stochastic inflation における curvature perturbation

多田 祐一郎 (東京大学 カブリ IPMU)

Abstract

我々の宇宙は大きな scale では非常に一様等方であるが、小さな scale で見れば銀河や銀河団など、実に豊かな構造を持っている。そしてこれらの構造は inflation を引き起こす inflaton 場の量子ゆらぎを起源とすると考えられている。こうしたゆらぎ (curvature perturbation) は通常 inflaton 場を、空間一様な古典場と摂動的量子場にわけて計算されるが、stochastic formalism によれば、量子場の効果を統計的白色雑音として古典場に取り入れることで、完全に古典論として理論を展開できる。我々はこの formalism を用い、inflaton 場に対し非摂動的なゆらぎの計算方法を提唱する。

1 Introduction

inflation は多くの宇宙物理学者から支持されている、初期宇宙の model である。inflation 中では宇宙は急激に加速膨張しており、それにより地平線問題、平坦性問題、monopole 問題等さまざまな問題が解決される。さらに inflation はほぼ scale 不変な curvature perturbation を予言し、これは CMB や大規模構造の観測と非常によく合うことがわかっている。
inflation は普通、inflaton と呼ばれる scalar 場によって引き起こされる。通常は inflaton の dynamics において量子ゆらぎは無視され、inflaton 場を古典場として扱うが、ゆらぎの大きいときは量子効果の dynamics への影響は無視できない。例えばある種の large field inflation では量子ゆらぎにより、inflaton 場が potential を転がり落ちるだけでなく逆に登ってしまうことがある。このような場合 inflation は永遠に終わらない (eternal inflaion)。こうした量子効果をうまく取り入れるのが stochastic formalism である [1]。stochastic formalism では量子ゆらぎは統計的白色雑音に置き換えられ、従って inflaton dynamics に揺動を与える。
stochastic formalism は古典場に量子補正を取入れ、一見 dynamics を複雑にしているように見えるが、量子ゆらぎを統計的雑音に置き換えているので、全て古典的に扱うことができるという利点も持つ。そこで我々は δN formalism を用いることで、この stochastic inflation において curvature perturbation を計算する方法を提唱する。この手法では inflaton 場を摂動展開することなく、直接 δN を求めることによって、inflaton 場の摂動に対し自動的に全次数まで含まれた curvature perturbation を計算することができる。従って、curvature perturbation の power spectrum だけでなく non-gaussianity 等を計算する時にも役立つ。

2 Stochastic Inflation

一般に inflation 中の scalar inflaton $\phi(t, \mathbf{x})$ の dynamics は、

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \phi_0(t) + \delta\phi(t, \mathbf{x}), \tag{1}$$

と、空間一様な古典場 ϕ_0 と摂動的量子場 $\delta\phi$ にわけて解析される。特に ϕ_0 の dynamics に対しては量子場 $\delta\phi$ は無視される。一方 inflation で作られる curvature perturbation は、量子場 $\delta\phi(t, \mathbf{x})$ の Fourier mode $\delta\phi_{\mathbf{k}}(t)$ が十分 super-horizon mode($k \ll aH$) となったときに “古典化” し、古典ゆらぎを作るとして計算される。従って本来古典場 ϕ_0 には古典化した $\delta\phi$ が常に影響を与えるはずで (特にゆらぎが大きいとき)、ここではその効果 (stochastic effect) について考察しよう。
super-horizon mode は古典化していると思い、inflaton 場を以下のように super-horizon な IR mode とそれ以外の UV mode にわけ、IR mode の発展を考

えよう。

$$\begin{aligned}\phi(t,\mathbf{x}) &= \phi_{IR}(t,\mathbf{x}) + \phi_{UV}(t,\mathbf{x}), &(2)\\ \phi_{IR} &:= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^2} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \phi_{\mathbf{k}} \theta(\eta a H - k), &(3)\\ \phi_{UV} &:= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^2} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \phi_{\mathbf{k}} \\ &\quad \times(1-\theta(\eta a H - k)). &(4)\end{aligned}$$

$\phi_{\mathbf{k}}(t)$ は $\phi(t,\mathbf{x})$ の Fourier mode であり、$\theta(x)$ は階段関数、η は正の微小 parameter だ。また、ここでは運動方程式を Hamiltonian 形式:

$$\pi = \dot{\phi}, \quad \dot{\pi} + 3H\pi - a^{-2}\nabla^2\phi + V'(\phi) = 0, \qquad (5)$$

