Massive spin2 粒子に対する ghost-free 微分相互作用について

大原　悠一 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

Bolware と Deser によって、Fierz-Pauli 質量項を非線形に拡張すると ghost が生じることが示されて以来、安定な non-linear massive gravity を構成するのは困難とされてきた。しかし、近年、de Rham らによって、微分を含まない相互作用項を導入し、非線形なレベルでも ghost が表れない理論（dRGT 理論）が構築できる事が示された。レヴューする論文では、dRGT 理論の相互作用項に加え、線形のレベルで、ゴーストモードを飛ばさない微分相互作用を導入できる事を示している。また、その微分相互作用に対応する非線形項が存在し、dRGT 理論の一般化した理論の存在を予想している。

1 Introduction

場の理論的な興味として、spin0、spin1 の粒子に質量を持たせることができるように、spin2 の粒子に質量を与えた場合に、一貫した理論が存在しうるかという議論は古くからされている。一般に、計量を $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ と平坦時空まわりで展開することで得られる線形化した Einstein-Hilbert 項に、質量項を加えると ghost モードが伝播する事が知られている。Fierz と Pauli は h の 2 次の項、$h_{\mu\nu}h^{\mu\nu}$ と $h_\mu^{\mu 2}$ について、相対的な符合を適切に選ぶことで（Fierz-Pauli 質量項）ghost mode の質量を無限大にし、安定な理論を構築できる事を示した。その後、理論の非線形化が試みられたが、Fierz-Pauli 質量項の非線形化を行うと、拘束条件がなくなり、結果として ghost が生じることが、Bolware と Deser によって示された。この ghost は、helicity-2 mode に関しては線形にとり、helicity-0 mode については、非線形性を保つ操作である decoupling 極限をとることで見ることができる。Fierz-Pauli 質量項を非線形に拡張した場合、decoupling 極限では、helicity-0 mode の高階微分が現れるため、ghost が生じてしまう。de Rham, Gabadadze, Tolley は、微分を含まない相互作用項を導入することで、decoupling 極限において ghost を取り除くことができることを示した。この場合も、decoupling 極限において helicity-0 mode の高階微分は現れる。しかしながら、各相互作用項の係数を調整することで、全微分とすることができ、ghost を落とす事ができる。後に、decoupling 極限でなくても ghost が生じない事が示され、この ghost を含まない massive gravity 理論は dRGT 理論と呼ばれている。

今回レヴューする論文では、Lovelock 項の平坦時空まわりでの展開式との類推によって、ghost を生じさせない h についての微分相互作用を導入することを検討している。時空が 4 次元以上の時は、この手法で導入される項が存在する。これはゲージ不変性を破っており、また dRGT 理論の平坦時空まわりでの展開式に現れない項になっている。本論文では、ゲージ不変性を破っている ghost-free 微分相互作用には、対応する非線形項が存在すると仮定し、dRGT 理論に含まれる相互作用がさらに一般化できる可能性を指摘している。また、decoupling 極限における scalar-tensor sector は、極限をとる前の理論が平坦時空まわりで展開したものか、或いは完全に非線形かに依らず一致する事を、Lovelock 項との類推から仮定し論じている。

2 Analogy with the Lanczos-Lovelock terms

Ghost を生じさせない微分相互作用項として、Lovelock 項が知られている。この項は 4 次元時空では非自明な項を生じない。

$$\mathcal{L} \sim \sqrt{-g} R_{[\nu_1\nu_2}{}^{\nu_1\nu_2} R_{\nu_3\nu_4}{}^{\nu_3\nu_4} \dots R_{\nu_{d-1}\nu_d]}{}^{\nu_{d-1}\nu_d}$$

Lovelock 項を $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ として、平坦時空まわりで展開する。d を微分の階数とすると次のよう

に展開できる。

$$\mathcal{L}^{(0)} = a_{d/2} + a_{d/2+1} + \dots$$

$a_{d/2}$ は全微分項となり自明である。非自明な項は

$$a_{d/2+1} \sim \partial_{[\nu_1}\partial^{\nu_1} h_{\nu_2}{}^{\nu_2}\partial_{\nu_3}\partial^{\nu_3} h_{\nu_4}{}^{\nu_4} \cdots \partial_{\nu_{d-1}}\partial^{\nu_{d-1}} h_{\nu_d]}{}^{\nu_d}$$

