

修正重力理論におけるカメレオン機構の解析

伊藤 仁力 (東京理科大学大学院 辻川研究室)

Abstract

近年の観測より宇宙は加速膨張していること、その源が正体が未だに解明されていない暗黒エネルギーであることが示唆されている。加速膨張宇宙を引き起こす理論として修正重力理論が挙げられる。スカラー場を暗黒エネルギーの起源とすると非相対論的物質との結合が予想され、その結合が強いことで太陽系での重力実験において矛盾が生じる。そのためそのような第 5 の力を宇宙の局所領域で抑制する機構の 1 つとしてカメレオン機構が考えだされた。今回はこのカメレオン機構がどのような条件の元で働くのか、また太陽系における重力実験での解析をしていく。

1 Introduction

近年の観測により宇宙は加速膨張していることが示されており、その源は暗黒エネルギーと呼ばれている。しかしその起源は未だに解明されていない。最も一般的な模型とされ、観測との良い整合性を持つ Λ CDM 模型が挙げられるが、宇宙項 Λ の起源を真空のエネルギーとすると、この模型は理論値と観測値に 121 桁もの差が生じてしまう。そのため、 Λ CDM 模型以外にも多くの代替案が考えられており、その 1 つとして重力項を修正することにより加速膨張宇宙の記述を行う修正重力理論が挙げられる。暗黒エネルギーの起源がスカラー場とする模型では、スカラー場は非相対論的物質と結合するために発生する第 5 の力の伝搬が起こることが分かっている。しかし、自然界において確認されている力は 4 つであり、この理論上で発生する第 5 の力は観測からは確認されていないため、この力を宇宙の局所領域で抑制する機構を考える必要がある。

そのような機構の 1 つとして、場の有効質量が周囲の物質の密度に依存して異なることを利用したカメレオン機構が挙げられる。今回はこのカメレオン機構がどのような模型に適用し、場の有効質量の違いにより第 5 の力を抑えるのか見ていく。またそのときのカメレオン機構が働く条件と太陽系での重力実験における解析をしていく。

2 Models

chameleon 機構は $f(R)$ gravity や *Brans–Dicke theory* のようないくつかのスカラーテンソル理論に適用することができる。ポテンシャル $V(\phi)$ におけるスカラー場 ϕ が非相対論的物質と結合している作用は

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{M_{Pl}^2}{2} R - \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right] + \int d^4x \mathcal{L}_m(\psi_m^{(i)}, g_{\mu\nu}^{(i)}) \quad (1)$$

と与えられる。ここで、 $M_{Pl} \equiv (8\pi G)^{-1/2}$ はプランク質量、 R はリッチスカラー、 $\psi^{(i)}$ はアインシュタイン系における計量 $g_{\mu\nu}^{(i)}$ において

$$g_{\mu\nu}^{(i)} = e^{2\beta_i \phi} g_{\mu\nu} \quad (2)$$

と結合している。ここでの β_i は各物質場との結合の強さを表している。(1) 式はスカラーテンソル理論のジョルダン系での作用

$$\tilde{S} = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[-\frac{1}{2} F(\phi) \tilde{R} - \frac{1}{2} (1 - 6\beta^2) F(\phi) (\tilde{\nabla}\phi)^2 - U(\phi) \right] + \int d^4x \mathcal{L}_m(\psi_m, \tilde{g}_{\mu\nu}) \quad (3)$$

と $F(\phi) = e^{-2\beta\phi}$ の状態を考えると、 $\tilde{g}_{\mu\nu} = e^{-2\beta\phi} g_{\mu\nu}$ の共形変換の元で $V(\phi) = U(\phi)/F(\phi)^2$ を与えることでアインシュタイン系における作用を導くことができる。また、(3) 式については *Brans–Dicke*

theory) での作用

$$\tilde{S} = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[-\frac{1}{2} \chi \tilde{R} - \frac{\omega_{BD}}{2\chi} (\tilde{\nabla}\chi)^2 - U(\phi(\chi)) \right] + \int d^4x \mathcal{L}_m(\psi_m, \tilde{g}_{\mu\nu}) \quad (4)$$