で表す。dot は時間微分、prime は ϕ 微分である。π も ϕ と同様に IR、UV mode にわけて、

$$\begin{aligned}\pi_{IR}(t,\mathbf{x}) &:= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \dot{\phi}_{\mathbf{k}}(t) \\ &\quad \times\theta(\eta a H - k), &(6)\\ \pi_{UV}(t,\mathbf{x}) &:= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \dot{\phi}_{\mathbf{k}}(t) \\ &\quad \times(1-\theta(\eta a H - k)), &(7)\end{aligned}$$

としておく。これらを運動方程式に代入し、

$$V'(\phi) \simeq V'(\phi_{IR}) + V''(\phi_{IR})\phi_{UV}, \qquad (8)$$

の近似を用い、元の方程式として、

$$\ddot{\phi}_{\mathbf{k}} + 3H\dot{\phi}_{\mathbf{k}} + \left(\frac{k^2}{a^2} + V''(\phi_{IR})\right)\phi_{\mathbf{k}} = 0, \qquad (9)$$

が成り立つとすると、IR mode に対し以下の方程式を得る。

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_{IR} &= \pi_{IR} \\ &\quad + \eta a H^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \phi_{\mathbf{k}}(t) \\ &\quad \times\delta(\eta a H - k), &(10)\\ \dot{\pi}_{IR} &= -3H\pi_{IR} - V'(\phi_{IR}) \\ &\quad + \eta a H^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \pi_{\mathbf{k}}(t) \\ &\quad \times\delta(\eta a H - k). &(11)\end{aligned}$$

ただし、IR mode の空間微分は小さいとして無視した。以降はある 1 つの空間点でのみ考えるので、一般性を失わずに $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ と出来る。各行の最後の項を $\xi_\phi(t), \xi_\pi(t)$ と呼ぶことにするが、これらはまだ量子的であるので、真空期待値をとって統計的性質を引き出そう。期待値は、$\langle\phi_{\mathbf{k}}\rangle = \langle\pi_{\mathbf{k}}\rangle = 0 \,\mathrm{for}\, k \neq 0$ より $\langle\xi_\phi\rangle = \langle\xi_\pi\rangle = 0$. また分散は、$k_c(t) := \eta a H$ として、

$$\begin{aligned}\langle\xi_\phi(t)\xi_\phi(t'\rangle &= k_c(t)k_c(t')H^2 \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6} \\ &\quad \times\delta(k_c(t)-k)\delta(k_c(t')-k') \\ &\quad \times\langle\phi_{\mathbf{k}}(t)\phi_{\mathbf{k}'}(t')\rangle \\ &= k_c^2(t)H^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\delta(k_c(t)-k) \\ &\quad \times\frac{\delta(t-t')}{k_c(t)H}\frac{2\pi^2\mathcal{P}_\phi(t,k)}{k^3} \\ &= H\mathcal{P}_\phi(t,k_c)\delta(t-t'). &(12)\end{aligned}$$

$\eta \ll 1$ で $k_c = \eta a H$ は十分 super-horizon mode なので $\mathcal{P}_\phi(t,k_c) = (H/2\pi)^2$. よって、

$$\langle\xi_\phi(t)\xi_\phi(t')\rangle = \frac{H^3}{(2\pi)^2}\delta(t-t'). \qquad (13)$$

分散が delta 関数なのでこれは**白色雑音**である。同様に ξ_π の分散を計算すると 0 になるので、ξ_π は無視する。ξ_ϕ を規格化し直して、最終的に以下の運動方程式を得る。

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_{IR} &= \pi_{IR} + \frac{H^{3/2}}{2\pi}\xi, \\ \dot{\pi}_{IR} &= -3H\pi_{IR} - V'(\phi_{IR}), &(14)\\ \langle\xi\rangle &= 0, \quad \langle\xi(t)\xi(t')\rangle = \delta(t-t').\end{aligned}$$