このような項を偽線形項と呼び、運動方程式が高階微分を含まない。この項から類推し、次の項を導入する。d 階微分と n 個の h を含む偽線形項を $\mathcal{L}_{d,n}$ と表すと

$$\mathcal{L}_{d,n} = \partial_{[\nu_1}\partial^{\nu_1} h_{\nu_2}{}^{\nu 2} \cdots \partial_{\nu_{d-1}}\partial^{\nu_{d-1}} h_{\nu_d}{}^{\nu_d} h_{\nu_{d+1}}{}^{\nu_{d+1}} \cdots h_{\nu_{n+d/2}]}{}^{\nu_{n+d/2}} \qquad d/2 \le n \le D - d/2$$

これらは、後に示すように ghost-free の相互作用であり、$\mathcal{L}_{d,n}$、$d/2+2 \le n \le D-d/2$　はゲージ不変でないため、新たな massive graviton に対する相互作用となっている。

$\mathcal{L}_{d,d/2+1}$ は、Lovelock 項の $a_{d/2+1}$ に対応している事から、偽線形項と非線形項には 1 対 1 対応していると仮定する。これは $\mathcal{L}_{0,0}$ の場合は成り立っており、dRGT のポテンシャル項が対応している。この仮説が正しければ、non-linear massive gravity に新たな deffeomorphism non-invariant な ghost-free 項が加わることになる。

3　Hamiltonian analysis

線形化した Einstein-Hilbert 項に Fierz-Pauli 項を加えたもの、さらには前節で導入した微分相互作用は、部分積分を用いることで一般に次のように書く事ができる。

$$\mathcal{L} = \mathcal{F}\left(h_{ij}, \dot{h}_{ij}, h_{0i}\right) + h_{00}\mathcal{G}\left(h_{ij}\right)$$

この場合、共役運動量は

$$\pi^{kl}(h_{ij}, \dot{h}_{ij}, h_{0i}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{ij}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{h}_{ij}}$$

これを逆に解き、Legendre 変換を用いると、

$$\mathcal{H} = \pi^{kl}\dot{h}_{kl}(\pi^{ij}, h_{ij}, h_{0i}) - \mathcal{F}\left(h_{ij}, \dot{h}_{ij}(\pi^{ij}, h_{ij}, h_{0i}), h_{0i}\right) - h_{00}\mathcal{G}\left(h_{ij}\right)$$

h_{0i} は代数的に現れるため、運動方程式を用いて消去できる。

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta h_{0k}} = 0 \Rightarrow h_{0k} = h_{0k}(\pi^{ij}, h_{ij})$$

これを Hamiltonian に戻すと h_{00} が線形で、h_{ij} に対する拘束条件になっている事がわかる。この拘束条件によって、ghost を排除できる。

4　Decoupling limit

Decoupling 極限は、理論の cutoff に着目する極限である。そのためには、偽線形項による微分相互作用の scaling を決める必要がある。dRGT 理論の cutoff を下げないように scaling を施すと、$M_P^{D-2} m^{d-2} \mathcal{L}_{d,n}$ となる。運動項は、$M_P^{D-2}\mathcal{L}_{EH}$ となるため、$d=2$ で、非自明な項が存在するのならば、運動項の形が変わる可能性がある。偽線形項の scale が決まったため、decoupling 極限は Stückelberg 場 $h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu + 2\partial_\mu\partial_\nu\phi$ を導入した後、cutoff は固定し、graviton 質量 $m \to 0$、Planck 質量 $M_p \to \infty$ の極限をとることで得られる。dRGT 理論において、scalar-tensor sector の decoupling 極限は、極限をとる前の理論が、偽線形か非線形かに依らない。これが、微分相互作用を含んだ場合も成り立つと仮定する。

例として、4 次元時空を考える。非自明な項は $\mathcal{L}_{2,3}$ のみである。この項の decoupling 極限をとると

$$\sim \quad \phi\left[R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}\right]_{h^2}$$

括弧の中は、h について 2 次まで展開した Gauss-Bonnet 項を表している。仮説が正しければ、この項が 4 次元における dRGT 理論に加わり、今までに得られた結論を変える可能性がある。

5　Summary

Lovelock 項の平坦時空まわりでの展開からの類推によって、h についての ghost-free な相互作用を構成した。これらの微分相互作用と full non-linear 理論の間には、1 対 1 対応があるという仮定をし、massive graviton のより一般的な相互作用項の存在を指摘した。これは、Massive gravity では運動項が Einstein-Hilbert 項にならない可能性を示唆している。

Reference

Hinterbichler arXiv:1305.7227v1 [hep-th]

Hinterbichler arXiv:1105.3735v2 [hep-th]

de Rham, Gabadadze, Heisenberg, and Pirtskhalava arXiv:1212.4128 [hep-th]