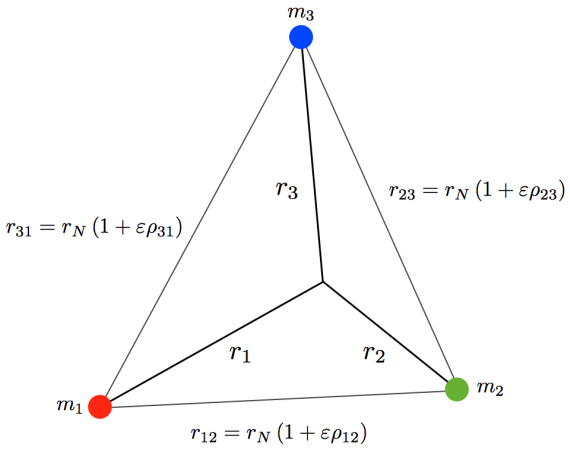


図 1: 1PN 近似における三角配置

3　摂動の運動方程式

簡単のため，運動平面における摂動を考える．ここで，天体は 3 つあるので摂動の自由度は $2\times 3 = 6$ であるが，座標原点を共通重心に固定することで 2 つ自由度を消せて 4 となる．本研究では，先行研究 (Routh 1875) にならって次の摂動を考える（図 2)：

$$r_{12} = r_N(1 + \varepsilon\rho_{12} + \delta\chi_{12}), \tag{7}$$
$$r_{31} = r_N(1 + \varepsilon\rho_{31} + \delta\chi_{31}), \tag{8}$$
$$\varphi_{23} = \frac{\pi}{3} + \sqrt{3}\varepsilon\rho_{23} + \delta\psi_{23}, \tag{9}$$
$$\theta_{12} = \theta_{12}|_0 + \delta\sigma_{12}. \tag{10}$$

ここで，$\delta \ll \varepsilon$ は摂動の大きさを定める微小パラメターであり，χ_{IJ} は各天体間距離に対する摂動，ψ_{23} は m_1 の内角に対する摂動，および σ_{12} は天体の角速度に対する摂動を与える．なお，$\theta_{12}|_0$ は無摂動における値であり

$$\dot{\theta}_{IJ}|_0 = \omega_N + \varepsilon\omega_{PN}, \tag{11}$$

である．

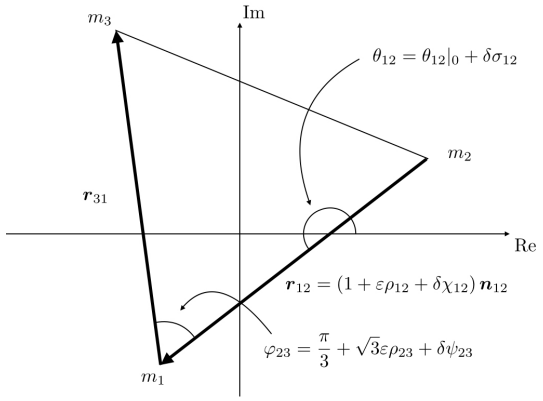


図 2: 1PN 近似における三角配置に対する摂動

これらの摂動を加えて EIH の運動方程式を書き下すと，その無摂動項は三角解そのものを与える．したがって，摂動に対する運動方程式は，例えば，m_2 から m_1 へ向かう相対位置ベクトルに対して，δ の 1 次の精度で

