

f(R) 理論における加速膨張を与えるモデルの解析

小川 茂樹 (東京理科大学大学院 理学研究科 辻川研究室)

Abstract

Lagrangian がスカラー曲率の関数 $f(R)$ で書かれている $f(R)$ 理論における暗黒エネルギーのモデルを考えた。 $f(R)$ モデルの宇宙論的な振る舞いが $m \equiv Rf_{,RR}/f_{,R}$ 、 $r \equiv -Rf_{,R}/f$ としたときの (r,m) 平面での曲線に対応する。そのことから無次元量を導入しそれらの固定点の安定性からモデルが満たすべき条件を導出したのちに $f(R) = R - \alpha R^n$ (Amendola et al, Li and Barrow)、 $f(R) = (R^b - 2\Lambda)^c$ (Amendola and S. Tsujikawa) の 2 つのモデルがそれらの条件を満たす有効な $f(R)$ モデルかを解析した。

1 Introduction

Ia 型超新星の観測によって、現在の宇宙は加速膨張をしていることが分かった。この加速膨張の源は暗黒エネルギーと呼ばれている。暗黒エネルギーの起源を解明するために様々なモデルが提唱されている。その一つとして、長距離において重力理論が一般相対性理論から変更される修正重力理論がある。その代表的な例としては、Lagrangian がスカラー曲率 R の非線形関数で与えられる $f(R)$ 理論、スカラー場が曲率と直接結合をもつような Brans-Dicke 理論などがある。

今回の研究では $f(R)$ 理論における暗黒エネルギーのモデルを考える。これが満たすべき条件を無次元量を導入しそれらの固定点の安定性から導出した後に $f(R) = R - \alpha R^n$ (Amendola et al, Li and Barrow)、 $f(R) = (R^b - 2\Lambda)^c$ (Amendola and S. Tsujikawa) の 2 つのモデルがそれらの条件を満たす有効な $f(R)$ モデルかを調べていく。

2 Background

空間的に平坦な Friedman-Robertson-Walker 計量はスケール因子 $a(t)$ を用いて以下ようになる。

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= -dt^2 + a^2(t) dx^2 \end{aligned} \quad (1)$$

この計量よりスカラー曲率 R は次式で与えられる。

$$R = 6(2H^2 + \dot{H}) \quad (2)$$

ここで、 $H \equiv \dot{a}/a$ であり、ハッブル膨張率と呼ばれる量である。

$f(R)$ 理論における作用は

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} f(R) + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{\text{rad}} \right] \quad (3)$$

で表される。ここで、 $\kappa^2 = 8\pi G = 1/M_{\text{pl}}^2$ であり、 G は重力定数、 M_{pl} は reduce されたプランク質量で、 \mathcal{L}_m と \mathcal{L}_{rad} は物質と輻射の Lagrangian 密度である。このとき以下の式を得る。

$$3FH^2 = \kappa^2(\rho_m + \rho_{\text{rad}}) + \frac{1}{2}(FR - f) - 3H\dot{F} \quad (4)$$

$$-2F\dot{H} = \kappa^2 \left(\rho_m + \frac{4}{3}\rho_{\text{rad}} \right) + \ddot{F} - H\dot{F} \quad (5)$$

ここで

$$F = \frac{\partial f}{\partial R} \quad (6)$$

であり、 ρ_m 、 ρ_{rad} は物質、輻射のエネルギー密度で連続の方程式を満たす。

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0 \quad (7)$$

$$\dot{\rho}_{\text{rad}} + 4H\rho_{\text{rad}} = 0 \quad (8)$$

いま SNIa 観測を用いたモデルと比較するため (4)、(5) を以下のように書く

$$3F_0H^2 = \kappa^2(\rho_{\text{DE}} + \rho_m + \rho_{\text{rad}}) \quad (9)$$

$$2F_0\dot{H} = -\kappa^2[\rho_m + (4/3)\rho_{\text{rad}} + \rho_{\text{DE}} + p_{\text{DE}}] \quad (10)$$

これより ρ_{BD} 、 p_{BD} は以下のようなる。

$$\kappa^2 \rho_{DE} = \frac{1}{2}(FR - f) - 3H\dot{F} + 3H^2(F_0 - F) \quad (11)$$

$$\kappa^2 p_{DE} = \ddot{F} + 2H\dot{F} - \frac{1}{2}(FR - f) - (2\dot{H} + 3H^2)(F_0 - F) \quad (12)$$

ここで添字の “0” は赤方偏移が $z = 0$ の時の値である。上式で定義した ρ_{DE} と p_{DE} は連続の方程式を満たす。

$$\dot{\rho}_{DE} + 3H(\rho_{DE} + p_{DE}) = 0 \quad (13)$$

このとき暗黒エネルギーの状態方程式は次式で与えられる。

$$w_{DE} \equiv \frac{p_{DE}}{\rho_{DE}} = -1 + \frac{2\ddot{F} - 2H\dot{F} - 4\dot{H}(F_0 - F)}{(FR - f) - 6H\dot{F} + 6H^2(F - f_0)} \quad (14)$$

