

ブラックホール周辺における時間の遅れの検出

藤田 麻希子 (日本大学大学院 理工学研究科)

Abstract

ブラックホールに自由落下する物体の運動や、そこから放射される光の赤方偏移については解析的に求められるが、観測データと直接比較出来るような角運動量を持った物体の落下運動を解析的に解くのは困難である。そこで本研究では、観測データと直接比較出来るような角運動量をブラックホールに落ちていくガスの運動方程式に与えて時間の遅れを計算し、観測データと比較する事を目的としている。具体的には、様々な角運動量を持つガスの運動を数値計算で求め、その場その場で発せられる黒体放射の分布を求める。これより、実際どれ程の時間で X 線が可視光領域、電波領域まで赤方偏移するか知ることが出来る。今回は、時間が遅れる原因として重力赤方偏移のみを考慮しているが、運動による特殊相対論効果もあるので、今後取り入れていく。また観測との比較は、ブラックホール近傍で発せられた X 線の観測データを用いて行う。現在、数値計算を行うプログラムを作成し、計算を行っている。今後は、X 線観測衛星によって得られた観測データも解析し、計算結果と比較する予定である。

1 研究目的

光源がブラックホールに落ちていく時、時間が遅れているように見える。本研究では、光源の落ちていく時間と位置の関係を調べ、各位置においての波長の伸びを計算することによって、この現象を定量的に確認する。ここでは、運動の効果は考慮しない。また、時間は実際のタイムスケール [s] で調べる。最終的に、ブラックホール周辺の観測結果と比較して実証するのが目的である。

2 シュバルツシルド解

カール・シュバルツシルドは真空中を想定して、重力場を記述するアインシュタイン方程式を解いた。その解をシュバルツシルド解と呼び、次式のように表す。(この章での式展開は [1] を参照してまとめた。)

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (1)$$

ds は 4 次元距離、 G は重力定数、 M は天体の質量、 c は光速、 r は天体からの距離を表している。このシュバルツシルド解は、天体から距離 r での 4 次元距離を無限遠で測った量を表している。距離 r で固定され

ている光源ではシュバルツシルド解の dr , $d\theta$, $d\phi$ は 0 より、

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 \quad (2)$$

が求められる。 $ds^2 = -c^2 d\tau^2$ と定義される固有時間 τ を用いると、

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} dt \quad (3)$$

となる。これより $r = \frac{2GM}{c^2}$ のとき、有限の $d\tau$ に対して無限遠での時間 dt が無限大となることが分かる。そのときの r をシュバルツシルド半径 r_s と呼ぶ。この半径がブラックホールの半径である。

3 ガスの運動

3.1 古典力学

ガスの持つ全エネルギーを E とすると、エネルギーの保存則より

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} + \frac{l^2}{2mr^2} = E \quad (4)$$

である。ここで、 m はガスの質量である。これより、古典力学におけるガスの運動の方程式は

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E + \frac{GMm}{r} - \frac{l^2}{2mr^2} \right)} \quad (5)$$

と表される。

3.2 相対論効果を考慮する場合

位置と時間の関係式を求めるには、オイラー・ラグランジュ方程式が必要である。この方程式を求める為に、まずシュバルツシルド解についてのラグランジアンを求める。(この節での式展開は [1][2] を参照してまとめた。) ラグランジアンは次のように表せる。

$$L = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \quad (6)$$

今はシュバルツシルド解でのガスの運動を考えているので、この場合のラグランジアンは、

$$L = \frac{1}{2} \left[- \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right] \quad (7)$$

である。ただし、ここで \dot{t} は

$$\dot{t} \equiv \frac{dt}{d\lambda} = p^t, \quad \lambda = \frac{\tau}{m}$$

である。 \dot{r} , $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$ も同様に定義する。次にこのラグランジアンを使って各成分について次式のオイラー・ラグランジュ方程式で解いていく。

