高精度宇宙流体シミュレーションに向けて

結城 文香 (筑波大学大学院 数理物質科学研究科)

Abstract

本研究では銀河風のメカニズムを解明することを目的として、数値流束を Riemann 初期値問題の解析解を使って構成する Godunov スキーム (Godunov 1959) を作成し、空間 2 次精度に高精度化した。本発表では Godunov スキームの概念とテスト計算の結果を発表する。

1 イントロダクション

宇宙では銀河から星間ガスが高速で流出する銀河風という現象が観測されている。銀河風は銀河の進化 · 形成に大きな影響を及ぼす現象なので、様々な観点から研究が行われている。これまで銀河風は近傍の銀河などで観測されてきたが、近年高赤方偏移の銀河でも銀河風の痕跡が確認されている。星間物質を構成する分子の平均自由行程は対象とする現象の典型的尺度より十分小さな場合が多く、さらに超音速流である場合も多いので、圧縮性流体近似がよい近似である場合が多い。そのため銀河風の研究では流体シミュレーションを用いた研究が盛んに行われている。また、宇宙では衝撃波を伴う現象が起こるため、衝撃波を高精度で計算することができるスキームは重要である。本研究では 1 次元の Godunov スキームを作成し、MUSCL 法で空間 2 次精度にした。本発表では作成したスキームのテスト計算について報告する。

2 流体の基礎方程式

1 次元の Euler 方程式は行列 q, E を使って以下の式 (1) のようにまとめて書くことができる。

$$\frac{dq}{dt} + \frac{dE}{dx} = 0 \,, \tag{1}$$

$$q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v \\ e \end{bmatrix} \quad , \quad E = \begin{bmatrix} \rho v \\ p + \rho v^2 \\ (e+p)v \end{bmatrix} \quad ,$$

ここで、ρ:密度, v:速度 ,p:圧力, e:単位体積当たりの全エネルギーである。また q を状態量ベクトル、E を流束ベクトルと名付ける。この方程式を差分形に書き換える。

3 シミュレーションスキーム

3.1 有限体積法

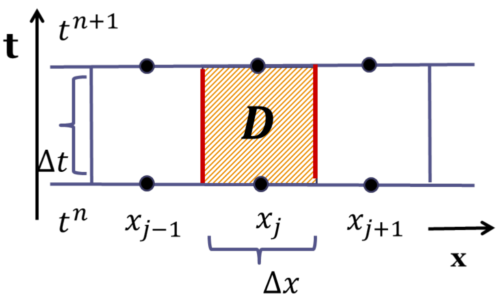

図 1: 有限体積法

(1) 式を図 1 の領域 D で面積分し、時刻 t^n から t^{n+1} の間の状態量の変化がその間にメッシュ境界から出入りする流束の差に等しいことを使って変形すると、有限体積法に基づいた差分スキームとして以下の式が得られる。

$$q_j^{n+1} = q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{ \overline{E}^n_{j+\frac{1}{2}} - \overline{E}^n_{j-\frac{1}{2}} \right\} \,, \tag{2}$$

ここで $\overline{E}^n_{j+\frac{1}{2}}$, $\overline{E}^n_{j-\frac{1}{2}}$ を数値流束と名付ける。

3.2 Godunov 法

Godunov スキームでは数値流束を Riemnn 初期値問題の解析解によって与えられたメッシュ境界上の状態量で構成する。Riemann 初期値問題とは初期値に存在した不連続の時間発展を記述する問題である。

3.3 数値流束のパターン

例として図 2 のように境界の左側に膨張波、右側に接触不連続面と衝撃波が来るような Riemann 初期値問題の解析解のパターンを考えると、境界上での状態量は接触不連続面と膨張波に挟まれた領域の状態量として与えられることがわかる。

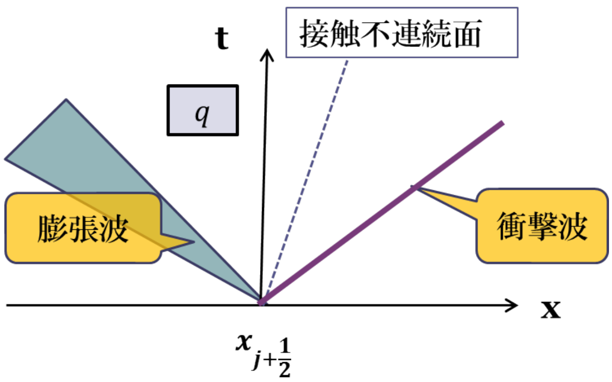

図 2: Riemann 初期値問題の解析解の一例

解析解の形が決まればメッシュ境界上での状態量の値は Riemann 不変量などを用いて初期値から求めることができる。そのためメッシュ境界上での状態量の値は Riemann 初期値問題の解の形により異なる。つまり数値流束は解析解のパターンにより異なる値を持つ。境界上の状態量の取りうる値の種類を考えると、数値流束は全部で１０種類の値をとることががわかる。