に $\chi = F(\phi) = e^{-2\beta\phi}$ と Brans – Dicke parameter ω_{BD} に $3+2\omega_{BD} = 1/(2\beta^2)$ を与えることで得られる. $f(R)$ gravity については (3) 式において $\beta = -1/\sqrt{6}$, つまり $\omega_{BD} = 0$ のときと一致する. このとき非相対論的粒子との結合により第 5 の力はどのように現れるのだろうか. 一般的に粒子の運動は測地線方程式によって表されるのでアインシュタイン系での測地線方程式をみるのが分かり易い. (2) 式を用いて測地線方程式を書き換えると

$$\frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{\beta_i}{M_{Pl}} \left(2\phi_{,\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} + g^{\sigma\rho} \phi_{,\sigma} \right) = 0 \quad (5)$$

となる, 左辺の第 2 項は重力による加速度であり, 第 3 項の部分がスカラー場の寄与による加速度である. この非相対論的粒子との結合によるスカラー場からの第 5 の力を抑える機構がカメレオン機構である.

3 Chameleon mechanism

(1) 式において ϕ の変分をとると

$$\square\phi = V_{,\phi} + \sum_i \frac{\beta_i}{M_{Pl}} e^{4\beta_i\phi/M_{Pl}} g_{(i)}^{\mu\nu} T_{(i)\mu\nu} \quad (6)$$

が得られる. \square は共変ダランベルシアンである. ここで $T_{\mu\nu}^{(i)} = (2/\sqrt{-g})\delta\mathcal{L}_m/\delta g_{(i)}^{\mu\nu}$ であり, i 番目の物質による圧力エネルギーテンソルである. i 番目の物質の軌跡は非相対論的流体として $T^{(i)} \equiv g_{(i)}^{\mu\nu} T_{\mu\nu}^{(i)} = \tilde{\rho}_i$ で与えられ, $\tilde{\rho}_i$ はエネルギー密度である. $\tilde{\rho}_i$ は (1) 式のジョルダン系において示される量である. このエネルギー密度はアインシュタイン系において $\rho_i = \tilde{\rho}_i e^{3\beta\phi}$ と保存される量なので, これを用いることにより (6) 式は

$$\square\phi = V_{,\phi} + \sum_i \frac{\beta_i}{M_{Pl}} \rho_i e^{\beta_i\phi/M_{Pl}} \quad (7)$$

となる. (7) 式を見ると ϕ は右辺の項に依存していることが分かる. よって有効ポテンシャルを

$$V_{eff}(\phi) \equiv V_{,\phi} + \sum_i \frac{\beta_i}{M_{Pl}} \rho_i e^{\beta_i\phi/M_{Pl}} \quad (8)$$

と表す. したがって, 有効ポテンシャルは物質密度と考察するポテンシャル $V(\phi)$ によって決まる. ここで, $V(\phi)$ を単調減少型ポテンシャルと仮定すると有効ポテンシャルが最小値をもつスカラー場 ϕ_{min} の条件は

$$V_{,\phi}(\phi_{min}) + \sum_i \frac{\beta_i}{M_{Pl}} \rho_i e^{\beta_i\phi_{min}/M_{Pl}} = 0 \quad (9)$$

となり, (9) 式の ϕ についての 2 階微分の形をとると

$$m_{min}^2 = V_{,\phi\phi}(\phi_{min}) + \sum_i \frac{\beta_i^2}{M_{Pl}^2} \rho_i e^{\beta_i\phi_{min}/M_{Pl}} \quad (10)$$