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} \right) = 0 \quad (8)$$

すると、 θ, ϕ, t 成分はそれぞれ次のようになる。

$$\frac{d}{d\lambda} (r^2 \dot{\theta}) = r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \quad (9)$$

$$\frac{d}{d\lambda} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0 \quad (10)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left[\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c \dot{t} \right] = 0 \quad (11)$$

r 成分は、直接計算する代わりに次式を用いる。([2] 参照)

$$g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = -m^2 c^2 \quad (12)$$

ここで、粒子が赤道面 ($\theta = \frac{\pi}{2}, \dot{\theta} = 0$) での運動を考える。まず、式 (10) について考える。 $\sin \frac{\pi}{2} = 0$ なので、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} (r^2 \dot{\phi}) &= 0 \\ r^2 \dot{\phi} &= \text{constant} \equiv l \end{aligned} \quad (13)$$

となる。また式 (11) は、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left[\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \dot{t} \right] &= 0 \\ \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \dot{t} &= \text{constant} \equiv E \end{aligned} \quad (14)$$

となる。ここでは、質量が 0 でない場合を考えているので、エネルギーと角運動量を次のように定義する。

$$\tilde{E} = \frac{E}{m}, \quad \tilde{l} = \frac{l}{m} \quad (15)$$

つまり、 \tilde{E} , \tilde{l} はそれぞれ単位質量のエネルギーと角運動量である。ここで、 $\lambda = \tau/m$ を用いて式 (12) ~ (14) を表すと、それぞれ次のようになる。

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = \left(\frac{\tilde{E}}{c} \right)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \left(c^2 + \frac{\tilde{l}^2}{r^2} \right) \quad (16)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\tilde{l}}{r^2} \quad (17)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\tilde{E}}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \quad (18)$$

ガスが角運動量を持ち、回転運動をする場合は式 (16) を使って数値計算をする。また、回転運動しない自由落下する場合は $\tilde{l} = 0$ となる。よって、式 (17) は 0 となり式 (16) は、

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 &= \left(\frac{\tilde{E}}{c} \right)^2 - \left(c^2 - \frac{2GM}{r} \right) \\ \frac{dr}{d\tau} &= - \left\{ \left(\frac{\tilde{E}}{c} \right)^2 - c^2 + \frac{2GM}{r} \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (19)$$

となる。ここで、 $c = G = 1$ とし、 $\tilde{E} < 1$ の場合を考えると、 $1 - \tilde{E}^2 = \frac{2M}{R}$ とできる。([1] 参照) これより、式 (19) を書き換えると、

$$\frac{dr}{d\tau} = - \left(-\frac{2M}{R} + \frac{2M}{r} \right)^{1/2} \quad (20)$$

となる. 式 (20) をさらに積分すると次のようになる.

$$\tau = \left(\frac{R^3}{8M}\right)^{1/2} \left[2 \left(\frac{r}{R} - \frac{r^2}{R^2}\right)^{1/2} + \cos^{-1} \left(\frac{2r}{R} - 1\right) \right] \quad (21)$$

また, 式 (18) を積分すると次のようになる.

$$\frac{t}{2M} = \ln \left| \frac{\left(\frac{R}{2M} - 1\right)^{1/2} + \tan \eta/2}{\left(\frac{R}{2M} - 1\right)^{1/2} - \tan \eta/2} \right| + \left(\frac{R}{2M} - 1\right)^{1/2} \left[\eta + \frac{R}{4M} (\eta + \sin \eta) \right] \quad (22)$$

ただし, $\eta = \cos^{-1}(2r/R - 1)$ である. 式 (21)(22) は共に R から自由落下させた時の場所と時間の解析的な関係である. 式 (21) は観測者がガスと共に落ちながら観測している場合の式で, 式 (22) は無限遠から観測している場合の式である.

4 重力赤方偏移

4.1 黒体放射

落ちていくガスは黒体放射するので各位置での黒体放射の強度を計算すれば, 赤方偏移していることが分かる. 一般的な黒体放射の式は,

$$B(T, \nu) = \frac{2h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (23)$$

ただし, $B(T, \nu)$ は黒体放射強度 [$\text{J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-1}$] で, ν は振動数 [Hz] である.