3.4 ２次精度化 (MUSCL 法)

Godunov スキームは空間 1 次精度であるため、MUSCL 法を使って空間 2 次精度にする。MUSCL 法では境界上での物理量 U を 2 点での値を使って内挿する。実際に使う際には内挿によって不連続面などで極大が生じないように制限関数 ϕ を用いて以下の式のように与える。

$$U^R_{j+\frac{1}{2}} = U_{j+1} - 0.5 * \phi(U_{j+2} - U_{j+1}, U_{j+1} - U_j) , \quad (3)$$

$$U^L_{j+\frac{1}{2}} = U_j + 0.5 * \phi(U_j - U_{j-1}, U_{j+1} - U_j) , \quad (4)$$

今研究では制限関数として minmod 関数を用いた。制限関数には、不連続面で 1 次精度に落とすという役割がある。

4 シミュレーション

テスト問題として 5 つの Riemann 初期値問題を計算した。初期状態として境界の左側の物理量を ρ_l, v_l, p_l で与え、右側の物理量を ρ_r, v_r, p_r で与えるとする。メッシュ数を 100 とし、$0.0 \leq x < 1.0$ で計算した。また、ϵ:単位質量あたりの全エネルギーである。以下の結果の図では赤の点が 2 次精度でのシミュレーション結果、緑の点が 1 次精度でのシミュレーション結果、青の直線が解析解を表している。

4.1 テスト計算結果

テスト計算の結果を順に見ていく。テスト問題 1(図 3) では x 軸の左から順に膨張波、接触不連続面、衝撃波が生じている。空間 1 次精度での計算より空間２次精度での計算のほうが衝撃波を鋭く捉えていることがわかる。テスト問題 2(図 4) では x 軸の左から順に膨張波、接触不連続面、膨張波が生じている。ϵ のグラフの中心付近ではシミュレーションの結果と解析解のずれが大きいが、これは中心付近での密度と圧力が非常に小さいため、密度と圧力の解析解からのずれが ϵ に大きく表れているからである。テスト問題 3(図 5) では x 軸の左から順に膨張波、接触不連続面、衝撃波が生じている。このテスト問題では強い衝撃波が生じているが、計算が破綻することなく計算できた。テスト問題 4(図 6) では x 軸の左から順に膨張波、接触不連続面、衝撃波が生じている。このテスト問題はテスト問題 3 の初期値に流れが追加された場合になっている。テスト問題 3 に比べ接触不連続面を鋭く捉えていることがわかる。テスト

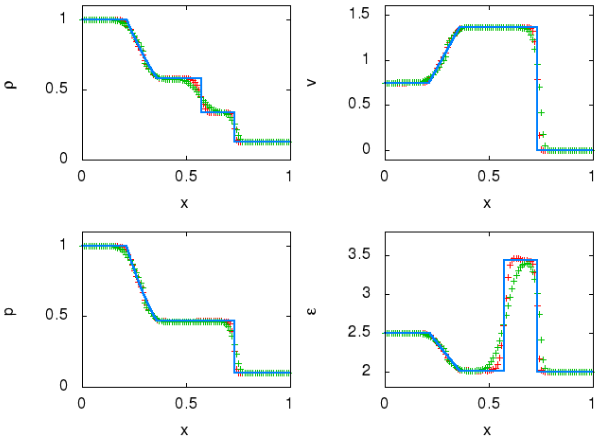

図 3: テスト 1 $\rho_l = 1.0, v_l = 0.75, p_l = 1.0, \rho_r = 0.125, v_r = 0.0, p_r = 0.1,$ 境界の位置:$x = 0.3$

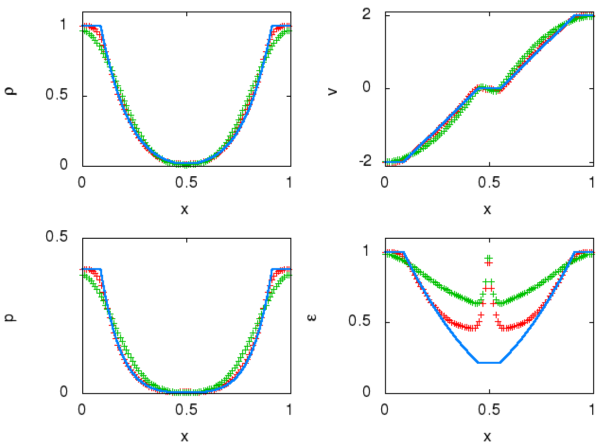

図 4: テスト 2 $\rho_l = 1.0, v_l = -2.0, p_l = 0.4, \rho_r = 1.0, v_r = 2.0, p_r = 0.4,$ 境界の位置:$x = 0.5$