$$\left[(D^2-3)\chi_{12} - 2D\sigma - \frac{9}{4}\nu_3 X - \frac{3\sqrt{3}}{4}\nu_3\psi_{23}\right]$$
$$+\varepsilon\left[-\frac{1}{32}\left\{4\sqrt{3}(\nu_1-\nu_2)(7-9\nu_3)\nu_3 D + (36\nu_2^3\right.\right.$$
$$+234\nu_1\nu_2^2 - 146\nu_2^2 + 261\nu_1^2\nu_2 - 488\nu_1\nu_2 + 155\nu_2$$
$$\left.\left.+63\nu_1^3 - 155\nu_1^2 + 137\nu_1 - 585)\right\}\chi_{12} - \frac{1}{24}(27\nu_2^3$$
$$+135\nu_1\nu_2^2 - 21\nu_2^2 + 135\nu_1^2\nu_2 - 210\nu_1\nu_2 + 24\nu_2$$
$$+27\nu_1^3 - 21\nu_1^2 + 24\nu_1 - 155)D\sigma - \frac{1}{32}\nu_3\left\{4\sqrt{3}\right.$$
$$\times(9\nu_1\nu_2 + 10\nu_2 + 9\nu_1^2 - 6\nu_1 - 4)D - (216\nu_2^2$$
$$\left.+288\nu_1\nu_2 - 154\nu_2 + 171\nu_1^2 - 38\nu_1 + 420)\right\}X$$
$$+\frac{1}{32}\nu_3\left\{4(18\nu_2^2 + 27\nu_1\nu_2 - 2\nu_2 + 9\nu_1^2 + 14\nu_1\right.$$
$$-12)D + \sqrt{3}(51\nu_2^2 + 114\nu_1\nu_2 + 2\nu_2 + 87\nu_1^2 - 120\nu_1$$
$$\left.\left.+155)\right\}\psi_{23}\right] = 0. \tag{12}$$

ここで，$D = d/dt$ は時間微分を表し，$X \equiv \chi_{31} - \chi_{12}$，$\sigma = \sigma_{12}$ とした．m_1 から m_3 へ向かう相対位置ベクトルに対する運動方程式からも同様にして摂動に対する運動方程式が得られる．

結果として，形式的に摂動の運動方程式は行列表示を用いて

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_{12} \\ \sigma \\ X \\ \psi_{23} \end{bmatrix} = 0, \tag{13}$$

のように書くことが出来る．

4 安定性の条件

摂動に対する運動方程式を解くために，各摂動は

$$\chi_{12} = Ae^{\lambda t},\ \ \sigma = Be^{\lambda t},\ \ X = Ce^{\lambda t},\ \ \psi_{23} = De^{\lambda t}, \tag{14}$$

と表されると仮定する．ただし，A, B, C, D, λ は定数である．任意の摂動に対して運動方程式が満たされるためには，(13) の左辺の一つ目の行列の行列式がゼロで無くてはならない：

$$\left[\lambda^6 + 2\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon\left[77 - 10(\nu_1\nu_2 + \nu_2\nu_3 + \nu_3\nu_1)\right]\right)\lambda^4\right.$$
$$+\left(\left[1 + \frac{27}{4}(\nu_1\nu_2 + \nu_2\nu_3 + \nu_3\nu_1)\right] - \frac{1}{16}\varepsilon\left[308\right.\right.$$
$$+1265(\nu_1\nu_2 + \nu_2\nu_3 + \nu_3\nu_1) + 162\nu_1\nu_2\nu_3 - 378$$
$$\left.\left.\times(\nu_1\nu_2 + \nu_2\nu_3 + \nu_3\nu_1)^2\right]\right)\lambda^2 + \left(\frac{27}{4}(\nu_1\nu_2 + \nu_2\nu_3\right.$$
$$+\nu_3\nu_1) - \frac{9}{32}\varepsilon\left[521(\nu_1\nu_2 + \nu_2\nu_3 + \nu_3\nu_1) - 72\nu_1\nu_2\nu_3\right.$$
$$\left.\left.\left.-126(\nu_1\nu_2 + \nu_2\nu_3 + \nu_3\nu_1)^2\right]\right)\right] = 0. \tag{15}$$

ただし，$\lambda \neq 0$ を仮定した．これは λ^2 に対する 3 次方程式であるから，ε の 1 次の精度で解析的に解くことが出来る．

有限の値を持つ摂動に対して，三角解が線形安定であるためには，根 λ が純虚数，すなわち，λ^2 が負の実数であることが必要十分条件である．結果として，質量比に対する安定性の条件

$$\nu_1\nu_2 + \nu_2\nu_3 + \nu_3\nu_1 + \frac{15}{2}\varepsilon\nu_1\nu_2\nu_3 < \frac{1}{27}\left(1 - \frac{391}{54}\varepsilon\right), \tag{16}$$

