

# 最も一般的なスカラーテンソル理論における 宇宙論的密度揺らぎのバイスペクトル

宅 嶋 祐 一 郎 ( 広 島 大 学 大 学 院 理 学 研 究 科 )

## Abstract

最も一般的なスカラーテンソル理論における宇宙論的密度揺らぎのバイスペクトルを計算した。これは宇宙論的密度揺らぎの 2 次のカーネルを用いて計算される。本集録ではその導出方法を紹介する。

## 1 Introduction

Ia 型超新星の観測から、宇宙は加速膨張をしていることが示された。加速膨張を説明する手段の 1 つとして、一般相対性理論のアインシュタイン方程式に宇宙項を導入した  $\Lambda$ CDM モデルが存在する。このモデルは観測とほぼ合っているが、宇宙項のエネルギー密度が量子論で理論的に予測される値に対して非常に小さいという宇宙項問題が存在し、未だ解決されていない。加速膨張を説明する別の手段として、一般相対論を長距離スケールで修正する修正重力理論が研究されている。修正重力理論にはスカラー場の自己相互作用項  $(\nabla\phi)^2\Box\phi$  を導入する Galileon 重力理論やアインシュタイン・ヒルベルト項をリッチスカラー  $R$  の一般的な関数  $f(R)$  によって置き換える  $f(R)$  重力理論、グラビトンに質量を持たせることで重力を修正する Massive Gravity などが考えられている。この他にも修正重力理論には多くのモデルが存在し、重力理論の検証が重要な課題となっている。宇宙の大規模構造の進化は修正重力理論の制限の一つとなる。本研究では、初期にはガウス分布に従う宇宙論的密度揺らぎが現在どれくらいガウス分布からずれているのかを調べ、修正重力理論の特徴がどのように現れるかを明らかにした。

多くの修正重力理論を包括する理論として、最も一般的なスカラーテンソル理論と呼ばれる理論がある。これは宇宙の加速膨張を説明するとともに Vainshtein 機構により、太陽系スケールの重力のテストをパスできる可能性があり、また運動方程式が 2 階になる理論である。この理論において、宇宙論的密度揺らぎの進化の過程で生じるバイスペクトルの一般的な

表式について調べた。摂動理論の手法を用いることでバイスペクトルの表式が得られた。

本集録では、2 章でバイスペクトルを求める計算する際に必要な宇宙論的密度揺らぎの 2 次のカーネルを求める方法を紹介し、3 章でバイスペクトルを求める。そして最後に 4 章で結論を述べる。

## 2 Formulation

最も一般的なスカラーテンソル理論の作用は以下で与えられる。

$$\begin{aligned}
 S &= \int d^4x \sqrt{-g} (\mathcal{L}_{\text{GG}} + \mathcal{L}_{\text{m}}), \\
 \mathcal{L}_{\text{GG}} &= K(\phi, X) - G_3(\phi, X)\Box\phi \\
 &\quad + G_4(\phi, X)R + G_{4X} [(\Box\phi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2] \\
 &\quad + G_5(\phi, X)G_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu\phi - \frac{1}{6}G_{5X} [(\Box\phi)^3 \\
 &\quad \quad - 3\Box\phi(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2 + 2(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^3]
 \end{aligned} \tag{1}$$

$K, G_3, G_4, G_5$  は  $\phi$  と  $X := -(\partial\phi)^2/2$  の任意関数であり、 $G_{iX}$  は  $\partial G_i/\partial X$  を意味する。

計量はニュートニアンゲージ

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + a^2(1 - 2\Psi)d\mathbf{x}^2, \tag{3}$$

にとる。ここでスカラー場の摂動を

$$\phi \rightarrow \phi(t) + \delta\phi(t, \mathbf{x}), \tag{4}$$

とし、物理量  $Q$  を以下で定義する。

$$Q := H \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}}. \tag{5}$$

宇宙論的密度揺らぎを  $\delta(t, \mathbf{x})$  とすると、オイラー方程式、連続の方程式は以下のように書ける。

$$\frac{\partial \delta(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \frac{1}{a} \partial_i [(1 + \delta(t, \mathbf{x})) u^i(t, \mathbf{x})] = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial u^i(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} u^i(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{a} u^j(t, \mathbf{x}) \partial_j u^i(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{a} \partial_i \Phi(t, \mathbf{x}) \quad (7)$$

