

## 相対論的アウトフローの輻射流体モデル

中田 めぐみ (日本大学大学院 理工学研究科)

### Abstract

活動銀河核やガンマ線バーストなど多くの天体現象で相対論的なアウトフロー（プラズマの噴出流）が存在することが知られている。アウトフローの加速機構は大きく分けて、ガス圧、輻射圧、磁気圧の勾配によるものが提唱されている。本研究では、ブラックホールなどの中心天体近傍から噴出するガスと輻射からなるアウトフローを輻射流体として考察をする。アウトフローの開き角が一定であると仮定し、光学的に厚い、球対称定常な流れを考える。中心天体がつくる重力場を Schwarzschild 時空で表現し、この時空中での一般相対論的流体力学方程式と輻射輸送モーメント方程式を解き、定常解を求めた。ガスの速度が光子気体の音速 ( $\beta = 1/\sqrt{3}$ ) になる臨界点を通過する加速解を求めるため、臨界点において内側と外側の解を滑らかに接続した。 $\gamma \sim 10$  程度のローレンツ因子が得られる解の具体例を示し、速度、圧力、光度、光学的厚さ、終端ローレンツ因子について考察する。

## 1 Introduction

銀河の中心部の非常に狭い領域から銀河全体を凌駕するような強い電磁波を放射する活動銀河核や、宇宙最大の爆発現象だといわれ強烈なガンマ線を放射するガンマ線バーストなどの天体現象がある。これらの中心天体から双方向に細く絞られたプラズマのアウトフローが存在することが知られている。アウトフローは観測より光速の 99% ( $\gamma = 10 \sim 100$ ) の相対論的速度で噴出していると推定されている。

## 2 Schwarzschild 時空

中心天体がつくる重力場を Schwarzschild 時空で表現し、この時空中での一般相対論的な輻射輸送方程式と流体力学方程式を求めると、

### 2.1 一般相対論的な輻射輸送方程式

輻射強度を  $I$ 、観測者と輻射との間の角度を  $\mu = \cos \theta$ 、輻射の立体角を  $\Omega$ 、輻射率 (emissivity) を  $j$ 、吸収係数を  $\kappa_{\text{abs}}$ 、散乱係数を  $\kappa_{\text{sca}}$  とすると、観測者系での輻射輸送方程式は

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \mu \frac{\partial I}{\partial z} = j - \kappa_{\text{abs}} I - \kappa_{\text{sca}} I + \frac{\kappa_{\text{sca}}}{4\pi} \int I d\Omega \quad (1)$$

と書ける。ただし、 $c$  は光速である。ここで、輻射エネルギー密度  $E$ 、輻射流束密度  $F$ 、輻射圧  $P$  はそれぞれ

$$cE = \int I d\Omega, \quad F = \int \mu I d\Omega, \quad cP = \int \mu^2 I d\Omega \quad (2)$$

を表し<sup>[4]</sup>。  $E, F, P$  の共動系への変換は

$$\begin{aligned} cE &= \gamma^2 (E_0 + 2\beta F_0 + \beta^2 P_0) \\ F &= \gamma^2 (\beta E_0 + (1 + 2\beta^2) F_0 + \beta P_0) \\ cP &= \gamma^2 (\beta^2 E_0 + 2\beta F_0 + P_0) \end{aligned} \quad (3)$$

である。下添え字 0 は共動座標系を表している。これらを用いて、(1) 式をガスの共動座標系に変換すると、輻射平衡の関係式は

$$j_0 = c\kappa_{\text{abs}} E_0 \quad (4)$$

となる。この平衡関係を用いた Schwarzschild 時空中の一般相対論的な輻射輸送方程式は

$$\begin{aligned} e^{-2\Lambda} \mu \frac{\partial I}{\partial r} + \left(1 - \frac{3r_g}{2r}\right) \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial I}{\partial \mu} - \frac{2r_g}{r^2} \mu I \\ = -e^{-\Lambda} \gamma \rho_b (\kappa_{\text{abs}} + \kappa_{\text{sca}}) (1 - \beta \mu) (I - S) \end{aligned} \quad (5)$$

となる<sup>[2][3]</sup>。ただし、Schwarzschild 計量は

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (6)$$

とし、 $e^{2\Phi} \equiv 1 - \frac{r_g}{r}$ 、 $e^{2\Lambda} \equiv \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}$ 、 $R(r, t) \equiv r$ 、 $r_g (\equiv 2GM/c^2)$  は Schwarzschild 半径、 $S$  はソース関数、 $\rho_b$  は静止エネルギー密度、 $\beta (= v/c)$  はガスの速度である。