特に slow-roll 近似 ($\dot{\pi}_{IR} = 0$) を採用し、Friedmann 方程式 $V = 3M_p^2H^2$ を用いれば、

$$\dot{\phi}_{IR} + 2M_p^2H' = \frac{H^{3/2}}{2\pi}\xi, \qquad (15)$$

となる。こうして、次々に古典化する量子場は元々の古典場に対し白色雑音として寄与することがわかった。

3 Analytic Calculation of Curvature Perturbation ζ

ここでは inflation は十分 slow-roll だとし、Hubble parameter H を線形近似する。

$$H(\phi) \simeq H_0 - \epsilon\phi. \qquad (16)$$

ここで、ϵ は正の微小定数で、inflation 中において $\epsilon \ll H_0/\phi$ を満たす。inflation が十分続いて $\phi = \phi_f$ となったとき、inflaton potential V が急激に 0 となって、inflation が終わるものとする。この条件のもと、stochastic inflation の文脈で求めた curvature perturbation ζ が、通常の方法で求められた値に一致することを示そう。

運動方程式は、

$$\dot{\phi}(t) - 2M_p^2\epsilon = \frac{H_0^{3/2}}{2\pi}\xi(t). \tag{17}$$

両辺を $H_0^{3/2}/2\pi$ で割ることで、これは drift のある Brown 運動、

$$\dot{X}(t) = \mu + \xi(t), \tag{18}$$

に帰着する。ここで $X := 2\pi\phi/H_0^{3/2}$, $\mu := 4\pi M_p^2\epsilon/H_0^{3/2} > 0$ とした。drift のある Brown 運動において、初めて $X(t) = m > 0$ となる到達時刻を τ_m とすると、その母関数は以下のようであることが、確率過程の文脈で求められる [2]。

$$\langle e^{-\alpha\tau_m}\rangle = e^{m\mu - m\sqrt{\mu^2+2\alpha}}. \tag{19}$$

α は擬変数であり、例えば到達時刻の期待値は両辺を α で微分して、

$$\langle\tau_m\rangle = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\langle e^{-\alpha\tau_m}\rangle\bigg|_{\alpha\to 0} = \frac{m}{\mu}, \tag{20}$$

と求められるし、同様に到達時刻の 2 乗期待値は、

$$\begin{aligned}\langle\tau_m^2\rangle &= \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\langle e^{-\alpha\tau_m}\rangle\bigg|_{\alpha\to 0} \\ &= \frac{m}{\mu^3} + \frac{m^2}{\mu^2} \\ &= \langle\tau_m\rangle^2 + \frac{1}{\mu^2}\langle\tau_m\rangle.\end{aligned} \tag{21}$$

従って到達時刻の分散は、

$$\langle\delta\tau_m^2\rangle = \langle\tau_m^2\rangle - \langle\tau_m\rangle^2 = \frac{1}{\mu^2}\langle\tau_m\rangle, \tag{22}$$

となる。

さて、δN formalism によれば [3]、ある初期値から inflation 終了までにかかった e-fold 数 N の各空間点毎のゆらぎ、δN がそのまま ζ になる。今の場合これは到達時刻そのものなので、$N := H_0\tau_m$ として、

$$\langle\delta N^2\rangle = \frac{H_0^4}{(4\pi)^2M_p^4\epsilon^2}\langle N\rangle, \tag{23}$$

が得られる。一方 power spectrum:

$$\mathcal{P}_{\delta N}(k) := \frac{k^3}{2\pi^2}\int d^3x\,\langle\delta N(0)\delta N(\mathbf{x})\rangle\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \tag{24}$$

を用い、ある初期値から inflation 終了までに古典化した mode が δN の分散に寄与していると思って、

$$\begin{aligned}\langle\delta N^2\rangle &= \int_{k_i}^{k_f}\frac{dk'}{k'}\mathcal{P}_{\delta N}(k') \\ &= \int_{\ln k_f - \langle N\rangle}^{\ln k_f}\mathcal{P}_{\delta N}(N)dN.\end{aligned} \tag{25}$$

ただし $k_f = a_fH_0$, $k_i = a_iH_0 = a_fH_0e^{-\langle N\rangle}$ であり、i, f の添字はそれぞれ inflation 開始時と終了時を表す。従って、

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_\zeta(k) = \mathcal{P}_{\delta N}(k) &= \frac{d}{d\langle N\rangle}\langle\delta N^2\rangle\bigg|_{\langle N\rangle = \ln k_f - \ln k} \\ &= \frac{H_0^4}{(4\pi)^2M_p^4\epsilon^2}.\end{aligned} \tag{26}$$

