

BigBang 元素合成

佐藤 正憲 (東京工業大学大学院 理工学研究科)

Abstract

通常は数値計算によって扱われる元素合成について、近似を駆使することで解析的に取り扱った、V. Mukhanov. 2005. *Nucleosynthesis Without a Computer* についてのレビューを行う。解析的に取り扱うことで数値計算ではブラックボックスであった内容を身近に理解することができる。また、近似の精度についても数値計算の結果と比較することによって確かめる。

1 Introduction

宇宙初期は非常に高温であり、弱い相互作用によって陽子 (P) と中性子 (N) が平衡状態にあった。温度が数 MeV にまで下がると弱い相互作用による平衡が破れ、中性子は陽子から分離し、中性子数と陽子数の比 (NP 比) が "freeze-out" する。このとき NP 比は 1/6 となる。その後、中性子は β 崩壊をすることでさらに数を減らし、NP 比は 1/7 となる。重水素の結合エネルギーは 2.23MeV であるが、高エネルギーの光子の散乱によってできた瞬間に破壊されてしまうのでさらに温度が下がってから生成が始まる。そのような温度は 0.1MeV となる。重水素が生成されるとすぐにヘリウム 4 の合成が始まる。このときに中性子はほぼ全てヘリウムに取り込まれる。また、わずかではあるがヘリウムの後にリチウムなどの軽元素も合成される。これらの元素の存在量を見積もるためには Boltzmann 方程式を考えることによって非平衡の物理を考えなければいけない。この方程式は非常に複雑で一般に解析的に解くことはできず、通常は数値計算によって値を求める。しかし本発表では数値計算になるべく頼ることなく近似を用いることによって解析的に解を求める。また、解析的に解を求めることによって物理的な解釈をより身近に感じることが目標とする。

2 NP-conversion and N-decay ($T > 1\text{MeV}$, $t < 1\text{sec}$)

温度が $1 > \text{MeV}$ よりも高いとき、陽子と中性子は以下の weak interaction による反応で平衡状態にあった。しかし温度が下がるにつれて反応が切れて、陽子と中性子の比が Freeze-out する。

$$n + \nu \rightleftharpoons p + e^-, \quad n + e^+ \rightleftharpoons p + \bar{\nu} \quad (1)$$

この 1 つ目の反応の matrix element は

$$|\mathcal{M}|^2 = 16 (1 + 3g_A^2) G_F^2 (p_n \cdot p_\nu) (p_p \cdot p_e) \quad (2)$$

によって与えられる。ここで、 $g_A = 1.26$ は axial vector coupling constant で、 $G_F = 1.17 \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2}$ は Fermi coupling constant である。

終状態では electron や positron が多く存在するので Pauli の排他律を考慮することで、この反応の cross section は

$$\sigma_{n\nu} \simeq \frac{1 + 3g_A^2}{\pi} G_F^2 \epsilon_e^2 v_e (1 + \exp(-\epsilon_e/T))^{-1} \quad (3)$$

となる。この cross section を用いて中性子の存在比の変化を追っていく。そのため、全 baryon に対する中性子の存在比 X_n を以下のように定義する。

$$X_n = \frac{N_n}{N_p + N_n} = \frac{n_n}{n_p + n_n} \quad (4)$$

これより、 X_n の時間変化は

$$\left(\frac{dX_n}{dt} \right)_{n\nu} = -\lambda_{n\nu} X_n = -\frac{1 + 3g_A^2}{2\pi^3} G_F^2 Q^5 J(1; \infty) X_n \quad (5)$$

となる。ここで、

$$J(1; \infty) = \int_1^\infty dq q^2 (q-1)^2 \left(1 - \frac{(m_e/Q)^2}{q^2}\right)^{1/2} \times \left[1 + e^{\frac{Q}{T_\nu}(q-1)}\right]^{-1} \left[1 + e^{-\frac{Q}{T}q}\right]^{-1} \quad (6)$$

である。 $T_\nu = T > m_e$ のとき $\lambda_{ne} \simeq \lambda_{n\nu}$ となる。逆反応については

$$\lambda_{pe} = \exp\left(-\frac{Q}{T}\right) \lambda_{n\nu}, \quad \lambda_{p\nu} = \exp\left(-\frac{Q}{T}\right) \lambda_{ne} \quad (7)$$