## 2.2 輻射輸送モーメント方程式

次に、(5) 式の輻射輸送方程式の 0 次のモーメント方程式を求める。

$$e^{-2\Lambda} \frac{\partial F}{\partial r} + \left(1 - \frac{r_g}{2r}\right) \frac{2F}{r} = -e^{-\Lambda} \rho_b (\kappa_{\text{abs}} + \kappa_{\text{sca}}) A \quad (7)$$

同様に 1 次のモーメント方程式は

$$e^{-2\Lambda} \frac{\partial P}{\partial r} + \left(1 - \frac{3r_g}{2r}\right) \frac{3P - E}{r} + \frac{2r_g}{r^2} P = -e^{-\Lambda} \rho_b (\kappa_{\text{abs}} + \kappa_{\text{sca}}) B \quad (8)$$

となる。ここで、 $A$ 、 $B$  はそれぞれ

$$A = [\gamma(cE - \beta F) - \gamma^3(c^2 E^2 \beta F + \beta^2 cP)] \quad (9)$$

$$B = [\gamma(F - \beta cP) - \beta \gamma^3(c^2 E^2 \beta + \beta^2 cP)] \quad (10)$$

と置いた。以降、簡単のために  $c = 1$  とする。

## 2.3 一般相対論的流体力学方程式

ガスは理想流体とし、中心天体の重力を考慮するために一般相対論的流体力学方程式を扱う。このときのエネルギー運動量テンソルは

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P_g) u^\mu u^\nu + g^{\mu\nu} P_g \quad (11)$$

である。ここで、 $\rho$ 、 $P_g$  はそれぞれガスのエネルギー密度、圧力を表す。この保存則は以下ようになる。

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} T^{\mu\nu}) + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} T^{\lambda\nu} = 0 \quad (12)$$

とくに、エネルギー保存則と運動量保存則は

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r^2 (\rho + P_g) \Gamma^2 \beta] = 0 \quad (13)$$

$$\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dr} + \frac{1}{\rho + P_g} \frac{dP_g}{dr} = 0 \quad (14)$$

となる。ただし、 $\Gamma$  は

$$\Gamma \equiv \left( \frac{1 - \frac{r_g}{r}}{1 - \beta^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

と定義される量で、ローレンツ因子  $\gamma$  と  $\Gamma = (1 - \frac{r_g}{r})^{1/2} \gamma$  の関係がある。

## 3 輻射流体力学方程式

### 3.1 方程式の結合

質量保存則より、静止エネルギー密度は  $\rho_b = \rho + P_g$  となる。 $e_g$  は内部エネルギー密度を表す。ここで、ガスは非相対論的な温度だと仮定すると、 $e_b \ll \rho_b$  かつ  $P_g \ll \rho_b$  となる。ただし、 $\rho = \rho_b + e_g$  である。

次に、一般相対論的な形に書き直した輻射輸送モーメント方程式と流体力学方程式を結合する。4 元速度  $u (= \gamma\beta)$  の方程式は運動量保存則  $T^{1j}{}_{;j} = 0$  より

$$\left( \frac{u}{\gamma^2} - \frac{c_s^2}{u} \right) \frac{du}{dr} = \frac{2c_s^2}{r} - \frac{r_g}{2r^2} \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} + \frac{\kappa_{\text{abs}} + \kappa_{\text{sca}}}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\gamma} [F(1 + 2u^2) - (E + P)\gamma u] \quad (16)$$

と書ける。 $c_s$  は  $c_s^2 \equiv \left(\frac{\partial P_g}{\partial \rho}\right)$  で定義されるガスの音速である。また、輻射の圧力  $P$  の方程式は (8) 式より

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{1 - \frac{3r_g}{2r}}{1 - \frac{r_g}{r}} \frac{3P - E}{r} - \frac{2r_g}{r^2} \frac{P}{1 - \frac{r_g}{r}} + \frac{\rho_b (\kappa_{\text{abs}} + \kappa_{\text{sca}})}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{\frac{1}{2}}} \gamma [F(1 + 2u^2) - (E + P)\gamma u] \quad (17)$$

と書ける。また、輻射エネルギー流束と速度の関係はエネルギー保存則  $T^{0j}{}_{;j} = 0$  より

$$r^2 \left[ \rho_b \Gamma^2 \beta + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) F \right] = \text{const.} \quad (18)$$

