修正重力理論での短波長重力摂動

西 咲音 (立教大学大学院 物理学専攻)

Abstract

修正重力理論は一般相対性理論で説明のできないダークエネルギーなどを説明する理論であり，様々なものが存在している．ここで挙げる $f(R)$ 重力理論や scalar-tensor 理論はその一種である．一般相対性理論では Isaacson による手法でエネルギー運動量テンソルを求めることができるが，修正重力理論ではこれを応用させることでエネルギー運動量テンソルを求めることができる．

1 Introduction

修正重力理論は，一般相対性理論で説明のできないダークエネルギーやダークマターを用いなければ説明できない銀河の運動などを宇宙定数を使わずに説明する理論であり，様々なものがある．これから紹介する $f(R)$ 重力理論と scalar-tensor 理論も修正重力理論の中の一つだが，それぞれの理論の中にもいくつもの種類が存在している．ここでは簡単なものとして $f(R)$ 重力理論の $f(R) = R + cR^2$ の場合と，scalar-tensor 理論の中の Brans-Dicke 理論を扱う．計量の摂動が短波長であるとき，この摂動は放射流体のように振る舞うのだが，エネルギー運動量テンソル $T^{(eff)}_{\mu\nu}$ の振る舞いを見ていくこととする．

2 General Rerativity

$f(R)$ 重力理論と scalar-tensor 理論から $T^{(eff)}_{\mu\nu}$ を求める方法として，Isaacson による手法を参考にする．まずは一般相対性理論の場合を述べることとする．計量 $g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ について，特に制限のない場合では $\gamma_{\mu\nu}$ を平坦な時空の計量であるとして扱うが，空間の歪みに対して反作用が起きることで $\eta_{\mu\nu}$ は平坦ではなくなっていると考えることが出来る．この反作用による影響を，

$$\Gamma^{\alpha}_{\ \mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\ \mu\nu}{}^{(0)} + \Gamma^{\alpha}_{\ \mu\nu}{}^{(1)} + \Gamma^{\alpha}_{\ \mu\nu}{}^{(2)} + \cdots \quad (1)$$

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}{}^{(0)} + R_{\mu\nu}{}^{(1)} + R_{\mu\nu}{}^{(2)} + \cdots \quad (2)$$

このように，括弧内に $h_{\mu\nu}$ の字数を示し展開して考える．このことから，$g^{\mu\nu}$,$S^{\mu}_{\ \beta\nu}$,$R_{\mu\nu}{}^{(0)}$,$R_{\mu\nu}{}^{(1)}$,$R_{\mu\nu}{}^{(2)}$ を求め，これらを用いて空間平均を考える．以降 $g^{\mu\nu}$ についての共変微分を “;”，$\gamma^{\mu\nu}$ についての共変微分を “|” で区別する．$g^{\mu\nu}$ は，

$$g^{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} + h^{\mu\alpha}h_{\alpha}^{\ \nu} - h^{\mu\alpha}h^{\beta}_{\alpha}h^{\nu}_{\beta} + O(h^4) \quad (3)$$

このようにおくと，

$$g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = \delta^{\nu}_{\mu} + O(h^4) \quad (4)$$

となり，(3) 式を用いてよいことがわかる．$S^{\mu}_{\ \beta\nu}$ については,

$$S^{\mu}_{\ \beta\nu} \equiv \Gamma^{\mu}_{\ \beta\nu} - \Gamma^{\mu}_{\ \beta\nu}{}^{(0)} \quad (5)$$

と定義すると，

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta\nu} &= g_{\alpha\mu}S^{\mu}_{\ \beta\nu} = g_{\alpha\mu}(\Gamma^{\mu}_{\ \beta\nu} - \Gamma^{\mu}_{\ \beta\nu}{}^{(0)}) \\ &= \frac{1}{2}(h_{\alpha\beta|\nu} + h_{\nu\alpha|\beta} - h_{\beta\nu|\alpha}) \quad (6) \end{aligned}$$

となる．$R_{\mu\nu}{}^{(1)}$ については，$R^{\mu}_{\ \alpha\beta\nu}$ が

$$R^{\mu}_{\ \alpha\beta\nu} = \Gamma^{\mu}_{\ \alpha\beta,\nu} - \Gamma^{\mu}_{\ \nu\alpha,\beta} + \Gamma^{\mu}_{\ \rho\nu}\Gamma^{\rho}_{\ \alpha\beta} - \Gamma^{\mu}_{\ \rho\beta}\Gamma^{\rho}_{\ \alpha\nu} \quad (7)$$

