

連星パルサーから放出される重力波

原田 尚也 (弘前大学大学院 理工学研究科)

Abstract

本研究では二体系のダイナミクスに対する重力波放出の影響を調べた。具体的には楕円運動する 2 体系の四重極モーメントから、連星系の単位時間あたりのエネルギー損失やそれに伴う軌道周期の減少を求め、その結果から離心率や軌道長半径の時間変化を求めた。また、連星が合体するまでに要する時間を求め、連星パルサー PSR1913+16 の場合で評価した。その結果、参考文献の結果と一致することが確認された。

1 Introduction

重力波は一般相対性理論から予言される波動である。重力波は質量を持った物質の加速度運動により生じる時空間の歪みの変化が伝わっていく波であり、重力場の変化が激しいほど、すなわち物質の質量と運動速度が大きいほどその振幅は大きくなる。

PSR1913+16 は 1974 年、マサチューセッツ工科大学の Joseph Taylor と Russel Hulse によって発見された連星系を成したパルサーであり、その軌道周期の減少が観測されている。これは重力波の間接的な証拠である。一方で、重力波は直接検出されたことが未だない。その理由として振幅が非常に小さいことがあげられる。

重力波はほかの物質とほとんど相互作用しない。そのため電磁波では対象となる天体と観測者の間に物質が存在すると吸収や散乱のために観測が困難となってしまうが、重力波では天体の観測が可能である。更に電磁波やニュートリノが自由に飛び回る以前の初期宇宙についての情報は、重力波を検出することで知ることが出来ると期待される。

現在、重力波を直接検出するために LIGO や LISA などの計画が進行しており、重力波が直接検出される見通しとなっている。ノイズに埋もれた観測データから重力波を抽出するためには重力波の波形の理論予測が必要である。そのためにはまず重力波源の動力学を正確に知ることが重要がある。

2 重力波の導出

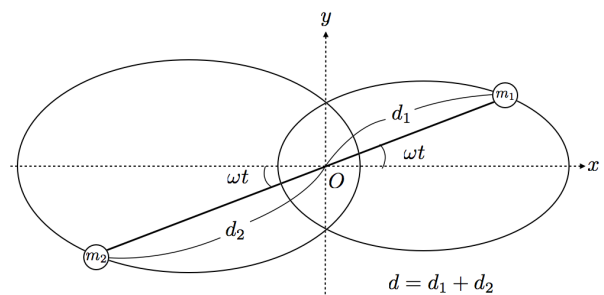


図 1: 連星の質量をそれぞれ m_1, m_2 とし、重心からの距離をそれぞれ d_1, d_2 とする。角速度は ω である。また、換算質量 μ は $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ である。

質量分布に関する四重極モーメントはエネルギー密度と各空間成分との積の体積分

$$I^{lm} = \int T^{00} x^l x^m d^3x$$

で与えられる (Schutz 1998)。よって連星の四重極モーメントは

$$I_{xx} = \frac{1}{2} \mu d^2 \cos 2\omega t$$

$$I_{yy} = \frac{1}{2} \mu d^2 (1 - \cos 2\omega t)$$

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \frac{1}{2} \mu d^2 \sin 2\omega t \\ &= I_{yx} \end{aligned}$$

ここで

$$d = d_1 + d_2$$

とした。四重極モーメントのその他の成分はすべてゼロになる。重力波の放射は次のように表せる (Schutz 1998) :

$$\begin{aligned}\bar{h}_{xx}^{TT} &= -\bar{h}_{yy}^{TT} = \frac{1}{r} (\ddot{I}_{xx} - \ddot{I}_{yy}) \\ \bar{h}_{xy}^{TT} &= \frac{2}{r} \ddot{I}_{xy}\end{aligned}$$