となる。いま、光学的に厚い領域を考えているので、共動系において Eddington 近似  $E_0 = 3P_0$  が成り立つと仮定すると、閉包 (closure) 関係は

$$E = \frac{P \left(1 - \frac{1}{3}\beta^2\right) - \frac{4}{3}\beta F}{\frac{1}{3} - \beta^2} \quad (19)$$

となる。

次に、これらの式を Schwarzschild 半径  $r_g$  および Eddington 光度  $L_E$  を用いて書き直していく。 $\tilde{r} = r/r_g$ 、 $\tilde{P} = 4\pi r_g^2 P/L_E$ 、 $\tilde{E} = 4\pi r_g^2 E/L_E$ 、 $\tilde{M} = \dot{M}/L_E$  とおく。ただし、中心天体から球対称定常な流れに対する連続の方程式より質量損失率  $\dot{M}$  は

$$\dot{M} = 4\pi r^2 \rho u \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

である。また、吸収はなく散乱がトムソン散乱だとすると、 $(\kappa_{\text{abs}} + \kappa_{\text{sca}})\rho_b = \sigma_T n_e$  となる。 $\sigma_T$  は散乱断面積、 $n_e$  は電子数密度である。これらより、(16)～(19) 式は以下のように書き直すことができる。

$$\left(\frac{u}{\gamma^2} - \frac{c_s^2}{u}\right) \frac{du}{d\tilde{r}} = \frac{2c_s^2}{\tilde{r}} - \frac{1}{2\tilde{r}^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{\tilde{r}}} + \frac{1}{2\tilde{r}^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\tilde{r}}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\gamma} [\tilde{F}(1 + 2u^2) - (\tilde{E} + \tilde{P})\gamma u] \quad (21)$$

$$\frac{d\tilde{P}}{d\tilde{r}} = -\frac{1 - \frac{3}{2\tilde{r}}}{1 - \frac{1}{\tilde{r}}} \frac{3\tilde{P} - \tilde{E}}{\tilde{r}} - \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\tilde{P}}{1 - \frac{1}{\tilde{r}}} - \frac{1}{2\tilde{r} \left(1 - \frac{1}{\tilde{r}}\right)} \frac{\gamma}{u} [\tilde{F}(1 + 2u^2) - (\tilde{E} + \tilde{P})\gamma u] \quad (22)$$

$$\tilde{F} = \frac{\dot{M} \left[ \left(1 - \frac{1}{\tilde{r}_c}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{1}{\tilde{r}}\right)^{\frac{1}{2}} \right] + \tilde{r}_c^2 \tilde{F}_c \left(1 - \frac{1}{\tilde{r}_c}\right)}{\tilde{r}^2 \left(1 - \frac{1}{\tilde{r}}\right)} \quad (23)$$

$$\tilde{E} = \frac{\tilde{P} \left(1 - \frac{1}{3}\beta^2\right) - \frac{4}{3}\beta\tilde{F}}{\frac{1}{3} - \beta^2} \quad (24)$$

(24) 式は  $\beta = 1/\sqrt{3}$  のとき分母がゼロとなる。このとき分子もゼロとなる必要があり、 $\tilde{F} = 2\sqrt{3}/3\tilde{P}$  が成り立つ。この点は臨界点になっている。今回、中心天体近傍からの輻射流体について考えているので、この臨界点の内側と外側で方程式を滑らかに接続して解いていくことにより、定常解を求めていく。ここで、光学的厚さ  $\tau$  は以下のように定義した。

$$\begin{aligned} \tau &\equiv \int_r^\infty (\kappa_{\text{abs}} + \kappa_{\text{sca}}) \rho dr \\ &= 2\dot{M} \int_r^\infty \frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}^2 \left(1 - \frac{1}{\tilde{r}}\right)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (25)$$

### 3.2 境界条件

臨界点  $r_c$  の各パラメータについて考える。4 元速度は  $u_c = 1/\sqrt{2}$ 、ローレンツ因子は  $\gamma_c = \sqrt{3}/2$ 、圧力は  $\tilde{P}_c = \sqrt{3}\tilde{F}_c/2$  となり、輻射の速度と圧力の勾配は、

$$\frac{du_c}{d\tilde{r}} = \frac{\frac{2c_s^2}{\tilde{r}_c} - \frac{1}{2\tilde{r}_c^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{\tilde{r}_c}}}{\frac{u_c}{\gamma_c} - \frac{c_s^2}{u_c}} \quad (26)$$

$$\frac{d\tilde{P}_c}{d\tilde{r}} = -\frac{1 - \frac{3}{2\tilde{r}_c}}{1 - \frac{1}{\tilde{r}_c}} \frac{4\tilde{P}_c}{3\tilde{r}_c} - \frac{2}{\tilde{r}_c^2} \frac{\tilde{P}_c}{1 - \frac{1}{\tilde{r}_c}} \quad (27)$$