であることから，

$$\begin{aligned} R^{\mu}_{\ \alpha\beta\nu} - R^{\mu}_{\ \alpha\beta\nu}{}^{(0)} &= S^{\mu}_{\ \alpha\beta|\nu} - S^{\mu}_{\ \alpha\nu|\beta} \\ &\quad + S^{\mu}_{\ \rho\nu}S^{\rho}_{\ \alpha\beta} - S^{\mu}_{\ \rho\beta}S^{\rho}_{\ \alpha\nu} \\ &= R_{\mu\nu}{}^{(1)} + R_{\mu\nu}{}^{(2)} + \cdots \quad (8) \end{aligned}$$

(6) 式から $S_{\alpha\beta\nu}$ は $h_{\mu\nu}$ の一次以上の項から成り立っていることがわかるので，これを考慮すると $R_{\mu\nu}{}^{(1)}$ と $R_{\mu\nu}{}^{(2)}$ は,

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}{}^{(1)} &= S^{\mu}_{\ \alpha\beta|\nu} - S^{\mu}_{\ \alpha\nu|\beta} \\ &= \frac{1}{2}\left(h_{\mu\alpha|\beta}{}^{\mu} + h_{\beta\mu|\alpha}{}^{\mu} - h_{\alpha\beta|\mu}{}^{\mu} - h_{\alpha\beta}\right) \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu}{}^{(2)} &= S^{\mu}{}_{\alpha\beta|\nu}^{(2)} - S^{\mu}{}_{\alpha\nu|\beta}^{(2)} \\
&\quad + S^{\mu}{}_{\rho\nu}^{(1)} S^{\rho}{}_{\alpha\beta}^{(1)} - S^{\mu}{}_{\rho\beta}^{(1)} S^{\rho}{}_{\alpha\nu}^{(1)} \\
&= \frac{1}{4} h^{\mu\nu}{}_{|\beta} h_{\mu\nu|\alpha} \\
&\quad + \frac{1}{2} h^{\mu\nu} (h_{\mu\nu|\alpha\beta} + h_{\alpha\beta|\mu\nu} - h_{\mu\alpha|\beta\nu} \\
&\quad - h_{\mu\beta|\alpha\nu}) - \frac{1}{2}\left(h^{\mu\nu}{}_{|\nu} - \frac{1}{2} h^{|\mu} \right) \\
&\quad \left(h_{\mu\alpha|\beta} + h_{\mu\alpha|\beta} - h_{\alpha\beta|\mu} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} h_{\beta}{}^{\mu|\nu} (h_{\alpha\mu|\nu} - h_{\nu\alpha|\mu})
\end{aligned} \tag{10}$$

ここまで求められたところで，空間平均について考えることにする．(2) 式について空間平均をとると，

$$\begin{aligned}
\langle R_{\mu\nu} \rangle &= \langle R_{\mu\nu}{}^{(0)} \rangle + \langle R_{\mu\nu}{}^{(1)} \rangle + \langle R_{\mu\nu}{}^{(2)} \rangle + \cdots \\
&= R_{\mu\nu}{}^{(0)} + \langle R_{\mu\nu}{}^{(2)} \rangle + \cdots \\
&= 0
\end{aligned} \tag{11}$$

である．これについては，計量 $g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ の各項のオーダーをみることで，リッチテンソルを展開した項についてもオーダーごとに考えることが出来る．$\gamma_{\mu\nu}$ の曲率半径を R，重力波の波長を λ $(R \gg \lambda)$ とすると，

$$\gamma_{\mu\nu} = O(1), \gamma_{\mu\nu,\alpha} = O\left(\frac{1}{R}\right), \gamma_{\mu\nu,\alpha\beta} = O\left(\frac{1}{R^2}\right) \tag{12}$$

$$h_{\mu\nu} = O(h), h_{\mu\nu,\alpha} = O\left(\frac{h}{\lambda}\right), h_{\mu\nu,\alpha\beta} = O\left(\frac{h}{\lambda^2}\right) \tag{13}$$

となるので，

$$R_{\mu\nu}{}^{(1)} = 0 \tag{14}$$

$$R_{\mu\nu}{}^{(0)} + \langle R_{\mu\nu}{}^{(2)} \rangle = 0 \tag{15}$$

$$R_{\mu\nu}{}^{(2)} - \langle R_{\mu\nu}{}^{(2)} \rangle + \langle R_{\mu\nu}{}^{(3)} \rangle + \cdots = 0 \tag{16}$$

