Stable traversable wormholes

国分 隆文 (立教大学大学院 理学研究科)

Abstract

ワームホールが自然界に存在できるかどうかを考えるときには、その安定性を考えればよい。本発表では、通行可能なワームホールが動径方向の線形摂動に対して安定である、という Peter K.F.Kuhfittig[1] の仕事のレビューと拡張をする。

1 Introduction

ワームホールとは我々の宇宙の異なる 2 点間、又は異なる宇宙同士を繋ぐ時空のトンネルである。通行可能なワームホールの存在は Morris と Thorne によってはじめて提唱された（Morris-Thorne wormhole)[2]。Kuhfittig は Morris-Thorne wormhole（MS-wh）の安定性を調べるため、MS-wh の内部と Schwarzschild BH の外部との接続面を調べ、MS-wh が動径方向の線形摂動に対して安定であるための接続面での redshift function と shapefunction の条件を導いた。

2 Traversable wormhole

$c = G = 1$ を用いる。Traversable wormhole の線素は

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)}dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{b(r)}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \tag{1}$$

また、Schwarzschild BH の線素は

$$ds^2 = -(1-\frac{2M}{r})dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{2M}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \tag{2}$$

$\phi(r)$,$b(r)$ はそれぞれ redshift function、shape function。$b(r)$ の最小値 $B(r_0) = r_0$ はワームホールのノドの半径と呼ばれる。

MS-wh の内部解と Schwarzschild BH の外部解は $r = a$ の接続面 S において一致する。よって K_{ij} を S と交わる extrinsic curvature とすると stress-energy tensorS^i_j は Lanczos equation

$$S^i_j = -\frac{1}{8\pi}([K^i_j - \delta^i_j[K]) \tag{3}$$

で与えられる。ここで

$[X] = \lim_{r\to a_+} X - \lim_{r\to a_-} X = X^+ - X^-$

である。

$[K_{ij}] = K^+_{ij} - K^-_{ij}$ で、これは extrinsic curvature の不連続性を表す。また、$[K]$ は $[K^i_j]$ のトレースである。

エネルギー密度 σ、表面の圧力 P を使えば S^i_j は S^i_j =diag$(-\sigma, P, P)$ となり Lanczos equation は

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}[K^\theta_\theta], \tag{4}$$

$$P = \frac{1}{8\pi}([K^\tau_\tau] + [K^\theta_\theta]). \tag{5}$$

$r = a(t)$ と考えると、$[K^\tau_\tau][K^\theta_\theta]$ から σ が

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi a}(\sqrt{1-\frac{2M}{a}+\dot{a}^2} - \sqrt{1-\frac{b(a)}{a}+\dot{a}^2}) \tag{6}$$

とわかる。これを整理すると

$$\dot{a} + V(a) = 0, \tag{7}$$

$$V(a) = 1 - \frac{1}{a}(\frac{b(a)}{2}+M) - \frac{m_s^2}{4a^2} - (\frac{M-\frac{b(a)}{2}}{m_s})^2. \tag{8}$$

$m_s = 4\pi a^2\sigma$ は接続面の質量（thin shell）。

$a = a_0$ の周りで線形化したとき、V は $V(a_0)$ で極小値をとり、$V(a_0) = 0$,$V'(a_0) = 0$,$V''(a_0) > 0$ となる。

これにより、接続面 S は MS-wh のノドより十分離れていることが分かったので $\sigma > 0$ であると推測できる。すると (6) から $b(a) < 2M$ となり、Schwarzschild 解 $b(a) = 2M$ より小さくなる。

3 The line element

我々は $b = b(r)$ を、$r = a$ で最大値をとる 2 階微分可能な r の単調増加関数であると要請する。言い換えると $r \to a$ で $b'(r) \to 0$ となるように要請する。Schwarzschild 解 (2) を意識して、$r > a$ で $b(r) = 2M$ とする。するとこれは $b(r)$ の 1 階、2 階微分もどちらも接続面 $r = a$ で連続である。また (6) から $r = a$ で $\sigma = 0$ である。ここで $r = a$ で $P = 0$ であれば $S^i_j = 0$ となる。このため $\phi(r)$ を次のように選ぶ。

$$\phi'(a_-) = \frac{M}{a(a-2M)} \tag{9}$$

$r > a$ では $\phi(r) = \frac{1}{2}\ln(1 - \frac{2M}{r})$ なので $\phi'(a_-) = \phi'(a_+)$ となり、$r = a$ で $K^{\tau+}_\tau - K^{\tau-}_\tau = 0$, $K^{\theta+}_\theta - K^{\theta-}_\theta = 0$ である。よって $r = a$ で $P = 0$。
上のように $\phi(r)$ を選んだことによって、線素は

$$\begin{aligned} ds^2 &= -e^{2\phi(r)}dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{b(r)}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \\ &\qquad (r \le a), \\ ds^2 &= -e^{2\phi(r)}dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{b(a)}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \\ &\qquad (r > a). \end{aligned} \tag{10}$$