となる。

これらより、 X_n のつり合いの式は

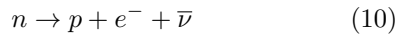
$$\frac{dX_n}{dt} = -\lambda_{n \rightarrow p} \left(1 + e^{-\frac{Q}{T}}\right) (X_n - X_n^{eq}) \quad (8)$$

となり、この微分方程式の解は

$$X_n(t) = X_n^{eq}(t) - \int_0^t d\tilde{t} \tilde{X}_n^{eq} \times \exp\left(-\int_{\tilde{t}}^t \lambda_{n \rightarrow p} \left(1 + e^{-\frac{Q}{T}}\right) d\tilde{t}\right) \quad (9)$$

のように平衡での値とそのずれとして書くことができる。十分時間がたった極限で X_n は有限の値に近づく freeze-out する。このようなことが起こるのは宇宙の膨張が反応率より大きくなる場所である。すなわち $\frac{\dot{X}_n^{eq}}{X_n^{eq}} \simeq \lambda_{n \rightarrow p}$ となるときであり、このときの温度は $T^* = 0.84 \text{ MeV}$ となる。また、中性子の量は数値的に積分を計算することで $X_n^* = 0.158$ となり、陽子の 1/6 になる。

中性子と陽子の反応が切れた後、 X_n は freeze-out することを見たが、中性子は不安定なので軽元素の合成が始まるまでベータ崩壊



を続け、さらに数を減らす。ベータ崩壊による中性子の存在比の変化は、中性子の寿命 τ_n を用いることで

$$X_n(t) = X_n^* \exp(-t/\tau_n) \quad (11)$$

となる。

3 Deuterium Bottleneck

元素の合成は核子どうしの相互作用によって行われる。原理的には 4 体反応 $2n + 2p \rightarrow {}^4\text{He}$ などもち

りうる。しかし、4 体以上の反応は密度が低く、実際には無視できる程度しか起こらない。なので、2 体反応によって重水素ができる過程



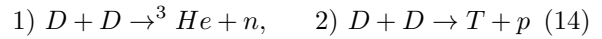
を考えていく。この反応の反応率は大きく、重水素は局所的に化学平衡にある。重水素の存在比 $X_D = 2n_D/n_B$ は Saha の公式によって

$$X_D = 5.67 \times 10^{-14} \eta_{10} T_{\text{MeV}}^{3/2} \exp\left(\frac{B_D}{T}\right) X_p X_n \quad (13)$$

とあらわされる。ここで、 $B_D \equiv m_p + m_n - m_D \simeq 2.23 \text{ MeV}$ は重水素の結合エネルギーで、 $\eta_{10} \equiv \left(\frac{n_B}{n_\gamma}\right) / 10^{-10}$ である。

温度が結合エネルギー辺りになると重水素が合成され、増えてくるように思えるが $T = 2.23 \text{ MeV}$ では $X_D \sim 10^{-13}$ 程度であり、かなり少ない。これは重水素が光子により分解されてしまうため、さらに温度が下がらないと合成されないためである。さらに、重水素が合成されないとより重い元素が合成されないため、これが bottleneck となる。

bottleneck が開き、元素合成の始まる時期を調べていく。重水素より重い元素は次の反応によって合成される。



この反応率を λ_{DD} と書くと、重水素の bottleneck 開く時期は重水素の変化量が重水素そのものの量となるような時期である。そのような時期は

$$\Delta X_D = -\frac{1}{2} \lambda_{DD} X_D^2 \Delta t = X_D \quad (15)$$

によって見積もることができる。これを解くと、bottleneck が開く時期の重水素の存在比が求まり、

$$X_D^{(i)} \simeq \frac{1.2 \times 10^{-5}}{\eta_{10} T_{\text{MeV}}(X_D)} \simeq 1.5 \times 10^{-4} \eta_{10}^{-1} (1 - 7 \times 10^{-2} \ln \eta_{10}) \quad (16)$$

となる。重水素の存在比がこの値に達すると、すばやく反応が進むようになる。ここから重水素よりも重い軽元素の合成がはじまる。実際、 X_D^{eq} は温度の変化に対して敏感で、 $\eta_{10} = 1$ なら $T : 0.08 \rightarrow 0.07 \text{ MeV}$