4.2 重力赤方偏移

今回は, ガスが角運動量なしでブラックホールに落ちていく場合のみ考えた. ガスと一緒に落ちている観測者の固有時間 τ と無限遠の観測者の時間 t の関係式 (3) より, 固有時間 τ の方が時間が経つのが遅いのが分かる. 単位時間が伸びると振動数は減り, 波長は伸びる. これにより, 赤方偏移が起きる. 反対に観測で赤方偏移が確認されれば, そこでは時間が遅れているということになる. よって, まずガスが $3r_s$ から r_s の間で光を発する時の振動数の時間変化を調べる.

$t = 0$ で発せられた光の振動数の時間変化を求める為に次の事実を用いた. ([1] 参照)

$$\nu_{rec} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_{em}}\right)^{1/2} \nu_{em} \quad (24)$$

ν_{rec} は受信した時の振動数で, ν_{em}, r_{em} は発せられた時の振動数と半径である. 初期値を式 (23) で求め, 式 (24) で計算していく. r と t の関係は式 (22) で求められているので, 振動数の時間変化が計算できる.

温度が $T = 10^7 [\text{K}]$ のときの黒体放射の時間変化を図 1 に示した. X 線が発せられてから, およそ 3ms 後には黒体放射のピークが電波領域に達している. つまり波長が伸び, 赤方偏移が起きている. よって, 時間が遅れているということになる.

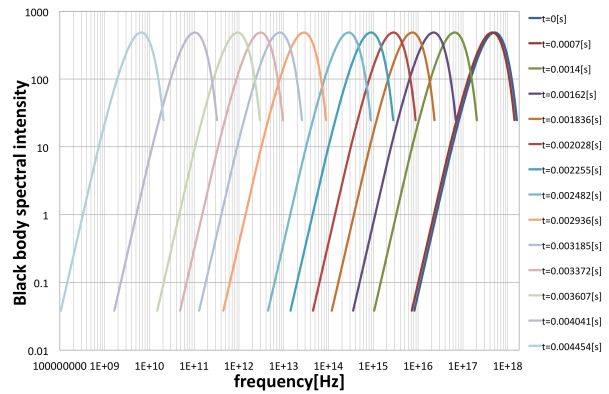


図 1: 黒体放射の時間変化 ($T = 10^7 [\text{K}]$, 振動数の電波領域: $\sim 10^{13} [\text{Hz}]$, 赤外線領域: $10^{13} \sim 10^{14} [\text{Hz}]$, 可視光領域: $10^{14} \sim 10^{15} [\text{Hz}]$, 紫外線領域: $10^{15} \sim 10^{16} [\text{Hz}]$, X 線領域: $10^{16} \sim 10^{19} [\text{Hz}]$)

5 計算

5.1 ルンゲ・クッタ法

ガスの運動の数値計算では, ルンゲ・クッタ法を用いた. ルンゲ・クッタ法とはオイラー法を発展させた数値計算法で, 傾きを 4 ステップの平均として計算する方法である. 刻み幅を h として, 一般的には次式

で計算していく.

$$\begin{aligned}
 f(t_i, r_i) &= \frac{dr}{dt} \\
 t_{i+1} &= t_i + h \\
 k_1 &= h \cdot f(t_i, r_i) \\
 k_2 &= h \cdot f\left(t_i + \frac{1}{2}h, r_i + \frac{1}{2}k_1\right) \\
 k_3 &= h \cdot f\left(t_i + \frac{1}{2}h, r_i + \frac{1}{2}k_2\right) \\
 k_4 &= h \cdot f(t_i + h, r_i + k_3) \\
 r_{i+1} &= r_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
 \end{aligned} \tag{25}$$