となり ϕ_{min} におけるスカラー場の質量 m_{min}^2 が得られる. スカラー場の質量 m^2 は Klein – Gordon equation より Euler – Lagrange equation を導くことにより (10) が場の質量項にあたる事が分かる. ここからは単純化のために各物質の結合の強さ β_i が各物質成分に対して等価として $\beta_i \rightarrow \beta$, 物質密度も各物質成分に対して等価として $\rho_i \rightarrow \rho$, また M_{Pl} を $M_{Pl} = 1$ として扱っていく. 図 1 は (10) 式のグラフ

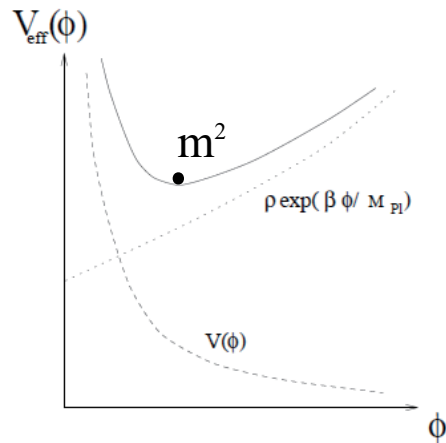


図 1: 有効ポテンシャルの図

であり, m^2 の点がスカラー場の質量となる.

4 The field profile of the chameleon field

ここからは地球のような *compact object* を考えるため静的かつ一様な質量密度で半径 r_c の球対称時空における球体を考えると (7) 式より ϕ についての場の方程式

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} = \frac{dV_{eff}(\phi)}{d\phi} \quad (11)$$

が得られる。 r は考えている球体の中心からの距離であり、球体内部の質量密度を ρ_A 、外側の質量密度は ρ_B としてポテンシャルをそれぞれ ϕ_A, ϕ_B とすると以下の条件が与えられる。

$$V_{,\phi}(\phi_A) + \beta\rho_A e^{\beta\phi_A} = 0 \quad (12)$$

$$V_{,\phi}(\phi_B) + \beta\rho_B e^{\beta\phi_B} = 0 \quad (13)$$

また、ポテンシャル ϕ についての境界条件は

$$\frac{d\phi}{dr}(r=0) = 0, \quad \phi(r \rightarrow \infty) = \phi_B \quad (14)$$

で与えられる。いま半径が r_c 、質量が M_c の球体を考え、球体の中心からの距離 r において $0 < r_1, r_1 < r < r_c, r_c < r$ の 3 つの状態を考える。

$0 < r < r_c$ のとき (11) 式は $\phi = \phi_A$ 周りにおいて $dV_{eff}/d\phi \simeq m_A^2(\phi - \phi_A)$ と近似することができる。(14) の境界条件を課すと

$$\phi(r) = \phi_A + \frac{A(e^{-m_A r} - e^{m_A r})}{r} \quad (0 < r < r_c) \quad (15)$$

となる。

$r_1 < r < r_c$ のとき $|V_{,\phi}| \ll |\beta\rho_A e^{\beta\phi}|$ 近似でき、暗黒エネルギーのポテンシャルの関係より $\beta\phi \ll 1$ なので (14) は

$$\phi(r) = \frac{1}{6}\beta\rho_A r^2 - \frac{C}{r} + D \quad (r_1 < r < r_c) \quad (16)$$

となる。

$r_c < r$ のとき $dV_{eff}/d\phi \simeq m_B^2(\phi - \phi_B)$ と近似でき (14) の境界条件を課すと

$$\phi(r) = \phi_B + E \frac{e^{-m_B(r-r_c)}}{r} \quad (r_c < r) \quad (17)$$

となる。(15),(16),(17) 式中の A, B, C, D, E は $r = r_1, r = r_c$ における $\phi(r), \phi'(r)$ の境界条件より求め