3 Dynamical equations

一般的な $f(R)$ 模型の考えるために以下の無次元量を導入する。

$$x_1 = -\frac{\dot{F}}{HF} \quad (15)$$

$$x_2 = -\frac{f}{6FH^2} \quad (16)$$

$$x_3 = \frac{R}{6H^2} = \frac{\dot{H}}{H^2} + 2 \quad (17)$$

$$x_4 = \frac{\kappa^2 \rho_{rad}}{3FH^2} \quad (18)$$

$$(19)$$

以上の量より密度パラメータは以下のように与えられる。

$$\Omega_m \equiv \frac{\kappa^2 \rho_m}{3FH^2} = 1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \quad (20)$$

$$\Omega_{rad} \equiv x_4 \quad (21)$$

$$\Omega_{DE} \equiv x_1 + x_2 + x_3 \quad (22)$$

このとき次の運動方程式を得る。

$$\frac{dx_1}{dN} = -1 - x_3 - 3x_2 + x_1^2 - x_1x_3 + x_4 \quad (23)$$

$$\frac{dx_2}{dN} = \frac{x_1x_3}{m} - x_2(2x_3 - 4 - x_1) \quad (24)$$

$$\frac{dx_3}{dN} = -\frac{x_1x_3}{m} - 2x_3(x_3 - 2) \quad (25)$$

$$\frac{dx_4}{dN} = -2x_3x_4 + x_1x_4 \quad (26)$$

ここで $N = \ln a$ 、

$$m \equiv \frac{d \ln F}{d \ln R} = \frac{Rf_{,RR}}{f_{,R}} \quad (27)$$

$$r \equiv -\frac{d \ln f}{d \ln R} = -\frac{Rf_{,R}}{f} = \frac{x_3}{x_2} \quad (28)$$

である。(28) 式よりスカラー曲率 R は x_3/x_2 の関数として表すことができる。また、 m は R に依存するため $m = m(r)$ である。 Λ CDM モデル $f(R) = R - 2\Lambda$ は $m = 0$ に対応するため m は Λ CDM 模型からのずれを表している。有効状態方程式は

$$w_{\text{eff}} \equiv -1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2} = -\frac{1}{3}(2x_3 - 1) \quad (29)$$

いま物質優勢期からの場合を考えると $x_4 = 0$ であり上記の力学系の固定点のうち重要なもの 3 つ書くと

$$P_M : (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{3m}{1+m}, -\frac{1+4m}{2(1+m)^2}, \frac{1+4m}{2(1+m)} \right) \quad (30)$$

このとき $\Omega_m = 1 - \frac{m(7+10m)}{2(1+m)^2}$ 、 $w_{\text{eff}} = -\frac{m}{1+m}$ であり、物質優勢期 ($\Omega_m \simeq 1, w_{\text{eff}} \simeq 0$) は P_M の m を 0 に近づけたときに実現される。 (r, m) 平面においてこの点は $(r, m) = (-1, 0)$ の周りになる。

次に現在の加速膨張は

$$P_A : (x_1, x_2, x_3) = (0, -1, 2) \quad (31)$$

$$P_B : (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{2(1-m)}{1+2m}, \frac{1-4m}{m(1+2m)}, -\frac{(1-4m)(1+m)}{m(1+2m)} \right) \quad (32)$$

に対応している。 P_A は de Sitter 点で $w_{\text{eff}} = -1$ 、 $r = -2$ である。 P_B は $w_{\text{eff}} = \frac{2-5m-6m^2}{3m(1+2m)}$ であり、 $m > (\sqrt{3}-1)/2$ 、 $-1/2 < m < 0$ または $m < -(1+$

$\sqrt{3})/2$ の条件下で加速膨張 ($w_{\text{eff}} < -1/3$) を生じさせる。

上記の固定点の安定性を調べるために時間に依存する線形摂動 $\delta x_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) を考える。 P_M における 3×3 の Jacobian 行列の固有値は

$$3(1 + m'_M), \\ \frac{-3m_M \pm \sqrt{m_M(256m_M^3 + 160m_M^2 - 31m_M - 16)}}{4m_M(m_M + 1)} \quad (33)$$

ここで $r_M \approx 1$ としたときの $m_M \equiv m(r_M)$ 、 $m'_M \equiv \frac{dm}{dr}(r_M)$ である。 $|m_M| \ll 1$ の極限をとったとき $-3/4 \pm \sqrt{-1/m_M}$ となり $m_M < 0$ のモデルでは解は P_M の周り長くどまる事ができない。 $m'_M > -1$ の条件下で P_M は減衰振動の按点に対応している。したがって、解はある時間にはこの点に滞在する事ができその後、加速膨張に向けて出発する。物質時代の按点での存在条件は以下のようになる。

$$m(r) \simeq +0, \quad \frac{dm}{dr} > -1 \quad (34)$$

最初の条件は有効な $f(R)$ モデルは物質優勢期の間には Λ CDM 模型に近づく必要があることを意味している。

P_A における固有値は

$$-3, \quad \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{25 - 16/m_A}}{2} \quad (35)$$