5.2 数値計算

今回は, 相対論効果を考慮した角運動量なしの場合を計算した. ブラックホールの質量は太陽質量の 10 倍 ($2.0 \times 10^{33} \text{g}$) とする. まず, 観測者がガスと共に落ちながら観測している場合で数値計算をする. 比較の為に式 (21) の解析解を用いる. 数値計算は, 刻み幅 $h = 10^{-8} \text{[s]}$ として, $r = 5.9999999999999999M$ からブラックホールへ落ちる場合を式 (20) で計算する. ($\tau = 0$ の時 $r = R = 6M$ とする.) その計算結果をグラフにしたものと解析解のグラフを比較したものが図 2 である. 計算する時は, M に G/c^2 を掛けている.

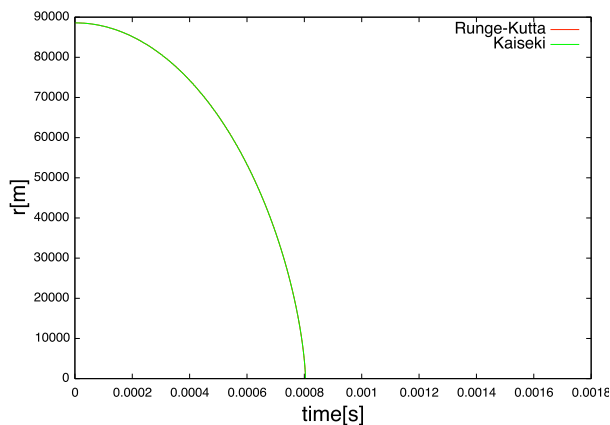


図 2: 観測者がガスと共に落ちながらガスを観測している場合の数値解 (赤) と解析解 (緑)

次に, 刻み幅と r の始点は同じで, ブラックホールへ落ちていくガスを無限遠方で観測した場合で数値計

算する. この場合に用いる関係式は式 (18) と式 (19), 式 (25) より式 (26) となる. 比較する解析解は式 (22) である. その計算結果をグラフにしたものと解析解のグラフを比較したものが図 3 である.

$$f(t, r) = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{\frac{2M}{r} - \frac{2M}{R}}{1 - \frac{2M}{R}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{26}$$

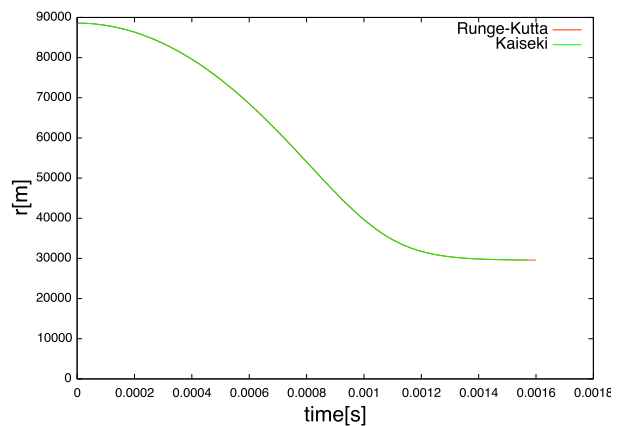


図 3: ブラックホールへ落ちていくガスを無限遠方で観測した場合の数値解 (赤) と解析解 (緑)

図 2, 3 の数値計算と解析解との誤差はそれぞれおよそ 0.04[%] と 0.16[%] あり, ほぼ一致したことが分かった. 数値計算が解析解とほぼ一致することが分かったので, 今後はこのプログラムを使って角運動量ありの場合も計算していく予定である.

6 今後の課題

今後は, 数値計算を行うプログラムで正確な計算を行い, X 線観測衛星から得られた観測データも解析し, 計算結果と比較する予定である.

7 参考文献

[1] Stuart L.Shapiro,Saul A.Teukolsky(1983) 『Black Holes,White Dwarfs, and Neutron Stars』 WILEY-VCH
 [2] 佐藤文隆 (1981) 『相対論と宇宙論』 サイエンス社