となる。ただし、下添え字  $c$  は臨界点を表す。また、Schwarzschild 半径  $r_g=1$  とする。臨界点での解の接続は次のように行った。臨界点の外側では  $r = (1+\epsilon)r_c$  から外向きに (21)～(24) 式を解き、内側では  $r = (1-\epsilon)r_c$  から内向きに (21)～(24) 式を解く。 $\epsilon = 0.0001$  とした。

## 4 Results and Discussion

今回の計算結果について例をあげて説明する。 $\beta = 1/\sqrt{3}$  になる臨界点の中心天体からの距離を  $r_c = 10$ 、質量損失率を  $\dot{M} = 100$  とし、このときの輻射エネルギー流束を  $\tilde{F}_c = 0.1$ 、ガスの音速を  $c_s = 0.3$  のとき、 $\tilde{F}_c = 0.1$ 、 $c_s = 0.5$  のとき、 $\tilde{F}_c = 1$ 、 $c_s = 0.5$  のときの輻射流体の 4 元速度  $u$ 、ローレンツ因子  $\gamma$ 、輻射の圧力  $\tilde{P}$ 、光度  $\tilde{L} = 4\pi\tilde{r}^2\tilde{F}$  は以下のような結果となった (図 1～13)。また、光学的厚さについては図 13 に示した。

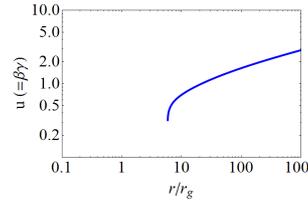


図 1 : 4 元速度  
( $c_s = 0.3$ ,  $\tilde{F}_c = 0.1$ )

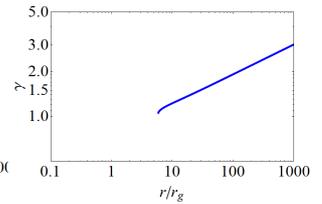


図 2 : ローレンツ因子  
( $c_s = 0.3$ ,  $\tilde{F}_c = 0.1$ )

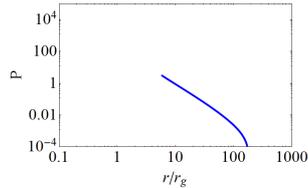


図 3 : 圧力  
( $c_s = 0.3$ ,  $\tilde{F}_c = 0.1$ )

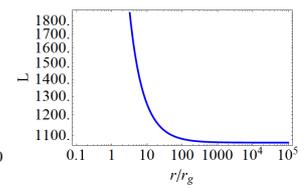


図 4 : 光度  
( $c_s = 0.3$ ,  $\tilde{F}_c = 0.1$ )

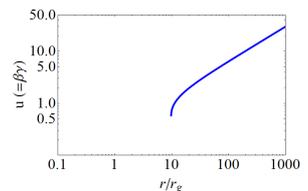


図 5 : 4 元速度  
( $c_s = 0.5$ ,  $\tilde{F}_c = 0.1$ )

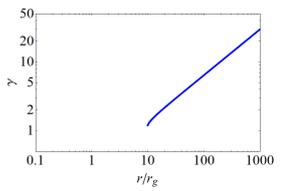


図 6 : ローレンツ因子  
( $c_s = 0.5$ ,  $\tilde{F}_c = 0.1$ )

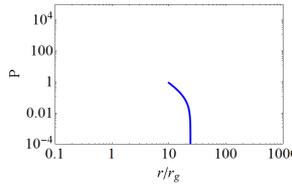


図 7 : 圧力

( $c_s = 0.5, \tilde{F}_c = 0.1$ )

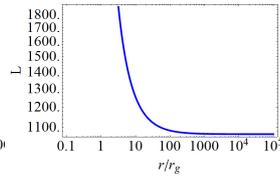


図 8 : 光度

( $c_s = 0.5, \tilde{F}_c = 0.1$ )

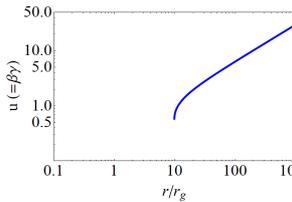


図 9 : 4 元速度

( $c_s = 0.3, \tilde{F}_c = 1$ )