ここで r は地球から連星までの距離である。代入すると

$$\begin{aligned}\bar{h}_{xx}^{TT} &= -\frac{4m_1 m_2 G^2}{rac^4 (1 - e^2)} \\ &\quad \times \left(\cos 2\omega t + \frac{e}{2} \cos \omega t + e \cos^3 \omega t + \frac{e^2}{2} \right) \\ \bar{h}_{xy}^{TT} &= -\frac{4m_1 m_2 G^2}{rac^4 (1 - e^2)} \\ &\quad \times (\sin 2\omega t + 2e \sin \omega t - e \sin^3 \omega t)\end{aligned}$$

となる。ここで G, c, a, e はそれぞれ重力定数、光速、軌道長半径、離心率である。 \bar{h}^{TT} はトレース反転テンソルと呼ばれ

$$\bar{h}_{\alpha\beta}^{TT} \equiv h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta}$$

で定義される。PSR1913+16 で振幅の最大値を評価すると (Weisberg and Taylor 2005)、楕円運動する連星から放出される重力波の振幅は $h^{TT} \sim 10^{-22}$ となる。

3 重力波放出により変化する量

系の重力波の光度は

$$L_{GW} = \frac{1}{5} \langle \ddot{I}_{jk} \ddot{I}^{jk} \rangle$$

となる (Schutz 1998)。ここで山形括弧は 1 周期にわたる平均操作を表す。これを計算すると、重力波による系のエネルギー損失は

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \left\langle -\frac{32 \mu^2 (m_1 + m_2)^3}{5 a^5 (1 - e^2)^{\frac{7}{2}}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right) \right\rangle$$

E は系の全エネルギーである。重力波放出による軌道長半径の時間変化は

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle &= -\frac{64 G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{5 c^5 a^3 (1 - e^2)^{\frac{7}{2}}} \\ &\quad \times \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right)\end{aligned}\quad (1)$$

となる。Newton 力学では、連星系のエネルギーは

$$E = \frac{G^2 \mu^3 (m_1 + m_2)^2}{2L^2} (e^2 - 1)$$

である。ここで L は系の全角運動量である。よって離心率は

$$e^2 = 1 + \frac{2L^2 E}{G^2 \mu^3 (m_1 + m_2)^2}$$

と表される。整理して両辺を時間微分し、平均操作をすると、離心率の時間変化は

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle &= -\frac{304}{15} e \frac{G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{c^5 a^4 (1 - e^2)^{\frac{5}{2}}} \\ &\quad \times \left(1 + \frac{121}{304} e^2 \right)\end{aligned}\quad (2)$$

となる。

4 軌道長半径と離心率の関係

(1) を (2) で辺々割り算すると

$$\frac{da}{de} = \frac{12}{19} \frac{a}{e(1 - e^2)} \frac{(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4)}{(1 + \frac{121}{304} e^2)}$$

この積分をとると

$$\left(\frac{e}{e_0} \right)^{\frac{12}{19}} = \frac{a}{a_0} \frac{1 - e^2}{1 - e_0^2} \left(\frac{1 + \frac{121}{304} e^2}{1 + \frac{121}{304} e_0^2} \right)^{-\frac{870}{2299}}\quad (3)$$

ここで e_0, a_0 は現在の離心率と軌道長半径である。 $a/a_0 \ll 1$ では

$$e \simeq \left(\frac{a}{a_0 (1 - e_0^2)} \right)^{\frac{12}{19}} e_0$$

となり、たとえ初期の離心率が 1 であっても離心率はゼロに近づくことがわかる (図 2)。

5 連星が合体するまでの時間

連星が合体するまでの時間 t_c を計算する。 $e = 0$ のとき

$$\int_{a_0}^a a^3 da = \int_0^t \left(-\frac{64 G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{5 c^5 a^3} \right) dt$$