を得る．$\varepsilon \to 0$ の Newton 極限では

$$\nu_1\nu_2 + \nu_2\nu_3 + \nu_3\nu_1 < \frac{1}{27}, \tag{17}$$

となり，$\nu_3 \to 0$ の制限三体極限では

$$\nu_1\nu_2 < \frac{1}{27}\left(1 - \frac{391}{54}\varepsilon\right), \tag{18}$$

となる．これらは，それぞれ (1) および (2) と一致しており，先行研究 (Gascheau 1843; Routh 1875; Douskos & Perdios 2002; Singh & Bello 2014) を再現する．

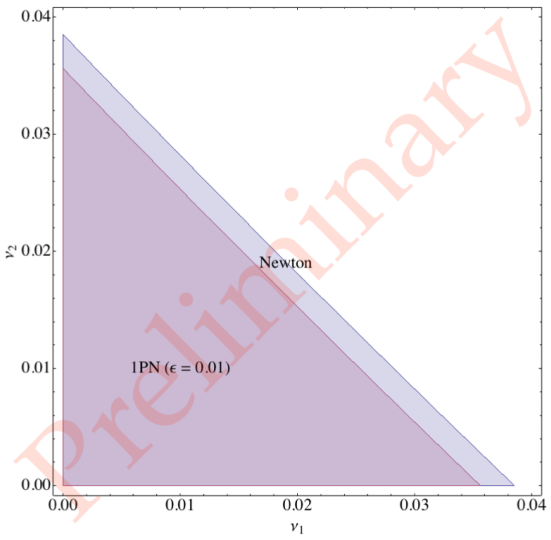


図 3: 三角配置の安定な質量比．相対論的な効果によって安定な領域は狭くなる．$\varepsilon = 0.01$ とした．

5　考察とまとめ

我々は 1PN 近似を用いて，一般相対論的な三体問題に対する三角解の線形安定性を調べ，一般質量での質量比に対する安定性の条件を導出した．

一般相対論的な効果によって，三角解の安定性に対する条件は質量比により強い制限を与える（図 3）．一方，解が安定な領域においては，質量の三重積の効果は非常に小さく実効的に無視できる．実際，$\nu_1 = \nu_2 = 0.02$ の時では $15\nu_1\nu_2\nu_3/2 \approx 0.003 \ll 391/1458 \approx 0.268$ であり，条件式の右辺第二項の相対論的な効果と比較しても十分小さい．しかしながら，一般相対論的な三体相互作用は解の不安定領域を広げる役割を担っており，三体系の不安定性やダイナミクスに密接に関わっていることが示唆される．

重力波放出に伴って，連星系や三体系は天体間距離や角速度に反作用の影響を受ける．そこで，おおざっぱには，今回考慮した摂動を重力波放出による反作用であると捉えることも出来よう．そのように考えると，重力波放出に伴い，一般相対論的な効果が無視出来なくなと三角解の不安定領域は大きくなり，三角解が崩壊すると思われる．もし，その崩壊に伴い特徴的な重力波が放出されれば，三体系の情報を取り出すことが可能かもしれない．このような重力波放出の反作用による三角解の天体ダイナミクスの系統的な議論は現在準備中である．

Preliminary

Reference

H. Asada, Phys. Rev. D **80**, 064021 (2009).

H. Asada, T. Futamase, and P. Hogan, *Equations of Motion in General Relativity* (Oxford University, New York, 2011).

C. N. Douskos and E. A. Perdios, Celest. Mech. Dyn. Astron. **82**, 317 (2002).

G. Gascheau, C. R. Acad. Sci. **16**, 393 (1843).

T. Ichita, K. Yamada, and H. Asada, Phys. Rev. D **83**, 084026 (2011).

J. Singh and N. Bello, Astrophys. Space Sci. **351**, 491 (2014).

E. Krefetz, Astron. J. **72**, 471 (1967).

C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, New York, 1973).

S. M. Ransom *et al.*, Nature **505**, 520 (2014).

B. J. Routh, Proc. Lond. Math. Soc. **6**, 86 (1875).

N. Seto, Phys. Rev. Lett. **111**, 061106 (2013).

L. Wen, Astrophys. J. **598**, 419 (2003)

K. Yamada and H. Asada, Phys. Rev. D **86**, 124029 (2012).