られる。(15),(16),(17) 式は

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \phi_A - \frac{1}{m_A(e^{-m_A r_1} + e^{m_A r_1})} \\ &\times \left[\phi_B - \phi_A + \frac{1}{2}\beta\rho_A(r_1^2 - r_c^2) \right] \\ &\times \frac{e^{-m_A r_1} - e^{m_A r_1}}{r} \quad (0 < r < r_1) \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \phi_B + \frac{1}{6}\beta\rho_A(r^2 - 3r_c^2) + \frac{\beta\rho_A r_1^3}{3r} \\ &- \left[1 + \frac{e^{-m_A r_1} - e^{m_A r_1}}{m_A(e^{-m_A r_1} + e^{m_A r_1})} \right] \\ &\times \left[\phi_B - \phi_A + \frac{1}{2}\beta\rho_A(r_1^2 - r_c^2) \right] \frac{r_1}{r} \\ &\quad (r_1 < r < r_c) \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \phi_B \\ &- \left[r_1(\phi_B - \phi_A) + \frac{1}{6}\beta\rho_A r_c^3 \left(2 + \frac{r_1}{r_c} \right) \left(1 - \frac{r_1}{r_c} \right)^2 \right. \\ &\left. + \frac{e^{-m_A r_1} - e^{m_A r_1}}{m_A(e^{-m_A r_1} + e^{m_A r_1})} \left\{ \phi_B - \phi_A + \frac{1}{2}\beta\rho_A(r_1^2 - r_c^2) \right\} \right] \frac{e^{-m_B(r-r_c)}}{r} \\ &\quad (r > r_c) \quad (20) \end{aligned}$$

と求められる。 r_1 において $m_A^2[\phi(r_1) - \phi_A] = \beta\rho_A$ の境界条件が課せられるので、これを (20) 式に代入することにより球体外部におけるスカラー場 ϕ は

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \phi_B - 2Q\Phi_c r_c \left[1 - \frac{r_1^3}{r_c^3} \right. \\ &\left. + 3\frac{r_1}{r_c} \frac{1}{(m_A r_c)^2} \left\{ \frac{m_A r_1 (e^{m_A r_1} + e^{-m_A r_1})}{e^{m_A r_1} - e^{-m_A r_1}} - 1 \right\} \right] \frac{e^{-m_B(r-r_c)}}{r} \quad (21) \end{aligned}$$

が得られる。ここで球体表面における重力ポテンシャル $\Phi_c = M_c/(8\pi r_c) = \rho_A r_c^2/(6M_{Pl}^2)$ を用いた。有効結合 β_{eff} を

$$\beta_{eff} = \beta \left[1 - \frac{r_1^3}{r_c^3} + 3\frac{r_1}{r_c} \frac{1}{(m_A r_c)^2} \right] \quad (22)$$

$$\times \left\{ \frac{m_A r_1 (e^{-m_A r_1} + e^{m_A r_1})}{e^{-m_A r_1} - e^{m_A r_1}} \right\} \quad (23)$$

として、今まで自然単位系で扱っていた $M_{Pl} = 1$ を M_{Pl} に戻すと

$$\phi(r) = \phi_B - \frac{\beta_{eff}}{4\pi M_{Pl}} \frac{M_c}{r} \quad (24)$$

となる. *fifth force* は結合定数 β を用いて $\mathbf{F} = -\beta\nabla\phi M/M_{Pl}$ より与えられる. ここでの M は試験粒子の質量である. (24) 式より

$$F = 2|\beta\beta_{eff}|\frac{GM_c}{r^2} \quad (25)$$

が導かれる. このとき $|\beta_{eff}| \ll 1$ の場合, *fifth force* が抑えられる機構となる. そのためには球体が *thin-shell* 条件である $\Delta r_c = r_c - r_1 \ll r_c$ と $m_{Ar_c} \ll 1$ を満たさなくてはならないため, これらの 2つの条件はカメレオン機構が働く条件となる. この 2つの条件より

$$\epsilon_{th} \equiv \frac{\phi_B - \phi_A}{6\beta M_{Pl}\Phi_c} \simeq \frac{\Delta r_c}{r_c} + \frac{1}{m_{Ar_c}} \quad (26)$$

が得られ, これを *thin-shell parameters* と呼ぶ. *thin-shell parameters* を用いて (23) 式は

$$\beta_{eff} \simeq 3\beta\epsilon_{th} \quad (27)$$

の近似を得ることができる. (27) 式において $\beta_{eff} \ll \beta$ が得られるので局所重力制限を満たすことができる.