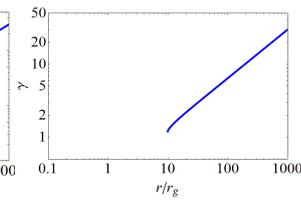


図 10 : ローレンツ因子

( $c_s = 0.3, \tilde{F}_c = 1$ )

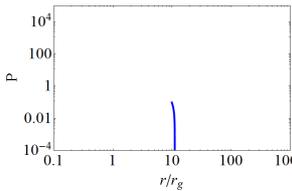


図 11 : 圧力

( $c_s = 0.3, \tilde{F}_c = 1$ )

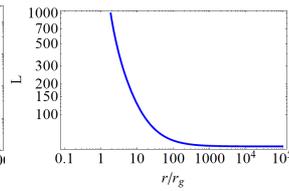


図 12 : 光度

( $c_s = 0.3, \tilde{F}_c = 1$ )

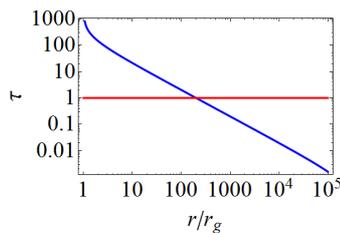


図 13 : 光学的厚さ ( $\tilde{M} = 100$ )

図 13 の光学的厚さより、 $\tau \geq 1$  の領域が光学的に厚いといえるので、この場合  $\tilde{r} \leq 200.3$  となる領域に着目するべきである。ガスの音速  $c_s$  が小さい値だとあまり加速されず、終端ローレンツ因子  $\gamma_\infty$  は大きな値をとることができない (図 2)。これは、臨界点  $r_c$  の付近では (21) 式の輻射流体力学方程式の加速項である  $2c_s^2/\tilde{r}$  と負の項の重力のみがそれぞれ加

速および減速に寄与するためである。つまり、ガスの音速が大きければ加速しやすいことを意味している。また、音速  $c_s$  が大きいことは、ガスが高温であることを意味する。ここで、(23) 式の中心天体からの距離  $\tilde{r}$  が大きいときを考えることにより、終端ローレンツ因子の近似が求められる。

$$\gamma_\infty \approx \left(1 - \frac{1}{\tilde{r}_c}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\tilde{r}_c^2 \tilde{F}_c \left(1 - \frac{1}{\tilde{r}_c}\right)}{\tilde{M}} \quad (28)$$

また、輻射の圧力  $P$  については、ガスの音速  $c_s$  が大きいときは急激に減少することがわかる (図 3,7,11)。そして、光度については、ガスの音速  $c_s$  にはそれほど影響されず、輻射エネルギー流束  $\tilde{F}$  と質量損失率  $\tilde{M}$  に依存して変化する。

## 5 Conclusions

Schwarzschild 時空中での輻射流体方程式を、速度  $\beta = 1/\sqrt{3}$  となる臨界点の内側と外側の解を滑らかに接続することによって解き、中心天体近傍から放出される輻射流体モデルを用いた相対論的アウトフローの球対称定常解を求めた。今回、ガスの音速  $c_s$ 、臨界点の  $r_c$ 、臨界点での輻射エネルギー流束  $\tilde{F}_c$ 、質量損失率  $\tilde{M}$  の値を変化させることにより、終端ローレンツ因子  $\gamma_\infty$  が 10 程度になる解を具体的に示した。そして、その終端ローレンツ因子  $\gamma_\infty$  は (28) 式で与えられる。また、臨界点付近での速度勾配は、ガスの音速  $c_s$  と重力のみがそれぞれ加速および減速に寄与をするため、相対論的な加速を満たすためには臨界点付近での音速  $c_s$  は大きく、ガスは高温である必要がある。

最後に、速度  $\beta = 1/\sqrt{3}$  となる臨界点よりも中心天体に近い内部の領域にあるガスの音速  $c_s$  でも臨界点が存在している。この点についても同様に臨界点の内側と外側で滑らかに接続することにより、光学的に厚い領域での加速について解くことが今後の課題である。

## References

- [1] Akizuki and Fukue. 2009. PASJ, 61, 543
- [2] Lindquist, R. W., 1966, Ann. Phys., 37, 487
- [3] Mihalas, D., 1980, ApJ, 237, 574
- [4] Rybicki, G. B. and Lightman, A. P. 1979, Radiative Processes in Astrophysics, Wiley-VCH, 1985