よく使われる slow-roll parameter $\epsilon_H := 2M_p^2(H'/H)^2 \simeq 2M_p^2\epsilon^2/H_0^2$ と、Friedmann 方程式 $V \simeq 3M_p^2H_0^2$ を使えば、

$$\mathcal{P}_\zeta = \frac{1}{24\pi^2M_p^4}\frac{V}{\epsilon_H}. \tag{27}$$

これはまさに通常の手法で求められる curvature perturbation である。

4 Numerical Calculation of ζ

前章では Hubble parameter を線形近似して解析計算を行ったが、一般の Hubble parameter に対しては運動方程式を数値的に解くことになる。数値計算によって ζ を求める方法をここにまとめておこう。

1. inflaton 場に対し、ある初期値 ϕ_i を決める。
2. 初期値 ϕ_i から inflation を開始し、運動方程式を数値積分し inflation 終了値 ϕ_f(例えば slow-roll parameter が 1 となる点) に初めて到達するまでの e-fold 数 N を計算する。この際雑音項 ξ は、数値積分の step 幅を Δt として、平均 0、分散 Δt の gaussian 分布をする乱数に置き換える。従って計算される N は計算するたびに異なる値をとる。これを繰り返すことで $\langle N\rangle$ や $\langle\delta N\rangle = \langle N^2\rangle - \langle N\rangle^2$ を得る。

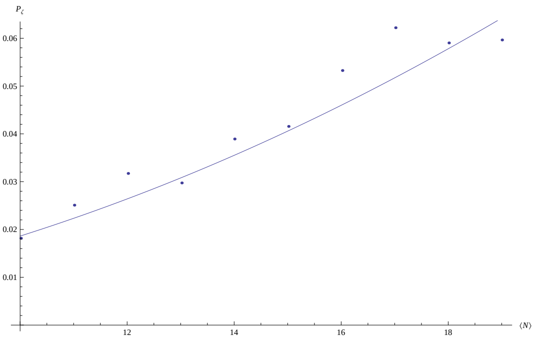

図 1: chaotic inflation ($V = m^2\phi^2/2$) に対する curvature perturbation の power spectrum の計算。$m = 0.1M_p$ である。data 点は stochastic formalism での数値計算結果であり、実線は $(24\pi^2 M_p^4)^{-1}V/\epsilon$ である。統計が足りなくて少し数値計算結果はばらついているが、それでも実線によく合うことがわかる。

3. この過程をさまざまに初期値 ϕ_i を変えて繰り返すことにより $\langle N\rangle$ と $\langle\delta N^2\rangle$ の関係を得、$\langle\delta N^2\rangle$ を $\langle N\rangle$ の関数として表せる。

4. 最終的に ζ の power spectrum は、

$$\mathcal{P}_\zeta(k) = \left.\frac{d\langle\delta N^2\rangle}{d\langle N\rangle}\right|_{\langle N\rangle=\ln k_f-\ln k}, \qquad (28)$$

で得られる。

例として質量項のみの chaotic inflation ($V(\phi) = m^2\phi^2/2$) に対し適用した結果を図 (1) に示した。少し統計は足りていないが、数値計算結果 (data 点) は通常の結果 $\mathcal{P}_\zeta = (24\pi^2 M_p^4)^{-1}V/\epsilon$(実線) によく一致していることがわかる。

5 Conclusion

この集録では δN formalism を用いることで stochastic inflation での curvature perturbation を計算する方法を提唱し、それが十分 slow-roll な single field の場合、通常の計算結果 $\mathcal{P}_\zeta = (24\pi^2 M_p^4)^{-1}V/\epsilon$ に一致することを、解析的、数値計算的の両方で示した。

この formalism では ϕ について全く摂動展開していないので、一度 N の計算を行ってしまえば、power spectrum だけでなくより摂動の高次の量 (non-gaussianity 等) の情報も含まれており、すぐに引き出せる。また single field だけでなく、multi field への拡張も自明である。さらに inflation の途中で potential が tachyonic になる等、量子ゆらぎが急激に発達するような model の場合 (hybrid inflaion 等)、通常であればゆらぎの分散が古典場の dynamics を凌駕するかどうかに強く注意しなければならないが、stochastic formalism では量子ゆらぎは古典場に取り込まれてしまっているので、そのような場合にも全く問題なく適用できる。ここではこれらについて詳しくは述べず、future work とする。

Reference

[1] M. Sasaki, Y. Nambu, and K. Nakao, Phys. Lett. **B209**, 197 (1988)

[2] S. E. Shreve, Stochastic Calculus for Finance II (Springer)

[3] D. H. Lyth, K. A. Malik, and M. Sasaki, JCAP 05 (2005) 004

[4] K.E. Kunze, JCAP 0607 (2006) 014