よって

$$\begin{aligned}a(t) &= a_0 \left(1 - \frac{t}{t_c(a_0)} \right)^{\frac{1}{4}} \\ t_c(a_0) &= \frac{5}{256} a_0^3 \left(\frac{Gm_1}{c^2} \right)^{-1} \left(\frac{Gm_2}{c^2} \right)^{-1} \\ &\quad \times \left(\frac{G(m_1 + m_2)}{c^2} \right) \left(\frac{a_0}{c} \right) \\ &= 1.48 \times 10^8 \text{y} \\ &\quad \times \left(\frac{a_0}{R_s} \right)^4 \left(\frac{M_s}{m_1} \right) \left(\frac{M_s}{m_2} \right) \left(\frac{M_s}{m_1 + m_2} \right)\end{aligned}$$

R_s, M_s はそれぞれ太陽半径と太陽質量である。宇宙の年齢は $1.4 \times 10^{10} \text{y}$ と考えられているので、宇宙年齢内に連星が合体するには $t_c < 1.4 \times 10^{10} \text{y}$ となればよい。これより

$$a_0 < 3.7R_s$$

となれば円運動をする連星は重力波放出により宇宙年齢以内に衝突する。

次に楕円運動 $e \neq 0$ の場合を考える。軌道長半径は (3) より

$$a = a_0 \times g^{-1}(e_0) \times g(e)$$

と表せる。ここで

$$g(e) = \frac{e^{\frac{19}{12}}}{1-e^2} \left(1 + \frac{121}{304} e^2 \right)^{\frac{870}{2299}}$$

とした。 $e \rightarrow 1$ のとき

$$g(e) \simeq 3.57 \times \frac{1}{1-e^2}$$

また、 $e^2 \rightarrow 0$ のとき

$$g(e) \simeq e^{\frac{13}{15}}$$

楕円軌道における合体するまでの時間は

$$\int_0^{t_c(a_0, e_0)} dt = -\frac{15}{304} \frac{c^5}{G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)^2} \times \int_{e_0}^0 \frac{a^4(e) (1-e^2)^{\frac{5}{2}}}{e (1 + \frac{121}{304} e^2)} de$$

よって

$$t_c(a_0, e_0) = \frac{15}{304} \frac{c^5}{G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)^2} \frac{a_0^4}{g^4(e_0)} \times \int_0^{e_0} g^4(e) \frac{(1-e^2)^{\frac{5}{2}}}{e (1 + \frac{121}{304} e^2)} de$$