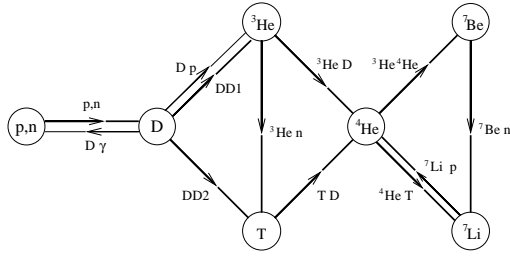


図 1: 元素合成の経路

で $X_D^{eq} : 10^{-4} \rightarrow 10^{-2}$ と急激に増える。この後、系は平衡から離れ、陽子と中性子によって与えられた重水素がより重い元素へと変わっていく。次節からは合成される元素について具体的に freeze-out する値を求めていく。合成される元素についての経路を図 1 に示しておく。図 1 において各元素は reservoir に対応していて、各 reservoir は核反応によってつながっている。 $ab \rightarrow cd$ のような元素の反応率は

$$\frac{\dot{X}_a}{X_a} = -\lambda_{ab} A_b^{-1} X_b \quad (17)$$

となる。ここで A_b は元素 b の質量数である。

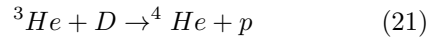
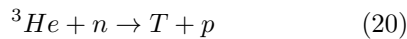
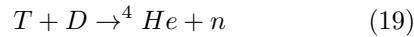
4 Helium-4 and Deuterium

重水素が増えるとすぐに他の軽元素の合成が始まる。この温度は

$$T^{(i)} = 0.08 [1 + 0.07 \ln \eta_{10}] \text{ MeV} \quad (18)$$

である。時間でいうと $t = 206 \text{ sec}$ である。

反応の進み方は次の 3 通りある。



最終的なヘリウムの存在比は、元素合成が始まるときに残っていた中性子が全て変換されるので

$$X_{4\text{He}}^f = 2X_n(t^{(i)}) = 2X_n^* \exp\left(-\frac{t^{(i)}}{\tau_n}\right) \quad (22)$$

とあらわされる。よって、 $X_{4\text{He}}^f \simeq 0.25$ となり、最終的に全バリオンの 4 分の 1 がヘリウムになっていることがわかる。

重水素の freeze-out の値についても求める。各反応は quasi-equilibrium だとしてつりあいの式を考えていく。すると、ヘリウム-3 について

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \lambda_{DD1} X_D^2 + \frac{1}{2} \lambda_{Dp} X_D X_p \\ &= \frac{1}{6} \lambda_{3\text{He}D} X_{3\text{He}} X_D + \frac{1}{3} \lambda_{3\text{He}n} X_{3\text{He}} X_n \end{aligned} \quad (23)$$

トリチウムについて

$$\frac{1}{4} \lambda_{DD2} X_D^2 + \frac{1}{3} \lambda_{3\text{He}n} X_{3\text{He}} X_n = \frac{1}{6} \lambda_{TD} X_T X_D \quad (24)$$

のようになる。これらにより、 $D+D \rightarrow {}^3\text{He}+n, D+T \rightarrow {}^4\text{He}+n, p+n \rightarrow D+\gamma$ の反応による中性子の存在比の変化は

$$\frac{dX_n}{dt} = \frac{1}{4} \lambda_{DD} X_D^2 - \lambda_{pn} X_p X_n \quad (25)$$

とかける。

同様に重水素については

$$\frac{dX_D}{dt} = 2\lambda_{pn} X_p X_n - \lambda_{DD} X_D^2 - 2\lambda_{Dp} X_D X_p \quad (26)$$

となる。

これらの微分方程式を解くことで重水素の存在比がわかる。 $X_D \ll X_n$ のときは quasi-equilibrium にあるので $dX_D/dX_n \approx 0$ より、

$$X_n \approx \frac{2}{R_1} (X_D^2 + R_2 X_D) \quad (27)$$

ここで、 $T = 0.09 \rightarrow 0.04 \text{ MeV}$ で

$$R_1 \equiv 4X_p \frac{\lambda_{pn}}{\lambda_{DD}} \simeq (3 \rightarrow 8) \times 10^{-3} \quad (28)$$

$$R_2 \equiv 2X_p \frac{\lambda_{pD}}{\lambda_{DD}} \simeq (2.5 \rightarrow 2.3) \times 10^{-5} \quad (29)$$