また、[2] で膨張宇宙バックグラウンドの場合における重力とスカラー場の方程式はサブホライズン近似を用いて、以下のように与えられている。

$$\nabla^2 (\mathcal{F}_T \Psi - \mathcal{G}_T \Phi - A_1 Q) = \frac{B_1}{2a^2 H^2} Q^{(2)} + \frac{B_3}{a^2 H^2} (\nabla^2 \Phi \nabla^2 Q - \partial_i \partial_j \Phi \partial^i \partial^j Q) \quad (8)$$

$$\mathcal{G}_T \nabla^2 \Psi = \frac{a^2}{2} \rho_m \delta - A_2 \nabla^2 Q - \frac{B_2}{2a^2 H^2} Q^{(2)} - \frac{B_3}{a^2 H^2} (\nabla^2 \Psi \nabla^2 Q - \partial_i \partial_j \Psi \partial^i \partial^j Q) - \frac{C_1}{3a^4 H^4} Q^{(3)} \quad (9)$$

$$A_0 \nabla^2 Q - A_1 \nabla^2 \Psi - A_2 \nabla^2 \Phi + \frac{B_0}{a^2 H^2} Q^{(2)} - \frac{B_1}{a^2 H^2} (\nabla^2 \Psi \nabla^2 Q - \partial_i \partial_j \Psi \partial^i \partial^j Q) - \frac{B_2}{a^2 H^2} (\nabla^2 \Phi \nabla^2 Q - \partial_i \partial_j \Phi \partial^i \partial^j Q) - \frac{B_3}{a^2 H^2} (\nabla^2 \Phi \nabla^2 \Psi - \partial_i \partial_j \Phi \partial^i \partial^j \Psi) - \frac{C_0}{a^4 H^4} Q^{(3)} - \frac{C_1}{a^4 H^4} \mathcal{U}^{(3)} = 0 \quad (10)$$

ここで

$$Q^{(2)} := (\nabla^2 Q)^2 - (\partial_i \partial_j Q)^2 \quad (11)$$

$$Q^{(3)} := (\nabla^2 Q)^3 - 3 \nabla^2 Q (\partial_i \partial_j Q)^2 + 2 (\partial_i \partial_j Q)^3 \quad (12)$$

$$\mathcal{U}^{(3)} := Q^{(2)} \nabla^2 \Phi - 2 \nabla^2 Q \partial_i \partial_j Q \partial^i \partial^j \Phi + 2 \partial_i \partial_j Q \partial^j \partial^k Q \partial_k \partial^i \Phi. \quad (13)$$

とし、 $\mathcal{F}_T, A_1, B_1, \dots$  のような係数は [2] と同じ定義を用いた。ここで  $A_i, B_j, C_k$  は計量もしくはスカラー

場の摂動である  $\Phi, \Psi, Q$  のそれぞれ 1 次、2 次、3 次の係数である。

次に 5 つの物理量  $\delta, u, \Phi, \Psi, Q$  を以下のようにフーリエ変換する。

$$\delta(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k \delta(t, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (14)$$

$$u^j(t, \mathbf{x}) = \frac{-1}{(2\pi)^3} \int d^3 k \frac{ik^j}{k^2} a H \theta(t, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (15)$$

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k \Phi(t, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (16)$$

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k \Psi(t, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (17)$$

$$Q(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k Q(t, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (18)$$

またこれらと係数を以下のように時間のベキで展開する。

$$\delta(t, \mathbf{p}) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n(\mathbf{p}) \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}\epsilon n}, \quad (19)$$

$$\theta(t, \mathbf{p}) = - \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(\mathbf{p}) \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}\epsilon n}, \quad (20)$$

$$\Psi(t, \mathbf{p}) = -p^{-2} a^2 H^2 \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(\mathbf{p}) \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}\epsilon n} \quad (21)$$

$$\Phi(t, \mathbf{p}) = -p^{-2} a^2 H^2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\mathbf{p}) \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}\epsilon n} \quad (22)$$

$$Q(t, \mathbf{p}) = -p^{-2} a^2 H^2 \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(\mathbf{p}) \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}\epsilon n} \quad (23)$$

$$Z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Z^{(n)} \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}\epsilon n} \quad (24)$$

$$Z = \mathcal{F}_T, \mathcal{G}_T, A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2, B_3, C_0, C_1$$

さらに  $\delta_n, u_n, \Phi_n, \Psi_n, Q_n$  に対して、以下のように展開できると仮定する。

$$W_n(\mathbf{p}) = \sum_{\ell=1}^n \int \frac{d^3 q_1}{(2\pi)^3} \cdots \int \frac{d^3 q_\ell}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}_{1\ell}) \times K_{n,\ell}(\mathbf{q}_1 \cdots \mathbf{q}_\ell) \delta_L(\mathbf{q}_1) \cdots \delta_L(\mathbf{q}_\ell) \equiv \sum_{\ell=1}^n \delta_{n,\ell}(\mathbf{p}) \quad (25)$$