このように分けることができる．(14) 式を波動成分，(15) 式を平均成分，(16) 式を高次揺らぎ成分という．(15) 式に着目すると，アインシュタインテンソル $G_{\mu\nu}$ について $\langle R_{\mu\nu}{}^{(2)} \rangle$ を用いて表すことが出来る．

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu}{}^{(0)} &= R_{\mu\nu}{}^{(0)} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu} R^{\ \ (0)} \\
&= -\left(\langle R_{\mu\nu}{}^{(2)} \rangle - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu} \langle R^{\ \ (2)} \rangle \right) \\
&\equiv \frac{8\pi G}{c^4} t_{\mu\nu}^{GW}
\end{aligned} \tag{17}$$

ここで前述で求めた $\langle R_{\mu\nu}{}^{(2)} \rangle$ を用いることが出来る．TT ゲージで指定された条件 $h^{\mu\nu}{}_{|\nu} = 0$ と $h = 0$ より，(9) 式と (10) 式は簡単にすることができ，

$$\langle R_{\alpha\beta}{}^{(1)} \rangle = 0 \tag{18}$$

$$\langle R_{\alpha\beta}{}^{(2)} \rangle = -\frac{1}{4} \langle h^{\mu\nu}{}_{|\beta} h_{\mu\nu|\alpha} \rangle \tag{19}$$

$$\langle R^{(2)} \rangle = \frac{1}{4} \langle h^{\mu\nu} h_{\mu\nu|\alpha}{}^{\alpha} \rangle = 0 \tag{20}$$

よって $t_{\mu\nu}^{GW}$ は，TT ゲージでは $h_{0\mu} = 0$ であることを考慮すると、

$$\begin{aligned}
t_{\mu\nu}^{GW} &= \frac{c^4}{32\pi} \langle h_{\alpha\beta|\mu}^{TT} h^{TT\alpha\beta}{}_{|\nu} \rangle \\
&= \frac{c^4}{32\pi} \left\langle h_{ij|\mu}^{TT} h^{TTij}{}_{|\nu} \right\rangle
\end{aligned} \tag{21}$$

となり，アイザックソンの式が得られる．

3 f(R) theory

次に $f(R)$ 重力理論の場合について紹介する．一般相対論では作用を

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x L_M \tag{22}$$

とするが，この式は f(R) 重力理論では

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + \int d^4x L_M \tag{23}$$

とする．L_M は物質場についてのラグランジアンである．これを $g_{\mu\nu}$ について変分を行い，

$$f = f - R \ , \ F = \frac{df}{dR} \tag{24}$$

とすると

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu}^{f(R)} &= G_{\mu\nu} + F R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f \\
&\qquad - \nabla_\mu \nabla_\nu F + g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \nabla_\rho \nabla_\sigma F \\
&= \kappa^2 T_{\mu\nu}^{(0)}
\end{aligned} \tag{25}$$

が得られる．$G_{\mu\nu}^{f(R)}$ は一般相対論におけるアインシュタインテンソルであり，$G_{\mu\nu}^{f(R)}$ は修正された Einstein テンソルを表している．＃式では一般相対論でのアインシュタイン方程式に f(R) の寄与による項が加えられていることがわかる．これが f(R) 理論によって

修正されたアインシュタイン方程式である．ここでこの修正されたアインシュタイン方程式から Isaacson の方法と同様にしてオーダーごとに式を分解していくと，$f(R)$ 重力理論でのエネルギー運動量テンソルは (25) 式から $O(1)$ の部分を取り出すことで得られ，

$$\begin{aligned}\kappa^2 T^{(eff)}_{\mu\nu} \;=\; & -\Big\langle (1+2cR[g^0])R^{(2)}_{\mu\nu}[h] - \frac{1}{2}g^{(0)}_{\mu\nu}S_1 \\ & +2c\{(R^{(3)}[h] - h^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma}[g^{(0)}])R^{(1)}_{\mu\nu}[h] \\ & +S_1(R_{\mu\nu}[g^{(0)}] + R^{(2)}_{\mu\nu})\} \\ & -\frac{c}{2}g^{(0)}_{\mu\nu}(2R[g^{(0)}] + S_1)S_1 \\ & +2c(-g^{(0)}_{\mu\nu}h^{\rho\sigma})(\nabla_\rho\nabla_\sigma R^{(3)}[h] \\ & -R_{\alpha\beta}[g^{(0)}]\nabla_\rho\nabla_\sigma h^\beta)\Big\rangle \end{aligned} \tag{26}$$