実験から得られる太陽系においての制限を見ていく. 2つの天体間での重力の他にスカラ場による *fifth force* が働いていることを考え, これが観測されないことから観測値からの制限を課すことができる. 太陽や月は地球と同様の条件を満たすので *thin-shell* 条件を満たしていると考え. 月と地球が太陽に対する加速度をそれぞれ a_{moon}, a_{\oplus} とするとこの加速度の差から実験より以下の制限が課せられる.

$$\frac{2|a_{moon} - a_{\oplus}|}{a_{moon} + a_{\oplus}} < 10^{-13} \quad (28)$$

これは重力からのずれを表すパラメータである. ここで地球における *thin-shell parameters* $\epsilon_{th,\oplus}$ の制限は大気圏の厚さ, 地球と大気圏の重力ポテンシャルのオーダー差を考え

$$\epsilon_{th,\oplus} \equiv \frac{\Delta R_{\oplus}}{R_{\oplus}} \equiv \frac{\phi_G - \phi_{atm}}{6\beta M_{Pl}\Phi_{\oplus}} < 10^{-7} \quad (29)$$

と制限することができる. 2つの天体間に重力によるものとスカラ場による 2つの力が働いていると仮定すると, 月と地球が太陽に対しての加速度はそれぞれ

$$a_{\oplus} \simeq \frac{GM_{\odot}}{r^2} \left[1 + 18\beta^2\epsilon_{th,\oplus}^2 \frac{\Phi_{\oplus}}{\Phi_{\odot}} \right] \quad (30)$$

$$a_{moon} \simeq \frac{GM_{\odot}}{r^2} \left[1 + 18\beta^2\epsilon_{th,\oplus}^2 \frac{\Phi_{\oplus}^2}{\Phi_{\odot}\Phi_{moon}} \right] \quad (31)$$

となる. 太陽, 地球, 月の重力ポテンシャルはそれぞれ $\Phi_{\odot} \simeq 2.1 \times 10^{-6}$, $\Phi_{\oplus} \simeq 7.0 \times 10^{-10}$, $\Phi_{moon} \simeq 3.1 \times 10^{-11}$ を用いる. したがって, (28) 式,(29) 式より $\epsilon_{th,\oplus}$ の条件が導かれる.

$$\epsilon_{th,\oplus} < \frac{8.8 \times 10^{-7}}{|\beta|} \quad (32)$$

また, $\Phi_{\oplus} \simeq 7.0 \times 10^{-10}$ および $\phi_{B,\oplus} \gg \phi_{A,\oplus}$ の条件を用いると (32) 式は

$$|\phi_{B,\oplus}| \leq 3.5 \times 10^{-15} M_{Pl} \quad (33)$$

の制限を課することができる.

5 Conclusion

chameleon 機構は $f(R)$ gravity や *Brans-Dicke theory* のようないくつかのスカラテンソル理論に適用すること, また局所領域において重力実験を満たすことが見られた. そのときの *chameleon* 機構が *thin-shell* および有効質量の条件を導きだすことができ, 第 5 の力を抑制する機構を解析することができた. 今後の課題として *chameleon* 機構がどのようなポテンシャルにおいて有効なのか, またそのときの観測からの制限付けを行う.

Reference

- [1] J. Khoury and A. Weltman, Phys. Rev. D 69, 044026 (2004)
- [2] Radouane Gannouji, Bruno Moraes, David F. Mota, David Polarski, Shinji Tsujikawa, Hans A. Winther, Phys.Rev.D82:124006,(2010)[arXiv:1010.3769]
- [3] T. Tamaki and S. Tsujikawa, Phys. Rev. D 78, 084028[arXiv:0808.2284]