$e_0 \rightarrow 1$ の極限で $e \simeq 1$ の場合を考えると

$$t_c(a_0, e_0) \simeq \frac{768}{425} t_c(a_0) (1-e_0^2)^{\frac{7}{2}}$$

よって、楕円軌道の場合と円軌道の場合での合体するまでの時間の比は

$$\frac{t_c(a_0, e_0)}{t_c(a_0)} \simeq 1.8 (1-e_0^2)^{\frac{7}{2}}$$

$e_0 \rightarrow 0$ のときは $\frac{t_c(a_0, e_0)}{t_c(a_0)} \simeq 1$ となる。

初期の離心率の極限をとらない場合、定数部分 $G(e_0)$ を e_0 に依存する関数とすると

$$\frac{t_c(a_0, e_0)}{t_c(a_0)} \simeq G(e_0) (1-e_0^2)^{\frac{7}{2}}$$

と表せる。 $G(e_0)$ は e_0 が 1 に近いとき以外は 1 と見なせる (Maggiore 2008)。よって、 e_0 が 1 に近くないとき

$$\frac{t_c(a_0, e_0)}{t_c(a_0)} = (1-e_0^2)^{\frac{7}{2}}$$

となる (図 3)。円軌道の場合と楕円軌道の場合で PSR1913+16 が合体するまでの時間を評価すると

$$t_c(a_0) = 1.67 \times 10^9 \text{y}$$

$$t_c(a_0, e_0) = 3.12 \times 10^8 \text{y}$$

となり、オーダーが変わるので連星が合体するまでの時間を考える際には離心率は無視できない。

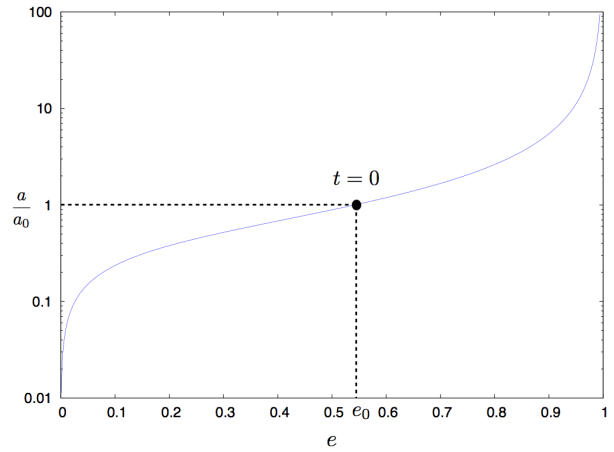


図 2: 軌道長半径 a と離心率 e の関係。横軸は離心率、縦軸は軌道長半径を $t = 0$ の時の軌道長半径 a_0 で割ったもの。

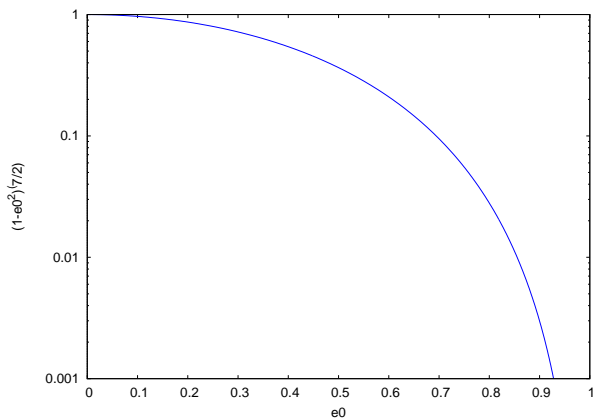


図 3: chirptime の離心率依存性。横軸は $t = 0$ での離心率 e_0 、縦軸は楕円軌道での合体するまでの時間 $t_c(a_0, e_0)$ を円軌道での時間 $t_c(a_0)$ で規格化した。

6 結論

重力波放出によって系はエネルギーと角運動量を失う。それに伴い軌道長半径、離心率、軌道周期も減少する。離心率と軌道長半径の関係を調べると、楕円運動する連星は円運動に近づきながら合体する。重力波による連星の軌道変化を考える際は離心率を考慮すべきであるが、合体する直前は円軌道と見なしでも良い。連星が合体するまでの時間は円軌道と楕円軌道ではそれぞれ異なり、PSR1913+16 では 1 桁のオーダーで異なる。

連星が合体するとき放出される重力波が大きくなることが知られているが、PSR1913+16 が合体するまでにおおよそ 3 億年かかるので、近いうちに合体する連星パルサーを発見することが重要となる。

今回は二体系で考えたが、二体系だけではなく多体系からの重力波の研究や、重力波を導き出すまでの近似を更に高次の部分まで考慮したものにすればより厳密な理論予測が可能になるだろう。

Reference

- BERNARD F.SCHUTZ (江里口良治・二間瀬敏史 共訳)
「シュッツ 相対論入門 I 特殊相対論」丸善株式会社 (1988)
- BERNARD F.SCHUTZ (江里口良治・二間瀬敏史 共訳)
「シュッツ 相対論入門 II 一般相対論」丸善株式会社 (1988)
- 中村卓史・三尾典克・大橋正健編著「重力波をとらえる—存在の検出から証明へ」、京都大学学術出版会 (1998)
- Michele Maggiore 「Gravitational Waves Volume1 Theory and Experiments」OXFORD UNIVERSITY PRESS(2008)
- J. M. Weisberg and J. H. Taylor. Pub. in Binary Radio Pulsars, Proc. (2004).