となる．

4 Scalar-tensor theory

さらに，scalar-tensor 理論の中の Brans-Dicke 理論を扱う．Brans-Dicke 理論では，作用を

$$\begin{aligned} S \;=\; & \tfrac{1}{\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}\left\{\tfrac{1}{2}\phi R - \tfrac{\omega_{BD}}{2\phi}\nabla^a\phi\nabla_a\phi - V(\phi)\right\} \\ & +\int d^4x L_M \end{aligned} \tag{27}$$

とする．この式において，ϕ は無次元のスカラー場であり，ω_{BD} は Brans-Dicke パラメータと呼ばれる定数であり，ここでは

$$\omega_{BD} = 0 \tag{28}$$

とする．$V(\phi)$ はポテンシャルを表しており，

$$V = \frac{F(R)R - f(R)}{2} \tag{29}$$

であり，ϕ は，

$$\phi = F(R) \equiv \frac{df(R)}{d(R)} \tag{30}$$

であるとすると，

$$\Box\phi - \frac{1}{2\phi}\nabla^\mu\phi\nabla_\mu\phi = \kappa^2 T^{(0)\ \mu}_{\phi\ \mu} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}&\phi(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) - \nabla_\mu\nabla\nu\phi \\ &\quad +g_{\mu\nu}(g^{\rho\sigma}\nabla_\rho\nabla_\sigma\phi + V(\phi)) = \kappa^2 T^{(0)}_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{32}$$

ここで，ϕ を短波長の摂動の項を含めたものに拡張すると，

$$\phi = \phi_0 +, \phi \tag{33}$$

この ,ϕ について，$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ の場合では

$$\Box h_{\mu\nu} = 0 \tag{34}$$

の波動方程式が導出されたことから，

$$\Box, \phi = 0 \tag{35}$$

が運動方程式であることがわかる．さらにこれより

$$R^{(1)}[h] = \frac{3}{\phi_{(0)}}\Box, \phi = 0 \tag{36}$$

$$R^{(1)}[h]_{\mu\nu} = \frac{1}{\phi_{(0)}}\nabla_\mu\nabla_\nu, \phi \tag{37}$$

が得られるので，結果として scalar-tensor 理論でのエネルギー運動量テンソルは

$$\begin{aligned}\kappa^2 T^{(eff)}_{\mu\nu} \;=\; & - < \phi_0 R^{(2)}_{\mu\nu}[h] +, \phi R^{(1)}_{\mu\nu}[h] \\ & -g^{(0)}_{\mu\nu}h^{\rho\sigma}\nabla_\rho\nabla_\sigma, \phi > \end{aligned} \tag{38}$$

となる．

5 Discussion and Conclusion

ここまで修正重力理論における短波長摂動でのエネルギー運動量テンソルの導出を紹介してきた．初めに述べたように，修正重力理論には $f(R)$ 重力理論や scalar-tensor 理論以外にもいくつもの種類がある．例えば Galileon 重力理論では作用 S は，

$$\begin{aligned} S = \int d^4x\sqrt{-g}[\frac{M^2_{pl}}{2}F(\phi)R + K(\phi, X) \\ - G(\phi, X)\Box\phi + L_m] \end{aligned} \tag{39}$$

と表される．ここで，

$$M^2_{pl} = (8\pi G)^{-\frac{1}{2}} \quad , \quad X = -\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 \tag{40}$$

であり，$K(\phi, X)$ と $G(\phi, X)$ は ϕ と X の関数である．$K(\phi, X)$ と $G(\phi, X)$ の 2 つの関数について具体的な表式を与えると，$f(R)$ 重力理論やスカラーテンソル理論での手法を参考にすることができる．また，

Graviton の質量は 0 であるとされているが，質量を持つ場合の massive graviton の振る舞いについても議論が行われている．この場合のエネルギー運動量テンソル $T^{eff}\mu\nu$ がどのような振る舞いをするのかを調べることは今後の研究において非常に有益であると考えられる．

Reference

[1] Keiki Saito and Akihiro Ishibashi, (2013) arXiv:1209.5159.

[2] R.A.Isaacson, (1968) Phys. Rev., 166, 1263

[2] R.A.Isaacson, (1968) Phys. Rev., 166, 1272

[3] HIRANO Koichi, and KOMIYA Zen, and SHIRAI Hisato, (2012) Progress of theoretical physics 127(6)