

SPH 法の自由表面と接触不連続面への対応

山本 智子 (東京工業大学大学院 理工学研究科 地球惑星科学専攻)

概要

Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) 法とは数値流体力学における計算手法の一つであり、これまで主に天文学や惑星科学の分野において幅広く用いられてきた。しかしながら、SPH 法には自由表面や接触不連続面の存在する様な問題を解く際、適切な計算ができていないという問題が知られていた。この問題を解決するため、これまで様々な改良が SPH 法に加えられてきた。しかしながら、これまでのところ、両問題を同時に解決するような SPH 法の改良は、存在していない。そこで本研究では接触不連続で発生する問題を解消する SPH 法を開発し、それと Monaghan が 1994 年に開発した自由表面で発生する問題をある程度解消した SPH 法と組み合わせることによって、両問題を同時に解決する SPH 法を開発した。

1 はじめに

Smoothed Particle Hydrodynamics (以下 SPH) 法 [Monaghan. (1992)] は天文学や惑星科学の分野で様々な場面に用いられている流体計算手法である。しかし SPH 法は自由表面や接触不連続面の存在する系の計算において適切な計算ができないという問題が知られている。ところが、天文学や惑星科学において自由表面や接触不連続面を伴うような現象は多々存在する。実際に、ジャイアントインパクトなどは過去、数値計算がされてきたが、接触不連続面や自由表面を伴う。そのため、これらの問題を解決した SPH 法は天文学や惑星科学において有用な手法となる。そこで本研究では Monaghan が 1994 年に開発した自由表面への問題をある程度解消した SPH 法である、連続の式を陽に解く SPH 法 (以下 M94SPH 法 [Monaghan. (1994)] と組み合わせ可能な、接触不連続面の問題も解消しうる SPH 法を開発し、それらを組み合わせる事によって両問題を同時に解消する SPH 法を開発する。

(以下 SSPH 法) では流体粒子 i の密度 ρ_i を計算する際に以下の式を用いる。

$$\rho_i = \sum_j m_j W_{ij} \quad (1)$$

ここで m_i は粒子の質量、 W_{ij} は重み関数に相当する。ここで、(1) 式は密度を滑らかに表現している事に注意しよう。そのため、本来密度が不連続な、接触不連続面や、自由表面などでは密度に大きな推定誤差が生じる。さらに、SSPH 法では、この密度の連続性を要請して流体の基礎方程式を定式化するため、自由表面や接触不連続面を計算する際に矛盾が生じ、非物理的な力が働く。そこで本研究では接触不連続面での問題を解決するため、接触不連続面において連続で、密度に対応する量 ρ^* を導入し、それを用いて SPH 法を定式化し直す。このとき質量に対応する量 m^* の導入も行う。ここで m^*, ρ^* の関係は $m/\rho = m^*/\rho^*$ となる。 m^*, ρ^* を用いて密度に対応する量は以下の通りに表す事ができる。

$$\rho_i^* = \sum_j m_j^* W_{ij} \quad (2)$$

2 SPH 法の問題点と改良方法

SPH 法では流体を流体粒子の集まりとみなす。また、流体粒子の持つ物理量を、他の流体粒子の物理量に重み関数をかけ、足し合わせる事によって流体としての物理量を表現する。特に、標準的な SPH 法

ここで接触不連続面において連続性を要請される物理量は ρ^* であるが、今、 ρ^* は連続な量としているため矛盾の無い結果が得られる。ただし、 m^* は時間的に一定とするため、本方法が適応可能なのは不連続面前後の密度比がほぼ一定の場合に限られる。一方、(2) 式から $\rho^* \neq 0$ であるため、自由表面にお

いて ρ^* が不連続になる。したがって、このままでは自由表面における問題が残る。そこで次に自由表面での問題をある程度解消した M94SPH 法と組み合わせる事を考える。まず M94SPH 法では、密度の導出の際に (1) 式を用いるのではなく、連続の式を定式化して得られる、以下の式を用いている。

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \sum_j m_j (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) W_{ij} \quad (3)$$