ここで  $W$  と  $K$  は以下の組をとる。

$$\begin{pmatrix} W \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \theta \\ G \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Phi \\ R \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Psi \\ S \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q \\ T \end{pmatrix}$$

$\delta_L$  はガウシアンに従う密度揺らぎである。初期の密度揺らぎがガウス分布に従うという条件  $\delta_1 = \delta_L$  から  $F_{1,1} = 1$  であることが分かる。

$n=1$  のとき、5 つの方程式 (6)(7)(8)(9)(10) は

$$\epsilon - G_{1,1} = 0 \quad (26)$$

$$\left(\epsilon + \frac{1}{2}\right) G_{1,1} - R_{1,1} = 0 \quad (27)$$

$$\mathcal{F}_T^{(0)} S_{1,1} - \mathcal{G}_T^{(0)} R_{1,1} - A_1^{(0)} T_{1,1} = 0 \quad (28)$$

$$\mathcal{G}_T^{(0)} S_{1,1} - A_2^{(0)} R_{1,1} - \frac{3}{2}\sigma = 0 \quad (29)$$

$$A_0^{(0)} T_{1,1} - A_1^{(0)} S_{1,1} - A_2^{(0)} R_{1,1} = 0 \quad (30)$$

である。これらを  $\epsilon, G_{1,1}, R_{1,1}, S_{1,1}, T_{1,1}$  に対する方程式系と見なすと、解を得ることが出来る。

$$\epsilon = \frac{-1 + \sqrt{1 + 16R_{1,1}}}{4} \quad (31)$$

$$G_{1,1} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 16R_{1,1}}}{4} \quad (32)$$

$$(33)$$

2 組ある解のうち、 $\epsilon > 0$  となる解を選んだ。紙面の都合上  $R_{1,1}, S_{1,1}, T_{1,1}$  は省略した。次に  $n = 2$  のときには密度揺らぎ  $\delta_L$  の 1 次と 2 次の方程式に分解することで、10 本の方程式を得る。これらを  $F_{2,1}, G_{2,1}, R_{2,1}, S_{2,1}, T_{2,1}, F_{2,2}, G_{2,2}, R_{2,2}, S_{2,2}, T_{2,2}$  に対する連立方程式と見なし、解くことができる。紙面の都合上、 $F_{2,2}$  のみ載せる。

$$F_{2,2} = \frac{5}{7}\kappa_\alpha\alpha + \frac{2}{7}\kappa_\beta\beta + \lambda\gamma \quad (34)$$

$\kappa_\alpha, \kappa_\beta, \lambda$  は係数の関数である。 $\alpha, \beta, \gamma$  は以下で定義される非線形相互作用によって生じる波数依存性を表す量である。この 3 つのパラメータで修正重力論のモデルを特徴づけることが出来る。

$$\alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = 1 + \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_1^2} \quad (35)$$

$$\beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|^2}{2k_1^2 k_2^2} \quad (36)$$

$$\zeta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = 1 - \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} \quad (37)$$

一般相対論の場合の  $F_{2,2}$  を  $F_{2,2}^{GR}$  とすると、

$$F_{2,2}^{GR} = \frac{5}{7}\alpha + \frac{2}{7}\beta \quad (38)$$

であるから、

$$\kappa_\alpha = \kappa_\beta = 1, \lambda = 0$$

の場合に一般相対論に帰着することが分かる。したがって、 $\kappa_\alpha, \kappa_\beta, \lambda$  は一般相対論からのずれを表す指標となる。また  $\kappa_\alpha$  と  $\kappa_\beta$  の間には、以下の関係がある。

$$\kappa_\alpha = \frac{1 + 4\epsilon}{5\epsilon}\kappa_\beta \quad (39)$$

### 3 Bispectrum

この章では宇宙論的密度揺らぎのバイスペクトルを求める。本集録ではパワースペクトルとバイスペクトルは以下で定義する。

$$\begin{aligned} \langle \delta(t, \mathbf{k})\delta(t, \mathbf{k}') \rangle & \\ & \equiv (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P(t, k) \quad (40) \\ \langle \delta(t, \mathbf{k})\delta(t, \mathbf{k}')\delta(t, \mathbf{k}'') \rangle & \\ & \equiv (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} + \mathbf{k}' + \mathbf{k}'') B(t, k, k', k'') \quad (41) \end{aligned}$$

また、

$$D(t) \equiv \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}\epsilon} \quad (42)$$