問題 5(図 7) では x 軸の左から順に衝撃波、接触不連続面、衝撃波が生じている。p と ϵ の図で少し振動が生じている部分があるが、衝撃波を鋭く捉えることができている。

5 まとめと今後の研究

本研究では Godunov スキームを MUSCL 法により空間 2 次精度にしたコードを作成した。さらにいくつかのテスト計算を行うことによってコードの性能を評価した。今後の研究としては、現在の作成中のコードを 1 次元球対称に書き換え、そのコードを使って銀河風の解析解の安定性解析などを行いたいと考えている。

Reference

Godunov, S.K, *MathmaticheskiiSbornik* , 47,271-306 (1959).

藤井孝藏: 「流体力学の数値計算法」, 東京大学出版会 (1994)

坂下志郎 · 池内了:「宇宙流体力学」, 培風館 (1996)

Toro,E.F:Riemann solvers and Numerical Methods for FluidDynamics,A Practical Introduction,Third Edition, Springer. (2009).

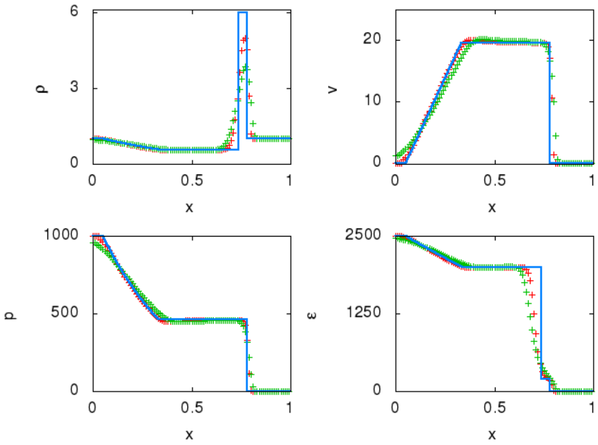

図 5: テスト 3　:$\rho_l = 1.0, v_l = 0.0, p_l = 1000.0, \rho_r = 1.0, v_r = 0.0, p_r = 0.01,$ 境界の位置:$x = 0.5$

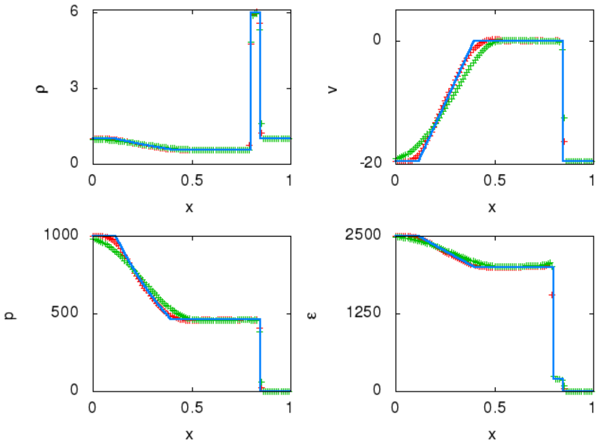

図 6: テスト 4　:$\rho_l = 1.0, v_l = -19.59745, p_l = 1000.0, \rho_r = 1.0, v_r = -19.59745, p_r = 0.01,$ 境界の位置:$x = 0.8$

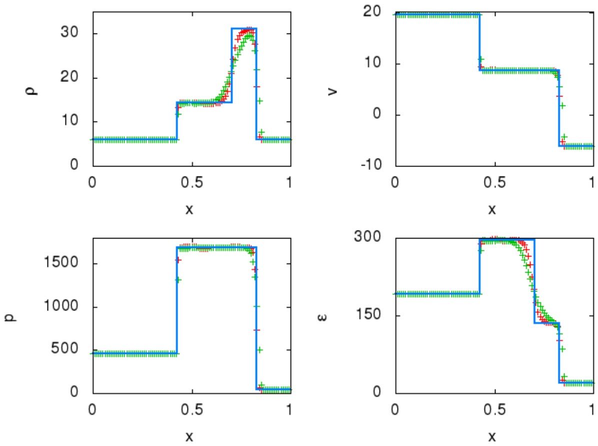

図 7: テスト 5:$\rho_l = 5.99924, v_l = 19.5975, p_l = 460.894, \rho_r = 5.99242, v_r = -6.19633, p_r = 46.0950,$ 境界の位置:$x = 0.4$