ここで $m_A \equiv m(r = -2)$ である。これより de Sitter 点の安定条件は

$$0 < m(r = -2) \leq 1 \quad (36)$$

であることを表している。物質時代の按点の条件 (34) を満たす P_M から (36) を満たす de Sitter 点 P_A への軌跡は有効なものである。

P_M と P_B は直線 $m = -r - 1$ の上にあるため $m'_M > -1$ から $m'_B < -1$ への軌道のみをとる。これは $m'_B < -1, (\sqrt{3} - 1)/2 < m_B < 1$ の場合のみが実現可能な安定し加速する固定点 P_B であることを表している。

上記の議論よりモデルは次の 2 つのクラスが実現可能である。

•ClassA :

$$P_M(r \simeq -1, m \simeq +0) \text{ to } P_A(r = 2, 0 < m \leq 1)$$

•ClassB :

$$P_M(r \simeq -1, m \simeq +0) \text{ to } P_B(m = -r - 1, (\sqrt{3} - 1)/2 < m < 1)$$

4 Viable $f(R)$ dark energy models

実現可能な $f(R)$ における暗黒エネルギーモデルが満たすべき条件は以下の通りである。

$$f_{,R} > 0, \quad f_{,RR} > 0, \quad \text{for } R \geq R_0 (> 0) \quad (37)$$

1 つ目の条件はゴーストを避けるためのものであり、2 つ目の条件は摂動の安定性のためである。図 1 において Λ CDM 模型は直線 (i) に対応する。(ii) の直線 $m(r) = [(1-c)/c]r + b - 1$ は $f(R) = (R^b - \Lambda)^c$ を表し、ここで $c \geq 1$ と $bc \simeq 1$ である。(iii) の直線 $m(r) = n(1+r)/r$ は $f(R) = R - \alpha R^n$ ($\alpha > 0, 0 < n < 1$) に対応する。これらのモデルは Class A に分類される。(iv) は Class B に分類され $m(r) = -C(r+1)(r^2 + ar + b)$ で表す。ここで $C > 0$ である。いま物質時代から安定した加速への移行をするためには $m'(-1) = -C(1-a+b) > -1$ と $m'(-2) = C(3a-b-8) < -1$ の条件を満たす事が必要である。図 1 ではこれらに対応する 4 つの軌跡をプロットしている。これらのモデルは実現可能な宇宙論のモデルを表す。

5 Conclusion

今回、 Λ CDM 模型からのずれの量である $m = Rf_{,RR}/f_{,R}$ 及び $r = -Rf_{,R}/f$ を導入し固定点の安定性の条件を満たす物質優勢期の点 P_M から加速膨張期 $P_{A,B}$ への軌跡を $f(R)$ 模型である $f(R) = R - \alpha R^n$ ($\alpha > 0, 0 < n < 1$), $f(R) = (R^b - 2\Lambda)^c$ ($bc \approx 1$) で再現することでこれらが $f(R)$ 理論に基づく暗黒エネルギーモデルとして有効であることが分かった。

今後の方針としてはこれらのモデルが赤方偏移空間での物質場の速度ポテンシャルの情報から、物質揺らぎの成長率に対して制限を与える。また、 P_M と $P_{A,B}$ を結ぶ $m(r)$ の曲線は無数に引けることから今回考

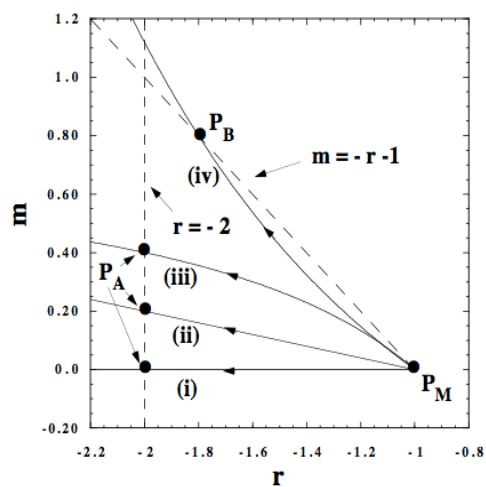


図 1: (r, m) 平面における軌跡

えたモデル以外で同様に考え有効であるか議論していく。

Reference

Amendola, L., Gannouji, R., Polarski, D., and Tsujikawa, S., “Conditions for the cosmological viability of $f(R)$ dark energy models”, *Phys. Rev. D*, 75, 083504, (2007)

L. Amendola, D. Polarski and S. Tsujikawa, *Phys. Rev. Lett.* 98, 131302 (2007)

Antonio De Felice and Shinji Tsujikawa, *Living Rev. Rel.* 13 (2010) 3