を定義する。これは密度揺らぎの線形成長率を表す。宇宙論的密度揺らぎのバイスペクトルを計算すると、まず  $D(t)$  の 3 次の項が出てくるが、ガウシアンバイスペクトルは 0 という性質から、3 次の項は消え、リーディングオーダーは 4 次になる。そこで 5 次以上は微小量として無視して計算し、整理すると、

$$\begin{aligned} B(t, k, k', k'') & \\ & = 2D(t)^4 (F_{2,2}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') P_{11}(k) P_{11}(k') \\ & \quad + F_{2,2}(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') P_{11}(k') P_{11}(k'') \\ & \quad + F_{2,2}(\mathbf{k}'', \mathbf{k}) P_{11}(k'') P_{11}(k)) \quad (43) \end{aligned}$$

となる。このことから前章で求めた連立方程式から得られるカーネル  $F_{2,2}$  が重要であることが分かる。

次に Reduced Bispectrum と呼ばれる以下で定義する物理量について考える。

$$Q_{123} \equiv \frac{B(k_1, k_2, k_3)}{P(k_1)P(k_2) + P(k_2)P(k_3) + P(k_3)P(k_1)} \quad (44)$$

これはバイスペクトルをパワースペクトルの積で規格化したものである。前章で定義したパラメータが  $Q_{123}$  に与える影響について、グラフを用いて考察する。横軸には  $k_1$  と  $k_2$  のなす角を  $\pi$  で割ったもので、縦軸は  $Q$  の値である。また、すべてのグラフで  $k_1 = k_2 = 0.01h\text{Mpc}^{-1}$ ,  $\kappa_\beta = 1$  の値はすべて 1 である。グラフから、 $\lambda$  の値が変化しても、グラフの端は等しくなることが分かる。これは  $\lambda$  にかかっている、 $\gamma$  が  $\theta = 0, \pi$  のときに値を持たないという性質を反映している。また、 $\lambda$  の値が変化した場合、グラフの形が大きく変化することが分かる。

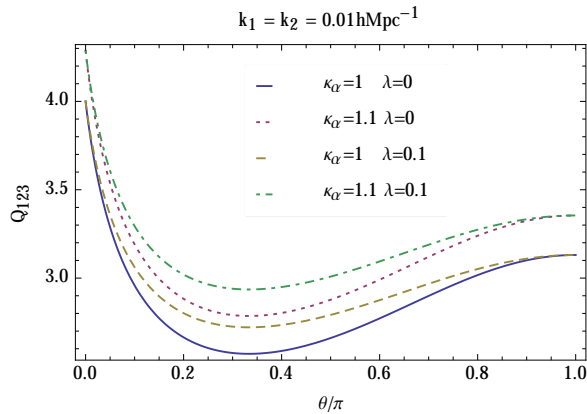


図 1:  $Q_{123}$  のグラフ

## 4 Conclusion

最も一般的なスカラーテンソル理論における宇宙論的密度揺らぎのバイスペクトルを求めた。これは宇宙論的密度揺らぎの 2 次のカーネルを用いることで計算できる。さらにこのカーネルは 3 つのパラメータと波数依存性のみで書くことが出来、一般相対論との比較が容易にできる。またそれぞれのパラメータについて見てみると、まず  $\kappa_\beta$  については  $\lambda = 0$  のときは一般相対論におけるカーネル  $F_{2,2}^{GR}$  を  $\kappa_\beta$  倍するだけであり、グラフの形は変えない。次に  $\lambda$  について考察すると、すべての項が  $B_j$  に比例しているため、計量の摂動もしくはスカラー場の摂動の 2 次の効果、すなわち非線形効果が影響していることが分かる。このことから  $\gamma$  はこの効果によって影響を受ける波数依存性である。またグラフをみると、グラフの端点すなわち  $\theta = 0, \pi$  の時にはすべての  $\gamma$  が  $\gamma = 0$  となるため、 $\lambda$  の依存性は現れない。よって、 $\lambda$  はグラフの端の値には影響せず、グラフの形を変化させる。これらのことから、観測データと比較する場合、全体的なグラフの形から  $\lambda$  の値を、端点の値から残りのパラメータを推定できるのではないかと期待される。

## 5 Acknowledgment

貴重なコメントをくださった樽家篤史氏に感謝いたします。またこの研究は山本一博准教授、照喜名歩さんとの共同研究に基づいています。

## 6 参考文献

- [1]G.W.Horndeski .Int. J. Theor. Phys. 10 (1974) 363-384
- [2]Rampei Kimura et al. Phys. Rev. D85 : 024023, (2012)
- [3]C.Deffayet et al.Phys. Rev. D 84, 064039 (2011)
- [4]Tutomu Kobayashi et al. Prog. Theor. Phys. 126 (2011), 511-529