特に

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}g_{tt}(a_-) &= \frac{d}{dr}g_{tt}(a_+), \\ \frac{d}{dr}g_{rr}(a_-) &= \frac{d}{dr}g_{rr}(a_+). \end{aligned} \tag{11}$$

S において stress-energy tensor はゼロなので、この接続は thin shell ではなく境界面である。また、K_{ij} は S で連続である。

4 Stability

前節で、S の圧力がゼロならば接続は境界面であることがわかった。つまり $r \to a_-$ で $b'(r) \to 0$ なので $b(r)$ は $r = a$ で滑らかにつながる。
(6) を r 微分すると

$$\begin{aligned} \sigma' = \frac{\dot\sigma}{\dot a} = \frac{1}{4\pi a^2}\Bigg(&\frac{1 - \frac{3M}{a} + \dot a^2 - a\ddot a}{\sqrt{1 - \frac{2M}{a} + \dot a^2}} \\ &- \frac{1 - \frac{3b(a)}{2a} + \frac{b'(a)}{2} + \dot a^2 - a\ddot a}{\sqrt{1 - \frac{b(a)}{a} + \dot a^2}}\Bigg) \end{aligned} \tag{12}$$

安定性の解析には $V''(a)$ が必要である。そして $V''(a)$ は $m_s'' = (4\pi a^2\sigma)''$ を含むので (12) を次の形に書いておく。

$$\sigma' = -\frac{1}{4\pi}(\Theta(r-a)\frac{d}{dr}K^{\theta+}_\theta + \Theta[-(r-a)]\frac{d}{dr}K^{\theta-}_\theta) \tag{13}$$

ここで Θ はヘビサイド関数である。
$b'(a_0) = 0$ の場合 (12) は $r = a$ で連続であり、これは $V''(a_0)$ の中に δ 関数が入っていないということである。(12) で σ' を static solution で評価すると、$a \to a_0$ で連続的に最小値ゼロに近づく。ゆえに、開区間 $(a_0 - \epsilon, a_0)$ において $\sigma > 0$ である（ϵ は任意に小さいが non zero）。よって $a_0 - \epsilon$ から a_0- の boundary layer で $\sigma \sim const \neq 0$ となり、また、$\bar a \in (a_0 - \epsilon, a_0)$ という $\bar a$ に対して、$m_s = 4\pi\bar a^2$ であり、これは任意に小さくできる。
(8) に戻って、条件 $b'(a_0) = 0$ を使うと $V''(a_{0-})$ が分かる。

$$\begin{aligned} V''(a_{0-}) = &-\frac{b''(a_{0-})}{a_{0-}} - \frac{b(a_{0-}) + 2M}{{a_{0-}}^3} \\ &- \frac{3{m_s}^2}{2(a_{0-})^4} + \frac{b''(a_{0-})[M - \frac{1}{2}b(a_{0-})]}{{m_s}^2} \end{aligned} \tag{14}$$

(14) の第 3 項は m_s を小さくしていくと消える。第 4 項も消える。そして $V''(a_{0-}) > 0$ から、

$$b''(a_{0-}) < -\frac{2[b(a_{0-}) + 2M]}{(a_{0-})^2} \tag{15}$$

が得られ、また ϵ を使って

$$b''(a_{0-} - \epsilon) < -\frac{2[b(a_{0-} - \epsilon) + 2M]}{(a_{0-} - \epsilon)^2} \tag{16}$$

と書ける。そして $b(r)$ と a^2 の連続性から次が言える。

$$b''(a_0) < -\frac{8M}{(a_0)^2} \tag{17}$$

5 Conclusion

以上の議論より、$a = a_0$ で $b = b(r)$ が $b''(a_0) < -8M/a_0^2$ を満たす時、MS-wh は動径方向の線形摂動に対して安定になる。
講演ではこの Kuhfittig の仕事の拡張を発表する。

6 参考文献

[1]Peter K.F.Kuhfittig,Cent.Eur.J.Phys.8(3),364-368(2010) [2]M.S.Morris and K.S.Thorne,Am.J.Phys.56,395(1988)
[3]M.Visser,Lorentzian Wormholes:From Einstein to Hawking(American Insitute of Physics,New york,1995)