である。これらより重水素の存在比の最大値は $X_D = 10^{-2}$ とわかる。そのときの温度は $T = 0.07 \text{ MeV}$ である。

中性子の存在比が減ってくると、上でもとめた解は正しくなくなる。このとき、別の解として

$$X_n \approx \frac{1}{R_1} X_D^2 \quad (30)$$

が得られる。これより重水素の freeze-out での値を求めることができて、

$$X_D^f \sim 4 \times 10^{-4} \eta_{10}^{-1} \quad (31)$$

となる。

5 Tritium, Helium-3, Lithium-7 and Beryllium-7

元素合成によってごくわずかに作られるこれらの元素についても、freeze-out での値を同様にして求めることができる。

${}^3\text{He}$ や T についてのつりあいの式は

$$X_{{}^3\text{He}} = \frac{3}{2} \frac{\lambda_{DD1} X_D + 2\lambda_{Dp} X_p}{\lambda_{{}^3\text{He}D} + 2(\lambda_{{}^3\text{He}n}/R_1) X_D} \quad (32)$$

$$X_T = \left(\frac{3}{2} \frac{\lambda_{DD2}}{\lambda_{DT}} + 2 \frac{\lambda_{{}^3\text{He}n}}{\lambda_{DT}} \frac{X_{{}^3\text{He}}}{R_1} \right) X_D \quad (33)$$

これらに、重水素の freeze-out での値を代入することで各元素の freeze-out での値を求めることができる。結果として ${}^3\text{He}$ は $X_{{}^3\text{He}}^f \sim 10^{-5}$ 、 T は $X_T^f \sim 10^{-6}$ となる。

${}^7\text{Li}$ や ${}^7\text{Be}$ についても同様で、

$$\frac{1}{12} \lambda_{{}^4\text{He}T} X_{{}^4\text{He}} X_T + \frac{1}{7} \lambda_{{}^7\text{Be}n} X_{{}^7\text{Be}} X_n = \frac{1}{7} \lambda_{{}^7\text{Li}p} X_{{}^7\text{Li}} X_p \quad (34)$$

$$\frac{1}{12} \lambda_{{}^4\text{He}{}^3\text{He}} X_{{}^4\text{He}} X_{{}^3\text{He}} = \frac{1}{7} \lambda_{{}^7\text{Be}n} X_{{}^7\text{Be}} X_n \quad (35)$$

これらより ${}^7\text{Li}$ は $X_{{}^7\text{Li}}^f \sim 10^{-9}$ 、 ${}^7\text{Be}$ は $X_{{}^7\text{Be}}^f \sim 10^{-10}$ となる。

6 Conclusion

近似的に取り扱うことで big bang 元素合成により作られる元素の量を見積もることができた。これらの元素の見積もりがどの程度正しいのかを、数値計算による結果と比較してみる。数値計算による結果は図 2 に示す。図 2 をみると、Helium-4 や Deuterium は精度よく一致していることがわかる。そのほかの元素については、少し異なっているがそれなりの精度で出ていることがわかる。また、元素合成の時期についてもよく一致している。

近似的に元素合成を扱うことで数値計算に比べ、多少精度は落ちてしまったが、それぞれの存在比の具体的な振る舞いなど、数値計算でブラックボックスであった部分を見ることができた。

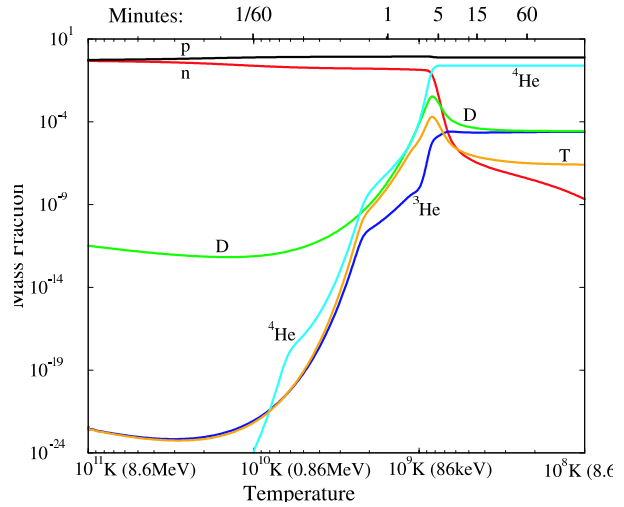


図 2: 数値計算による結果

Reference

V.Mukhanov. 2004. International Journal of Theoretical Physics, Vol43

V.Mukhanov. 2005. Cambridge University Press

S.Dodelson. 2003. Academic Press