ここで \mathbf{v}_i は粒子 i の速度である。

(1) 式および (2) 式を用いて密度を評価すると、自由表面においては密度の連続性が要請されることになる。しかし、(3) 式では \mathbf{v} の空間連続性が要請される事が分かる。例えば静水圧平衡にある自由表面では $\mathbf{v} = 0$ となり、自由表面において \mathbf{v} は連続である。したがって、(3) 式を用いる事で、静水圧平衡下にある自由表面において適切な結果が得られる事が分かる。

よってこれらを組み合わせ、本研究では ρ^* の導出の代わりに以下の式を用いることにする。

$$\frac{d\rho_i^*}{dt} = \sum_j m_j^* (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) W_{ij} \quad (4)$$

3 結果

自由表面に関しては静水圧平衡の実験、接触不連続面に関してはケルビン・ヘルムホルツ不安定のテストを行い、各々の問題が解決されていることを確認した。

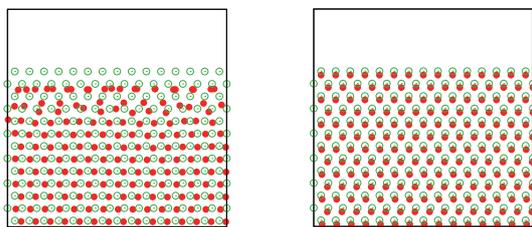


図 1: 静水圧平衡:左図は SSPH 法、右図は本研究の SPH 法によるもの。緑色の○が静水圧平衡状態の流体粒子。赤い○が十分時間が経った後の流体粒子。

図 1 は、各々の SPH 法を用いて、自由表面を持ち静水圧平衡にある流体の挙動を計算したものである。

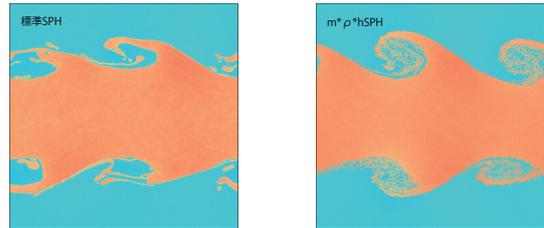


図 2: ケルビンヘルムホルツ不安定:左図は SSPH 法、右図は本研究の SPH 法によるもの。

理想的には初期に静水圧平衡にある流体は、十分に時間が絶った後も初期の静水圧平衡の状態を維持するはずである。しかし、SSPH 法では自由表面において流体粒子が静水圧平衡からずれてしまっている事が分かる。(図 1、左) 一方、本研究で開発された SPH 法では自由表面においても静水圧平衡を保ち続けることができている。(図 1、右) これは (2) 式を解くのではなく、(4) 式を解き、 ρ^* の導出を行っているためである。

図 2 は、各々の SPH 法を用いて、ケルビン・ヘルムホルツ不安定の計算を行った結果である。SSPH 法では、流体の分裂が起きたり、ロールが起これないなど、適切に計算できていない事がわかる。(図 2、左) しかし、本研究での SPH 法では適切な計算ができている事が分かる。(図 1、右) これは接触不連続面において、不連続な量である密度 ρ ではなく、連続な量 ρ^* の連続性を要請しているためである。

4 まとめ

以上より本研究で開発した SPH 法では、とくに密度がほぼ一定であるような状況に対して、従来の SPH 法では正しく扱うことができていなかった自由表面と接触不連続面の扱いを、両方同時に解決できている事が分かる。

しかし、課題はまだ残っている。一つは M94SPH 法が密度がほぼ一定の場合にしか適応できないことである。また、もう一つの課題は接触不連続面において、不連続面前後の流体の密度比がほぼ一定の場合にしか適応できないことである。よって天文学や惑星科学において有益な手法となるように、これらの課題を解決し大きく密度変化する場合にも対応可

2013 年度 第 43 回 天文・天体物理若手夏の学校

能な SPH 法を開発することが今後の研究の課題である。

参考文献

Monaghan, J. J. 1992, *ARA&A*, **30**, 543

Monaghan, J. J. 1994, *Journal of Computational Physics*, **110**, 399